

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

ĐỀ THI GIỮA KÌ I – MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2009)

Thời gian làm bài: 60 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Bài 1: (1 điểm). Tìm hai ma trận vuông cấp hai A và B sao cho $A \neq 0$ và $B \neq 0$ nhưng $AB = 0$ (trong đó 0 là ma trận không).

Bài 2: (2 điểm). Tìm hạng của ma trận sau bằng cách đưa ma trận về dạng bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài 3: (3 điểm). Tìm nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài 4: (4 điểm). Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1 - m)x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$$

--- HẾT ---

Bài 1: Chọn $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ta có: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Bài 2: Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 3$.

Bài 3: Ta có: $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 4: Hệ (1) có dạng $AX = B$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} m \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -(2m-1)(m-1).$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ -2 & 1 & 1-m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 3(m-1)(m+1).$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & -2 & 1-m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -2(m-1)(m+1).$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3(m-1).$$

Nếu $|A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$ và $m \neq 1$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \frac{|A_3|}{|A|} \right) = \left(-\frac{3(m+1)}{2m-1}, \frac{2(m+1)}{2m-1}, \frac{3}{2m-1} \right).$$

Nếu $|A| = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 1$ thì:

- Với $m = \frac{1}{2}$ ta có: $|A_3| = \frac{3}{2} \neq 0$ nên hệ (1) vô nghiệm.

- Với $m = 1$ ta có: $|A| = |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$. Khi đó hệ (1) có dạng ma trận hóa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Do đó hệ (1) có vô số nghiệm xác định bởi:}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (t; -2-t; 3) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

--- HẾT ---

TranPham