

Chương 9

CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH - CHUYỂN ĐỘNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN

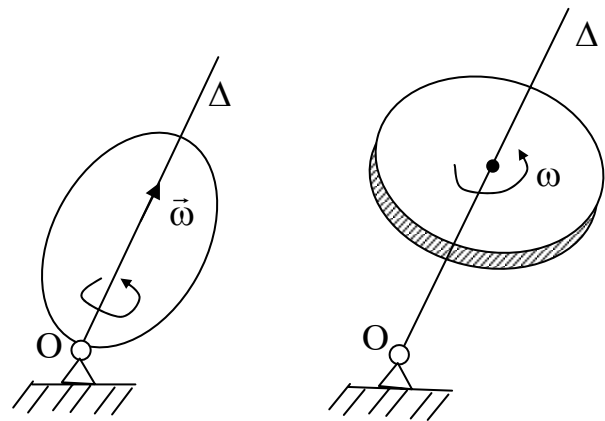
9.1. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

9.1.1 Định nghĩa

Chuyển động của vật rắn có một điểm luôn luôn cố định được gọi là chuyển động quay quanh một điểm cố định

Thí dụ: Con quay tại chỗ, bánh xe ô tô chuyển động khi ô tô lái trên đường vòng; cánh quạt của máy bay khi máy bay lượn vòng .v

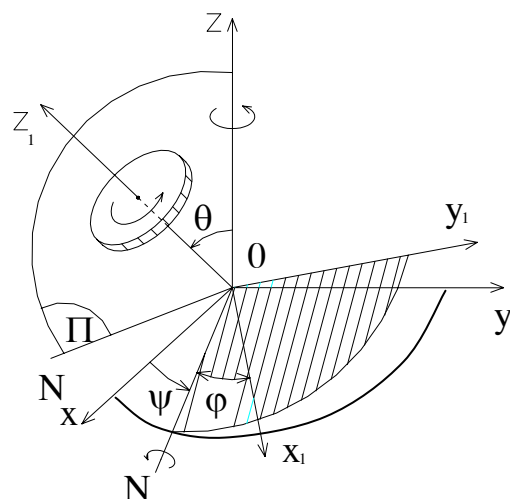
Mô hình nghiên cứu vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định biểu diễn trên hình 9.1.



Hình 9 - 1

9.1.2 Thông số định vị.

Vật rắn quay quanh một điểm cố định có thể biểu diễn bằng tiết diện(S) của vật quay quanh điểm O (hình 9.2). Tiết diện này không đi qua điểm cố định O và chuyển động trong hệ tọa độ cố định Oxyz. Để xác định thông số định vị của vật ta dựng trục oz_1 , vuông góc với tiết diện (S). Dựng mặt phẳng π chứa hai trục oz và oz_1 . Mặt phẳng này cắt mặt phẳng oxy theo đường OD. Vẽ đường thẳng ON vuông góc với mặt



Hình 9-2

phẳng π khi đó có góc $\text{DON} = \frac{\pi}{2}$. Đường ON nằm trong mặt phẳng Oxy và gọi là đường nút.

Để xác định vị trí của vật trong hệ tọa độ $oxyz$ trước hết phải xác định được vị trí của trục oz_1 , nghĩa là phải xác định được các góc θ và α . Tiếp theo phải xác định được vị trí của vật so với trục oz_1 nghĩa là phải xác định được vị trí của nó so với mặt phẳng ONz_1 , nhờ góc $\varphi = \text{NIA}$. Như vậy ta có thể chọn ba góc φ , α và θ là ba thông số định vị của vật., ở đây góc α còn có thể thay thế bằng góc $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ba góc φ , ψ , θ gọi là 3 góc Ôle.

Góc φ gọi là góc quay riêng; góc ψ gọi là góc tiến động và góc θ gọi là góc chương động.

9.1.2.2. Phương trình chuyển động

Trong quá trình chuyển động của vật các góc ôle thay đổi theo thời gian vì thế phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định có dạng:

$$\varphi = \varphi(t).$$

$$\psi = \psi(t). \quad (9.1)$$

$$\theta = \theta(t).$$

Căn cứ vào kết quả trên có thể phát biểu các hệ quả về sự tổng hợp và phân tích chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định như sau:

Hệ quả 9.1: Chuyển động của vật rắn quay quanh 1 điểm cố định bao giờ cũng có thể phân tích thành ba chuyển động quay thành phần quanh ba trục giao nhau tại điểm cố định O. Các chuyển động đó là: chuyển động quay riêng quanh trục Oz_1 với phương trình $\varphi = \varphi(t)$; Chuyển động quay chương động quanh trục ON với phương trình $\theta = \theta(t)$ và chuyển động quay tiến động quanh trục Oz với

phương trình $\psi = \psi(t)$.

Hệ quả 9.2: Tổng hợp hai hay nhiều chuyển động quay quanh các trục giao nhau tại một điểm là một chuyển động quay quanh một điểm cố định đó.

9.1.2.3. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật.

- Vận tốc góc.

Gọi vận tốc góc của các chuyển động quay riêng, quay tiến động và quay chương động lần lượt là ϖ_1 , ϖ_2 và ϖ_3 ta có:

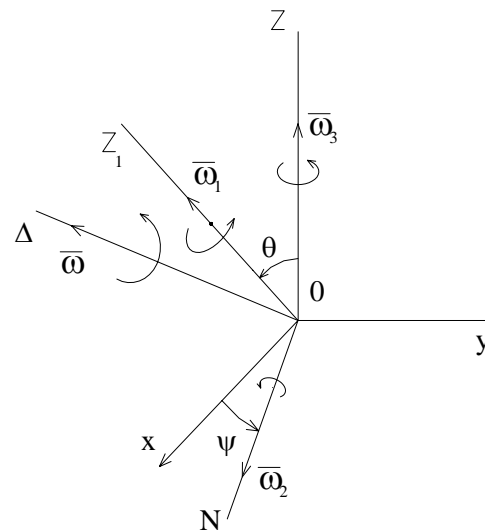
$$\varpi_1 = \dot{\phi} ; \quad \varpi_2 = \dot{\psi} ; \quad \varpi_3 = \dot{\theta}$$

Theo hệ quả 9.2 dễ dàng suy ra vận tốc góc tổng hợp ϖ của vật

$$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 \quad (9.2).$$

Vì các vectơ ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 thay đổi theo thời gian nên ϖ cũng là vectơ thay đổi theo thời gian cả về độ lớn lẫn phương chiều.

Như vậy vectơ ϖ là vectơ vận tốc góc tức thời. Tại một thời điểm có thể xem chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định như là một chuyển động quay tức thời với vận tốc góc ϖ quanh trục quay tức thời Δ đi qua một điểm cố định O. (hình 9.3).



Hình 9-3

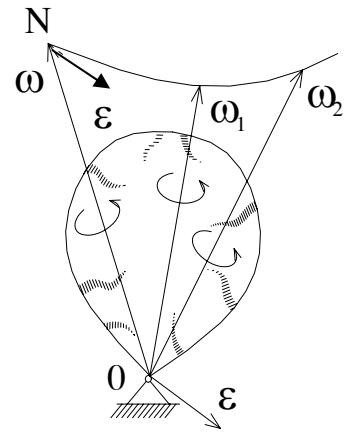
- Gia tốc góc:

Gọi gia tốc góc tuyệt đối $\bar{\epsilon}$ của vật được xác định bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vectơ ϖ

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} \quad (9.3)$$

Về phương diện hình học có thể xác định véc tơ $\vec{\varepsilon}$ như là véc tơ vận tốc của điểm đầu N véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ (hình 9.4).

Xét trường hợp đặc biệt chuyển động quay tiến động đều.



Hình 9-4

Chuyển động của vật rắn quay quanh 1 điểm cố định có chuyển động quay riêng và chuyển động quay tiến động là đều còn chuyển động quay chương động không có, nghĩa là $\varpi_1 = \text{const}$; $\varpi_2 = \text{const}$; $\varpi_3 = 0$

Trường hợp đặc biệt này gọi là chuyển động quay tiến động đều.

Trong trường hợp chuyển động quay tiến động đều vận tốc góc được xác định:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_c \quad (9.4)$$

Và gia tốc góc:

$$\vec{\varepsilon} = V_N \quad \text{với } N \text{ là điểm mút của } \vec{\omega}.$$

Nhưng ở đây theo hình vẽ 9.4 hình bình hành vận tốc góc được gắn với mặt phẳng π (Oz và Oz_1) và quay quanh Oz với vận tốc ϖ_2 (ϖ_c).

Do đó :

$$V_N = \vec{\omega}_c \times ON = \vec{\omega}_c \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_c \times (\vec{\omega}_c \times \vec{\omega}_r) = \vec{\omega}_c \times \vec{\omega}_r$$

nghĩa là trong trường hợp chuyển động quay tiến động đều thì:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_c \times \vec{\omega}_r = \varpi_2 \times \vec{\omega} \quad (9.5).$$

9.1.3. Khảo sát chuyển động của một điểm trên vật

9.1.3.1. Quỹ đạo chuyển động của điểm

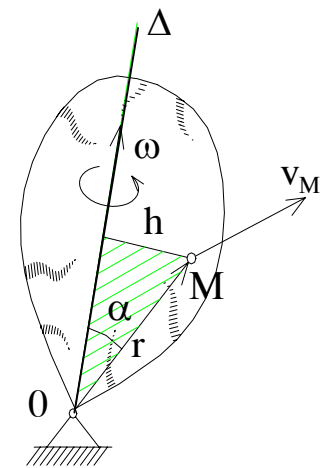
Khi vật chuyển động, vì mọi điểm có khoảng cách tới điểm O cố định là không đổi vì thế quỹ đạo của chúng luôn nằm trên một mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng khoảng cách từ điểm khảo sát tới điểm cố định O. Chính vì thế người ta còn gọi chuyển động quay của một vật quanh một điểm cố định là chuyển động cầu.

9.1.3.2. Vận tốc của điểm

Xét điểm M trên vật. Tại một thời điểm vật có chuyển động quay tức thời với vận tốc góc $\vec{\omega}$ quanh trục quay tức thời Δ đi qua O vì thế vận tốc của điểm M có thể xác định theo biểu thức:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad (9.6)$$

Véc tơ \vec{V}_M hướng vuông góc với mặt phẳng chứa trục Δ và điểm M và có độ lớn $V_M = \omega \cdot h$. Trong đó h là khoảng cách từ điểm khảo sát M đến trục quay tức thời Δ (hình 9.5).

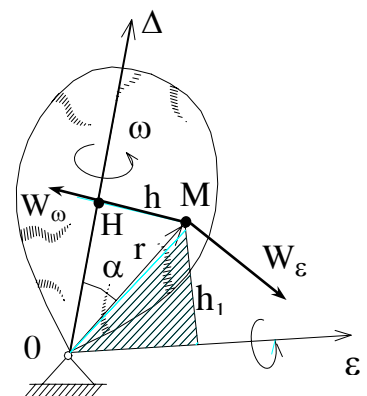


Hình 9-5

9.1.3.3. Gia tốc của điểm

Gia tốc của điểm M trên vật rắn quay quanh một điểm cố định được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{W}_M &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}_M = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) \\ &= \vec{\omega} \times \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$



Hình 9-6

$$= \vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{\varepsilon}_M \times \overrightarrow{OM}$$

$$\text{Đặt } \vec{\omega} \times \overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{W_{\omega M}} \text{ và } \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{W_{\varepsilon M}}$$

Cuối cùng ta được :

$$\overrightarrow{W}_M = \overrightarrow{W_{\omega M}} + \overrightarrow{W_{\varepsilon M}} \quad (9.7)$$

Trong đó: $\overrightarrow{W_{\omega M}}$ hướng từ M về H và có độ lớn $W_{\omega M} = h \cdot \omega^2$; $\overrightarrow{W_{\varepsilon M}}$ hướng vuông góc với mặt phẳng chứa véc tơ $\vec{\varepsilon}$ và điểm M có độ lớn $W_{\varepsilon M} = h_1 \cdot \varepsilon$. Với h_1 là khoảng cách từ điểm M tới véc tơ $\vec{\varepsilon}$.

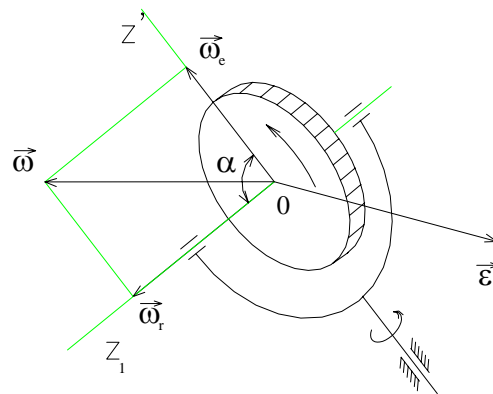
Chú ý: Về hình thức các véc tơ $W_{\omega M}$ và $W_{\varepsilon M}$ giống như gia tốc pháp tuyến \overrightarrow{W}_{nM} và gia tốc tiếp tuyến $\overrightarrow{W}_{\tau M}$ của điểm M khi nó quay quanh trục Δ cố định nhưng thực chất là chúng khác nhau vì ở đây hai véc tơ $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ không trùng phương như trong chuyển động quay quanh một trục cố định.

Thí dụ 9.1: Khảo sát chuyển động quay tiến động đều của con quay có hai bậc tự do cho trên hình vẽ (hình 9 -7). Cho biết chuyển động quay tương đối của con quay quanh trục Oz, có vận tốc góc $\vec{\omega}_r = 200\pi \cdot \frac{1}{s}$ và chuyển động quay kéo theo của trục Oz_1 quanh trục Oz có vận

tốc góc $\omega_c = 2 \pi \frac{1}{s}$. Hai trục Oz và Oz_1 hợp với nhau một góc $\alpha = 30^\circ$. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của con quay.

Bài giải:

Chuyển động của con quay là tổng hợp của 2 chuyển động tương đối và kéo theo. Hai chuyển động này là các chuyển động quay quanh hai trục cắt nhau



Hình 9-7

tại một điểm O cố định. Như vậy chuyển động của con quay là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Ở đây chuyển động tương đối với vận tốc góc ω_r là chuyển động quay riêng $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_r$; còn chuyển động kéo theo với vận tốc ω là chuyển động quay tiến động còn $\bar{\omega}_3 = 0$. Con quay thực hiện chuyển động quay tiến động đều.

Theo (9.4) ta có vận tốc góc tuyệt đối $\bar{\omega} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e$

Véc tơ $\bar{\omega}$ được biểu diễn bằng đường chéo hình bình hành mà hai cạnh là $\bar{\omega}_r$ và $\bar{\omega}_e$.

Vì $\bar{\omega}_r$ hợp với $\bar{\omega}_e$ một góc 30 độ do đó dễ dàng tìm được:

$$\omega^2 = \omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e \cdot \omega_r \cdot \cos 30^\circ$$

$$\text{hay: } \omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e \cdot \omega_r \cdot \cos 30^\circ}$$

- Thay số ta được $\omega = 202 \pi \frac{1}{s}$.

Gia tốc góc tuyệt đối $\bar{\varepsilon}$ được xác định theo (9.5).

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \vec{V}_N = \bar{\omega}_e \times \overline{ON} = \bar{\omega}_e \times \omega_r \\ &= \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_r \end{aligned}$$

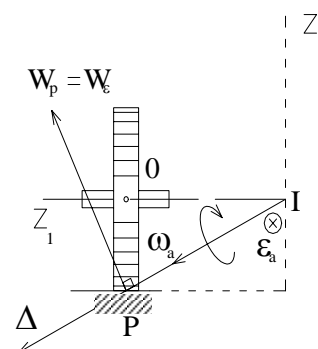
Véc tơ $\bar{\varepsilon}$ hướng vuông góc với mặt phẳng Ozz_1 như hình vẽ và có giá trị:

$$\varepsilon = \omega_e \cdot \omega_r \sin 30^\circ = 200 \pi^2 \cdot \frac{1}{s^2}$$

Thí dụ 9.2: Khảo sát chuyển động của bánh xe ô tô khi nó chuyển động đều trên đường tròn bán kính $R = 10m$.

Cho biết bán kính bánh xe $r = 0,5m$; vận tốc tâm bánh xe (vận tốc ô tô) là $V_0 = 36 \text{ km/h}$.

Xác định vận tốc góc, gia tốc góc



Hình 9-8

tuyệt đối của bánh xe và vận tốc, gia tốc của điểm P trên vành bánh xe (hình 9.8).

Bài giải:

Chuyển động của bánh xe được hợp thành từ hai chuyển động thành phần: Chuyển động quay của bánh xe quanh trục Oz của nó với vận tốc góc $\vec{\omega}_1$ và chuyển động của trục bánh xe Oz_1 quay quanh trục Oz thẳng đứng với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$. Hai trục z và z_1 giao nhau tại điểm cố định I vì thế có thể nói chuyển động tổng hợp của bánh xe là chuyển động quay quanh một điểm I cố định. Trong trường hợp này $\vec{\omega}_1$ là vận tốc góc của chuyển động quay riêng, $\vec{\omega}_2$ là vận tốc góc của chuyển động quay tiến động. Chuyển động quay chương động có vận tốc bằng không.

- Xác định vận tốc góc tuyệt đối $\vec{\omega}$ của bánh xe. Theo công thức (9.2) ta có:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

Vì hai trục quay Iz và Iz_1 luôn luôn vuông góc do đó: $\vec{\omega}_1$ vuông góc $\vec{\omega}_2$.

Mặt khác vì bánh xe lăn không trượt trên đường nên vận tốc điểm P là $V_P=0$.

Suy ra đường IP chính là trục quay tức thời của bánh xe. Căn cứ vào hình vẽ xác định được $\omega_1 = \omega_2 \cdot \cot \alpha$.

$$\text{Trong đó: } \omega_2 = \frac{V_0}{R} \text{ và } \tan \alpha = \frac{r}{R}.$$

$$\text{Và } \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

Thay số tìm được: $\omega_1 = 20$ (1/s), $\omega_2 = 1$ (1/s) và $\omega = 20$ (1/s).

Chuyển động của bánh xe là chuyển động tiến động đều do đó xác định gia tốc góc tuyệt đối như sau:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{V}_N = \vec{\omega}_2 \times \vec{IN} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$$

Về trị số: $\varepsilon = \omega_2 \omega_1 \sin \frac{\bar{u}}{2} = 20 \text{ } 1/s^2$ hướng vào trong và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

- Xác định vận tốc điểm P

Do P nằm trên trục quay tức thời nên vận tốc của nó $V_p = 0$.

- Xác định gia tốc điểm P

Theo (9.7) $\overline{W}_P = \overline{W}_{\omega P} + \overline{W}_{\varepsilon P}$

Vì P nằm trên trục quay tức thời nên $\overline{W}_{\omega P} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = 0$

Còn $\overline{W}_{\varepsilon P}$ hướng vuông góc với mặt phẳng chứa véc tơ $\vec{\varepsilon}$ vào điểm P như hình vẽ với trị số:

$$W_{\varepsilon P} = IP. \varepsilon = 10.20 = 200 \text{ m/s}^2.$$

9.2. CHUYỂN ĐỘNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN (CHUYỂN ĐỘNG TỰ DO CỦA VẬT RẮN)

9.2.1. Phương trình chuyển động

Khảo sát vật rắn chuyển động tự do trong hệ trục tọa độ cố định Oxyz. Để thiết lập phương trình chuyển động của vật ta chọn một điểm A bất kỳ trên vật làm tâm cực và gắn vào vật hệ trục $Ox_1y_1z_1$ có các trục song song với Ox, Oy, Oz. Khi đó vị trí của vật sẽ được xác định bởi vị trí của hệ $Ax_1y_1z_1$ so với hệ Oxyz và vị trí của vật so với hệ di động o x y z. Từ đó suy ra thông số định vị của vật so với hệ Oxyz sẽ là tọa độ x_A, y_A, z_A của điểm A và 3 góc Euler φ, ψ và θ của vật. Suy ra phương trình chuyển động của vật sẽ là:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t) & y_A &= y_A(t) & z_A &= z_A(t) \\ \varphi &= \varphi(t) & \psi &= \psi(t) & \theta &= \theta(t) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Chuyển động tự do của vật luôn luôn có thể phân tích thành 2 chuyển động:

- Tịnh tiến theo một tâm cực A
- Chuyển động quay quanh tâm cực A

9.2.2. Vận tốc và gia tốc của cả vật

Vận tốc của cả vật được biểu diễn qua vận tốc của tâm cực A là \vec{V}_A và vận tốc góc tức thời $\vec{\omega}$ của vật quay quanh trục quay tức thời Δ đi qua cực A.

Tương tự gia tốc của vật cũng được biểu diễn bởi gia tốc của tâm cực A là \vec{W}_A và gia tốc góc tức thời $\vec{\varepsilon}$ trong chuyển động quay tức thời quanh trục quay tức thời đi qua A.

9.2.3. Vận tốc và gia tốc của một điểm trên vật

Xét điểm M bất kỳ trên vật rắn chuyển động tự do. Vận tốc của điểm M sẽ được xác định theo biểu thức: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$. (9.8)

Với \vec{V}_A là vận tốc tâm cực A còn \vec{V}_{MA} là vận tốc của điểm M trong chuyển động quay quanh điểm A. Ta có:

$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$; $\vec{\omega}$ là vận tốc góc tức thời của vật trong chuyển động quay quanh A.

Tương tự gia tốc của điểm M cũng được xác định theo biểu thức:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA} \quad (9.9)$$

Trong đó: $\vec{W}_{MA} = \vec{W}_{MA}^{\omega} + \vec{W}_{MA}^{\varepsilon}$

Với: $\vec{W}_{MA}^{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}$

$$\vec{W}_{MA}^{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{V}_{MA}$$

Cuối cùng ta có:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^{\omega} + \vec{W}_{MA}^{\varepsilon}. \quad (9.10)$$