

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Đề thi cuối học kỳ 1 - MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2010)

Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Bài 1: (1 điểm). Kiểm tra tập hợp nào sau đây là không gian con của \mathbb{R}^2 ?

a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 3y\}$.

b) $W' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = xy\}$.

Bài 2: (3 điểm). Cho W là không gian con của không gian \mathbb{R}^4 sinh bởi các vectơ $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,3)$, $u_3 = (1,3,4,2)$, $u_4 = (1,2,1,-3)$.

a) Chứng minh tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W và xác định $[u]_B$.

b) Cho $u = (m, m-1, 2m, m-2) \in \mathbb{R}^4$. Hãy tìm giá trị của m để $u \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy biểu diễn vectơ u dưới dạng tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 .

Bài 3: (3 điểm). Cho $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là hai cơ sở của \mathbb{R}^3 sao cho $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,-2,0)$, $u_3 = (2,1,3)$ và ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' là:

$$(B \rightarrow B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy xác định cơ sở B' .

b) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ sao cho $[u]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hãy xác định $[u]_{B'}$.

Bài 4: (3 điểm). Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x - y + z, x + 2y - 2z, x - 3y + 3z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\text{Im } f$ và một cơ sở của $\text{Ker } f$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $B = \{(1,0,1), (1,-2,0), (2,1,3)\}$ của \mathbb{R}^3 .

--- HẾT ---

Bài 1:

a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 3y\}.$

Ta có $0 = (0,0) \in W$ nên $W \neq \emptyset$. Với mọi $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in W$, ta có:

$$\begin{cases} 2x_1 = 3y_1 \\ 2x_2 = 3y_2 \end{cases} \quad \text{Do đó:} \quad \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 3(y_1 + y_2) \\ 2\alpha x_1 = 3\alpha y_1 \end{cases}$$

Suy ra: $u + v \in W$ và $\alpha u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Vậy W là không gian con của \mathbb{R}^2 .

b) $W' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = xy\}.$

Ta có $u = (2,2) \in W'$ nhưng $2u = (4,4) \notin W'$ nên W' không là không gian con của \mathbb{R}^2 .

Bài 2:

a) Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 3$ (bằng số vector) nên B độc lập tuyến tính.

Gọi $u = (a,b,c,d)$ là một vector bất kỳ trong \mathbb{R}^4 . Xét hệ với dạng ma trận hóa:

$$(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & 3 & 2 & 2 & d \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a+b-c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-3b+2c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2b-a-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-2a+4b-3c \end{array} \right)$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow d - 2a + 4b - 3c = 0$ (1).

Với điều kiện (1) \Rightarrow hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow u$ là tổ hợp tuyến tính của B .

Vậy: B là cơ sở của W .

Suy ra:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a+b-c \\ a-3b+2c \\ 2b-a-c \end{pmatrix}$$

b) Với $u = (m, m-1, 2m, m-2)$. Xét hệ với dạng ma trận hóa:

$$(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \ u_4^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 3 & 2 & m-1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 2m \\ 1 & 3 & 2 & -3 & m-2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2m+3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6-3m \end{array} \right)$$

$$u \in W \Leftrightarrow -6 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Với $m = -2$ ta có: $[u]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = -u_1 - u_2.$

Bài 3:

a) Xét ma trận mở rộng:

$$(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \mid u_{10}^T \ u_{20}^T \ u_{30}^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (B \rightarrow B_0) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B \rightarrow B_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có: $(B \rightarrow B') = (B \rightarrow B_0)(B_0 \rightarrow B')$

$$\Rightarrow (B_0 \rightarrow B') = (B \rightarrow B_0)^{-1}(B \rightarrow B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -8 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (B_0 \rightarrow B') = ([u_1']_{B_0} \ [u_2']_{B_0} \ [u_3']_{B_0}) = (u_1'^T \ u_2'^T \ u_3'^T) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -8 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vậy: Tập hợp $\{u_1' = (4, -1, 4), u_2' = (1, -5, -2), u_3' = (0, -8, -5)\}$ là cơ sở của B' .

$$b) (B' \rightarrow B) = (B \rightarrow B')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ta có: } [u]_{B'} = (B' \rightarrow B)[u]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Bài 4:

a) Ta có ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm dạng $(x_1, x_2, x_3) = (0, t, t) \ \forall t \in \mathbb{R}$.

\Rightarrow Nghiệm căn bản là $u = (0, 1, 1)$.

$\Rightarrow B = \{u = (0, 1, 1)\}$ là cơ sở của $\text{Ker } f$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Tập hợp $C = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 3, -2)\}$ là cơ sở của $\text{Im } f$.

b) $B = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, -2, 0), u_3 = (2, 1, 3)\}$.

$f(u_1) = (2, -1, 4); \ f(u_2) = (3, -3, 7); \ f(u_3) = (4, -2, 8)$.

Ta có ma trận mở rộng sau:

$$(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \mid f(u_1)^T \ f(u_2)^T \ f(u_3)^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -26 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 10 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} -11 & -26 & -22 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

--- HẾT ---

TranPham