

II. Suy luận tự nhiên trong luận lý mệnh đề

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Chứng minh

Thí dụ :

Tam giác ABC có các cạnh là $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$. Chứng minh ABC vuông.

Chứng minh : [cuuduongthancong . com](http://cuuduongthancong.com)

(1) cạnh $AB = 3$.

(2) cạnh $BC = 4$.

(3) cạnh $CA = 5$.

(4) $CA^2 = BC^2 + AB^2$.

(5) Từ định lý Pythagore, tam giác ABC vuông.



Chứng minh

- Chuỗi 5 phát biểu :
 - (1) cạnh $AB = 3$
 - (2) cạnh $BC = 4$
 - (3) cạnh $CA = 5$
 - (4) $CA^2 = BC^2 + AB^2$
 - (5) Từ đlý Pythagore, tam giác ABC vuông

được gọi là một “chứng minh” theo nghĩa thông thường trong toán học.



Chứng minh

Hệ thống :

{cạnh $AB = 3$,
cạnh $BC = 4$,
cạnh $CA = 5$ }.

Chứng minh :

{tam giác ABC vuông}.

Mã hóa

{F1,
F2,
F3}

H



Chứng minh

- Công thức H được gọi là “*được chứng minh*” từ hệ thống F nếu viết ra được một “*chứng minh*” mà công thức cuối cùng trong chứng minh là H.
- Chứng minh là chuỗi các công thức *được viết ra* dựa vào hệ thống và các *qui tắc suy luận*.
- Qui tắc suy luận gồm :
 các *qui tắc suy luận tự nhiên* và
 các *suy luận đã được chứng minh*.



Qui tắc viết chuỗi công thức

- Viết ra một công thức (trong chuỗi công thức) trên 1 dòng bằng cách :

lấy một công thức từ hệ thống hoặc
áp dụng các qui tắc suy luận.

Với 2 cách trên, khi viết được dòng có nội dung là công thức cần chứng minh thì dừng.

cuu duong than cong . com



Chứng minh

- H được chứng minh từ F được ký hiệu là :
 $(F \vdash H)$.
- Ký hiệu $(F \vdash H)$ được gọi là một *sequent*.
F được gọi là *tiền đề* và H là *kết luận*.
- Nếu sequent không có tiền đề thì kết luận H được gọi là *định lý* $(\vdash H)$.
- Nếu $F \vdash G$ và $F \dashv\vdash G$ thì ký hiệu là
$$\begin{array}{c} F \dashv\vdash G \\ F \equiv G \end{array}$$
 hay $F \equiv G$



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc giao i ($\wedge i$)

dòng m : F

dòng k : G

dòng p : $F \wedge G$

Nếu có dòng m với nội dung F và dòng k với nội dung G thì có thể viết ra dòng mới p có nội dung là $(F \wedge G)$.

Ghi chú :

Ký hiệu i có nghĩa là introduction.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc giao \wedge ($\wedge e$)

dòng m : $F \wedge G$

dòng k : F

dòng p : G

Nếu đã có một dòng là $(F \wedge G)$ thì có thể viết ra dòng mới là F (hoặc G).

Ghi chú :

Ký hiệu e có nghĩa là elimination.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc điều kiện e (Modus ponens) ($\rightarrow e$)

dòng m : $F \rightarrow G$

dòng k : F

dòng p : G

Nếu có dòng F và dòng $F \rightarrow G$ thì viết được dòng mới G .

- * Từ modus ponens (MP) có nghĩa là affirming method.



Suy luận

Chứng minh : $P, Q, (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S) \vdash S$.

1	P	tiền đề
2	Q	tiền đề
3	$P \wedge Q$	$\wedge i$ 1, 2
4	$P \wedge Q \rightarrow R \wedge S$	tiền đề
5	$R \wedge S$	$\rightarrow e$ 3, 4
6	S	$\wedge e$ 5



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc điều kiện i (\rightarrow i)

dòng m : if F

dòng m+k : nif G

dòng m+k+1 : F \rightarrow G

Dòng m có nội dung là F (được chọn tùy ý), và thêm từ khóa 'if' trước công thức F.

(dòng này có nghĩa là giả sử có F).

Các dòng kế (m+1, ..., m+k) có thể sử dụng hay không sử dụng dòng m đều được coi như phụ thuộc vào sự hiện diện của giả thiết F.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc điều kiện i (tt)

Để chấm dứt ảnh hưởng của giả thiết F ở dòng k thêm từ khóa 'nif' trước nội dung của dòng này. Việc đặt từ khoá nif trước dòng nào là tùy thuộc người chứng minh.

Các dòng trong cấu trúc 'if-nif' có thể được xây dựng nhờ cả các dòng trên dòng m.

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc điều kiện i (tt)

Các dòng trong cấu trúc ‘if-nif’ không được sử dụng để xây dựng cho các dòng ngoài cấu trúc ‘if-nif’.

Công thức trên dòng “nif” (ngay sau từ khóa nif) được qui ước là thuộc cấu trúc “if ... nif”.

Sau cấu trúc ‘if-nif’ viết dòng kết hợp dòng ‘if’ và dòng ‘nif’ : $F \rightarrow G$.

Cấu trúc ‘if-nif’ có thể lồng vào nhau.



Suy luận^[3]

Chứng minh : $F \vdash G \rightarrow F$

- | | | | |
|---|-------------------|-----------------|---------|
| 1 | if | G | |
| 2 | nif | F | tiền đề |
| 3 | G \rightarrow F | \rightarrow i | 1, 2 |



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc bản sao (id)

dòng m : F

dòng k : F

chép lại công thức đã xuất hiện, nếu dòng k nằm trong phạm vi ảnh hưởng của dòng m.

cuu duong than cong . com



Suy luận^[3]

Chứng minh $\vdash F \rightarrow F$

- | | | | |
|---|-------------------|-----------------|---------------|
| 1 | if | F | |
| 2 | nif | F | bản sao của 1 |
| 3 | F \rightarrow F | \rightarrow i | 1-2 |



Suy luận^[3]

Chứng minh : $\vdash (F \rightarrow (G \rightarrow F))$

1 if F

2 if G

3 nif F bản sao 1

4 nif $G \rightarrow F$ \rightarrow i 2, 3

5 $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ \rightarrow i 1, 4

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc hội i (vi)

dòng m : F

dòng k : $F \vee G$

Nếu có dòng F thì viết được dòng mới $F \vee G$ với G là công thức bất kỳ.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc hội e ($\vee e$)

dòng m : $F \vee G$

dòng n : if F

dòng n+p : nif H . com

dòng k : if G

dòng k+q : nif H

dòng k+q+1 : H

Nếu F sinh ra H và G cũng sinh ra H thì
 $F \vee G$ cũng sinh ra H .



Suy luận^[3]

Chứng minh $(G \rightarrow H) \vdash (F \vee G) \rightarrow (F \vee H)$

1	$G \rightarrow H$	tiền đề
2	<i>if</i> $F \vee G$	
3	<u><i>if</i> F</u>	
4	<u><i>nif</i> $F \vee H$</u>	vì 3
5	<u><i>if</i> G</u>	
6	H	\rightarrow e 1, 5
7	<u><i>nif</i> $F \vee H$</u>	vì 6
8	<i>nif</i> $F \vee H$	ve 2, 3, 5
9	$(F \vee G) \rightarrow (F \vee H)$	\rightarrow i 2-8



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc phủ định ($\neg e$)

dòng m : $F \wedge \neg F$

dòng k : \perp

Dạng $(F \wedge \neg F)$ được gọi là công thức mâu thuẫn.
Công thức mâu thuẫn được biểu diễn bằng ký hiệu \perp .

Đây là công thức “mạnh” nhất.

- Dạng $(F \vee \neg F)$ được ký hiệu \top .

Đây là công thức “yếu” nhất.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc phủ định (\neg i)

dòng m : if F

dòng k : nif \perp

dòng k+1 : \neg F

Giả sử có dòng F và dẫn ra mâu thuẫn thì có thể viết ra dòng \neg F.



Suy luận

- Qui tắc mâu thuẫn (\perp e)

dòng k : \perp

dòng m : F

Nếu có dòng (k) \perp thì có thể viết ra dòng (m) F
với F là bất kỳ công thức nào.

Nhận xét :

Mọi công thức có thể được dẫn xuất từ công thức mâu thuẫn. Nói cách khác, công thức mâu thuẫn chứng minh được mọi công thức.



Suy luận

Chứng minh : $\neg F \vee G \vdash F \rightarrow G$

1	$\neg F \vee G$	tiền đề
2	if $\neg F$	
3	if F	
4	\perp	ve 2, 3
5	nif G	\perp e 4
6	nif $F \rightarrow G$	\rightarrow i 3, 5
7	if G	
8	if F	
9	nif G	bản sao 7
10	nif $F \rightarrow G$	\rightarrow i 8, 9
11	$F \rightarrow G$	ve 1, 2-10



Suy luận^[3]

Chứng minh $F \rightarrow G, F \rightarrow \neg G \vdash \neg F$

1	$F \rightarrow G$	tiền đề
2	$F \rightarrow \neg G$	tiền đề
3	if F	
4	G	$\rightarrow e$ 1, 3
5	$\neg G$	$\rightarrow e$ 2, 3
6	nif \bot	$\neg e$ 4, 5
7	$\neg F$	$\neg i$ 3, 6



Suy luận^[3]

Chứng minh $F \vdash \neg\neg F$

1	F	tiền đề
2	if $\neg F$	
3	nif \perp	$\neg e$ 1, 2
4	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2, 3



Suy luận^[3]

Chứng minh Modus tolens $F \rightarrow G, \neg G \vdash \neg F$

1	$F \rightarrow G$	tiền đề
2	$\neg G$	tiền đề
3	if F	CuuDuongThanCong.com
4	G	$\rightarrow e$ 1, 3
5	nif \perp	$\neg e$ 2, 4
6	$\neg F$	$\neg i$ 3, 5

- Từ modus tolens (MT) có nghĩa là denying method.



Suy luận^[3]

Chứng minh $F \rightarrow (G \rightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G$

1	$F \rightarrow (G \rightarrow H)$	tiền đề
2	F	tiền đề
3	$G \rightarrow H$	$\rightarrow e$ 1, 2
4	$\neg H$	tiền đề
5	$\neg G$	MT 3, 4



Suy luận^[3]

Chứng minh $F \rightarrow G \vdash \neg G \rightarrow \neg F$

- | | | |
|---|-----------------------------|--------------------|
| 1 | $F \rightarrow G$ | tiền đề |
| 2 | if $\neg G$ | |
| 3 | nif $\neg F$ | MT 1, 2 |
| 4 | $\neg G \rightarrow \neg F$ | (\rightarrow i) |



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc phủ định kép e ($\neg\neg e$)

dòng m : $\neg\neg F$

dòng k : F

Nếu có dòng $\neg\neg F$ thì có thể viết được dòng F .

cuu duong than cong . com



Suy luận^[3]

Chứng minh Reductio ad absurdum (RAA) :

$$\neg F \rightarrow \perp \vdash F$$

1	$\neg F \rightarrow \perp$	tiền đề
2	if $\neg F$	
3	nif \perp	$\neg e$ 1, 2
4	$\neg \neg F$	$\neg i$ 2, 3
5	F	$\neg \neg e$ 4



Suy luận^[3]

Nhận xét :

RAA còn gọi là Proof by contradiction (PBC), được viết dưới dạng qui tắc như sau :

- Qui tắc PBC

dòng m : if $\neg F$

dòng k : nif \perp

dòng k+1 : F

Nếu giả sử có dòng $\neg F$ và dẫn ra mâu thuẫn thì có thể viết ra dòng F.



Suy luận^[3]

Chứng minh **LEM** (the law of the excluded middle) :

		$\vdash F \vee \neg F$	
1	if	$\neg(F \vee \neg F)$	
2		if F	
3		$F \vee \neg F$	vì 2
4	nif	\perp	$\neg e$ 1, 3
5		$\neg F$	$\neg i$ 2-4
6		$F \vee \neg F$	vì 5
7	nif	\perp	$\neg e$ 1, 6
8		$\neg \neg(F \vee \neg F)$	$\neg i$ 1-7
9		$F \vee \neg F$	$\neg \neg e$ 8



Suy luận^[3]

Chứng minh $F \rightarrow G \vdash \neg F \vee G$

1	$F \vee \neg F$	LEM
2	if $\neg F$	
3	nif $\neg F \vee G$	vi 2
4	if F	
5	$F \rightarrow G$	tiền đề
6	G	$\rightarrow e$ 4, 5
7	nif $\neg F \vee G$	vi 6
8	$\neg F \vee G$	ve 1, 2, 4



Suy luận^[3]

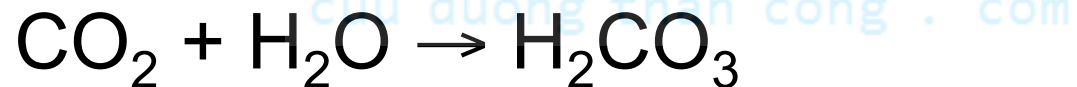
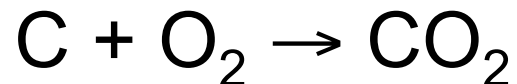
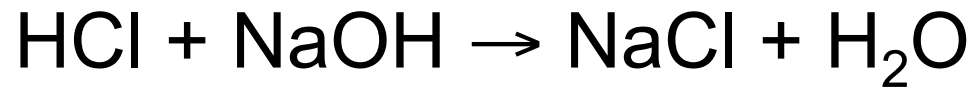
Chứng minh $\neg F \vee \neg G \vdash \neg(F \wedge G)$

1	if	$F \wedge G$	
2		F	$\wedge e$ 1
3		G	$\wedge e$ 1
4		$\neg F \vee \neg G$	tiền đề
5	if	$\neg F$	
6	nif	\perp	$\neg e$ 2,5
7	if	$\neg G$	
8	nif	\perp	$\neg e$ 3,7
9	nif	\perp	$\vee e$ 4-8
10		$\neg(F \wedge G)$	$\neg i$ 1-9



Ứng dụng của chứng minh^[7]

- Có các phản ứng hóa học sau :

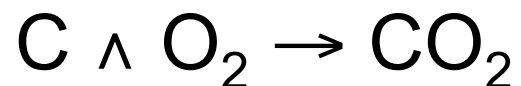
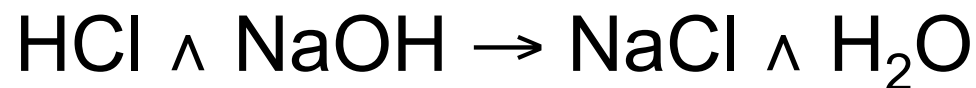


Chỉ rằng có thể có H_2CO_3 khi có HCl , NaOH , O_2 và C .



Ứng dụng của chứng minh^[7]

- Các phân tử HCl, NaOH, O₂ và C được hình thức hóa như là một hệ thống và chứng minh rằng H₂CO₃ được chứng minh từ hệ thống này.
- Các phản ứng hóa học được hình thức hóa như sau :



Ứng dụng của chứng minh

Bài toán trở thành chứng minh :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{HCl} \wedge \text{NaOH} \rightarrow \text{NaCl} \wedge \text{H}_2\text{O}, \\ \text{C} \wedge \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2, \\ \text{CO}_2 \wedge \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3, \\ \text{HCl}, \\ \text{NaOH}, \\ \text{O}_2, \\ \text{C} \end{array} \right\} \vdash \text{H}_2\text{CO}_3.$$



Ứng dụng của chứng minh

Chứng minh :

1	HCl	tiền đề
2	NaOH	tiền đề
3	$\text{HCl} \wedge \text{NaOH}$	\wedge 1, 2
4	$\text{HCl} \wedge \text{NaOH} \rightarrow \text{NaCl} \wedge \text{H}_2\text{O}$	tiền đề
5	$\text{NaCl} \wedge \text{H}_2\text{O}$	\rightarrow e 3, 4
6	H_2O	\wedge e 5
7	C	tiền đề
8	O_2	tiền đề
9	$\text{C} \wedge \text{O}_2$	\wedge 7, 8
10	$\text{C} \wedge \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$	tiền đề
11	CO_2	\rightarrow e 9, 10
12	$\text{CO}_2 \wedge \text{H}_2\text{O}$	\wedge 6, 11
13	$\text{CO}_2 \wedge \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3$	tiền đề
14	H_2CO_3	\rightarrow e 12, 13



Chứng minh bằng phản chứng

- Một số công thức khó chứng minh được bằng cách trực tiếp.
- Logic cổ điển chấp nhận cách chứng minh gián tiếp - chứng minh $\neg F$ để dẫn đến mâu thuẫn.
- Nhưng logic trực giác (intuitionistic logic) không đồng ý hai qui tắc :

$\vdash F \vee \neg F$ (LEM) và

$\vdash \neg \neg F \rightarrow F$ ($\neg\neg e$)



Bài tập

Chương 2 : Luận lý mệnh đề

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Suy luận

Chứng minh

1. $\neg G \rightarrow \neg F \vdash F \rightarrow \neg\neg G$
2. $\vdash (G \rightarrow H) \rightarrow ((\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow H))$
3. $(F \wedge G) \rightarrow H \vdash F \rightarrow (G \rightarrow H)$
4. $F \rightarrow (G \rightarrow H) \vdash (F \wedge G) \rightarrow H$
5. $F \rightarrow G \vdash (F \wedge H) \rightarrow (G \wedge H)$



Suy luận

$$6. (F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$$

$$7. F \wedge (G \vee H) \vdash (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

$$8. F \rightarrow \neg F \vdash \neg F$$

$$9. F \rightarrow (G \rightarrow H), F, \neg H \vdash \neg G \text{ (không dùng luật MT)}$$

$$10. (F \wedge \neg G) \rightarrow H, \neg H, F \vdash G.$$

cuu duong than cong . com



Hết slide

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

