

Tìm kiếm & download ebook: [bookilook.com](http://bookilook.com)

Bách Khoa Online: [hutonline.net](http://hutonline.net)



Tìm kiếm & download ebook: [bookilook.com](http://bookilook.com)



Bách Khoa Online: [hutonline.net](http://hutonline.net)

### Chương 3

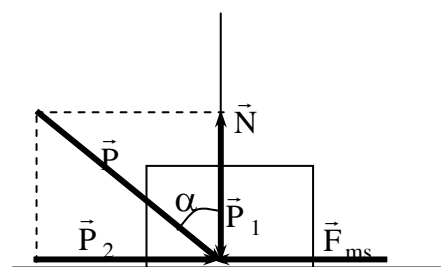
## MA SÁT VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT KHI CÓ MA SÁT

### 3.1. MA SÁT TRƯỢT VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT KHI CÓ MA SÁT TRƯỢT

#### 3.1.1. Ma sát trượt và các tính chất của ma sát trượt

Thực tiễn cho thấy bất kỳ vật nào chuyển động trượt trên bề mặt không nhẵn của vật khác đều xuất hiện một lực cản lại sự trượt của vật gọi là lực ma sát trượt ký hiệu  $\vec{F}_{ms}$ . Làm thí nghiệm biểu diễn trên hình 3.1. Vật A đặt trên mặt trượt nằm ngang và chịu tác dụng của lực  $\vec{P}$  hợp với phương thẳng đứng một góc  $\alpha$ . Phân tích  $\vec{P}$  thành hai thành phần  $\vec{P}_1$  và  $\vec{P}_2$  như hình vẽ. Nhận thấy rằng  $\vec{P}_1$  luôn luôn cân bằng với phản lực pháp tuyến  $\vec{N}$ . Còn lực  $\vec{P}_2$  là lực cân để đẩy vật A trượt trên mặt.

Khi  $\vec{P}$  không đổi ta nhận thấy góc  $\alpha$  tăng thì  $\vec{P}_2$  tăng. Trong giai đoạn đầu vật A đứng yên trên mặt B. Từ điều kiện cân bằng của vật A cho thấy  $\vec{P}_2$  bằng lực ma sát nhưng ngược chiều. Nếu tiếp tục tăng góc  $\alpha$  đến một trị số  $\varphi$  thì vật A bắt đầu trượt. Lực ma sát lúc đó cũng tiến tới giới hạn  $\vec{F}_n$ .



Hình 3.1

$$\text{Trị số } F_n = N \tan \varphi \quad (3.1)$$

Ở đây  $N = P_1$  là phản lực pháp tuyến của mặt trượt. Góc  $\varphi$  gọi là góc ma sát;  $\tan \varphi = f$  gọi là hệ số ma sát. Từ (3.1) có thể kết luận: lực ma sát trượt luôn luôn cùng phương nhưng ngược chiều với chuyển động trượt, có trị số tỷ lệ thuận với phản lực pháp tuyến (áp lực) của mặt trượt.

Hệ số ma sát  $f$  được xác định bằng thực nghiệm, nó phụ thuộc vào vật liệu và tính chất của bề mặt tiếp xúc. Bảng (3-1) cho ta trị số của hệ số ma sát trượt đối với một vài vật liệu thường gặp

Bảng 3-1

Tên vật liệu	Hệ số ma sát
Đá trượt trên gỗ	0,46 ÷ 0,6
Gỗ trượt trên gỗ	0,62
Kim loại trượt trên gỗ	0,62
Đồng trượt trên gang	0,16
Đồng trượt trên sắt	0,19
Thép trượt trên thép	0,15

Lực ma sát xuất hiện trong giai đoạn vật ở trạng thái tĩnh gọi là ma sát tĩnh. Lực ma sát tĩnh tăng từ không đến trị số giới hạn  $F_n = f_0 N$ . Lực ma sát xuất hiện trong giai đoạn vật chuyển động trượt ta gọi là lực ma sát động. Trong trạng thái tĩnh lực kéo (đẩy) vật luôn cân bằng với lực ma sát tĩnh còn trong trạng thái chuyển động lực kéo (đẩy)  $P_2$  vừa phải thắng ma sát động vừa phải dư một phần để tạo ra chuyển động của vật. Nếu gọi lực ma sát động của vật là  $F_{mssd}$  thì  $F_{msd} = f_d N$ , trong đó  $f_d$  gọi là hệ số ma sát động. Qua nhiều thực nghiệm thấy rằng lực ma sát động thường nhỏ hơn một chút so với ma sát tĩnh giới hạn. Hệ số ma sát động không những phụ thuộc vào vật liệu và tính chất bề mặt tiếp xúc của vật mà còn phụ thuộc vào vận tốc trượt của vật. Trong phần lớn các trường hợp cho thấy khi vận tốc tăng thì hệ số ma sát động giảm và ngược lại. Thí dụ hệ số ma sát động giữa bánh đai làm bằng gang với dây đai phanh bằng thép có thể xác định theo công thức:

$$f_d = \frac{1 + 0,0112v}{1 + 0,006v} f_t$$

Trong đó  $v$  là vận tốc trượt tính bằng km/h còn  $f_t = 0,45$  khi mặt tiếp xúc khô và  $f_t = 0,25$  khi mặt tiếp xúc ướt.

Trong tĩnh học vì chỉ xét bài toán cân bằng nên ma sát phải là ma sát tĩnh.

### 3.1.2. Bài toán cân bằng của vật khi chịu ma sát trượt

Xét vật rắn đặt trên mặt tựa (mặt trượt). Giả thiết vật chịu tác dụng của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Các lực liên kết bao gồm phản lực pháp tuyến  $\vec{N}_j$  và lực ma sát  $\vec{F}_{msj}$ .

Khi vật cân bằng ta có hệ lực sau:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{N}_j, \vec{F}_{msj}) \sim 0 \quad j = 1 \dots s \text{ là số bề mặt tiếp xúc}$$

Để vật cân bằng phải có các phương trình cân bằng như đã xét ở chương 2. Ngoài các phương trình cân bằng ra để đảm bảo vật không trượt phải có các điều kiện:

$$F_{nj} \leq f_o N_j. \quad F_{nj} \text{ là lực đẩy tổng hợp.}$$

Trở lại sơ đồ (3.1) ta thấy khi không có trượt thì

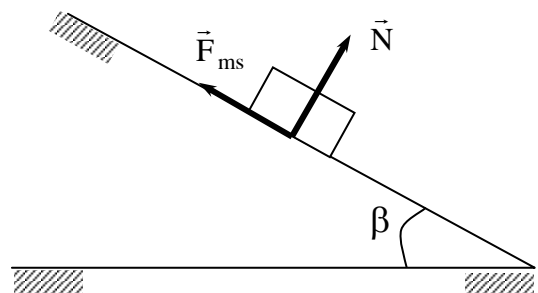
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{ms}}{N} \leq f_o = \operatorname{tg} \varphi$$

Ta có thể phát biểu điều kiện không trượt như sau:

Điều kiện để vật không trượt là hợp lực  $\vec{P}$  tác dụng lên vật nằm trong mặt nón có góc đỉnh  $2\varphi$  (ta gọi nón này là nón ma sát). Khi  $\vec{P}$  nằm trên nón ma sát là lúc sắp xảy ra sự trượt của vật A.

**Thí dụ 3.1:** Xác định điều kiện để cho vật A có trọng lượng  $P$  nằm cân bằng trên mặt nghiêng so với phương ngang một góc  $\beta$ . Hệ số ma sát tĩnh là  $f_o$  (hình 3.2)

**Bài giải:** Xét vật A nằm cân bằng trên mặt nghiêng dưới tác dụng của các lực  $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms})$ . Vì vật có xu hướng trượt xuống nên lực ma sát  $\vec{F}_{ms}$  luôn luôn hướng về phía trên như hình vẽ.



Hình 3.2

Để vật cân bằng phải có:

Bách Khoa Online: hutonline.net

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \sim 0 \text{ và } F_N \leq f_0 N.$$

Giả thiết rằng vị trí đang xét là vị trí giới hạn giữa cân bằng và trượt thì lực ma sát  $F_{ms} = F_n = f_0 N$ . Điều kiện để hệ lực tác dụng lên hệ vật cân bằng là:

$$F_n = N \tan \beta$$

$$\text{Mặt khác vì } F_n \leq N f_0. \text{ Suy ra } \tan \beta \leq f_0.$$

Như vậy điều kiện để cho vật cân bằng phải là  $\tan \beta \leq f_0$ .

Trị số của góc  $\beta = \beta_0$  với  $\tan \beta_0 = f_0$  chính bằng góc ma sát  $\varphi$ .

**Thí dụ 3.2:** Giá treo vật nặng có sơ đồ như hình vẽ 3-3. Vật treo có trọng lượng  $P$ , hệ số ma sát trượt tại các điểm tựa  $A$  và  $B$  là  $f_0$ . Kích thước cho theo hình vẽ. Xác định điều kiện cân bằng cho giá.

Bài giải:

Khảo sát sự cân bằng của giá. Lực tác dụng lên giá ngoài trọng lượng  $\vec{P}$  của vật  $A$  còn có phản lực pháp tuyến và lực ma sát ở điểm tựa  $A$  và  $B$  là:  $\vec{N}, \vec{N}', \vec{F}, \vec{F}'$

Nếu khoảng cách  $l$  là không đổi, điều kiện cân bằng của giá là:

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{N}', \vec{F}, \vec{F}') \sim 0$$

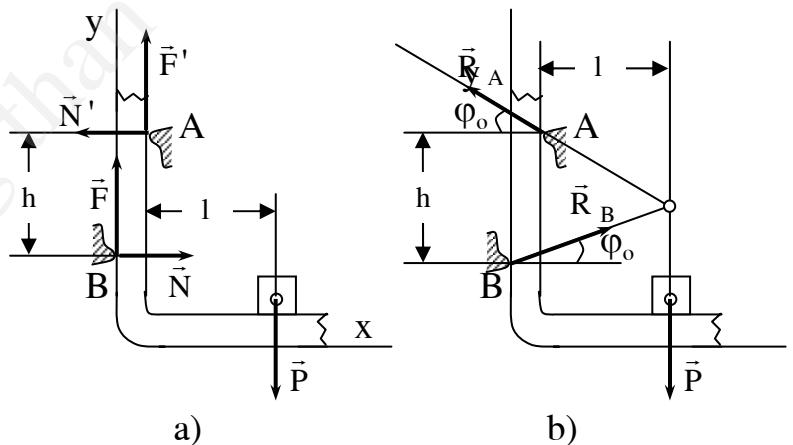
$$\text{và } F \leq f_0 N; F' \leq f_0 N'$$

Tại vị trí giới hạn nghĩa là lúc sắp xảy ra sự trượt của giá trên các điểm tựa ta có phương trình cân bằng như sau:

$$N - N' = 0; \quad (1) \quad F = f_0 N \quad (4)$$

$$F + F' - P = 0 \quad (2) \quad F' = f_0 N' \quad (5)$$

Bách Khoa Online: hutonline.net



**Hình 3.3**

$$N.h - F.d_{gh} - P = 0; \quad (3)$$

Ở đây  $d_{gh}$  là khoảng cách giới hạn của hai điểm tựa A và B cho phép ứng với lúc bắt đầu trượt.

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$N = N' \quad F = F'; \quad P = 2f_o N;$$

$$h = f_o d_{gh} + 2f_o l \text{ hay } d_{gh} = \frac{h}{f_o} - 2l$$

Khoảng cách  $d$  càng lớn áp lực  $N$  càng lớn và ma sát càng lớn, điều kiện cân bằng của giá viết được:

$$d_{gh} \geq \frac{h}{f_o} - 2l$$

**Thí dụ 3.3:** Tìm điều kiện không trượt của dây đai quấn trên bánh đai tròn có kể đến ma sát trượt với hệ số  $f_o$  (hình 3-4), bỏ qua tính đàn hồi của dây đai.

Bài giải:

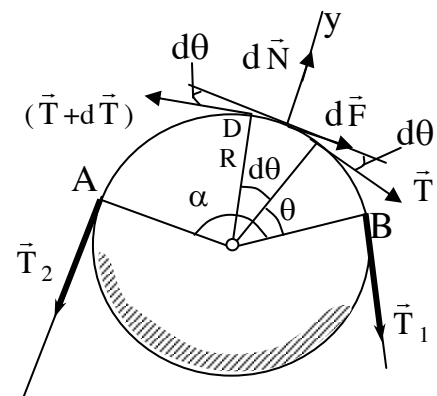
Tìm điều kiện không trượt của dây đai có nghĩa là tìm điều kiện cân bằng của đoạn đai AB của đai dưới tác dụng các lực  $\vec{T}_1, \vec{T}_2$  ( $T_2 > T_1$ ) các phản lực pháp tuyến  $N$  và các lực ma sát trượt  $F$  phân bố liên tục trên cung AB.

Khi dây đai sắp trượt ta xét một cung nhỏ ED trên dây đai. Bên nhánh chủ động có lực tác dụng là  $\vec{T} + \Delta \vec{T}$  còn bên nhánh phụ động lực tác dụng là  $\vec{T}$ . Gọi phản lực pháp tuyến lên cung đai này là  $\vec{N}$  và lực ma sát trượt lên cung này là  $F$  ta sẽ có phương trình cân bằng:

$$-T \cos \frac{d\theta}{2} + (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} - F = 0$$

$$-N - T \sin \frac{d\theta}{2} - (T - dT) = 0$$

Trong đó  $F = f_o N$ . Bỏ qua các vô cùng bé



Hình 3.4

bậc hai trở lên ta được:  $F = dT$  và  $N = Td\theta$ . Thay giá trị trên vào biểu thức  $F = fN$  ta có  $dT = f.T.d\theta$ . Tích phân hai vế tương ứng với cận từ A đến B ta được

$$\ln T \Big|_B^A = f_0 \theta \Big|_B^A \text{ hay } \ln \frac{T_2}{T_1} = f.\alpha$$

$\alpha$  là góc chắn cung AB gọi là góc bao của đai.

$$\text{Suy ra: } T_2 = T_1.e^{f\alpha}$$

Lực kéo bên nhánh chủ động  $T_2$  càng lớn hơn bên nhánh bị động thì khả năng trượt càng nhiều do đó điều kiện để dây không trượt phải là:

$$T_2 \leq T_1.e^{f\alpha}$$

Công thức này được gọi là công thức Ôle

### 3.2. MA SÁT LĂN VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHI CÓ MA SÁT LĂN

Ma sát lăn là mô men cản chuyển động lăn của vật thể này trên vật thể khác.

Xét một con lăn hình trụ bán kính  $R$  trọng lượng  $P$  lăn trên một mặt phẳng ngang, nhờ lực  $\vec{Q}$  đặt vào trục con lăn (xem hình 3.5). Trong trường hợp này con lăn chịu tác dụng của các lực:  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}_{ms}$ . Trong các lực đó hai lực  $\vec{Q}$  và  $\vec{F}_{ms}$  tạo thành một ngẫu lực có tác dụng làm cho con lăn chuyển động lăn. Còn lại hai lực  $\vec{P}$  và  $\vec{N}$  trong trường hợp con lăn và mặt lăn là rắn tuyệt đối thì chúng trùng phương. Trong thực tế con lăn và mặt lăn là những vật biến dạng hai lực  $P$  và  $N$  không trùng phương luôn song song và cách nhau một khoảng cách  $k$ . Hai lực này tạo thành một ngẫu lực có tác dụng cản lại sự lăn của con lăn. Mô men của ngẫu ( $\vec{P}$ ,  $\vec{N}$ ) được gọi là mô men ma sát lăn. Nếu ký hiệu mô men ma sát lăn là  $M_{ms}$  thì  $M_{ms} = kN$ .

Gọi  $k$  là hệ số ma sát lăn. Khác với hệ số ma sát trượt hệ số ma sát lăn  $k$  có thứ nguyên là độ dài.

Hệ số ma sát lăn được xác định bằng thực nghiệm, nó cũng phụ thuộc vào tính chất vật liệu và bề mặt lăn, không phụ thuộc vào lực N. Sau đây là hệ số ma sát lăn của một vài vật thường gặp.

Vật liệu	Hệ số k (cm)
Gỗ lăn trên gỗ	$0,05 \div 0,08$
Thép lăn trên thép	0,005
Gỗ lăn trên thép	$0,03 \div 0,04$
Con lăn thép trên mặt thép	0,001

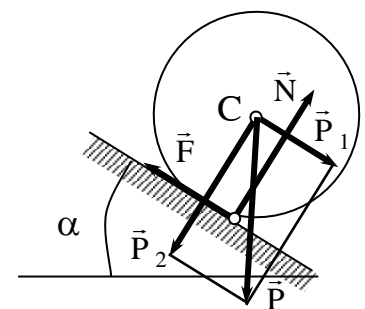


Hình 3.5

Bài toán cân bằng của vật khi có ma sát lăn ngoài điều kiện hệ lực tác dụng lên hệ kể cả các phản lực và lực ma sát cân bằng còn phải thêm điều kiện không có lăn biểu diễn bởi phương trình:

$$M_{ms} \geq Q.R$$

**Thí dụ 3.4:** Tìm điều kiện cân bằng của con lăn trọng lượng P, bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc  $\alpha$ . Cho hệ số ma sát lăn là k. (xem hình 3-6)



Hình 3.6

**Bài giải:**

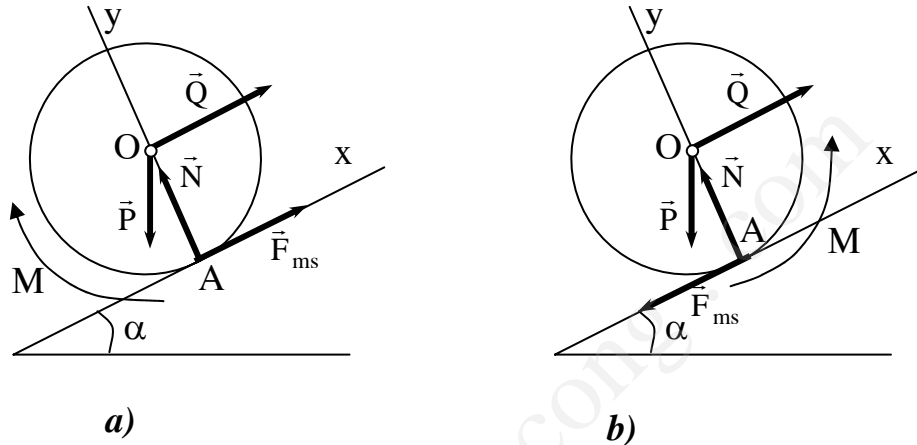
Xét con lăn ở vị trí cân bằng. Phân tích  $\vec{P}$  thành hai lực  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  như hình vẽ (3-6).

Ta có điều kiện để con lăn không lăn là:  $P_1.R = R.P.\sin\alpha \leq P_2.k = P \cos\alpha$

Hay  $R.P.\sin\alpha \leq P.\cos\alpha. \quad \text{tg}\alpha \leq \frac{k}{R}$

Như vậy điều kiện để con lăn cân bằng là:  $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{R}$

**Thí dụ 3.5:** Vật hình trụ có trọng lượng  $P$  bán kính  $R$  nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc  $\alpha$ . Khối trụ chịu tác dụng lực đẩy  $Q$  song song với mặt phẳng nghiêng. Tìm điều kiện khối trụ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng và điều kiện để nó lăn không trượt lên phía trên. Hệ số ma sát lăn là  $k$  và hệ số ma sát trượt là  $f$ .



Hình 3.7

Bài giải:

Điều kiện để khối trụ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng là :

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_{ms}) \sim 0$$

Mặt khác để khối trụ không lăn (hình 3.7a) không trượt xuống phải có thêm điều kiện:

$$M_{ms} \leq k.N; \quad F_{ms} \leq f.N$$

Như vậy phải thỏa mãn các phương trình sau:

$$\sum X_i = Q - P \sin \alpha + F_{ms} = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = -P \cos \alpha + N = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A = P.R.\sin \alpha - Q.R - M_{ms} = 0 \quad (3)$$

$$F_{ms} \leq f.N \quad (4)$$

$$M_{ms} \leq k.N \quad (5)$$

Từ ba phương trình đầu tìm được:

$$N = P \cos \alpha ; \quad F_{ms} = P \sin \alpha - Q ; \quad M_{ms} = R(P \sin \alpha - Q)$$

Thay các kết quả vào hai bất phương trình cuối được:

$$P \sin \alpha - Q \leq f \cdot P \cos \alpha ; \quad R(P \sin \alpha - Q) \leq k \cdot P \cos \alpha$$

$$\text{Hay: } Q \geq P(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$Q \geq P(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha)$$

Thường thì  $\frac{k}{R} < f$  do đó điều kiện tổng quát là:

$$\frac{Q}{P} \geq \sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \geq \sin \alpha - f \cdot \cos \alpha$$

Để vật lăn không trượt lên ( hình 3.7b ) phải có các điều kiện:

$$\sum X_i = Q - P \sin \alpha + F_{ms} = 0; \quad (1')$$

$$\sum Y_i = -P \cos \alpha + N = 0; \quad (2')$$

$$\sum M_A = P \cdot \sin \alpha - Q \cdot R + M_{ms} = 0; \quad (3')$$

$$F_{ms} \leq f \cdot N \quad (4')$$

$$M_{ms} \geq k \cdot N \quad (5')$$

Bất phương trình (4') đảm bảo cho vật chuyển động có trượt lên. Còn bất phương trình (5') đảm bảo cho con lăn có khả năng lăn lên trên.

Từ 3 phương trình đầu ta được:

$$N = P \cos \alpha; \quad F_{ms} = Q - P \sin \alpha ; \quad M_{ms} = R(Q - P \sin \alpha)$$

Thay thế vào hai phương trình cuối ta được:

$$Q - P \sin \alpha \leq f \cdot P \cos \alpha;$$

$$R(Q - P \sin \alpha) \geq k P \cos \alpha.$$

Vậy điều kiện để khối trụ lăn không trượt lên trên là:

$$\sin \alpha + \frac{k}{R} \cos \alpha \leq \frac{Q}{P} < \sin \alpha + f \cos \alpha.$$

Điều này nói chung có thể được nghiệm vì  $\frac{k}{R}$  thường nhỏ hơn  $f$ .