Đại Học Quốc Gia Tp.Hồ Chí Minh
Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên
Khoa Vật Lý – Vật Lý Kỹ Thuật

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KÌ – KHÓA 2009
Năm học: 2010 – 2011
Môn học: CƠ LÝ THUYẾT
Thời gian làm bài: 60 phút
(Không được sử dụng tài liệu)

Câu 1: *(3 điểm)*

Chất điểm chuyển động theo một đường cong cho trước trong mặt phẳng thẳng đứng, trong trường trọng lực. Phương trình đường cong dưới dạng tham số được cho bởi:

$$x = x(s)\ ,\ z = z(s)$$

trong đó s là cung của quỹ đạo được tính từ vị trí ban đầu của chất điểm. Hãy viết các phương trình Lagrange cho chuyển động của chất điểm.

Câu 2: *(4 điểm)*

Một hạt có khối lượng m bị buộc chuyển động trong một mặt phẳng. Nó bị hút đến một điểm cố định P trong mặt phẳng đó với một lực luôn luôn được hướng chính xác đến điểm P và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ điểm P.

a) Sử dụng hệ tọa độ cực, hãy viết hàm Lagrange cho chuyển động của hạt đó.
b) Viết các phương trình Lagrange cho chuyển động của hạt và tìm ít nhất hai tích phân chuyển động của hệ.

Câu 3: *(3 điểm)*

Hai hạt có khối lượng m_1, m_2 chuyển động với vận tốc $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$ tương ứng, tới va chạm trực diện với nhau (va chạm là va chạm đàn hồi). Biết rằng trong trường hợp va chạm (đàn hồi) trực diện góc quay vận tốc của hạt trong hệ quy chiếu tâm quán tính $\chi = \pi$. Hãy xác định vận tốc của hai hạt sau khi va chạm trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

- - - HẾT - - -

Câu 1: Số bậc tự do: s =1 ; Tọa độ suy rộng: q = s.

Ta có: $\begin{cases} x = x(s) \\ z = z(s) \end{cases} \Rightarrow$ Vận tốc: $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial s}.\dot{s} \\ \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial s}.\dot{s} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Động năng: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]\dot{s}^2$

Thế năng: $U = -mgz(s)$

Hàm Lagrange: $L = T - U = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]\dot{s}^2 + mgz(s).$

Ta có: $\frac{\partial L}{\partial s} = m\left(\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)\dot{s}^2 + mg\frac{\partial z}{\partial s}.$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]\dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right] + m\dot{s}\left(2\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + 2\frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\dot{s}\right).$

Phương trình Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0.$

$$\Leftrightarrow m\ddot{s}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right] + m\dot{s}\left(2\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\dot{s} + 2\frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\dot{s}\right) - m\dot{s}^2\left(\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right) - mg\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{s}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right] + m\dot{s}^2\left(\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right) - mg\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Câu 2: a) Hệ tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U.$ Ta có:

$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi + (-r\dot{\varphi}\sin\varphi) \Rightarrow \dot{x}^2 = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2$

$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \Rightarrow \dot{y}^2 = (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2$

$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$$U = -\int F dr = -\int_0^r \frac{\alpha}{r^2}dr = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}.$$

b) Phương trình chuyển động: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

• $q_1 = \varphi \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) - 0 = 0 \Leftrightarrow mr^2\ddot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = 0$

$\Rightarrow d\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = C = const \Rightarrow \varphi = Ct.$

• $q_2 = r \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2}\right) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = 0.$

(Phương trình này mình chưa tìm được cách giải, bạn nào giải được giúp đỡ mình nhé! ^_^)

Câu 3: Ta có: $\vec{V} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}.$

$$\vec{v_{10}} = -\vec{V} + \vec{v_1} = \frac{-m_1\vec{v_1} - m_2\vec{v_2} + m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_1}}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2(\vec{v_2} - \vec{v_1})}{m_1 + m_2}.$$

$$\vec{v_{20}} = -\vec{V} + \vec{v_2} = \frac{-m_1\vec{v_1} - m_2\vec{v_2} + m_1\vec{v_2} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1(\vec{v_1} - \vec{v_2})}{m_1 + m_2}.$$

Theo giả thuyết, hai hạt va chạm đàn hồi trực diện với góc quay vận tốc $\chi = \pi$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_{10}'} = -\vec{v_{10}} \; ; \; \overrightarrow{v_{20}'} = -\vec{v_{20}} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{10}'} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v_2} - \vec{v_1}) \; ; \; \overrightarrow{v_{20}'} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v_1} - \vec{v_2}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_1'} = \overrightarrow{v_{10}'} + \vec{V} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v_2} - \vec{v_1}) + \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\vec{v_2} - m_2\vec{v_1} + m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2(2\vec{v_2} - \vec{v_1})}{m_1 + m_2}.$$

$$\overrightarrow{v_2'} = \overrightarrow{v_{20}'} + \vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v_1} - \vec{v_2}) + \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v_1} - m_1\vec{v_2} + m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\vec{v_2} + m_1(2\vec{v_1} - \vec{v_2})}{m_1 + m_2}.$$

- - - HẾT - - -