

## SUY LUẬN TỰ NHIÊN

### Tổng kết các qui tắc suy luận:

Ghi chú: Dấu \* là các dòng suy ra được, không có \* là giả thiết.

- Giao i ( $\wedge i$ )  $(F, G, *F \wedge G)$
- Giao e ( $\wedge e$ )  $(F \wedge G, *F, *G)$
- Điều kiện e ( $\rightarrow e$ )  $(F \rightarrow G, F, *G)$
- Điều kiện i ( $\rightarrow i$ ) (if F, nif G,  $*F \rightarrow G$ )
- Bản sao (id)  $(F, *F)$
- Hội i ( $\vee i$ )  $(F, *F \vee G)$
- Hội e ( $\vee e$ )  $(F \vee G, \text{if } [F | G] \dots \text{nif } H, *H)$
- Mâu thuẫn ( $\bot i$ )  $(F \wedge \neg F, \bot)$
- Mâu thuẫn ( $\bot e$ )  $(\bot, *F \wedge \neg F)$
- Phủ định ( $\neg i$ )  $(\text{if } F, \text{nif } \bot, *\neg F)$
- Phủ định kép e ( $\neg \neg e$ )  $(\neg \neg F, *F)$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

# LUẬN LÝ MỆNH ĐỀ

## 1. Các khái niệm:

- **Diễn dịch** : là 1 dòng trong bảng thực trị
- **Mô hình** : là một diễn dịch đúng
- **Lưỡng nguyên** : là một **Công thức nguyên** (LN dương) hoặc **Phủ định của CNT** (LN âm)

## 2. Thủ tục số học

- Chuyển công thức vào  $\langle Z_2, +, . \rangle$  để tính thực trị.

$$v(P \vee Q) = vP + vQ + vPvQ \quad \text{trong } Z_2,$$

$$v(P \wedge Q) = vPvQ \quad \text{trong } Z_2,$$

$$v\neg P = 1 + vP \quad \text{trong } Z_2,$$

$$v(P \rightarrow Q) = 1 + vP + vPvQ \quad \text{trong } Z_2.$$

- Hệ quả :

$$vP + vP = 0.$$

$$vP.vP = vP.$$

$$v\neg P.vP = 0.$$

## 3. Các công thức tương đương:

$$1. \neg(\neg F) = F$$

$$2. F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$3. F \rightarrow G = \neg F \vee G$$

$$4. F \rightarrow G = \neg G \rightarrow \neg F$$

$$5. \neg(F \vee G) = (\neg F) \wedge (\neg G) \quad (\text{DeMorgan})$$

$$6. \neg(F \wedge G) = (\neg F) \vee (\neg G) \quad (\text{DeMorgan})$$

**4. Các dạng chuẩn:**

1. **CNF** : Dạng chuẩn giao (Giao của các Mệnh đề)
  - Mệnh đề: Mỗi khối  $(P_1 \vee \dots \vee P_n)_i$  của CNF.
  - Mệnh đề đơn vị: Mệnh đề chỉ có 1 lượng nguyên:  $F \wedge (Q \vee G) \wedge (A \vee B)$  //F là mđđv
  - Clausal form: Dùng tập hợp để biểu diễn CNF:  $\{F, \{Q, G\}, \{A, B\}\}$
2. **DNF**: Dạng chuẩn hội (Hội của các ( ) )
3. **NNF**: Không chứa dấu “->”. Ex:  $(A \wedge B) \vee (B \vee \neg A)$
4. **Horn Form**: Dạng Horn (Giao của các mệnh đề Horn)
  - Horn clause: MĐ chỉ có 1 lượng nguyên dương.

**5. Bài toán SAT:**

- Xét tính khả đúng của 1 CT, nếu CT khả đúng, tìm một diễn dịch đúng (mô hình).
- Phương pháp:
  - **PP chứng minh bài toán SAT (X khả đúng):**
    - + Chuyển  $\neg X$  thành dạng chuẩn giao.
    - + Kiểm tra mỗi mệnh đề không chứa 2 lượng nguyên trái dấu :
      - :: Nếu có mệnh đề không chứa 2 lượng nguyên trái dấu thì X khả đúng.
      - :: Ngược lại X hằng đúng.

## LUẬN LÝ VỊ TỪ

### 1. Các khái niệm:

- Miền đối tượng  $D$  : là một tập hợp trừu tượng (CLGT)
- Lượng từ có 2 loại :
  - o Phổ dụng  $\forall$  (universal quantifier)
  - o Hiện hữu  $\exists$  (existential quantifier).
  - o Hình thức sử dụng :  $(\forall x), (\exists x)$  : với  $x$  là biến.
- Hàm là ánh xạ từ  $D^n \rightarrow D, n \in \mathbb{N}$ .
  - o Ví dụ : nhân, cộng :  $D \times D \rightarrow D$ .
- Biểu thức hàm: Ảnh của hàm.
  - o Ví dụ : nhân( $x, n$ ), cộng( $x, m$ ), cộng(nhân( $y, z$ ),  $x$ )
- Vị từ: tập con của tập  $D^n$  (nói cách ngu ngu: quan hệ trên  $D$ )
- Biểu thức vị từ: Ảnh của vị từ
  - o Ví dụ : mẹ( $x, y$ ) là ảnh của vị từ mẹ, bạn( $y, z$ ) là ảnh của vị từ bạn
- Nguyên từ (term) : Hằng or Biến or Biểu thức hàm.
- Công thức nguyên: Biểu thức vị từ (sắp điền cmnr)
- Công thức hoàn hảo được gọi tắt là công thức.
  - o Công thức nguyên là CT.
  - o  $\perp, \top$  là CT.
  - o CT kết hợp với  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  cũng là CT.
  - o CT kết hợp với  $(\forall x), (\exists x)$  cũng là CT.
- Phạm vi của lượng từ: Khởi ghi
- Hiện hữu của một biến là sự xuất hiện của biến đó trong công thức.
  - o  $\forall x (p(x,y) \wedge q(y))$ : Biến  $x$  có 2 hiện hữu, biến  $y$  có 1 hiện hữu.
- Hiện hữu ràng buộc: thuộc phạm vi của lượng từ có biến cùng tên với nó >> Hiện hữu tự do
- Công thức đóng : công thức không chứa hiện hữu tự do >> CT Tự do

### 2. Thay thế:

- Chỉ những hiện hữu tự do mới được thay thế
- Biến là nguyên từ phải được thay bởi một nguyên từ.
- Ký hiệu  $F[t/x]$  nghĩa là tất cả hiện hữu tự do của  $x$  trong  $F$  được thay bởi  $t$ .
- ĐK thay thế: hiện hữu của các biến trong  $t$  không trở thành ràng buộc khi thế  $t$  vào tất cả những hiện hữu tự do của  $x$ .

# SUY LUẬN TỰ NHIÊN TRONG LUẬN LÝ VỊ TỪ

## 1. Tổng kết các quy tắc suy luận:

Ghi chú: Dấu \* là các dòng suy ra được, không có \* là giả thiết

- |                                    |  |   |
|------------------------------------|--|---|
| • Bằng nhau i (=i)                 | : $*eq(t, t)$  | (luôn viết được – từ trên trời rơi xuống) |
| • Bằng nhau e (=e)                 | : $eq(t1, t2), F[t1/x],$                               | $*F[t2, x]$                               |
| • L. từ phổ dụng e ( $\forall e$ ) | : $\forall x F,$                                       | $*F[t/x]$                                 |
| • L. từ phổ dụng i ( $\forall i$ ) | : if $x0, nif F[x0/x],$                                | $*\forall x F$                            |
| • L. từ hiện hữu i ( $\exists i$ ) | : $F[t/x],$  | $*\exists x F$                            |
| • L. từ hiện hữu e ( $\exists e$ ) | : $\exists x F, \text{ if } F[x_0/x], \text{ nif } G,$ | $*G$                                      |

## 2. Định lý :

$$(a) \quad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$$

$$(b) \quad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$$

## 3. Định lý (tt): G không chứa hiện hữu tự do của x (trong G)

$$(a) \quad \forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$(b) \quad \forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G)$$

$$(c) \quad \exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G)$$

$$(d) \quad \exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G)$$

$$(e) \quad \forall x (G \rightarrow F) \equiv G \rightarrow \forall x F$$

$$(f) \quad \exists x (F \rightarrow G) \equiv \forall x F \rightarrow G$$

$$(g) \quad \forall x (F \rightarrow G) \equiv \exists x F \rightarrow G$$

$$(h) \quad \exists x (G \rightarrow F) \equiv G \rightarrow \exists x F$$

## 4. Định lý :

$$(a) \quad \forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$(b) \quad \exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$$

$$(c) \quad \forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$(d) \quad \exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

## NGŨ NGHĨA CỦA LUẬN LÝ VỊ TỪ

### 1. Đánh giá CT trong 1 diễn dịch:

- Tính đúng, sai của **CT đóng** trong một diễn dịch I được xác định nhờ lượng từ:
  - $\forall x F$  là đúng, nếu F đúng,  $\forall x \in D$ .
  - $\exists x F$  là đúng, nếu F[a/x] đúng,  $\exists a \in D$ .
- ↳ **Không xác định** được tính đúng, sai trong 1 diễn dịch của **công thức tự do**.
- Khi nói một công thức F là đúng, hay sai nghĩa là **đúng hay sai trong một diễn dịch**.  
(Diễn dịch có thể không được nhắc đến nhưng phải được ngầm hiểu)

### 2. Ngũ nghĩa: (Chả hiểu slide viết gì nữa – Chúc bạn may mắn)

### 3. Công thức tương đương:

F, P là công thức và P không chứa hiện hữu tự do của x (đối với P).

$$\begin{aligned}
 1. (\forall x F) \vee P &= \forall x (F \vee P) \\
 1'. (\exists x F) \vee P &= \exists x (F \vee P) \\
 2. (\forall x F) \wedge P &= \forall x (F \wedge P) \\
 2'. (\exists x F) \wedge P &= \exists x (F \wedge P)
 \end{aligned}$$

### 4. Hội giao mở rộng:

- Ý nghĩa: Viết tắt (tác dụng giống như  $\Sigma$ ), và đưa số lượng tập hợp lên thành vô hạn.
- Định nghĩa giao mở rộng :
  - $x \in \cap_{i \in I} A_i \leftrightarrow \forall i (x \in A_i)$
- Định nghĩa hội mở rộng :
  - $x \in \cup_{i \in I} A_i \leftrightarrow \exists i (x \in A_i)$
- Ký hiệu: với  $I = \{1, 2, 3\}$ 
  - $\cap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ,
  - $\cup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

### 5. Cục bộ > Toàn bộ

- Thật sự chỗ này mình dùng chữ “Toàn cục” hay hơn “Toàn bộ”.
- Đại khái thì nó giống khái niệm tầm vực trong lập trình.

**6. Dạng chuẩn Prenex**

- Dạng chuẩn Prenex có dạng :

$$F = (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) M$$

+ M là CT không chứa lượng từ (quantifier-free).

+  $Q_i$  là  $\forall$  hoặc  $\exists$ .

VD:  $\exists x \exists y (\neg p(x) \vee q(y))$

- **Qui trình chuyển về dạng chuẩn Prenex :**

- o Thay thế toán tử  $\rightarrow$  bằng  $\vee$ , sử dụng  
(Sử dụng:  $X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$ )
- o Đẩy tất cả lượng từ ra phía trái  
(nếu cần thì đổi tên biến cục bộ).

**7. Soundness và Completeness:** (Chả hiểu gì cả, chép y chang slide – goodluck)

- Định lý (soundness).

Nếu  $F \vdash H$  thì  $F \models H$ .

- Định lý (completeness).

Nếu  $F \models H$  thì  $F \vdash H$ .

- Thủ tục để có  $F \vdash H$  được gọi là sound nếu có  $F \vdash H$  thì  $F \models H$ .
- Một số trường hợp, thủ tục có tính sound không tìm thấy lời giải, mặc dù lời giải tồn tại (\*).
- Thủ tục để có  $F \models H$  được gọi là complete nếu  $F \models H$  thì có  $F \vdash H$ .
- Một số trường hợp, thủ tục có tính complete nói có thể tìm thấy lời giải, mặc dù lời giải không tồn tại (\*).

## PHÂN GIẢI

### Lưu ý:

- Chỉ **công thức đóng** mới được **đánh giá đúng sai** trong một diễn dịch.  
Do đó, các công thức được đề cập từ đây trở đi **mặc nhiên là công thức đóng**.
- Bước thay thế (3.3) trong Dạng chuẩn Skolem khác với khái niệm Thay thế trong LLVT.

### 1. Mục tiêu:

Đánh giá CT: (hằng đúng/ hằng sai/ khả đúng/ khả sai)

### 2. Phương pháp:

- Kiểm tra tính hằng sai ta sẽ biết được CT thuộc loại nào trong 4 loại trên.
- Để làm được điều đó, ta có 2 phương pháp:
  - o Biến đổi công thức (vẫn còn tính hằng sai).
  - o Co nhỏ không gian diễn dịch.

### 3. Dạng chuẩn Skolem (PP1 - biến đổi CT):

Công thức F được chuyển về dạng :

1. Chuẩn Prenex (còn tương đương với CT ban đầu)
2. Chuẩn giao. (còn tương đương với CT ban đầu)
3. Lần lượt xóa các lượng từ  $\exists$  "-".
  - Với mỗi  $\exists x$ , thay **tất cả hiện hữu** của x bằng **hàm  $f_x$** . Hàm  $f_x$  có thông số là các biến của các lượng từ  $\forall$  đứng trước  $\exists x$ .
  - Nếu trước  $\exists x$  **không có lượng từ phổ dụng** thì thay bằng **hằng**.
4. Tập  $S_F$  có phần tử là các thành phần giao.

### 4. Mệnh đề:

- Mỗi phần tử của dạng chuẩn Skolem được gọi là 1 mệnh đề.
- **Mệnh đề** : hội các lưỡnng nguyên.
- **Mệnh đề đơn vị** : mệnh đề có 1 lưỡnng nguyên.
- **Mệnh đề rỗng** : là công thức hằng sai.
- Nhắc lại :

$$\begin{array}{ll} F \vee \perp = F & (\perp \text{ là công thức hằng sai}), \forall F. \\ F \wedge \top = F & (\top \text{ là công thức hằng đúng}), \forall F. \end{array}$$

### 5. Tính hằng sai:

- Định lý :  
Công thức F hằng sai nếu và chỉ nếu dạng chuẩn Skolem  $S_F$  hằng sai.