

ĐỀ THI GIỮA HỌC KỲ 1 KHÓA 2011

MÔN: ĐẠI SỐ B1

Thời gian: 60 phút

(Không được sử dụng tài liệu)

Câu 1: (2 điểm)

a) Cho $A, B \in M_n(R)$. Chứng minh rằng, nếu AB khả nghịch thì A và B có cùng hạng, nghĩa là $r(A) = r(B)$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tìm ma trận X sao cho $AXA = A^2B$.

Câu 2: (3 điểm)

Tìm nghịch đảo của ma trận sau bằng cách áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 3: (5 điểm)

Dùng quy tắc Cramer, giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = m \\ -x_1 + mx_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

--- HẾT ---

Câu 1: a) AB khả nghịch $\Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |A||B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$ và $|B| \neq 0$
 $\Rightarrow A$ và B khả nghịch.

$\Rightarrow A \sim I_n$ và $B \sim I_n \Rightarrow r(A) = r(B)$.

b) Ta có: $AXA = A^2B$.

$$\Rightarrow X = A^{-1}A^2BA^{-1} = A^{-1}AABA^{-1} = IABA^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -7 \\ 49 & -16 \end{pmatrix}$$

Câu 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -9 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 7 \end{array} \right)$$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 13 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Câu 3: Ta có: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & m & m \\ -1 & m & 2 & 4 \end{array} \right)$

$$|A| = 1 - m^2$$

$$|A_1| = -2(m - 3)(m + 1)$$

$$|A_2| = -4(m + 1)$$

$$|A_3| = (m + 1)(5 - m)$$

$$\bullet \quad |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

$$\text{Hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \left(\frac{|A_1|}{|A|}; \frac{|A_2|}{|A|}; \frac{|A_3|}{|A|} \right) = \left(\frac{-2(m-3)}{1-m}; \frac{-4}{1-m}; \frac{5-m}{1-m} \right)$$

$$\bullet \quad m = 1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{Hệ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\bullet \quad m = -1 \Rightarrow |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0 \Rightarrow \text{Hệ phương trình vô số nghiệm có dạng } (5t - 11; 7 - 3t; t).$$

... HẾT ...