

BÀI TẬP MÔ HÌNH TOÁN ỨNG DỤNG

NHÓM 5

I. Phân tích đề bài

1. Đề bài: Bài 10 (chương II).

Một cửa hàng bảo hành xe máy Honda có 5 công nhân phục vụ và 1 diện tích để có m xe chờ. Dòng xe có nhu cầu bảo hành giả thiết là dòng tối giản bởi trung bình 4 xe/giờ. Thời gian trung bình bảo trì xong 1 xe của 1 công nhân mất 1 giờ, mỗi công nhân bảo hành 1 xe

Hãy phân tích các chỉ tiêu sau theo m :

- Xác suất phục vụ
- Số công nhân bận trung bình
- Số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình

2. Phân tích

Ta thấy đây là hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế và thời gian chờ không hạn chế. Dòng xe có nhu cầu bảo hành giả thiết là dòng tối giản tức là thỏa mãn các điều kiện dừng, không hậu quả và đơn nhất như vậy số yêu cầu đến hệ thống phân phối theo quy luật Poisson do đó ta có thể đánh giá được các tính chất của dòng yêu cầu này.

II. Mô tả hệ thống.

Đây là một hệ thống phục vụ công cộng có $n = 5$ kênh phục vụ (5 công nhân), năng suất các kênh bằng nhau bằng $\mu = 1$ xe/giờ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ $\lambda = 4$ xe/giờ. Dòng yêu cầu đến là dòng Poisson dừng, thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo quy luật chỉ số. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thỏa mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh bận thì xếp hàng chờ,

số yêu cầu chờ tối đa là m. Trường hợp đã có m yêu cầu chờ, một yêu cầu đến hệ thống sẽ bị từ chối. Từ đó ta xác định được các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

III. Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống.

Ta có:

$$\alpha = \lambda/\mu = 4/1 = 4$$

$$x = \alpha/n = 4/5 = 0.8 \neq 1$$

1. Xác suất phục vụ.

Khi yêu cầu đến hệ thống mà có ít nhất một kênh rỗi thì sẽ được phục vụ ngay mà không phải chờ. Khi yêu cầu đến hệ thống có n kênh bận và yêu cầu chờ $s < m$ thì yêu cầu đến hệ thống sẽ được phục vụ nhưng phải chờ. Do đó để tính xác suất phục vụ ta có 2 trường hợp sau.

a. Trường hợp 1: Xác suất phục vụ ngay.

$$P_{\text{opv}} = 1 - P_{\text{tc}} - P_c.$$

Với

$$P_{\text{tc}} = P_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!} x^m P_0$$

$$\text{Khi } x \neq 1 \quad P_{\text{tc}} = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1-x^m)}{1-x}} x^m$$

$$P_c = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=0}^{m-1} x^s P_0$$

$$\text{Khi } x \neq 1 \quad P_c = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1-x^m)}{1-x}} \frac{(1-x^m)}{(1-x)}$$

Ta có:

$$P_{\text{opv}} = 1 - \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1-x^m)}{1-x}} x^m - \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1-x^m)}{1-x}} \frac{(1-x^m)}{(1-x)}$$

Ta có mệnh đề: Với hệ chờ với thời gian chờ không hạn chế; khi số chờ tăng thì xác suất từ chối một yêu cầu giảm.

$$P_{\text{tc}} = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1-x^m)}{1-x}} x^m$$

$$\frac{\partial P_{\text{tc}}}{\partial m} = \frac{x^m P(\alpha, n) \ln x (R(\alpha, n) + P(\alpha, n) \frac{x(1-x^m)}{1-x}) - P(\alpha, n) x^m (P(\alpha, n) \frac{x}{1-x} (-x^m) \ln x)}{[R(\alpha, n) + P(\alpha, n) \frac{x(1-x^m)}{1-x}]^2}$$

Ta có $\frac{\partial P_{\text{tc}}}{\partial m} < 0$ nên P_{tc} là hàm giảm theo m.

$$\text{Xét } P_c = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1-x^m)}{1-x}} \frac{(1-x^m)}{(1-x)} = \frac{A}{B}$$

$$\text{Ta có } \frac{\partial P_c}{\partial m} = \frac{TS_m}{MS_m}$$

TS_m

$$\begin{aligned} &= -\frac{P(\alpha, n)}{(1-x)} m \ln(x) [R(\alpha, n) + P(\alpha, n) \frac{x(1-x^m)}{1-x}] + P(\alpha, n) \frac{x(1-x^m)}{1-x} P(\alpha, n) \frac{x}{1-x} m \ln(x) \\ &= -\frac{P(\alpha, n)}{(1-x)} m \ln(x) R(\alpha, n) > 0 \quad \text{Mọi } m \end{aligned}$$

$$MS_m = A^2$$

Vậy khi m tăng P_c cũng tăng

Ta có $\frac{P_{\text{tc}}}{P_c} = \frac{x^m (1-x)}{1-x^m} < 1$. Suy ra tốc độ giảm của P_{tc} nhỏ hơn tốc độ tăng của P_c .

Do đó P_{opv} là hàm giảm theo m.

Vậy nếu diện tích xe chờ là m tăng thì P_{opv} sẽ giảm.

b, Trường hợp 2: Xác suất phục vụ nhưng phải chờ.

$$P_{pv} = 1 - P_{tc}$$

Mà theo trường hợp 1, P_{tc} là hàm giảm theo m. Nên P_{pv} là hàm tăng theo m. Tức là khi m tăng thì P_{pv} sẽ tăng.

2. Số công nhân bận trung bình.

Ta có:

$$\overline{N}_b = \sum_{k=0}^n k P_k + n \sum_{s=1}^m P_{n+s} = \sum_{k=1}^n k P_k + n \sum_{s=1}^m P_{n+s}$$

$$\text{Khi } x \neq 1 \quad \overline{N}_b = \frac{\alpha R(\alpha, n-1) + n P(\alpha, n) \frac{x}{1-x} (1-x^m)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n) \frac{x}{1-x} (1-x^m)}$$

$$\overline{N}_b = \frac{\sum_{k=1}^n k \frac{\alpha^k}{k!} + n \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{x^m - 1}{x - 1} \right)}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{x}{x-1} \right)}$$

$$\overline{N}_b = \frac{308 - 213,3 \left(\frac{4}{5} \right)^m}{77 - 42,67 \left(\frac{4}{5} \right)^m}$$

$$\text{Tạo có } \frac{\partial \overline{N}_b}{\partial m} = \frac{770 - 21,84 m \left(\frac{4}{5} \right)^m}{\left(77 - 42,67 \left(\frac{4}{5} \right)^m \right)^2} > 0 \text{ Mọi } m$$

Vậy \overline{N}_b là hàm tăng theo m có nghĩa là khi m tăng thì \overline{N}_b tăng

3. Số xe chờ trung bình.

Khi $x \neq 1$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^m s x^s &= x \sum_{s=1}^m s x^{s-1} \\
&= x \frac{\partial}{\partial x} \sum_{s=0}^{m-1} x^s \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} [(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1]
\end{aligned}$$

Như vậy:

$$\overline{M_c} = \frac{P(\alpha, n) \frac{x}{(1-x)^2} [(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1]}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n) x \frac{1-x^m}{1-x}}$$

Ta có: $\frac{\partial \overline{M_c}}{\partial m} > 0$ nên số xe chờ trung bình là hàm tăng theo m. Nên nếu m tăng thì số xe chờ trung bình sẽ tăng.

4. Thời gian chờ trung bình.

Khi $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\overline{T_c} &= \sum_{s=0}^m \frac{s}{n\mu} P_{n+s} \\
\overline{T_c} &= \frac{\overline{M_c}}{n\mu} = \frac{1}{n\mu} \frac{P(\alpha, n) \frac{x}{(1-x)^2} [(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1]}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n) x \frac{1-x^m}{1-x}}
\end{aligned}$$

Ta có: $\overline{T_c} = \frac{\overline{M_c}}{n\mu}$ mà nên thời gian chờ trung bình của một yêu cầu là hàm tăng theo m. Vậy nếu m tăng thì $\overline{T_c}$ tăng

IV. Kết luận:

Sau khi phân tích đánh giá các chỉ tiêu ta thấy hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế và thời gian chờ không hạn chế phụ thuộc vào m (số yêu cầu chờ tối đa). Nếu diện tích chờ tăng thì xác suất phục vụ, số công nhân bận trung bình, số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình đều tăng. Đây là một số chỉ tiêu cơ bản

để đánh giá hoạt động của hệ thống, trong các bài toán thực tế khi tăng số chỗ chờ m thì phát sinh một số chi phí nào đó như một hàm tăng của m . Vì vậy có chi khác đánh giá hoạt động của hệ thống như hàm tổng chi phí, hàm tổn thất v.v.