

Tìm kiếm & download ebook: [bookilook.com](http://bookilook.com)

Bách Khoa Online: [hutonline.net](http://hutonline.net)



Tìm kiếm & download ebook: [bookilook.com](http://bookilook.com)



## PHẦN MỞ ĐẦU

Cơ học nghiên cứu các quy luật cân bằng và chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực. Cân bằng hay chuyển động trong cơ học là trạng thái đứng yên hay dời chỗ của vật thể trong không gian theo thời gian so với vật thể khác được làm chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Không gian và thời gian ở đây độc lập với nhau. Vật thể trong cơ học xây dựng dưới dạng các mô hình chất điểm, cơ hệ và vật rắn.

Cơ học được xây dựng trên cơ sở hệ tiên đề của Niu tơn đưa ra trong tác phẩm nổi tiếng " Cơ sở toán học của triết học tự nhiên" năm 1687 - chính vì thế cơ học còn được gọi là cơ học Niu tơn.

Cơ học khảo sát các vật thể có kích thước hữu hạn và chuyển động với vận tốc nhỏ hơn vận tốc ánh sáng. Các vật thể có kích thước vĩ mô, chuyển động có vận tốc gần với vận tốc ánh sáng được khảo sát trong giáo trình cơ học tương đối của Anhtan.

Trong các trường đại học kỹ thuật, cơ học làm nền tảng cho các môn học kỹ thuật cơ sở và kỹ thuật chuyên ngành như sức bền vật liệu, nguyên lý máy, động lực học máy, động lực học công trình, lý thuyết tính toán máy nông nghiệp, lý thuyết ô tô máy kéo v.v...

Cơ học đã có lịch sử lâu đời cùng với quá trình phát triển của khoa học tự nhiên, bắt đầu từ thời kỳ phục hưng sau đó được phát triển và hoàn thiện dần. Các khảo sát có tầm quan trọng đặc biệt làm nền tảng cho sự phát triển của cơ học là các công trình của nhà bác học người Ý Galilê (1564- 1642). Galilê đã đưa ra các định luật về chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực, đặc biệt là định luật quán tính. Đến thời kỳ Niuton (1643- 1727) ông đã hoàn tất trên cơ sở thống nhất và mở rộng cơ học của Galilê, xây dựng hệ thống các định luật mang tên ông - định luật Niuton. Tiếp theo Niuton là Đalămbe (1717- 1783), Ôle ( 1707 - 1783) đã có nhiều đóng góp cho cơ học hiện đại ngày nay.

Ole là người đặt nền móng cho việc hình thành môn cơ học giải tích mà sau này Lagorăng, Haminton, Jaccobi, Gaoxơ đã hoàn thiện thêm.

Căn cứ vào nội dung và các đặc điểm của bài toán khảo sát, chương trình cơ học giảng cho các trường đại học kỹ thuật có thể chia ra thành các phần: Tĩnh học, động học, động lực học và các nguyên lý cơ học. Tĩnh học nghiên cứu các quy luật cân bằng của vật thể dưới tác dụng của lực. Động học chỉ nghiên cứu các quy luật chuyển động của vật thể đơn thuần về mặt hình học. Động lực học nghiên cứu các quy luật chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực. Các nguyên lý cơ học là nội dung cơ bản nhất của cơ học giải tích. Cơ học giải tích chính là phần động lực học của hệ được trình bày theo hướng giải tích hoá.

Cơ học là khoa học có tính hệ thống và được trình bày rất chặt chẽ . Khi nghiên cứu môn học này đòi hỏi phải nắm vững các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề, vận dụng thành thạo các công cụ toán học như hình giải tích, các phép tính vi phân, tích phân, phương trình vi phân... để thiết lập và chứng minh các định lý được trình bày trong môn học.

Ngoài ra người học cần phải thường xuyên giải các bài tập để củng cố kiến thức đồng thời rèn luyện kỹ năng áp dụng lý thuyết cơ học giải quyết các bài toán kỹ thuật.

# Phần I

## TĨNH HỌC

### Chương 1

## CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ CỦA TĨNH HỌC LÝ THUYẾT VỀ MÔ MEN LỰC VÀ NGẪU LỰC

### 1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Tĩnh học nghiên cứu các quy luật cân bằng của vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của lực. Trong tĩnh học có hai khái niệm cơ bản là vật rắn tuyệt đối và lực.

#### 1.1.1. Vật rắn tuyệt đối

Vật rắn tuyệt đối là vật thể có hình dạng bất biến nghĩa là khoảng cách hai phần tử bất kỳ trên nó luôn luôn không đổi. Vật thể có hình dạng biến đổi gọi là vật biến dạng. Trong tĩnh học chỉ khảo sát những vật thể là rắn tuyệt đối thường gọi tắt là vật rắn. Thực tế cho thấy hầu hết các vật thể đều là vật biến dạng. Song nếu tính chất biến dạng của nó không ảnh hưởng đến độ chính xác cần có của bài toán có thể xem nó như vật rắn tuyệt đối trong mô hình tính toán.

#### 1.1.2. Lực và các định nghĩa về lực

Lực là đại lượng đo tác dụng cơ học giữa các vật thể với nhau. Lực được biểu diễn bằng đại lượng véc tơ có ba yếu tố đặc trưng: độ lớn (còn gọi là cường độ), phương chiều và điểm đặt. Thiếu một trong ba yếu tố trên tác dụng của lực không được xác định. Ta thường dùng chữ cái có dấu véc tơ ở trên để ký hiệu các véc tơ lực. Thí dụ các lực  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_1$ , ...,  $\vec{N}$ . Với các ký hiệu này phải hiểu rằng các chữ cái không có dấu véc tơ ở trên chỉ là ký hiệu độ lớn của nó. Thí dụ độ lớn của các lực  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}$ , ...,  $\vec{N}$  là  $P$ ,  $F$ , ...,  $N$ . Độ lớn của các lực có thứ nguyên là Niu ton hay bội số Kilô Niu ton viết tắt là (N hay kN).

Sau đây giới thiệu một số định nghĩa:

Bách Khoa Online: [hutonline.net](http://hutonline.net)

**Hệ lực:** Hệ lực là một tập hợp nhiều lực cùng tác dụng lên vật rắn.

**Lực tương đương:** Hai lực tương đương hay hai hệ lực tương đương là hai lực hay hai hệ lực có tác động cơ học như nhau. Để biểu diễn hai lực tương đương hay hai hệ lực tương đương ta dùng dấu tương đương như trong toán học. Thí dụ hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{P}$  tương đương ta viết  $\vec{F} \sim \vec{P}$ . Hai hệ lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  và  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$  tương đương ta viết  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$ .

**Hợp lực:** Hợp lực của hệ lực là một lực tương đương với hệ lực đã cho. Thí dụ nếu có  $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  thì  $\vec{R}$  được gọi là hợp lực của hệ lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ .

**Hệ lực cân bằng:** Hệ lực cân bằng là hệ lực tương đương với không (hợp lực của nó bằng không). Thí dụ: hệ lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  là cân bằng khi  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$ .

## 1.2. HỆ TIỀN ĐỀ CỦA TĨNH HỌC

Tĩnh học được xây dựng trên cơ sở sáu tiên đề sau đây:

**Tiên đề 1:** (Hệ hai lực cân bằng)

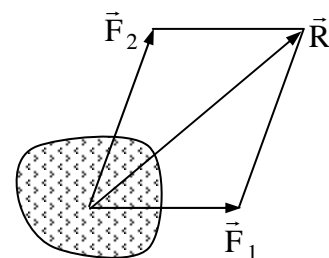
Điều kiện cần và đủ để hai lực cân bằng là hai lực đó có cùng độ lớn, cùng phương, ngược chiều và cùng đặt lên một vật rắn. Ta có  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$  khi  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

**Tiên đề 2 :** (Thêm hoặc bớt một hệ lực cân bằng)

Tác dụng của hệ lực lên vật rắn sẽ không đổi nếu ta thêm vào hoặc bớt đi một hệ lực cân bằng.

**Tiên đề 3:** (Hợp lực theo nguyên tắc hình bình hành)

Hai lực cùng đặt vào một điểm trên vật rắn có hợp lực được biểu diễn bằng đường chéo của hình bình hành mà hai cạnh là hai lực đã cho.



**Hình 1.1**

Hình vẽ 1.1 Biểu diễn hợp lực của hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ . Về phương diện véc tơ có thể viết:  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

**Tiên đề 4:** ( Lực tác dụng tương hỗ)

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai vật rắn có cùng độ lớn, cùng phương nhưng ngược chiều.

**Tiên đề 5:** (Tiên đề hoá rắn)

Một vật không tuyệt đối rắn đang ở trạng thái cân bằng khi hoá rắn nó vẫn giữ nguyên trạng thái cân bằng ban đầu.

**Tiên đề 6:** ( Giải phóng liên kết)

Trước khi phát biểu tiên đề này cần đưa ra một số khái niệm về: Vật rắn tự do, vật rắn không tự do, liên kết và phản lực liên kết.

Vật rắn tự do là vật rắn có khả năng di chuyển theo mọi phía quanh vị trí đang xét. Nếu vật rắn bị ngăn cản một hay nhiều chiều di chuyển nào đó được gọi là vật rắn không tự do. Những điều kiện ràng buộc di chuyển của vật rắn khảo sát gọi là liên kết. Trong tĩnh học chỉ xét liên kết do sự tiếp xúc của các vật rắn với nhau (liên kết hình học). Theo tiên đề 4 giữa vật khảo sát và vật liên kết xuất hiện các lực tác dụng tương hỗ. Người ta gọi các lực tác dụng tương hỗ giữa vật liên kết lên vật khảo sát là phản lực liên kết.

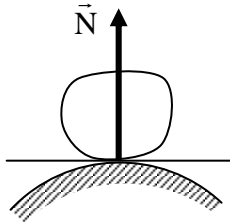
Để khảo sát vật rắn không tự do ta phải dựa vào tiên đề giải phóng liên kết sau đây:

**Tiên đề:** Vật rắn không tự do có thể xem như vật rắn tự do khi giải phóng các liên kết và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng.

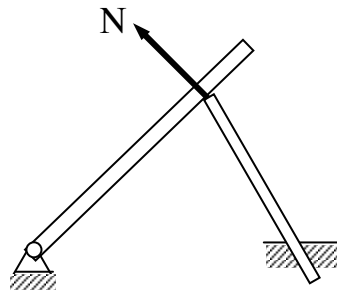
Xác định phản lực liên kết lên vật rắn là một trong những nội dung cơ bản của các bài toán tĩnh học. Sau đây giới thiệu một số liên kết phẳng thường gặp và tính chất các phản lực của nó.

**Liên kết tựa (vật khảo sát tựa lên vật liên kết):** Trong dạng này các phản

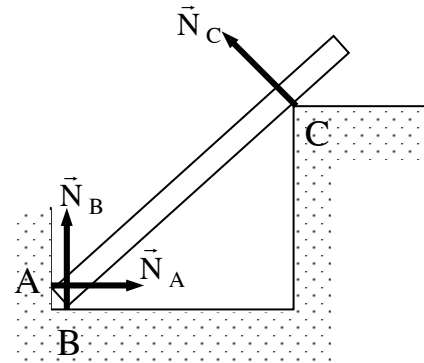
lực liên kết có phương theo pháp tuyến chung giữa hai mặt tiếp xúc. Trường hợp đặc biệt nếu tiếp xúc là một điểm nhọn tựa lên mặt hay ngược lại thì phản lực liên kết sẽ có phương pháp tuyến với mặt tại điểm tiếp xúc. ( Hình vẽ 1.2, 1.3, 1.4).



Hình 1.2



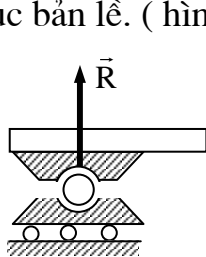
Hình 1.3



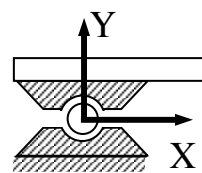
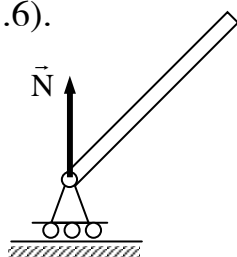
Hình 1.4

Liên kết là khớp bản lề:

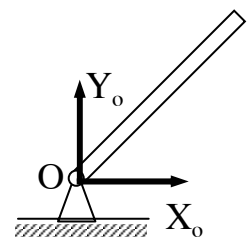
Khớp bản lề di động ( hình 1.5) chỉ hạn chế chuyển động của vật khảo sát theo chiều vuông góc với mặt phẳng trượt do đó phản lực liên kết có phương vuông góc với mặt trượt. Khớp bản lề cố định ( hình 1.6) chỉ cho phép vật khảo sát quay quanh trục của bản lề và hạn chế các chuyển động vuông góc với trục quay của bản lề. Trong trường hợp này phản lực có hai thành phần vuông góc với trục bản lề. ( hình 1.6).



Hình 1.5

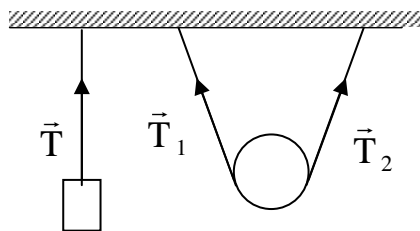


Hình 1.6

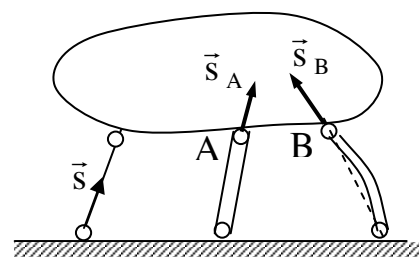


Liên kết là dây mềm hay thanh cứng: (hình 1.7 và hình 1.8)

Các liên kết dạng này chỉ hạn chế chuyển động của vật thể theo chiều dây hoặc thanh. Phương của phản lực liên kết là phương dọc theo dây và thanh.



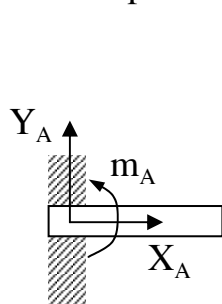
Hình 1.7



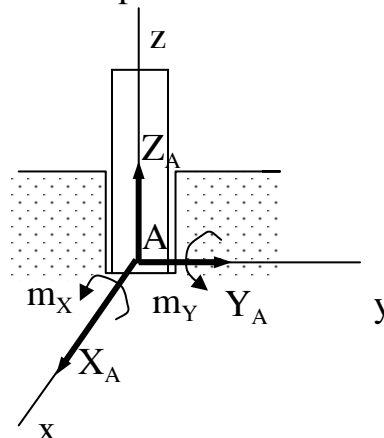
Hình 1.8

Liên kết ngàm (hình 1.9). Vật khảo sát bị hạn chế không những di chuyển theo các phương mà còn hạn chế cả chuyển động quay. Trong trường hợp này phản lực liên kết có cả lực và mô men phản lực. ( Khái niệm mô men lực sẽ được nói tới ở phần sau).

Liên kết là gót trục: ( hình 1.10) Vật khảo sát bị hạn chế các chiều chuyển động theo phương ngang, phương thẳng đứng và chuyển động quay quanh các trục X và Y do đó phản lực liên kết có các thành phần như hình vẽ.



Hình 1.9



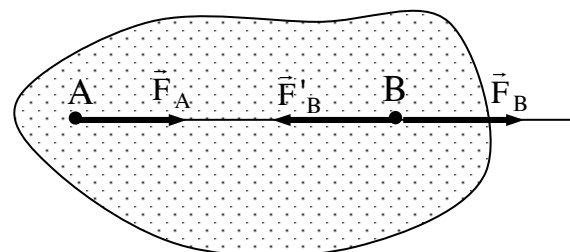
Hình 1.10

Các hệ quả suy ra từ hệ tiên đề tĩnh học.

### Hệ quả 1: ( Định lý trượt lực)

Tác dụng của một lực lên vật rắn sẽ không đổi nếu ta trượt lực đó dọc theo đường tác dụng đến đặt ở điểm khác.

Thật vậy: Cho lực  $\vec{F}$  đặt tại A của vật rắn ( $\vec{F}_A$ ). Ta đặt vào điểm B trên đường



Hình 1.11

tác dụng của  $\vec{F}$  một cặp lực cân bằng ( $\vec{F}_B, \vec{F}'_B$ ) (hình 1.11). Theo tiên đề hai có

thể viết:

$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_B')$ . Ở đây các chỉ số A, B đi theo các lực để chỉ điểm đặt các lực đó, các lực này có độ lớn bằng nhau và cùng phương.

Mặt khác theo tiên đề 1 hai lực  $(\vec{F}_A, \vec{F}_B')$  là cặp lực cân bằng vì thế theo tiên đề hai có thể bớt cặp lực đó trên vật, nghĩa là:

$$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_B') \sim \vec{F}_B$$

Như vậy ta đã trượt lực  $\vec{F}$  ban đầu đặt tại A dọc theo đường tác dụng của nó về đặt tại B mà tác dụng cơ học lên vật rắn vẫn không đổi.

**Hệ quả 2:** Hệ lực cân bằng thì một lực bất kỳ trong hệ lấy theo chiều ngược lại sẽ là hợp lực của các lực kia.

Chứng minh: Cho hệ lực cân bằng  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ . Giả sử ta lấy ở trong hệ một lực  $\vec{F}_1$  và đổi chiều sau đó cho tác dụng lên vật rắn. Xét vật rắn chịu tác dụng của lực  $-\vec{F}_1$ . Theo tiên đề 2 nếu thêm vào vật rắn hệ lực cân bằng đã cho, tác dụng lên vật rắn vẫn không đổi, nghĩa là:

$$-\vec{F}_1 \sim (-\vec{F}_1, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$$

Trong hệ  $(n+1)$  lực ở vế phải có hai lực cân bằng là  $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$  theo tiên đề 2 ta có thể bớt  $\vec{F}_1$ , và  $-\vec{F}_1$  đi nghĩa là:

$$-\vec{F}_1 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_{i-1}, \dots, \vec{F}_{i+1}, \dots, \vec{F}_n)$$

Biểu thức này chứng tỏ  $-\vec{F}_1$  là hợp lực của hệ lực đã cho khi không có  $\vec{F}_1$ .

### 1.3. LÝ THUYẾT VỀ MÔ MEN LỰC VÀ NGẪU LỰC

#### 1.3.1. Mô men lực đối với một tâm và đối với một trục

##### 1.3.1.1. Mô men của lực đối với một tâm

Mô men của lực  $\vec{F}$  đối với tâm O là đại lượng véc tơ, ký hiệu  $\vec{m}_O(\vec{F})$  có:

- Độ lớn bằng tích số:  $F.d$ , với  $F$  là độ lớn lực  $\vec{F}$  và  $d$  là khoảng cách từ tâm  $O$  tới đường tác dụng của  $\vec{F}$  gọi là cánh tay đòn.

- Phương vuông góc với mặt phẳng chứa tâm  $O$  và lực  $F$  (mặt phẳng tác dụng).

- Chiều hướng về phía sao cho khi nhìn từ đỉnh của véc tơ  $\vec{m}_o(\vec{F})$  xuống mặt phẳng tác dụng sẽ thấy véc tơ lực  $\vec{F}$  chuyển động theo chiều mũi tên vòng quanh  $O$  theo ngược chiều kim đồng hồ (hình 1.12).

Dựa vào hình vẽ dễ dàng thấy rằng độ lớn của véc tơ  $\vec{m}_o(\vec{F})$  bằng hai lần diện tích tam giác  $OAB$  ( tam giác có đỉnh  $O$  và đáy bằng lực  $\vec{F}$ ).

Với định nghĩa trên có thể biểu diễn véc tơ mô men lực  $\vec{F}$  đối với tâm  $O$  bằng biểu thức sau:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Trong đó  $\vec{r}$  là véc tơ định vị của điểm đặt của lực  $\vec{F}$  so với tâm  $O$ .

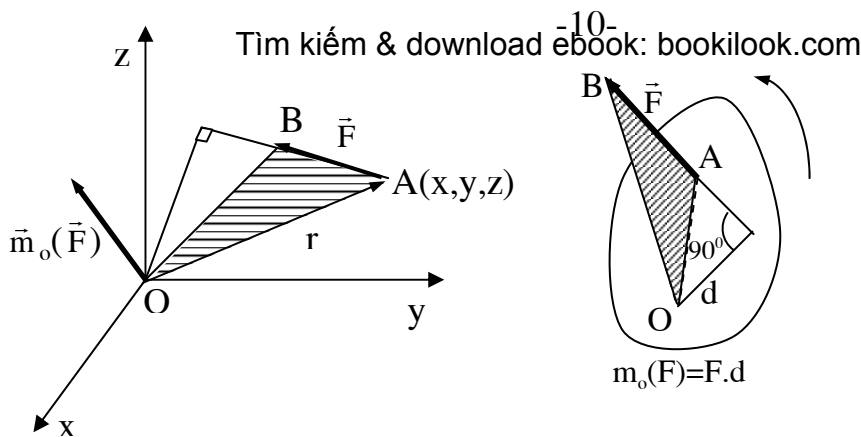
Trong trường hợp mặt phẳng tác dụng của mô men lực đã xác định, để đơn giản ta đưa ra khái niệm mô men đại số của lực  $\vec{F}$  đối với tâm  $O$  như sau:

Mô men đại số của lực  $\vec{F}$  đối với tâm  $O$  là đại lượng đại số ký hiệu:

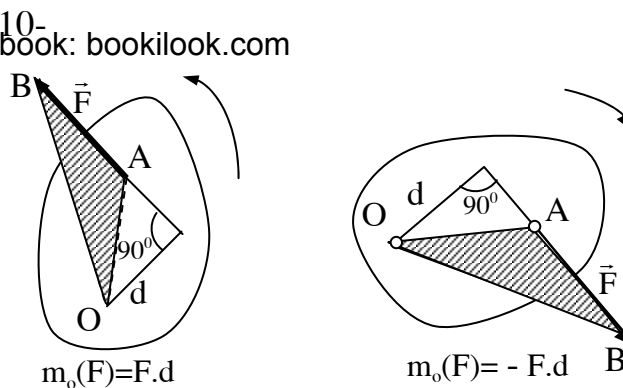
$$m_o = \pm F.d$$

Lấy dấu dương (+) khi nhìn vào mặt phẳng tác dụng thấy lực  $\vec{F}$  quay theo chiều mũi tên vòng quanh  $O$  theo chiều ngược kim đồng hồ (hình 1.13), lấy dấu trừ (-) trong trường hợp quay ngược lại (hình 1.14).

Mô men đại số thường được biểu diễn bởi mũi tên vòng quanh tâm  $O$  theo chiều của mô men.



Hình 1.12



Hình 1.13

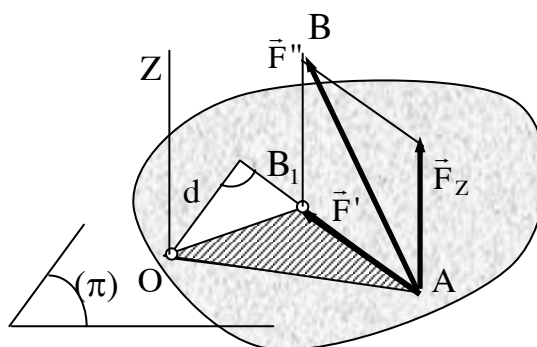
Hình 1.14

### 1.3.1.2. Mô men của lực đối với một trục

Mô men của lực  $\vec{F}$  đối với trục  $OZ$  là đại lượng đại số ký hiệu  $m_Z(\vec{F})$  tính theo công thức:  $m_Z(\vec{F}) = \pm F' \cdot d'$ . Trong đó  $F'$  là hình chiếu của lực  $\vec{F}$  trên mặt phẳng  $\pi$  vuông góc với trục  $Z$ .  $d'$  là khoảng cách tính từ giao điểm  $O$  của trục  $Z$  với mặt phẳng  $\pi$  đến đường tác dụng của  $\vec{F}'$  (hình 1.15).

Lấy với dấu (+) khi nhìn từ hướng dương của trục  $OZ$  sẽ thấy hình chiếu  $F'$  quay quanh trục  $OZ$  ngược chiều kim đồng hồ.

Lấy dấu (-) trong trường hợp ngược lại.



Hình 1.15

Từ hình vẽ ta rút ra trị số mô men của lực  $\vec{F}$  đối với trục  $OZ$  bằng hai lần diện tích tam giác  $OAB_1$ .

### 1.3.1.3. Quan hệ giữa mô men lực $\vec{F}$ đối với tâm $O$ và với trục đi qua $O$

Trên hình 1.16 ta thấy:

$$m_o(\vec{F}) = 2 \cdot \text{diện tích}(\Delta OAB).$$

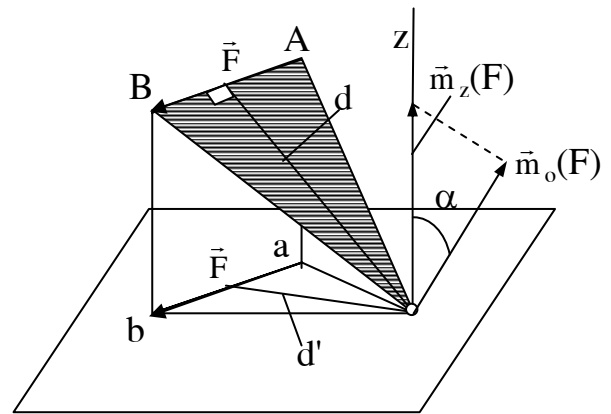
$$m_Z(\vec{F}) = 2 \cdot \text{diện tích}(\Delta Oa_1b_1)$$

Vì  $oa_1b_1$  là hình chiếu của tam giác  $OAB$  trên mặt phẳng vuông góc với trục  $Z$  tại  $O$ . Nếu gọi  $\alpha$  là góc hợp bởi giữa hai mặt phẳng  $OAB$  và mặt phẳng  $oa_1b_1$  thì góc này cũng chính là góc hợp giữa véc tơ mô men  $\vec{m}_O(\vec{F})$  với trục  $OZ$ , ta có:

Diện tích  $\Delta oa_1b_1 =$  diện tích  $\Delta OAB \cdot \cos \alpha$ .

$$\text{hay } m_Z(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}) \cdot \cos \alpha.$$

Kết quả cho thấy mô men của lực  $\vec{F}$  đối với trục  $OZ$  là hình chiếu véc tơ mô men lực  $\vec{F}$  lấy với điểm  $O$  nào đó trên trục  $OZ$  chiếu trên trục  $OZ$  đó.



Hình 1.16

### 1.3.2. LÝ THUYẾT VỀ NGẪU LỰC

#### 1.3.2.1 Định nghĩa và các yếu tố đặc trưng của ngẫu lực

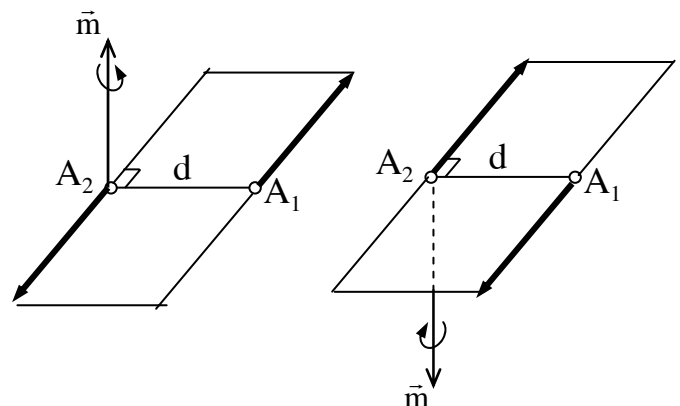
**Định nghĩa:** Ngẫu lực là hệ hai lực song song ngược chiều cùng cường độ.

Hình 1.17 biểu diễn ngẫu lực ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ )

Mặt phẳng chứa hai lực gọi là mặt phẳng tác dụng. Khoảng cách  $d$  giữa đường tác dụng của hai lực gọi là cánh tay đòn. Chiều quay vòng của các lực theo đường khép kín trong mặt phẳng tác dụng gọi là chiều quay của ngẫu lực. Tích số  $m = d \cdot F$  gọi là mô men của ngẫu lực.

Tác dụng của ngẫu lực được đặc trưng bởi ba yếu tố:

- Độ lớn mô men  $m$
- Phương mặt phẳng tác dụng



Hình 1.17

- Chiều quay của ngẫu.

Thiếu một trong ba yếu tố trên tác dụng của ngẫu lực chưa được xác định.

Để biểu diễn đầy đủ ba yếu tố trên của ngẫu lực ta đưa ra khái niệm về véc tơ mô men ngẫu lực  $\vec{m}$ . Véc tơ mô men  $\vec{m}$  có trị số bằng tích số  $d.F$  có phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng, có chiều sao cho nhìn từ nút của nó xuống mặt phẳng tác dụng thấy chiều quay của ngẫu lực theo chiều ngược kim đồng hồ.

Với định nghĩa trên ta thấy véc tơ mô men  $\vec{m}$  của ngẫu lực chính là véc tơ mô men của một trong hai lực thành phần lấy đối với điểm đặt của lực kia. Theo hình 1.17 có thể viết:

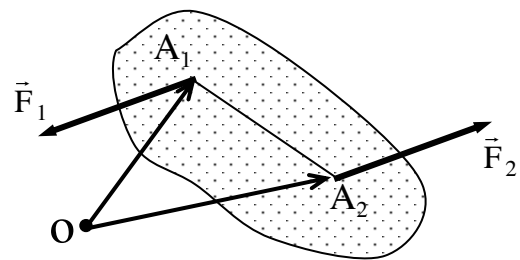
$$\vec{m} = \vec{m}_{A_1}(\vec{F}_2) = \vec{m}_{A_2}(\vec{F}_1) = \vec{A_1A_2} \times \vec{F}_2 = \vec{A_2A_1} \times \vec{F}_1$$

### 1.3.2.2. Định lý về mô men của ngẫu lực

Trong một ngẫu lực, tổng mô men của hai lực thành phần đối với một điểm bất kỳ là một đại lượng không đổi và bằng véc tơ mô men ngẫu lực.

Chứng minh: Xét ngẫu lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  biểu diễn trên hình 1.18. Chọn một điểm O bất kỳ trong không gian, tổng mô men của hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  lấy với O có thể viết:  $\vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) =$

$$\begin{aligned} &= \vec{OA_1} \times \vec{F}_1 + \vec{OA_2} \times \vec{F}_2; \\ &= \vec{OA_1} \times \vec{F}_1 - \vec{OA_2} \times \vec{F}_2; \\ &= (\vec{OA_1} - \vec{OA_2}) \times \vec{F}_1; \\ &= \vec{A_2A_1} \times \vec{F}_1 = \vec{m}. \end{aligned}$$



Hình 1.18

Trong định lý trên vì điểm O là bất kỳ do đó có thể kết luận rằng tác dụng của ngẫu lực sẽ không thay đổi khi ta rời chỗ trong không gian nhưng vẫn giữ nguyên độ lớn, phương chiều của véc tơ mô men  $\vec{m}$ .

Cũng từ định lý trên rút ra hệ quả về các ngẫu lực tương đương sau đây.

**Hệ quả 1:** Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng có cùng trị số mô men  $m$  cùng chiều quay sẽ tương đương.

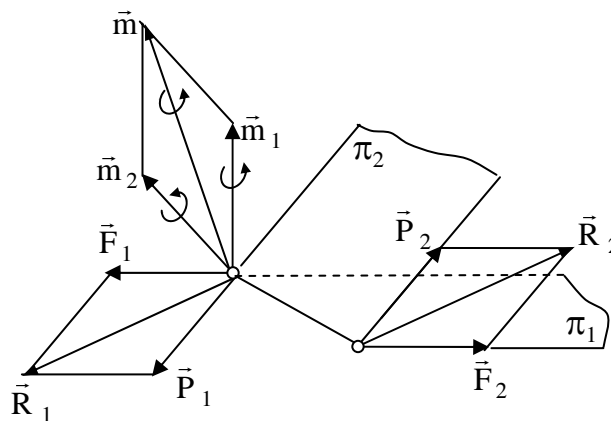
**Hệ quả 2:** Hai ngẫu lực nằm trong hai mặt phẳng song song cùng trị số mô men, cùng chiều quay sẽ tương đương với nhau.

Thật vậy trong hai trường hợp này các ngẫu lực đều đảm bảo có véc tơ mô men  $\vec{m}$  như nhau.

### 1.3.2.3. Hợp hai ngẫu lực

Định lý: hợp hai ngẫu lực có mô men  $\vec{m}_1$  và  $\vec{m}_2$  cho ta một ngẫu lực có mô men  $\vec{M}$  bằng tổng hình học các véc tơ mô men của hai ngẫu lực đã cho. Ta có  $\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$

Chứng minh: Xét hai ngẫu lực có mô men  $\vec{m}_1$  và  $\vec{m}_2$  nằm trong hai mặt phẳng  $\pi_1$  và  $\pi_2$ . Trên giao tuyến của hai mặt phẳng  $\pi_1$  và  $\pi_2$  lấy một đoạn thẳng  $A_1A_2$  ngẫu lực có mô men  $\vec{m}$  thay bằng ngẫu lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  nằm trong mặt phẳng  $\pi_1$  và đặt vào  $A_1A_2$ . Ngẫu lực có mô men  $\vec{m}_2$  thay bằng ngẫu lực  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$  nằm trong mặt phẳng  $\pi_2$  và cùng đặt vào  $A_1A_2$  (hình 1.19).



**Hình 1.19**

Tại  $A_1$  hợp hai lực  $\vec{F}_1, \vec{P}_1$  được lực  $\vec{R}_1$

Tại  $A_2$  hợp hai lực  $\vec{F}_2, \vec{P}_2$  được lực  $\vec{R}_2$

Do tính chất đối xứng dễ dàng nhận thấy hai véc tơ  $\vec{R}_1$  và  $\vec{R}_2$  song song

ngược chiều và có cùng cường độ. Nói khác đi hai lực  $\vec{R}_1$   $\vec{R}_2$  tạo thành một ngẫu lực. Đó chính là ngẫu lực tổng hợp của hai ngẫu lực đã cho.

Gọi  $\vec{M}$  là mô men của ngẫu lực ( $\vec{R}_1$   $\vec{R}_2$ ) ta có:

$$\vec{M} = A_1 A_2 \times \vec{R}_2 = A_1 A_2 \times \vec{R}_1$$

Thay  $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1$  và  $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2$ , suy ra:

$$\vec{M} = A_1 A_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{P}_2) = A_1 A_2 \times \vec{F}_2 + A_1 A_2 \times \vec{P}_2,$$

$$\vec{M} = \vec{m}_{A_1}(\vec{F}_2) + \vec{m}_{A_1}(\vec{P}_2) = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Trường hợp hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng. Khi đó các mô men của ngẫu lực được biểu diễn bởi các mô men đại số. Theo kết quả trên, ngẫu lực tổng hợp trong trường hợp này cũng nằm trong mặt phẳng tác dụng của hai ngẫu lực đã cho và có mô men bằng tổng đại số 2 mô men của ngẫu lực thành phần:  $M = (m_1 \pm m_2)$