

# TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

## Đề thi giữa kỳ - MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2010)

Thời gian làm bài: 60 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

-----

**Bài 1:** (2 điểm). a) Cho  $A, B \in M_n(R)$ . Chứng minh rằng nếu  $AB$  khả nghịch thì cả  $A$  và  $B$  đều khả nghịch.

b) Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

Tìm ma trận  $X$  sao cho  $A^2XA^3 = A^3BA^2$ .

**Bài 2:** (2 điểm). Tìm hạng của ma trận sau bằng cách đưa ma trận về dạng bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Bài 3:** (3 điểm). Cho ma trận  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để  $A$  khả nghịch.

b) Tìm nghịch đảo của  $A$  trong trường hợp  $m = 1$ .

**Bài 4:** (3 điểm). Giải và biện luận (theo tham số  $m$ ) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + (m-1)x_2 + (3-m)x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + (m+1)x_3 = 4 \end{cases}$$

**Bài 1:**

a) Ta có:  $AB$  khả nghịch  $\Rightarrow |AB| \neq 0 \Leftrightarrow |A||B| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$  và  $|B| \neq 0$ .

$\Rightarrow A$  và  $B$  khả nghịch.

Vậy:  $AB$  khả nghịch thì cả  $A$  và  $B$  đều khả nghịch.

b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Phương trình  $A^2XA^3 = A^3BA^2$  có nghiệm:  $X = (A^2)^{-1}(A^3BA^2)(A^3)^{-1}$ .

$\Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}A^2.ABA^2(A^2.A)^{-1} = [(A^2)^{-1}A^2].AB.[A^2.(A^2)^{-1}].A^{-1} = I_2.AB.I_2.A^{-1} = ABA^{-1}$ .

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 23 & -5 \end{pmatrix}$

**Bài 2:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3.$

**Bài 3:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 2m^2 - 3m - 5.$

a)  $A$  khả nghịch  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  và  $m \neq \frac{5}{2}.$

b)  $m = 1$  ta có:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**Bài 4:**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + (m-1)x_2 + (3-m)x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + (m+1)x_3 = 4 \end{cases}$$

Ta có:  $\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3-m & 0 \\ 1 & 5 & m+1 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & m-1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 1 & 2-m \end{array} \right)$

Biện luận:

a) Hệ có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$  và  $m \neq 1.$

b) Hệ vô nghiệm  $\Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

c) Hệ có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m = 0 \\ -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

*Tranpham*