Chương 12

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học là hệ quả của định luật cơ bản của Niu-Tơn. Nó thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng do chuyển động của chất điểm hay cơ hệ với các đại lượng đo tác dụng của lực.lên chất điểm hay cơ hệ đó. Các định lý tổng quát của động lực học cho phép ta nghiên cứu tính chất quan trọng của chuyển động mà không cần biết chi tiết chuyển động đó. Vì thế nó cho phép ta giải thuận lợi một số bài toán của động lực học đặc biệt là bài toán về động lực học của cơ hệ mà nếu áp dụng phương trình vi phân để giải thì sẽ gặp rất nhiều khó khăn.

12.1. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN.

Khi khảo sát động lực học của cơ hệ người ta phải để ý đến khối lượng của chúng và sự phân bố khối lượng ấy trong không gian. Các đặc trưng liên quan đến phân bố khối lượng của cơ hệ hay vật rắn là khối tâm và mô men quán tính.

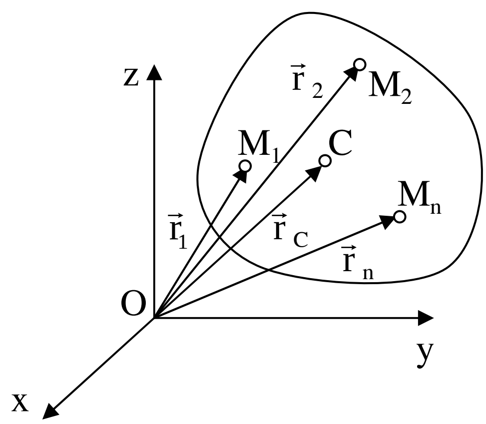
12.1.1. Khối tâm của hệ

Xét hệ N chất điểm M_1, M_2,...M_n có khối lượng m_1, m_2, ...$m_{.N}$. Véc tơ định vị chúng là: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,.... $\vec{r}_N$.(Hình 12.1)   .Ta có định nghĩa sau:

Khối tâm của hệ là điểm C xác định bằng biểu thức:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{M} \quad ; \qquad (12\text{-}1)$$

Với $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$.



Hình 12.1

Chiếu biểu thức (12-1) lên các trục

toạ độ oxyz (hình 10-1) ta được:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{M}$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k y_k}{M} \qquad (12\text{-}2)$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k z_k}{M}$$

Trong đó x_C, y_C, z_C là toạ độ khối tâm C; x_k, y_k, z_k là toạ độ của chất điểm thứ k trong cơ hệ. Trường hợp đặc biệt trong trường trọng lực hệ là vật rắn khối tâm sẽ trùng với trọng tâm của vật.

12.1.2. Mô men quán tính của vật

12.1.2.1. Mô men quán tính của vật đối với một tâm

Mô men quán tính của vật đối với một tâm ký hiệu là J_o bằng tổng các tích số giữa các khối lượng của mỗi chất điểm với bình phương khoảng cách giữa chất điểm đó với điểm O (hình 10-1)

$$J_o = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \qquad (12\text{-}3)$$

12.1.2.2. Mô men quán tính của vật đối với một trục

Mô men quán tính của vật đối với một trục z ký hiệu là J_z bằng tổng các tích khối lượng m_k của mỗi chất điểm trong vật với bình phương khoảng cách d_k từ chất điểm đến trục (hình 12-1).

$$J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2 \qquad (12\text{-}4)$$

Gọi toạ độ các chất điểm M_k trong hệ toạ độ oxyz là x_k,y_k, z_k thì mô men quán tính của hệ đối với các trục toạ độ là ox, oy, oz và đối với gốc toạ độ O viết được:

$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2);$

$J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2);$

$J_z = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2);$ (12-5)

$J_o = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$

Từ đó suy ra:

$J_x + J_y + J_z = J_o.$ (12-6)

Trong kỹ thuật ta tính mô men quán tính của vật đối với một trục theo biểu thức:

$J_z = M.\rho^2$

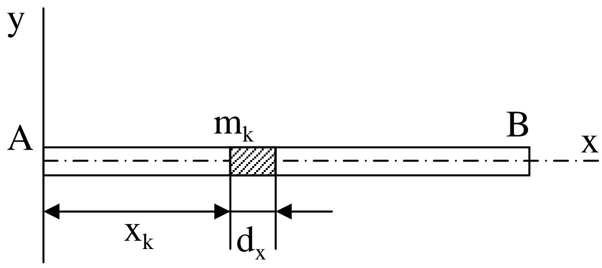
M là khối lượng của vật, ρ gọi là bán kính quán tính của vật với trục z.

12.1.2.3. Mô men quán tính của một số vật đồng chất

- Vật là một thanh mỏng đồng chất

Gọi chiều dài của thanh là l, khối lượng của nó là M. Chọn trục Ax dọc theo thanh (hình 12-2).

Xét một phần tử của thanh có chiều dài dx ở vị trí cách A một đoạn x_R, có khối lượng dm = ρ_1.dx ở đây ρ_1 là khối lượng riêng trên một đơn vị chiều dài của thanh $\rho = M/l$

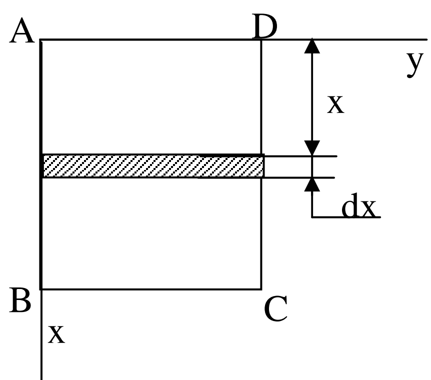


Hình 12-2

Biểu thức mô men quán tính của thanh lấy đối với trục Az vuông góc với thanh tại A là:

$$J_{Az} = \int_0^l x^2 dm = \rho_i \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} Ml^2$$

(127)



Hình 12.3

- Vật là một tấm phẳng hình chữ nhật (hình 12-3)

Gọi các cạnh của hình là a, b, khối lượng của tấm phẳng là M. Chia hình thành nhiều giải nhỏ song song với trục o mỗi giải có bề rộng là dx, có mô men quán tính đối với trục Ax là $J_k = \frac{1}{3}m_k a^2$ (theo hình 12-3)

Trong đó m_k là khối lượng của giải đang xét.

Mô men quán tính của cả hình đối với trục A_x là :

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} J_{kx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} m_k a^2 = \frac{1}{3} a^2 \sum_{k=1}^{n} m_k;$$

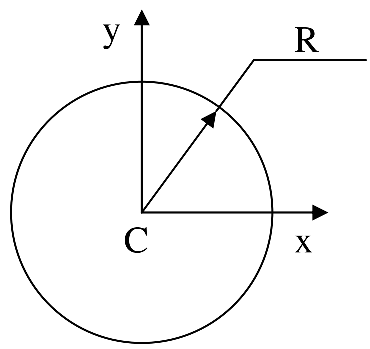
$$J_x = \frac{1}{3} a^2 M \qquad (12\text{-}8)$$

Tương tự suy ra:

$$J_y = \frac{1}{3} b^2 M \qquad (12\text{- }9)$$

- Vật là một vành tròn đồng chất

Gọi bán kính và khối lượng của vành là R và M. Tính mô men quán tính của vành đối với trục Cz vuông góc với mặt phẳng của vành và đi qua tâm C. (hình 12-4).



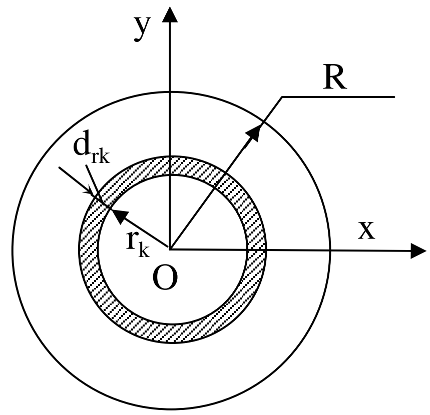
Hình 12.4

Ta có:

$$J_{cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k R^2;$$

$$J_{cz} = R^2 \sum_{k=1}^{n} m_k = MR^2. \qquad (12\text{-}10)$$

Công thức (12-10) cũng dùng để tính mô men quán tính của một ống trục tròn đồng chất đối với trục của nó.



Hình 12.5

- Vật là một tấm phẳng tròn đồng chất

Gọi bán kính và khối lượng của tấm là R và M. Ta có thể tính mô men quán tính đối với trục Cz ký hiệu là J_{cz} và mô men quán tính đối với trục Cx hay Cy trùng với đường kính của nó ký hiệu là J_x, J_y.

Chia tấm thành nhiều vành nhỏ cùng tâm C bán kính mỗi vành thứ k là r_k. Bề rộng của mỗi vành thứ k là dr_k. Khối lượng của lớp vành thứ k là :

$$m_k = \rho.2\pi.r_k.dr_k$$

Trong đó ρ là khối lượng riêng của tấm trên một đơn vị diện tích $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Theo công thức (12-10) mô men quán tính của lớp vành thứ k này đối với trục Cz viết được.

$$J^k_{cz} = m_k r_k^2 = 2\pi\rho.r_k^3 dr_k$$

Mô men quán tính của cả tấm đối với tục Cz viết được:

$$J_{cz} = \sum_{k=1}^{n} J^k_{cz} = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\rho r_k^3 dr_k$$

hay: $J_{cz} = \int_o^R 2\pi\rho r_k^3 dr_k = \dfrac{1}{2}\pi\rho R^4$.

Cuối cùng ta có:

$$J_{cz} = \frac{1}{2} MR^2 \qquad (12\text{-}11)$$

Để tính J_{cz} và J_{cy} ta có nhận xét mọi điểm của tấm có $z_x = 0$, vì thế theo (12-5) viết được:

$$J_{cx} = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2;$$

$$J_{cy} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2;$$

$$J_{cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Từ các biểu thức trên suy ra trong trường hợp này:

$$J_{cz} = J_{cx} + J_{cy}.$$

Do đối xứng nên sự phân bố khối lượng của tấm đối với trục cx và cy hoàn toàn như nhau. Ta có:

$$J_{cx} = J_{cy} = J_{cz}/2 = MR^2/4. \qquad (12\text{-}11)$$

Công thức (10-11) cũng có thể tính mô men quán tính cho vật là một trục tròn đồng chất đối với trục của nó.

12.1.2.4. Mô men quán tính đối với các trục song song.

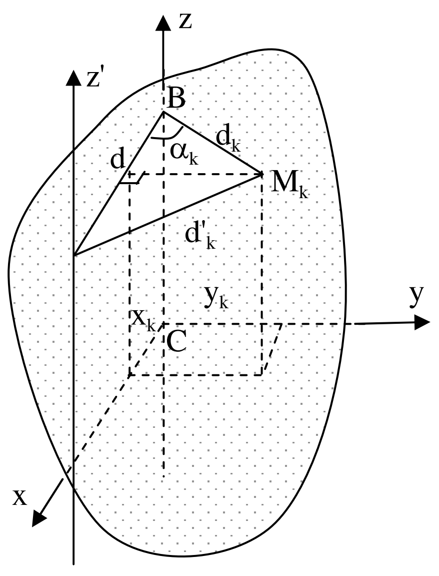
-***Định lý Huy-Ghen***: Mô men quán tính của một vật đối với một trục z_1 nào đó bằng mô men quán tính của nó đối với trục z song song với trục z_1 đi qua khối tâm của vật cộng với tích khối lượng của vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

$$J_{z1} = J_{cz} + Md^2 \qquad (12\text{-}12)$$

<u>Chứng minh</u>:

Theo định nghĩa $J_{z1} = \sum m_k d'^2_k$ (a)

Kẻ trục cz song song với z_1 và đi qua khối tâm c (hình 12-6)



Hình 12.6

Ta có:

$$d'^2_k = d_k^2 + d^2 - 2d_k d\cos\alpha_k.$$

Gọi toạ độ của điểm M_k là x_k, y_k, z_k.

$x_k = d_k\cos\alpha_k$ suy ra:

$$d'^2_k = d_k^2 + d^2 - 2dx_k$$

Thay kết quả vào biểu thức (a) sẽ được:

$$J_{z1} = \sum m_k(d_k^2 + d^2 - 2x_k d) = \sum m_k d_k^2 + \sum m_k d^2 - 2\sum m_k dx_k),$$

trong đó: $\sum m_k d_k^2 = J_{cz}$;

$\sum m_k d^2 = Md^2$ còn $\sum m_k dx_k = d\sum m_k x_k = dMx_C$

Do gốc toạ độ trùng với khối tâm c nên $x_C = 0$.

Do đó: $\sum m_k dx_k = 0$ Cuối cùng được: $J_{z1} = J_{cz} + Md^2$.

Định lý đã được chứng minh.

12.2. ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM

12.2.1. Định lý động lượng

12.2.1.1. Động lượng của chất điểm và của hệ

Động lượng của chất điểm là một đại lượng véc tơ ký hiệu là $\vec{k}$ bằng tích giữa khối lượng và véc tơ vận tốc của chất điểm.

$$\vec{k} = m\,\vec{v}. \tag{12-14}$$

Động lượng của hệ là đại lượng véc tơ ký hiệu $\vec{K}$ bằng tổng hình học động lượng các chất điểm trong hệ.

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} \vec{k}_k = \sum_{k=1}^{n} m_v \vec{v}_k. \tag{12-15}$$

Đơn vị đo động lượng là kgm/s

Ta cũng có thể biểu diễn động lượng của hệ qua khối lượng và vận tốc khối tâm của hệ.

Từ (12-1) suy ra:

$\sum m_k \vec{r}_k = M\,\vec{r}_c$.

Đạo hàm hai vế theo thời gian nhận được:

$\sum m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_o$.

Động lượng của hệ bằng tích giữa khối lượng và véc tơ vận tốc khối tâm của hệ.

12.2.1.2. Xung lượng của lực (xung lực)

Lực tác dụng trong một khoảng thời gian nhỏ bé dt thì đại lượng véc tơ đo bằng tích giữa lực với khoảng thời gian vô cùng bé đó là xung lượng phần tử của lực $\vec{F}$ ký hiệu là $d\vec{s} = \vec{F}.dt$. (12-17)

Nếu lực $\vec{F}$ tác dụng trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_o đến t thì đại lượng véc tơ tính bằng tích phân các xung lực phần tử trong khoảng thời gian đó gọi là xung lượng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian từ t_o đến t và ký hiệu là $\vec{s}$.

$$\vec{s} = \int_{to}^{t} d\vec{s} = \int_{to}^{t} \vec{F}dt \qquad (12\text{-}18)$$

Theo (10-18) nếu lực $\vec{F}$ = const thì:

$$\vec{s} = \vec{F}.\tau$$

ở đây $\tau = t - t_o$

12.2.1.3. Định lý động lượng

Đinh lý 12.1: Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng hợp lực các lực tác dụng lên chất điểm.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (12\text{-}19)$$

Chứng minh: Xét chất điểm có khối lượng m chuyển động với vận tốc v dưới tác dụng của hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,... $\vec{F}_n$). Phương trình cơ bản viết cho chất điểm:

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Thay $\vec{W} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ vào biểu thức trên sẽ được:

$$m\vec{W} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Định lý được chứng minh.

Biểu thức (12-19) thực chất là phương trình cơ bản viết dưới dạng động lượng cho chất điểm.

Định lý 12.2: Biến thiên động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian từ t_o đến t_1 bằng tổng hình học xung lượng của các lực tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian đó.

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_o = \sum_{k=1}^{n}\int_{to}^{t1}\vec{F}_k dt = \sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k \qquad (12\text{-}20)$$

Chứng minh: Từ phương trình (10-19) suy ra:

$$d(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n}\int_{to}^{t1}\vec{F}_k dt$$

Tích phân hai vế phương trình này tương ứng với các cận tại t_o và t_1 sẽ có:

$$\int_{mvo}^{mv1} d(m\vec{v}) = \int_{to}^{t1}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{to}^{t1}\vec{F}dt;$$

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_o = \sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k$$

Định lý đã được chứng minh.

Định lý 12.3: Đạo hàm theo thời gian động lượng của hệ bằng véc tơ chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ke} \qquad (12\text{-}21)$$

Chứng minh: Xét hệ gồm N chất điểm. Ký hiệu hợp ngoại lực và hợp nội lực đặt lên chất điểm thứ k là $\vec{F}_{ke}$ và $\vec{F}_{ki}$.

Phương trình cơ bản của động lực học viết cho chất điểm đó là:

$$m_k(\vec{W}_k) = \vec{F}_{ke} + \vec{F}_{ki} \qquad (a)$$

Viết cho N chất điểm của hệ ta sẽ có N phương trình (a) nghĩa là k = 1...N

Cộng vế với vế của N phương trình trên với nhau ta sẽ được:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ke} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ki}$$

Theo định luật Niu Tơn các lực tác dụng tương hỗ bằng nhau về độ lớn, cùng phương nhưng ngược chiều vì vậy tổng hình học các nội lực (các lực tác dụng tương hỗ của các chất điểm trong hệ) luôn luôn bằng không.

Ta có: $\sum \vec{F}_{ki} = 0$

Còn lại:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ke}$$

Thay $\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt}\vec{K},$

Ta có: $\frac{d}{dt}\vec{K} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ke}$.

Định lý đã được chứng minh.

Đinh lý 12.4: Biến thiên động lượng của hệ trong khoảng thời gian từ t_o đến t_1 bằng tổng hình học xung lượng các ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{ke} \qquad (12\text{-}22)$$

Chứng minh:

Từ phương trình (12-10) suy ra:

$$d\vec{k} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ke} dt$$

Tích phân hai vế biểu thức này tương ứng với các cận tại thời điểm đầu và cuối sẽ được:

$$\int_{ko}^{k1} dk = \int_{to}^{t1} \sum \vec{F}_{ke} dt = \sum \int_{to}^{t1} \vec{F}_{ke} dt\,;$$

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_o = \sum \vec{s}_{ke}\ .$$

Định lý đã được chứng minh.

Chý ý rằng các biểu thức (10-19); (10-20), (10-21) và (10-22) là các biểu thức véc tơ, nếu chiếu các biểu thức này lên ba trục toạ độ oxyz ta sẽ được các biểu thức hình chiếu tương ứng phản ánh sự biến thiên động lượng của chất điểm và hệ theo hướng các trục toạ độ.

Định luật bảo toàn động lượng của hệ

Từ biểu thức (12-21) suy ra:

Khi $\sum \vec{F}_{ke} = 0$ thì K = const.

Khi $\sum X_k = 0$ thì K_x = const.

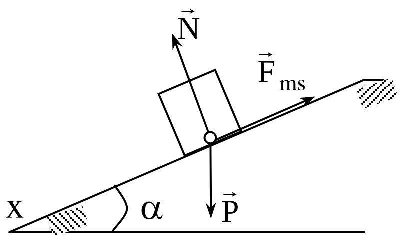
Nghĩa là khi véc tơ chính của ngoại lực hoặc tổng hình chiếu của các ngoại lực lên một trục nào đó bằng không thì động lượng của hệ hoặc hình chiếu động lượng của hệ lên trục đó bảo toàn.

Cuối cùng chú ý rằng trong các biểu thức không có nội lực điều này chứng tỏ nội lực không có tác dụng làm thay đổi động lượng của một hệ.

Thí du 12-1: Một hạt ngũ cốc có trọng lượng P trượt trong rãnh nằm nghiêng một góc α so với phương ngang. Biết hệ số ma sát giữa các hạt và rãnh là f, vận tốc ban đầu của hạt là v_o. Tính xem sau bao lâu thì vận tốc hạt tăng lên gấp đôi. (hình 12-7)

Bài giải

Xem hạt như một chất điểm. Lực tác dụng lên hạt gồm trọng lượng P, lực ma sát F_{ms} và phản lực pháp tuyến N.



Hình 12.7

Viết biểu thức hình chiếu lên trục ox của định lý động lượng ta có:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_o = \sum x_i = \int_0^t (P\sin\alpha - F_{ms})dt$$

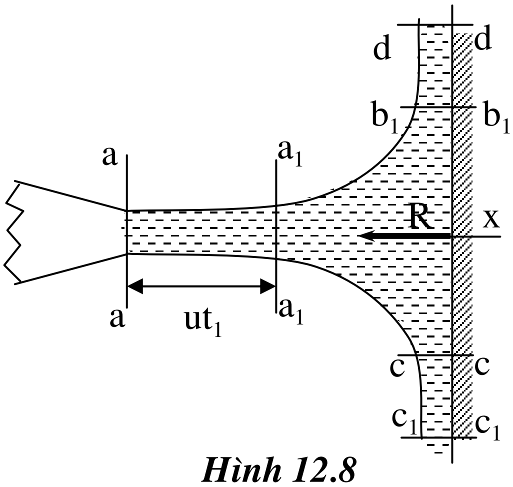
$\dot{x}_1 = v$; $\dot{x}_0 = v_o$; $F_{ms} = P.\cos\alpha.f$ ta có:

$mv - mv_o = (P\sin\alpha - fP\cos\alpha)t$.

Khi $v = 2v_o$ thì thời gian cần thiết là:

$$t = \frac{mv_o}{mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha} = \frac{v_o}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

<u>Thí du 12-2</u>: Nước chảy ra từ một vòi với vận tốc u = 10m/s và đập thẳng góc vào một tường chắn (hình 10-8). Đường kính miệng vòi d = 4cm. Xác định áp lực của nước lên tường. Lấy khối lượng riêng của nước là $\rho = 1000kg/m^3$



Hình 12.8

<u>Bài giải</u>:

Xét chuyển động của khối nước aabc (xem hình vẽ 12.8). Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm:

Trọng lượng P, hợp lực của áp lực tại mặt cắt của khối nước và áp lực do phản lực của tường lên nước.

Theo biểu thức (12-22) ta có:

$$k_{1x} - k_{ox} = \sum S_{kk} \qquad \text{(a)}$$

Giả thiết sau thời gian t_1 khối nước chuyển đến vị trí $a_1a_1b_1c_1$. Từ hình vẽ ta thấy phần nước có ảnh hưởng đến sự biến đổi động lượng của khối nước lên phương x là phần nằm trong đoạn aa_1. Vì vậy có thể thấy:

$$k_{1x} - k_{ox} = -mu$$

ở đây m là khối lượng của phần nước nằm trong đoạn aa_1

$$m = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi d^2}{4}ut_1$$

Còn $\sum S_x$ là xung lực của các lực tác dụng lên khối nước theo phương x.

Nếu gọi các hợp lực theo phương x này là R_x ta sẽ có:

$$\sum S_{kx} = R_x t_1 = Rt_1.$$

Thay vào biểu thức (a) các kết quả tìm được sẽ có:

$mu = Rt_1$

R =

Như vậy ta tìm được áp lực của nước lên tường cũng bằng R = 12,8kN có phương vuông góc với tường theo chiều hướng vào mặt tường.

12.2.2. Định lý chuyển động của khối tâm

- **Định lý 12.5**:Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng của cả hệ dưới tác dụng của lực bằng véc tơ chính của hệ các ngoại lực tác dụng lên hệ.

$$M\vec{W}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{ke} \qquad (12\text{-}23)$$

Chứng minh: Xét cơ hệ N chất điểm có khối lượng là m_1, m_2, ...m_N chuyển động dưới tác dụng của hệ ngoại lực $\vec{F}_{1e}$, $\vec{F}_{2e}$, ... $\vec{F}_{Ne}$ và hệ các nội lực $\vec{F}_{1i}$, $\vec{F}_{2i}$, ... $\vec{F}_{Ni}$. Ở đây $\vec{F}_{ke}$ và $\vec{F}_{ki}$là hợp lực của ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k.

Phương trình chuyển động viết cho hệ là:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ke} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ki} \qquad (a)$$

Mặt khác từ công thức xác định khối tâm của hệ ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C$$

Lấy đạo hàm theo thời gian hai vế được:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\vec{r}}{dt} = M\frac{d^2 r_C}{dt} \quad \text{hay} \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{W}_k = M\vec{W}_C$$

Thay vào biểu thức (a) ở trên và lưu ý rằng $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ki} = 0$ ta có:

$$M\vec{W}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ke}.$$

Định lý được chứng minh.

Từ phương trình véc tơ (12-21) khi chiếu lên các trục toạ độ oxyz ta được phương trình vi phân chuyển động của khối tâm viêt dưới dạng sau:

$$M\frac{d^2X_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} X_k \; ; \; M\frac{d^2Y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \; ; \; M\frac{d^2Z_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} Z_k \, . \qquad (12\text{-}22)$$

- Định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm:

Từ biểu thức (12-21) suy ra:

Nếu $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0$ thì $W_c = 0$ và $v_c = const$.

Nghĩa là: nếu véc tơ chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không thì chuyển động khối tâm của hệ được bảo toàn. Đây là định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm.

Tương tự từ biểu thức (12-20) suy ra:

Nếu $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0$ thì $W_x = 0$ và $v_x = const$.

Nghĩa là nếu tổng hình chiếu các ngoại lực tác dụng lên hệ lên một trục x nào đó bằng không thì chuyển động của khối tâm theo trục x đó được bảo toàn. Đây là định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm theo một trục.

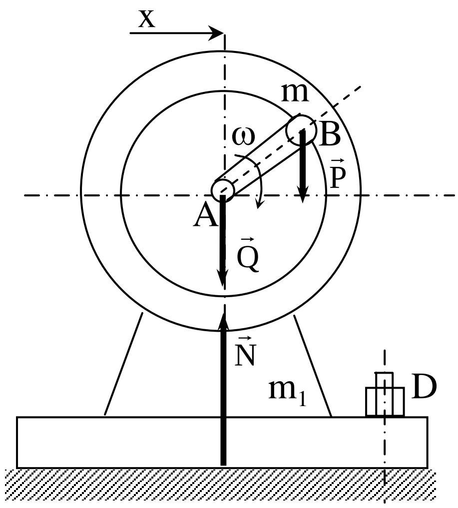
Chú ý trong các định lý về chuyển động của khối tâm không đề cập đến nội lực vì vậy có thể kết luận nội lực không làm thay đổi chuyển động của khối tâm.

Sau đây là một vài ví dụ vận dụng định lý chuyển độngcủa khối tâm và định luật bảo toàn chuyển động của khối lượng.

Thí du 12-3:

Trọng tâm phần quay của động cơ điện đặt lệch tâm so với trục quay A một đoạn AB =a. Trọng lượng của phần quay là P, trọng lượng của vỏ động cơ (phần không quay) là Q. (hình 12-9)

Tìm quy luật chuyển động của phần vỏ động cơ trên sàn nằm ngang. Cho biết vận tốc góc ϖ của phần quay không đổi. Nếu ta cố định vỏ động cơ trên sàn bằng bu lông D thì lực cắt lên bu lông được xác định như thế nào. Coi ma sát giữa nền và động cơ không đáng kế.



Hình 12.9

<u>Bài giải</u>:

1. Khi động cơ để tự do trên sàn. Ngoại lực tác dụng gồm trọng lượng P và Q của động cơ, phản lực pháp tuyến N của sàn lên động cơ. Các lực này đều vuông góc với sàn nên có:

$\sum X_k = 0$. Theo định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm ta có $v_{ox} =$ const. Lúc đầu động cơ đứng yên nên suy ra x_o = const.

Chọn hệ toạ độ sao cho khi ở thời điểm t nào đó góc quay $\varphi = \omega t$ còn các điểm A và B có các toạ độ tương ứng sau:

$x_A = x$; $x_B = x + a\sin\varphi$.

ta có: $x_C = \dfrac{Qx + P(x + a\sin\varphi)}{Q + P} = 0$

Hay: $Qx + Px + Pa\sin\varphi = 0$

Suy ra $x = \dfrac{P.a.s\sin\varphi}{P + Q}$

Đây chính là phương trình chuyển động dao động ngang của vỏ động cơ trên sàn quanh vị trí ban đầu.

2. Khi cố định động cơ trên sàn bằng bu lông D.

Gọi R_x là lực cắt bu lông theo phương ngang ta có phương trình vi phân chuyển động của khối tâm:

$$m\frac{d^2x_c}{dt^2} = R_x;$$

$$\text{ở đây : } x_c = \frac{Qx_A + Px_B}{P+Q}.$$

Vì vỏ động cơ cố định nên x_A = const = 0 còn $x_B = a\sin\varphi$.

Ta có:

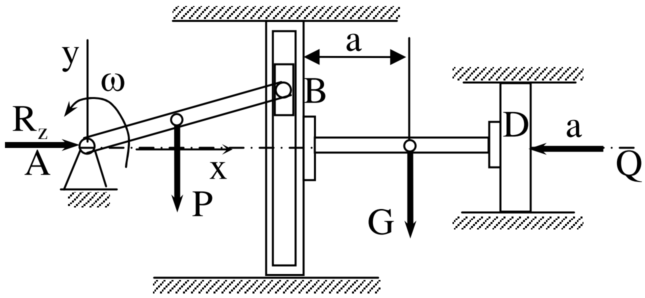
$$R_x = M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \frac{P+Q}{g}\frac{P}{P+Q}a\omega^2\sin\omega t;$$

$$R_x = -\frac{P}{g}a\omega^2\sin\omega t;$$

Đây là lực do bu lông tác dụng lên động cơ, ngược lại động cơ cũng tác dụng một lực cắt bu lông bằng trị số nhưng ngược chiều với R_x.

Lực cắt này sẽ lớn nhất khi $\sin\omega t = 1$ và bằng $Pa\omega^2/g$, tương ứng với góc quay $\varphi = 90^0$.

<u>Thí du 12-4</u>: Tay quay AB có chiều dài r có trọng lượng P quay đều với vận tốc góc ω và truyền chuyển động cho cu lít gắn liền với pít tông D có trọng lượng chung là G. Pít tông D chịu tác động lực Q theo phương ngang (hình 12-10). Xác định phản lực R_x lên gối đỡ A theo phương ngang. Cho biết khoảng cách từ trọng tâm chung của culít và pít tông đặt cách cu lít một đoạn a.



Hình 12.10

<u>Bài giải:</u>

Xét cơ hệ gồm tay quay AB và cụm cu lít pít tông. Bỏ qua ma sát ở các mặt trượt, ngoại lực tác dụng lên hệ gồm : trọng lượng $\vec{P}$ và $\vec{G}$, phản lực tại gối đỡ $\vec{R}_A$. Các phản lực pháp tuyến ở mặt trượt $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ và lực $\vec{Q}$. Các lực $\vec{P}$, $\vec{G}$,

$\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ vuông góc với mặt ngang nên phương trình vi phân chuyển động khối tâm của hệ theo phương ngang viết được:

$$M\frac{d^2X_c}{dt^2} = R_x - Q, \qquad \text{ở đây: } Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2,$$

$$m_1 = \frac{P}{g}, \quad x_1 = \frac{r}{2}\cos\omega t \quad ; \quad m_2 = \frac{G}{g}; \qquad x_2 = a\ r\cos\omega t$$

Suy ra: $$Mx_c = \frac{P}{g}\frac{r}{2}\cos\omega t + \frac{G}{g}(a + r\cos\omega t)$$

Thay vào biểu thức ta được: $$R_x = Q + M\frac{d^2X_o}{dt^2};$$

Hay : $$R_x = Q - \frac{r\omega^2}{g}(\frac{P}{2} + G)\cos\omega t.$$

Đây chính là phản lực theo phương ngang tại gối đỡ A. Phản lực này có trị số cực đại bằng:

$$R_x = Q + \frac{r\omega^2}{g}(\frac{P}{2} + G) \qquad \text{khi } \varphi = \omega t = 180^0$$

12.3. ĐỊNH LÝ MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG

Trong phần này sẽ khảo sát mối quan hệ giữa đại lượng đo chuyển động quay là mômen động lượng với đại lượng đo mô men lực.

12.3.1. Mô men động lượng

Mô men động lượng của một chất điểm lấy đối với tâm O hay đối với trục z là đại lượng ký hiệu l_o hay l_z bằng mô men của véc tơ động lượng chất điểm ấy lấy đối với tâm O hay trục z đó. Ta có:

$$\vec{l}_o = \vec{m}_o(m.\vec{v}) = \vec{r}xm.\vec{v}; \qquad (12\text{-}23)$$

$$l_z = m_z(m.\vec{v}) = \pm m.v'.h \qquad (12\text{-}24)$$

Trong các biểu thức (12-23), (12-24) thì m là khối lượng, $\vec{v}$ là vận tốc chất điểm, v' là hình chiếu của $\vec{v}$ trên mặt phẳng vuông góc với trục z. Biểu thức (12-24) lấy dấu + khi nhìn từ chiều dương của trục z sẽ thấy v' có chiều quay vòng quanh z theo chiều ngược chiều kìm đồng hồ và lấy dấu - trong trường hợp ngược lại.

Tương tự như mô men lực dễ dàng suy ra rằng:

$$\left[\vec{l}_o\right]_z = \left[\vec{m}_o(m.\vec{v})\right]_z = m_z.(m.\vec{v}) = l_z.$$

Nghĩa là: hình chiếu trên trục z véc tơ mô men động lượng của chất điểm lấy đối với một điểm trên trục bằng mô men động lượng của chất điểm đối với trục đó.

Nếu biểu diễn mô men động lượng của chất điểm đối với 3 trục toạ độ oxyz là hàm theo toạ độ và hình chiếu của các tọa độ lên các trục ta có:

$$\vec{l} = \vec{m}_o(m.\vec{v}) = \vec{r}xm.\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mx & my & mz \end{vmatrix} = m(yz\text{-}zy)\,\vec{i} + m(zx\text{-}xz)\,\vec{j} + m(xyx)\,\vec{k};$$

$$l_o = l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}. \qquad \text{Suy ra :}$$

$$l_x = m(yz\text{-}zy);$$
$$l_y = m(zx\text{-}xz); \qquad (12\text{-}25)$$
$$l_z = m(xy\text{-} yx).$$

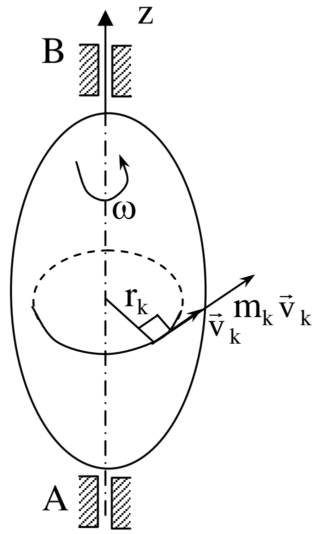
Đối với một hệ ta có các định nghĩa sau:

Mô men động lượng của hệ đối với một tâm hay một trục là tổng mô men động lượng của các chất điểm trong hệ lấy đối với tâm hay trục đó. Ký hiệu mô men động lượng của hệ đối với tâm O và đối trục z là l_o và l_z ta có:

$$\vec{l}_o = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_o(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k x m_k \vec{v}_k; \qquad (12\text{-}26)$$

$$l_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kz} = \sum_{k=1}^{n} \pm m_k k_k v'_k \qquad (12\text{-}27)$$

Khi hệ là vật rắn quay quanh một trục z với vận tốc góc ω (hình 12-11) ta có:



Hình 12.11

$l_{kz} = \pm r^2_k m_k \omega$.

Gọi $\pm\omega = \omega_z$ ta có :

$l_{kz} = r^2_k m_k \omega_z$.

Thay vào biểu thức (12-27) ta có:

$$l_z = \sum_{k=1}^{n} l_{zk} = \sum_{k=1}^{n} r^2_k m_k \omega_z = \omega_z . \sum_{k=1}^{n} m_k r^2_k .$$

Thay $\sum_{k=1}^{n} m_k r^2_k = J_z$ ta được:

$J_z = J_z . \omega_z$

Thường người ta chọn hướng dương của trục quay để $\omega_z = \omega$ khi đó ta có:

$l_z = J_z . \omega$ (12-28)

12.3.2. Định lý mô men động lượng

<u>Đinh lý 12-6</u>: đạo hàm bậc nhất theo thời gian mô men động lượng của chất điểm lấy đối với một tâm hay đối với một trục bằng tổng hình học hay tổng đại số mô men của các lực tác dụng lên chất điểm lấy đối với tâm (hay trục đó).

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_o(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i); \qquad (12\text{-}29)$$

$$\frac{d}{dt} m_z(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i); \qquad (12\text{-}29)$$

Chứng minh: Giả thiết chất điểm chịu tác dụng của các lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, .. \vec{F}_n$. Phương trình cơ bản của động lực học viết được:

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Ta có thể biến đổi thành: $\dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_i$.

Nhân hữu hướng hai vế biểu thức trên với véc tơ định vị $\vec{r}$ nối từ tâm o tới chất điểm và lưu ý rằng:

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} xm.\vec{v} = \vec{v}xm\vec{v} = 0$ và $\vec{r}\, xm\ \vec{v} = \vec{m}_o(m\ \vec{v})$ ta có :

$$\vec{r}\,x\,\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r}\,\frac{d(m\vec{v})}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} xm\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r}xm\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}\vec{F}_i \ .$$

Biểu thức (12-29) đã được chứng minh.

Chiếu biểu thức (12-29) lên trục z ta sẽ được biểu thức (12-30).

<u>Định lý 12-7</u>: đạo hàm theo thời gian mô men động lượng của hệ đối với một tâm hay một trục bằng tổng mô men của các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với tâm (hay trục đó).

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_o = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_{ke}); \qquad (12\text{-}31)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_z(\vec{F}_{ke}); \qquad (12\text{-}32)$$

Chứng minh: Xét cơ hệ có N chất điểm. Tách một chất điểm thứ k để xét. Gọi m_k, $\vec{v}_k$ là khối lượng và vận tốc của nó; gọi $\vec{F}_{ki}$, $\vec{F}_{ke}$ là nội lực và ngoại lực tác dụng lên chất điểm. Áp dụng biểu thức (12-29) cho chất điểm này ta có:

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_{ok} = \vec{m}_o(\vec{F}_{ki}) + \vec{m}_o(\vec{F}_{ke}).$$

Cho k từ 1 đến N ta được hệ phương trình dạng trên. Nếu cộng vế với vế hệ phương trình trình trên ta được:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{l}_{ok} = \sum_{k=1}^{N}\vec{m}_o(\vec{F}_{ki}) + \sum_{k=1}^{N}\vec{m}_o(\vec{F}_{ke}).$$

trong đó:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{l}_{ok}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{ok}=\frac{d}{dt}\vec{l}_{o}.$$

Còn $\sum_{k=1}^{N}\vec{m}_o\left(\vec{F}_{ki}\right)=0$ (theo tính chất của nội lực)

cuối cùng $\frac{d}{dt}\vec{l}_o=\sum_{k=1}^{N}\vec{m}_o\left(\vec{F}_{ke}\right)$

Ta dã chứng minh được biểu thức (12-31)

Chiếu biểu thức (12-31) lên trục z sẽ được biểu thức (12-23).

Định lý 12-7 đã được chứng minh.

Chú ý: Nội lực không có trong định lý 12-7 nên có thể nói rằng nội lực không làm thay đổi mô men động lượng của hệ.

12.3.3. Định luật bảo toàn mô men động lượng

Từ biểu thức (12-31) và (12-32) ta thấy

khi $\sum\vec{m}_o(\vec{F}_{ke})=0$ thì $\vec{l}_o=\text{const}$

khi $\sum_{k=1}^{n}m_z(\vec{F}_{ke})=0$ thì $l_z=\text{const}$

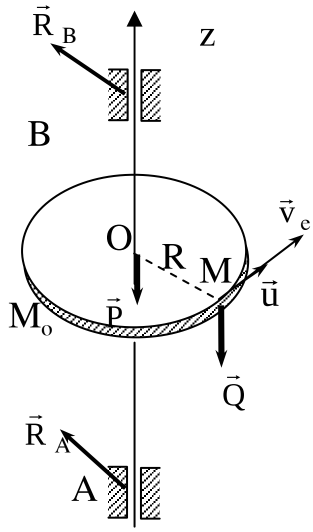
Điều này có thể phát biểu thành định luật gọi là định luật bảo toàn mô men động lượng của hệ như sau:

Nếu tổng mô men các ngoại lực tác dụng lên hệ lấy đối với một tâm o hay với trục z bằng không thì mô men động lượng của hệ với tâm o hay đối với trục z đó được bảo toàn.

Thí du 12-5: Một đĩa tròn đồng chất trọng lượng P bán kính R quay quanh trục cz thẳng đứng đặt vuông góc với đĩa. Trên vành đĩa có một viên bi trọng lượng Q. Tại thời điểm đầu $t_o=0$ viên bi đứng yên trên đĩa quay với vận tốc ω_o. Tính vận tốc ω của đĩa tại thời điểm viên bi chuyển động tương đối so với đĩa với vận tốc u. (xem hình 12-12)

Bài giải: Xét hệ gồm đĩa và viên bi.

Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm: trọng lượng $\vec{P}$, phản lực tại các ổ trục $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$.



Hình 12.12

Đặc điểm của các lực này có $\sum m_z(\vec{F}_{ke}) = 0$

Do đó mô men động lượng của hệ được bảo toàn. Ta có: $l_z^{(o)} = l_z^{(1)}$.

ở đây:

$$L_z^{(0)} = J_z\omega_o + \frac{Q}{g}R^2\omega_o = (\frac{P}{2g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)\omega_o$$

Còn:

$$L_z^{(1)} = J_z\omega_1 + \frac{Q}{g}(Ru + R^2\omega_1) = \frac{P}{2g}R^2\omega_1 + \frac{Q}{g}(uR + R^2\omega_1)$$

Suy ra:

$$(\frac{P}{2g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)\omega_o = \frac{P}{2g}R^2\omega_1 + \frac{Q}{g}(uR + R^2\omega_1)$$

Hay: $\omega_1 = \omega_o - \dfrac{Q}{(0{,}5P + Q)}\dfrac{u}{R}$

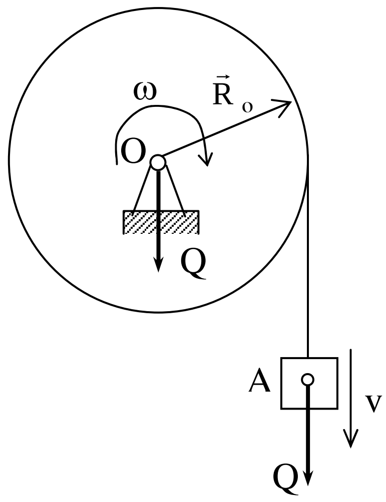
Vận tốc góc của đĩa tại thời điểm t_1 nhỏ hơn vận tốc ban đầu. Vận tốc này càng nhỏ khi vận tốc u của bi càng lớn.

<u>Ví du 12-6</u>: Tời nâng hàng gồm trống tời bán kính r, trọng lượng P, trên nó có cuốn lớp dây cáp. Đầu của dây cáp móc vào vật có trọng lượng Q. Bỏ qua khối lượng của dây, bỏ qua ma sát. Xác định gia tôc trống tời khi vật nặng rơi xuống thẳng đứng. Biết bán kính quán tính của trống tời là ρ. (Hình 12-13).

<u>Bài giải</u>:

Xét cơ hệ gồm trống tời và vật nặng.

Các ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trọng lực $\vec{P}$, $\vec{Q}$ và phản lực $\vec{R}_o$.



Hình 12.13

Chọn chiều dương của trục quay oz hướng vào mặt sau hình vẽ.

Áp dụng định lý mô men động lượng ta có:

$$\frac{d\vec{l}_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_{ke}) = m_z(\vec{P}) + m_z(\vec{Q}) + m_z(\vec{R}_o)$$

Ở đây ta có:

$$l_z = l(\text{trống}) + l\,(\text{vật}) = J_z\omega + \frac{Q}{g} r(r\omega).$$

$$l_z = (\frac{P}{g}\rho^2 + \frac{Q}{g} r^2)\omega$$

$m_z(P) = 0$; $\quad m_z(Q) = rQ$; $\quad m_z(R_o) = 0$.

Thay vào biểu thức ở trên ta có:

$$\frac{d}{dt} l_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}\rho^2 + \frac{Q}{g} r^2\right)\omega = rQ.$$

Suy ra: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{Qrg}{P\rho^2 + Qr^2}$

12.4. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

12.4.1. Động năng

Động năng của chất điểm là một đại lượng vô hướng ký hiệu t bằng nửa tích số giữa khối lượng và bình phương vận tốc của chất điểm đó:

$$t = \frac{1}{2} m v^2 \tag{12-33}$$

Động năng của hệ là một đại lượng vô hướng ký hiệu T bằng tổng động năng của tất cả các chất điểm trong hệ đó:

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k v_k^2 \qquad (12\text{-}34)$$

Khi hệ là một vật rắn có thể xác định động năng trong một số trường hợp sau đây:

12.4.1.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Vì mọi điểm trên vật đều có vận tốc như nhau và bằng vận tốc khối tâm nghĩa là $v_k = v_o$. Do đó:

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k\, v^2{}_c = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^{N} m_k = \frac{1}{2} M v_c^2 \qquad (12\text{-}35)$$

Động năng của một vật rắn chuyển động tịnh tiến bằng nửa tích khối lượng của vật với bình phương vận tốc khối tâm.

12.4.1.2. Vật rắn quay quanh một trục cố định

Như đã biết trong động học, vận tốc một điểm trên vật bằng $v_k = r_k.\omega$ trong đó r_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến trục quay còn ω là vận tốc góc của vật. Ta có:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$$

Thay $\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 = J_z$ là mô men quán tính của vật đối với trục quay z ta được:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \qquad (12\text{-}36)$$

Động năng của vật rắn quay quanh một trục bằng nửa tích giữa mô men quán tính của vật đối với trục quay và bình phương vận tốc góc.

12.4.1.3. Chuyển động song phẳng

Như đã thấy trong động học vật rắn chuyển động song phẳng luôn luôn có thể thay thế bằng chuyển động tính tiến của vật theo khối tâm C và chuyển động quay quanh khối tâm C. Nếu gọi vận tốc khối tâm là v_c và vận tốc góc của vật là ω dễ dàng tìm được:

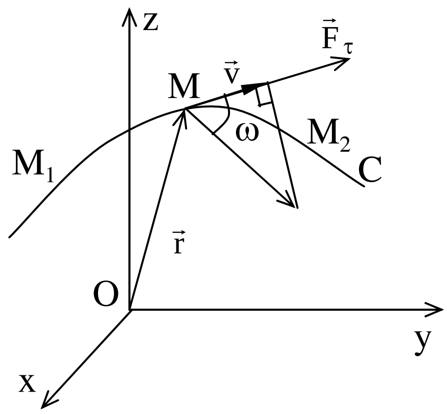
$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 \qquad (12\text{-}37)$$

trong đó M là khối lượng của cả vật, J_c là mô men quán tính của vật đối với trục quay qua khối tâm C.

Động năng của vật rắn chuyển động song phẳng bằng động năng của nó trong chuyển động tịnh tiến theo khối tâm cộng với động năng của nó trong chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng cơ sở.

12.4.2.1. Công nguyên tố của lực F (vi phân công)

Công nguyên tố của lực F khi điểm đặt di chuyển một đoạn vô cùng nhỏ ds là đại lượng vô hướng ký hiệu dA bằng tích giữa hình chiếu F_τ của $\vec{F}$ lên phương tiếp tuyến với vi phân độ dời ds.



Hình 12-14

$dA = \vec{F}_\tau d\vec{s}$

Thay $\vec{F}_\tau = F\cos\alpha$

$d\vec{s} = \vec{v}dt$

ta có: $dA = F.v.\cos\alpha dt$

Vì $F.v.\cos\alpha = \vec{F}.\vec{v}$ nên

$$dA = F.V.dt = \vec{F}.d\vec{r}. \qquad (12\text{-}39)$$

Nếu gọi X,Y,Z là hình chiếu của $\vec{F}$ và dx, dy, dz là hình chiếu của $d\vec{r}$ lên các trục ta có thể viết:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (12\text{-}40)$$

12.4.2.2. Công của lực trên quãng đường hữu hạn

Khi điểm đặt của lực $\vec{F}$ di chuyển trên một quãng đường hữu hạn thì công của lực $\vec{F}$ là một đại lượng vô hướng ký hiệu A bằng tích phân công nguyên tố của lực trên đoạn đường M_oM_1 đó

$$A_{MoM1} = \int_{MoM1} dA \qquad (12\text{-}41)$$

Đơn vị để tính công là jun ký hiệu là J.

J = Niu tơn x mét

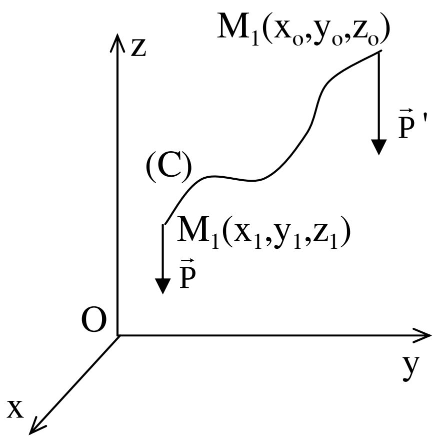
Sau đây tính công của một số lực thường gặp

- Công của trọng lực

xét một chất điểm M có trọng lượng P dời chỗ theo đường cong C trong không gian. Nếu chọn hệ toạ độ có trục oz thẳng đứng thì trọng lượng P sẽ có các hình chiếu là:

X= 0, Y = 0, Z= -P (hình 12-15)

Áp dụng công thức tính công ta có:



Hình12-15

$$A_{MoM1} = \int_{M0M1} dA = \int_{M0M1} (Xdx + Ydy + Zdz) =$$

$$= \int_{z2}^{z1} -Pdz = P(z_0 - z_1) = \pm P.h \qquad (12\text{-}42)$$

Ở đây h là hiệu độ cao điểm đầu và điểm cuối của quãng đường đó, lấy dấu + khi vật chuyển động từ cao xuống thấp và lấy dấu (-) khi vật chuyển động từ thấp lên cao.

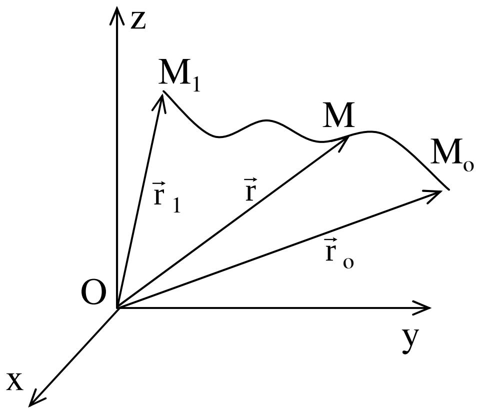
Từ biểu thức (12-42) ta thấy công của trọng lực không phụ thuộc vào quỹ đạo mà chỉ phụ thuộc vào độ cao của điểm đầu và điểm cuối.

- Công của lực đàn hồi tuyến tính

Các lực đàn hồi tuyến tính (lực đàn hồi lò xo, lực đàn hồi của các thanh chịu uốn, xoắn) được tính theo biểu thức :

$\vec{F} = -c\vec{r}$

Trong đó c là hệ số tỷ lệ được gọi là hệ số cứng, còn $\vec{r}$ là véc tơ định vị của chất điểm so với tâm của lực đàn hồi (hình 12-16).



Hình 12-16

Công của $\vec{F}_r$ trên đoạn đường M_0M_1 có thể viết :

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA = \int_{r0}^{r1} F.dr = \int_{r0}^{r1} -crdr\,\frac{c}{2}\int_{r0}^{r1} d(r)^2 .$$

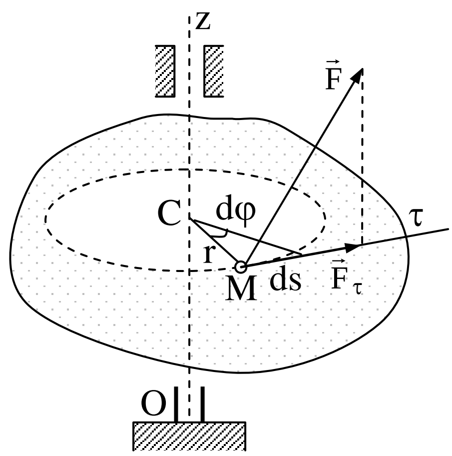
$$A_{M0M1} = -\frac{c}{2}\int_{r0}^{r1} d(r)^2 = \frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2) = \frac{c}{2}(r_0^2 - r_1^2) \qquad (12\text{-}43)$$

Nếu gọi λ là độ biến dạng của lò xo và chs ý rằng lực đàn hồi có chiều ngược với chiều chuyển động công của lực đàn hồi lò xo từ vị trí chưa biến dạng đến khi đã biến dạng là:

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2 .$$

Như vậy công của lực đàn hồi tuyến tính không phụ thuộc vào dạng quĩ đạo mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối cuả chuyển độngvà luôn có dấu âm .

- Công của lực đặt lên vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định (hình12-17).



Hình 12-17

$dA = F_2.dr = F.dr.\cos\alpha = F\cos\alpha.r.d\varphi$

$dA = m_z(F)d\varphi \qquad (12\text{-}44)$

trong đó $m_z(F) = F.\cos\alpha.r = F_\tau r$ là mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục quay z.

- Công của lực $\vec{F}$ tác dụng lên điểm M thuộc vật rắn chuyển động song phẳng (hình 10-18)

Theo động học ta có: $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$ nếu vật có vận tốc góc là ω thì :

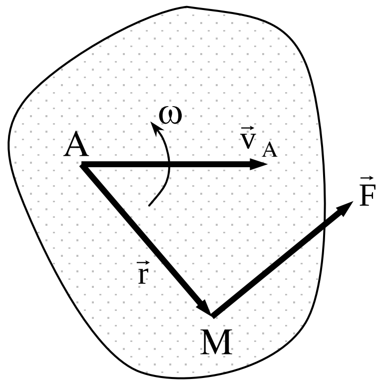
$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}.x.\vec{r}$ với $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$.

Thay vào biểu thức tính vi phân công ta được:

$dA = F.V.dt = Fv_A dt + \vec{F}(\vec{\omega} x \vec{r})dt.$

$dA = \vec{F}.d\vec{r} + \vec{\omega}(\vec{r}xF)\,dt$;

$= \vec{F}.d\vec{r} + \vec{m}_A(F).\ \vec{\omega}\,dt$



Hình12-18

Nếu gọi góc hợp bởi giữa $m_A(F)$ với trục quay là α thì

$\vec{m}_A(F)\vec{\omega} = \vec{m}_A(\vec{F})\ .\ \omega.\cos\alpha.$

Hay $m_A(F)\cos\alpha = m_z(F)$ ta được:

$dA = \vec{F}d\vec{r}_A + m_z(\vec{F}).d\varphi.$

Với $d\varphi = \omega dt$.

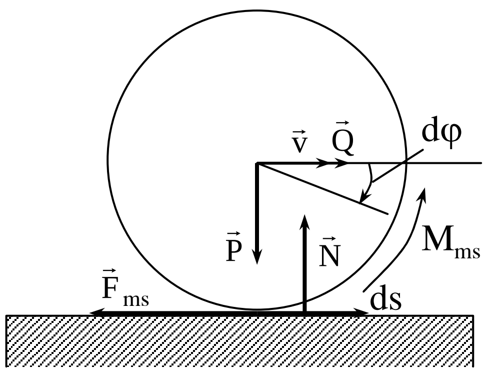
Trong trường hợp chọn cựa A trùng với khối tâm C ta được:

$dA = \vec{F}.d\vec{r}_C + m_c(\vec{F})d\varphi.$ (12-45)

Công của lực tác dụng lên vật rắn chuyển động song phẳng bằng tổng công nguyên tố của lực đó trong chuyển động tính tiến theo khối tâm và công nguyên tố của lực đó trong chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng cơ sở.

- Công của lực ma sát:

Đối với ma sát trượt do tính chất của lực ma sát là cản lại sự trượt, dễ dàng tính:



Hình 12-19

$dA = -\,F_{ms}.ds$ (12-46)

Đối với ma sát lăn, mô men ma sát M_{ms} chống lại sự chuyển động lăn của vật nên cũng tính được :

$$dA = -M_{ms}d\varphi \qquad (12\text{-}47)$$

Như vậy công của lực ma sát là những công âm.

- Công của các nội lực trong vật rắn

Xét hai chất điểm M_1 M_2 có các lực tác dụng tương hỗ là F_{12} và F_{21}. Các lực này hướng theo đường M_1M_2 và ngược chiều nhau $F_{12} = - F_{21}$. Tổng công nguyên tố của hai lực này là:

$$dA_1^{\,1} + dA_2^{\,1} = \vec{F}_{12}\,d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}d\vec{r} - \vec{F}_{12}d\vec{r}_2$$

$$= \vec{F}_{12}(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)dt.$$

Theo động học có:

$$\vec{V}_{M1} = \vec{V}_{M2} + \vec{V}_{M1M2} \text{ hay } \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{V}_{M1M2}$$

suy ra $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_{M1M2}$. Véc tơ này luôn luôn vuông góc với M_1M_2

Vì thế ta có $F_{12}.V_{M1M2} = 0$.

Nghĩa là : $dA_1^{\,1} + dA_2^{\,1} = 0$.

Suy ra tổng công của tất cả các nội lực trong vật rắn với bất kỳ chuyển động nào cũng bằng không.

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^{\,i} = 0$$

Cần chú ý rằng nếu hệ không phải là vật rắn thì V_{M1M2} sẽ không vuông góc với M_1M_2 do đó $F_{12}.V_{M1M2} \neq 0$ và suy ra:

$$\sum dA_k^{\,i} \neq 0.$$

12.4.3. Định lý động năng

Định lý 12-7. Vi phân động năng của chất điểm bằng tổng công nguyên tốc của các lực tác dụng lên chất điểm đó.

$$d(\frac{mv^2}{2}) = \sum_{i=1}^{N} dA_i \qquad (12\text{-}48)$$

Chứng minh: Xét chất điểm khối lượng m chịu tác động của các lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,... $\vec{F}_n$). Phương trình cơ bản của động lực học viết được:

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad \text{hay}$$

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ Nhân vô hướng hai vế với $d\vec{r}$ ta được :

$$md\vec{r}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\, d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} dA_1.$$

Thay $m.v.dv = d(\frac{mv^2}{2})$ ta được biểu thức: $d(\frac{mv^2}{2}) = \sum_{i=1}^{N} dA_1$.

Định lý đã được chứng minh.

<u>Định lý 12-8</u>: Biến thiên động năng của một chất điểm trên một đoạn đường bằng tổng công của các lực tác dụng lên chất điểm trên đoạn đường đó.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} dA_i \qquad (12\text{-}49)$$

Chứng minh: Giả thiết chất điểm chuyển động trên đoạn đường M_0M_1. Tại vị trí ban đầu M_o chất điểm có vận tốc $\vec{V}_o$.và tại vị trí M_1 có vân tốc $\vec{V}_1$. Theo định lý 12-7 ta có:

$$d(\frac{mv^2}{2}) = \sum_{i=1}^{N} dA_i$$

Nếu lấy tích phân hai vế phương trình này theo các cận tương ứng tại vị trí đầu và vị trí cuối của quãng đường ta có:

$$\int_{vo}^{v1} (\frac{mv^2}{2}) = \int_{M0M1} \sum_{i-1}^{N} dA_i$$

Hay: $\dfrac{mv_1^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} dA_i$

Đây chính là biểu thức (12-49)

Định lý 12-9: Vi phân động năng của hệ bằng tổng vi phân công của ngoại lực và nội lực tác dụng lên hệ.

$$dT = \sum_{k=1}^{N} dA_k^{\,i} + \sum_{k=1}^{N} dA_k^{\,e}$$

Chứng minh: Xét hệ N chất điểm. Gọi nội lực và ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ k là $\vec{F}_{ki}$ và $\vec{F}_{ke}$.

Theo định lý 12-7 viết được:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^{\,i} + dA_k^{\,e}.$$

Viết phương trình trên cho N chất điểm của hệ, nghĩa là cho k = 1...N ta được hệ N phương trình. Cộng vế với vế của các phương trình đó sẽ được:

$$\sum_{k=1}^{N} d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{N} dA_k^{i} + \sum_{k=1}^{N} dA_k^{e}$$

Hay: $d\sum_{k=1}^{N} \dfrac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} dA_k^{i} + \sum_{k=1}^{N} dA_k^{e}$

$$dT = \sum_{k=1}^{N} dA_k^{i} + \sum_{k=1}^{N} dA_k^{e}$$

Đây là kết quả cần chứng minh.

Định lý 12-10: Biến thiên động năng của hệ trên một đoạn đường hữu hạn M_oM_1 nào đó bằng tổng công của nội lực và ngoại lực tác dụng lên hệ trên đoạn đường đó.

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A_k^{i} + \sum_{k=1}^{N} A_k^{e} \qquad (12\text{-}51)$$

Chứng minh: Lấy tích phân hai vế biểu thức (12-50) theo các cận ứng với vị trí ban đầu và cuối đoạn đường M_oM_1 ta được:

$$\int_{To}^{T1} dT = \sum_{k=1}^{N} \int_{MoM1} dA^i{}_k + \sum_{k=1}^{N} \int_{MoM1} dA^e{}_k$$

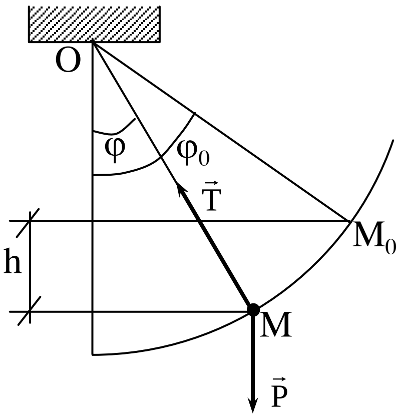
$$\text{Hay } T_1 - T_o = \sum_{k=1}^{N} A^i_k + \sum_{k=1}^{N} A_k^e$$

Chú ý: khác với các định lý khác đã trình bày định lý động năng đối với hệ có kể đến nội lực. Trừ trường hợp cơ hệ là vật rắn tuyệt đối mới có thể bỏ qua ảnh hưởng của nội lực đến biến đổi của động năng.

<u>**Thí du 12-7**</u>: Vật nặng treo vào đầu sợi dây có chiều dài l (hình 12-20) được thả từ vị trí M_o tương ứng có góc hợp giữa dây với đường thẳng đướng φ_o và không có vận tốc ban đầu. Tìm vận tốc của vật tại thời điểm khi sợi dây hợp với đường thẳng một góc φ.

Bài giải:

Xét chuyển động của vật nặng M. Các lực tác dụng lên vật gồm trọng lực P, lực căng T của dây.



Hình 12-20

Áp dụng định lý biến thiên động năng của vật rắn trên đoạn đường từ M_0 đến M ta có:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} A_{M0M1}$$

Ở đây $v_o = 0$; công của lực căng T bằng không vì lực này luôn vuông góc với phương tiếp tuyến. Công của trọng lực P theo biểu thức (10-42) viết được A(P) = + hP trong đó h là độ cao của điểm đầu so với điểm cuối của quãng đường.

Từ hình vẽ ta có:

$h = l(\cos\varphi - \cos\varphi_o)$

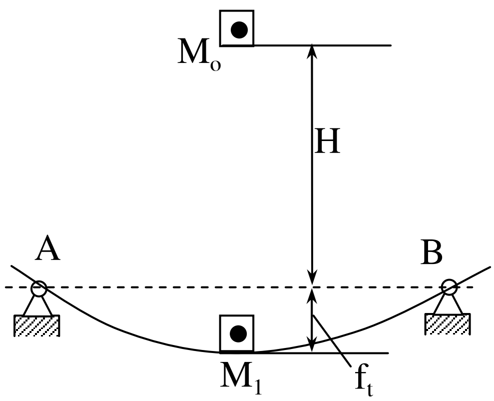
Do đó $A(P) = Pl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$. Biểu thức biến thiên động năng trong trường hợp này viết được:

$$\frac{mv^2}{2} = lP(\cos\varphi - \cos\varphi_o)$$

Suy ra:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}$$

<u>Thí du 12-8</u>: Một vật nặng được thả từ độ cao H so với mặt ngang của xà đàn hồi với vận tốc ban đầu bằng không và điểm rơi là gữa xà (hình 12-21). Khi để vật nằm tĩnh trên xà thì xà võng xuống một đoạn f_t. Hỏi độ võng f_d của xà khi vật rơi xuống xà nếu như bỏ qua trọng lượng của xà và giả thiết rằng khi vật nặng rơi xuống không bị bắn lên và không bị mất nhiệt.



Hình 12-21

<u>Bài giải</u>:

Khảo sát chuyển động của một vật nặng (coi như một chất điểm chuyển động). Trên đoạn đường rơi tự do H nó chịu tác dụng chỉ có trọng lực P. Khi chạm xà nó chuyển động cùng với xà trên đoạn đường này lác tác dụng lên vật ngoài trọng lực còn có phản lực đàn hồi F.

Áp dụng định lý biến thiên động năng trên cả đoạn đường từ lức bắt đầu rơi cho đến khi xà võng xuống ta được:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(P) + A(F) \qquad \text{(a)}$$

trogn đó $v_o = 0$; $v_1 = 0$.

$A(P) = P(H+f_d)$ ở đây f_d là độ võng của xà cần phải xác định.

$A(F) = -\frac{1}{2}cf^2_d$ với c là độ cứng của xà.

Để xác định c ta chú ý rằng khi vật đặt tĩnh lên xà độ võng của xà như đã cho là f_t. Từ điều kiện cân bằng ở trạng thái tĩnh ta có:

$P = c.f_t$ suy ra $c = P/f_t$

Thay kết quả tìm được vào biểu thức (a) ta được:

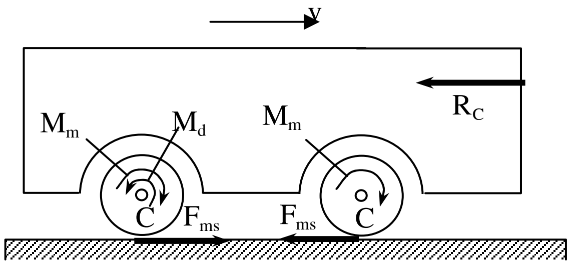
$$P(H+f_d) - \frac{P}{2f_t} f_d^2 = 0.$$

Hay $f_d^2 - 2f_tf_d - 2Hf_t = 0$;

$$f_d = f_t + \sqrt{f_t^2 + 2Hf_t}$$

f_d được gọi là độ võng động, nó lớn gấp nhiều lần so với độ võng tĩnh f_t. Từ biểu thức xác định f_d ta thấy ngay ở độ cao H =0 đã có $f_d = 2f_t$. H càng lớn f_d càng lớn , thí dụ khi động võng tĩnh f_t = 1mm, độ cao H = 20m thì f_d = 21mm = 21.f_t nghĩa là gấp 21 lần f_t.

Thí du 12-9: Một ô tô có trọng lượng kể cả bánh là Q. Mỗi bánh xe có trọng lượng là P bán kính r và bán kính quán tính là ρ. Trên bánh xe chủ động nhận một mô men chủ động từ động cơ là M_d làm cho ô tô chuyển động từ trạng thái đứng yên. Cho biết trong mỗi trục của bánh xe chịu một mô men ma sát là M_{ms}; Lực cản của không khí tỷ lệ bậc hai với vận tốc của ô tô $R_c = -\mu v^2$. Xác định vận tốc tới hạn của ô tô (hình 12-22).



Hình 12-22

Bài giải:

Để xác định vận tốc tới hạn của ô tô ta áp dụng định lý vi phân động năng.

Động năng T của ô tô xác định được theo biểu thức:

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_0^2 + 4(\frac{1}{2}J_o\omega^2) = \frac{1}{2g}(Q + 4P\frac{\rho^2}{r^2})v_0^2$$

v_o là vận tốc của tâm bánh xe và cũng là vận tốc ô tô.

Ngoại lực tác dụng lên ô tô gồm: trọng lực $\vec{P}$, phản lực pháp tuyến của mặt đường $\vec{N}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, lực cản $\vec{R}_C$. Trong các lực trên chỉ có lực cản $\vec{R}_C$ sinh công do đó:

$$\sum dA = - R_C ds_o = -\mu v^2 . ds_o$$

Nội lực trong hệ gồm có mô men chủ động M_d và mô men ma sát M_{ms}. Công của các lực này tính được:

$$\sum dA^i = (M_d - M_{ms})\, d\varphi = (M_d - M_{ms})\frac{ds}{r}$$

Thay các kết quả tìm được vào biểu thức (12-50) sẽ được:

$$\frac{1}{g}(Q + 4P\frac{\rho^2}{r^2})v_0\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{r}(M_d - M_{ms} - \mu v^2 r)\frac{ds}{dt}$$

Thay $v_o = \dfrac{ds}{dt}$ và rút gọn ta được:

$$(Q + 4P\frac{\rho^2}{r^2})w_0 = \frac{g}{r}(M_d - M_{ms} - \mu v^2 r)$$

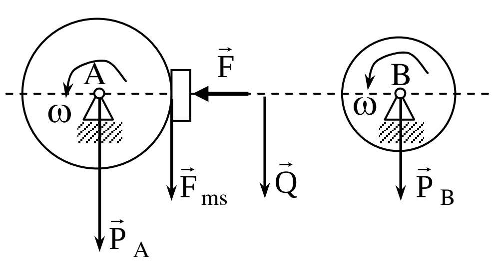
Khi v_o đạt tới giá trị tới hạn thì có nghãi là gia tố w_o =0 do đó suy ra:

$$M_d = M_{ms} - \mu r v^2_{gh} = 0$$

Hay $\quad v_{gh} = \sqrt{\dfrac{Md - 4M_{ms}}{\mu r}}$

Đây chính là vận tốc tới hạn của ô tô.

<u>**Thí du 12-10**</u>: Bộ truyền đai có sơ đồ như hình vẽ (12-23). Bánh đai A quay với vận tốc góc ω_o. Trọng lượng chung của hai bánh đai A và B là P. Trọng lượng của dây đai là Q. Để hãm hệ thống dừng lại ta dùng một lực phanh F tác dụng vào má phanh, cho biết hệ số ma sát giữa má phanh và bánh đai A là f. Xác định số



Hình 12-23

vòng quay của bánh đai A từ lúc bắt đầu phanh cho tới khi nó dừng hẳn.

Bài giải:

Xét chuyển động của hệ bao gồm hệ hai bánh đai A,B và dây đai. áp dụng định lý biến thiên động năng cho hệ trong khoảng thời gian từ khi bắt đầu phanh cho đến khi cơ cấu dừng hẳn ta có:

$$T - T_o = \sum A^e_k + \sum A_k^1 \qquad (a)$$

ứng với thời điểm cuối là T = 0. Tại thời điểm đầu.

$$T_o = T_A + T_B + T_d$$

Giả thiết đai không có trượt ta có vận tốc đai là $V = R\omega_0$ vận tốc góc ω_B của bánh đai B là:

$$\omega_B = \frac{R\omega_o}{r}$$

Trong đó r là bán kính bánh đai B

Ta có: $T_A = \frac{1}{2}(\frac{P}{2g}R^2)\omega_0^2;$

$$T_B = \frac{1}{2}(\frac{P_B}{2g}r^2)\omega_B = \frac{1}{2}(\frac{P_B}{2g}r^2)\frac{R^2\omega_o^2}{r^2} = \frac{1}{4}\frac{P_B}{g}R^2\omega_o^2.$$

Động năng dây đai:

$$T_d = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}v^2 = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}R^2\omega_o^2.$$

Thay kết quả tìm được vào biểu thức động năng của cả hệ và chú ý rằng $P_A + P_B = P$ ta được:

$$T_o = \frac{1}{4}\frac{P + 2Q}{g}R^2\omega_o^2$$

Các lực tác dụng lên hệ gồm trọng lực, lực ma sát F_{ms} ở phanh. Trong đó chỉ có lực ma sát F_{ms} là sinh công, ta có:

$\sum A_i = 0$ và

$\sum A^e = A(F_{ms}) = -(f.F.R).\varphi = -\ f.F.R.2\pi N$ (vòng)

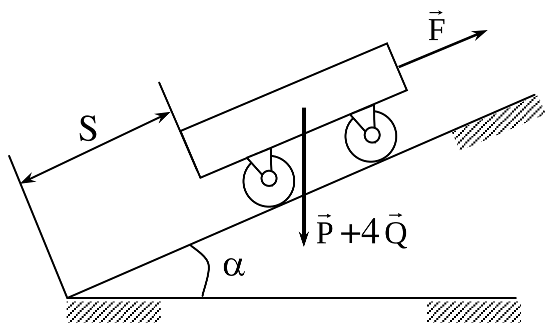
Thay vào (a) ta được:

$$T_o = \frac{1}{4}\frac{P + 2Q}{g}R^2\omega_o^2 = f.F.R.2\omega.N$$

Suy ra: $N = \frac{1}{4}\frac{P + 2Q}{2\pi gfF}R^2\omega_o^2$ (vòng).

<u>Thí du 12-11</u>: Một xe goòng được kéo lên dốc bởi lực F = 16KN. Trọng lượng chưa kể 4 bánh là P = 18KN. Trọng lượng mỗi bánh xe goòng là Q = 2KN (hình 12-24).

Xác định vận tốc của goòng tại thời điểm khi xe goòng đã đi được một đoạn s = 4m. Cho biết lúc đầu xe goòng đứng yên tức $v_o = 0$. Xác định gia tốc của xe goòng. Giả thiết các bánh xe chuyển động lăn không trượt và ma sát trong các trục là không đáng kể, góc nghiêng $\alpha = 30^0$.



Hình 12-24

<u>Bài giải</u>:

Để xác định vận tốc v_1 của xe goòng ta áp dụng định lý biến thiên động năng cho xe trên đoạn đường s. Ta có:

$T_1 - T_o = \sum A^0{}_k$ với $T_o = 0$

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1{}^2 + 4(\frac{3}{4}\frac{Q}{g}v_1^2) = \frac{1}{2g}(P + 6Q)v_1^2.$$

Ngoại lực tác dụng lên xe goòng gồm : lực kéo F, trọng lượng P và 4Q, lực ma sát F_{ms} của mặt đường lên bánh xe. Trong các lực trên lực ma sát không sinh công vì bánh xe lăn không trượt.

Ta có: $\sum A^o = A(F) + A(P) + 4A(Q)$

$$= QS - (P+4Q)h = FS + (P+4Q)\sin\alpha$$

Thay vào biểu thức ban đầu được:

$$\frac{1}{2g}(P + 4Q)v_1^2 = [F + (P+4Q)\sin\alpha]S \qquad \text{(b)}$$

Suy ra:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g[F + (P + 4Q)]S}{P + 6Q}} = 9{,}445 \text{ m/s}$$

Để xác định gia tốc ta đạo hàm bậc nhất theo thời gian hai vế phương trình (b) sẽ được:

$$\frac{1}{g}(P + 4Q)v\frac{dv}{dt} = [F + (P + 4Q)\sin\alpha]\frac{ds}{dt}$$

Thay $\dfrac{dv}{dt} = W$ và $\dfrac{ds}{dt} = v$ ta suy ra

$$W = \frac{F - (P + 4Q)\sin\alpha}{P + 6Q}g = 0{,}98 \text{ m/s}^2$$

12.4.4. Định luật bảo toàn cơ năng

12.4.4.1. Trường lực và trường lực có thế

Trường lực là khoảng không gian vật lý mà chất điểm đặt trong đó sẽ chịu tác dụng một lực chỉ phụ thuộc vào vị trí cuả chất điểm. Trường lực thế là trường lực mà công của các lực đặt lên chất điểm không phục thuộc vào dạng quĩ đạo của chuyển động mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối quãng đường di chuyển của chất điểm. Lực trong trường lực thế gọi là lực có thế. Trường trọng lực, trường lực đàn hồi là những ví dụ về trường lực có thế; Trọng lực và lực đàn hồi là các lực có thế.

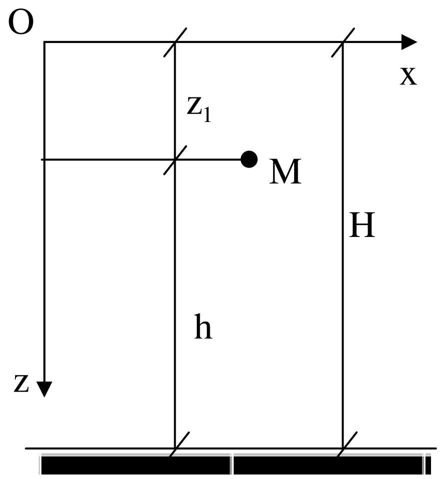
12.4.4.2 Thế năng

Xét chất điểm M đặt trong trường lực có thế. Nếu gọi vị trí M^0 là " vị trí không" hay còn gọi là mốc, và vị trí đang xét là $M^{(1)}$ (Hình 12.25) ta có định nghĩa sau:

Thế năng của chất điểm tại vị trí $M^{(1)}$ bằng công của lực có thể tác dụng lên chất điểm khi nó dời chỗ từ vị trí $M^{(1)}$ về vị trí M^0. Ký hiệu thế năng ở vị trí $M^{(1)}$ là $\pi^{(1)}$.

Ta có: $\pi^{(1)} = A_{1-0}$.

Theo định nghĩa về trường lực thế thi công của lực có thế phụ thuộc vào toạ độ của điểm đang xét do đó suy ra $\pi^{(1)} = \pi(x_1,y_1,z_1)$. Hàm π được gọi là hàm thế.



Hình 12-25

Chú ý rằng vì điểm M^0 là vị trí chọn tuỳ ý do đó khi chọn vị trí M^o khác nhau thế năng của chất điểm tại một vị trí nào đó sẽ sai khác nhau một hằng số.

Từ kết quả trên ta có thể viết biểu thức tính thế năng của lực trọng trường và lực đàn hồi.

Đối với lực trọng trường T ta có: $\pi^{(1)} = A_{M1M0}(P) = \pm Ph$

Trong đó h là độ cao của điểm cuối so với điểm đầu vì thế ta chọn hệ toạ độ có gốc O trùng với vị trí không còn trục oz là trục hướng thẳng đứng xuống dưới và ký hiệu H là độ cao của điểm o, z_1 là toạ độ cuả điểm đang xét ta có:

$\pm h = H - z_1$

Suy ra biểu thức tính thế năng:

$$\pi^{(1)} = P(H-z_1) \qquad (12\text{-}52)$$

Theo biểu thức (12-52) nếu chọn điểm M^0 nằm trên mặt đất thì thế năng của vật ở độ cao z_1 sẽ tính bằng:

$\pi^{(1)} = Pz_1$.

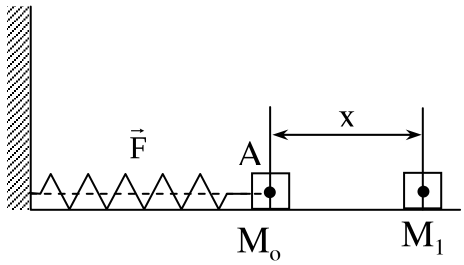
Đối với lò xo: lực có thế $F = - cx$. với c là hệ số cứng của lò xo.

Chọn vị trí $M^{(0)}$ là vị trí mà lò xo ở trạng thái tự nhiên (không bị nén hay giãn). Khi vật ở vị trí $M^{(1)}$ ta có :

$$A_{M1M0} = \frac{1}{2}cx^2$$

Do đó suy ra:

$$\pi^{(1)}\ \frac{1}{2}cx^2 \qquad (12\text{-}53)$$



Hình 12-26

Trên đây chúng ta đã tính thế năng qua các biểu thức tính công, ngược lại chúng ta cũng có thể biểu diễn công qua thế năng như sau:

Xét chất điểm đặt trong trường lực thế và dời chỗ từ vị trí $M^{(1)}$ đến vị trí $M^{(2)}$. Khi đó ta có:

$$A_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}0} + A_{0\text{-}2} = A_{1\text{-}0} - A_{2\text{-}0}$$

Thay $A_{1\text{-}0} = \pi_1$, $A_{2\text{-}0} = \pi_2$ thì $A_{1\text{-}2} = \pi_1 - \pi_2$.

Như vậy công của lực có thế đặt vào chất điểm chuyển dời trên một đoạn đường nào đó bằng hiệu thế năng của chất điểm ở vị trí cuối của đoạn đường đó.

Mặt khác thấy rằng nếu hai điểm $M^{(1)}$ và $M^{(0)}$ gần nhau nghĩa là: $M^{(1)}(x_1,y_1,z_1)$ và điểm $M^{(2)}(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz)$ thì có thể viết:

$dA = \pi^{(1)} - \pi^{(2)} = - d\pi$. Thay $dA = Xdx + Ydy + Zdz$ trong đó X,Y,Z là các thành phần của lực có thế hướng theo các trục toạ độ oy.

Mặt khác vì $\pi = \pi(x,y,z)$ nên ta có:

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \pi}{\partial z}dz$$

Đối chiếu giữa các biểu thức dA và $d\pi$ ta rút ra:

$$X = \frac{\partial \pi}{\partial x};\ Y = \frac{\partial \pi}{\partial y};\ Z = \frac{\partial \pi}{\partial z} \qquad (12\text{-}55)$$

12.4.4.3 Định luật bảo toàn cơ năng

Xét hệ đặt trong trường lực thế. Định lý động năng viết được:

$$T_1 - T_o = \sum_{k=1}^{n} A^e_k + \sum_{k=1}^{n} A_k^i = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Khi hệ chuyển động từ vị trí không đến vị trí 1 ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \pi_o - \pi_1.$$

Trong đó π là thế năng của hệ nội và ngoài lực. Ta có:

$$T_1 - T_o = \pi_0 - \pi_1.$$

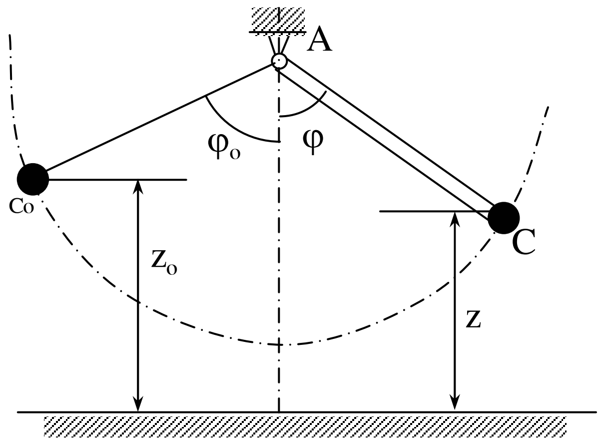
Hay $T_o + \pi_0 = T_1 + \pi_1$

Khi hệ chuyển động trong trường lực thế tổng động năng và thế năng của hệ ở mỗi vị trí là không đổi và ký hiệu là E.

$$E = T + \pi$$

Hệ các chất điểm nghiệm đúng định luật bảo toàn cơ năng được gọi là hệ bảo toan, lực có thế tác động lên hệ đó gọi là lực bảo toàn.

<u>Thí du 12-12</u>: Khảo sát con lắc (hình vẽ 12-27), chuyển động từ vị trí ban đầu xác định bởi góc φ_0 với vận tốc bằng không và có thế năng $\pi_o = Pz_0$. Trong đó P là trọng lượng của con lắc, z_o là toạ độ trọng tâm của con lắc tại thời điểm ban đầu. Bỏ qua lực cản, biết mô men quán tính của con lắc đối với điểm treo A là J_A.



Hình 12-27

Xác định vận tốc góc của con lắc tại vị trí khối tâm C có độ cao z.

Bài giải:

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho con lắc ta có:

$T_o + \pi_o = T_1 + \pi_1$ (a)

T_o và π_o là động năng và thế năng của con lắc tại thời điểm đầu tương ứng với vị trí tâm c có độ cao z_o. T_1 và π_1 là động năng và thế năng của con lắc tại vị trí khảo sát.

Theo đề bài $T_o = 0$; $\pi_0 = Pz_0$;$\pi_1 = Pz$; $T_1 = J_A\omega^2/2$

Thay vào (a) ta được:

$Pz_o = J_A\omega^2/2 + Pz$

Suy ra:

$$\omega = \sqrt{\frac{2P}{J_A}(z_o - z)}$$

Kết quả cho thấy giá trị ω phụ thuộc vào vị trí của con lắc.