

# BÀI TẬP HÀM NHIỀU BIẾN

## Tìm miền xác định của hàm

1)  $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .      2)  $u = \arcsin \frac{x}{y^2}$ .      3)  $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$

## Giới hạn của hàm nhiều biến

1) Chứng minh rằng đối với hàm  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ ;

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1$ ;  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1$ . Trong khi đó  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  không tồn tại.

2) Chứng minh rằng đối với hàm  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ . Có  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$ . Nhưng không tồn tại  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ .

3) Tìm các giới hạn kép sau đây:

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$ .

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}$ .

c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$ .

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$ .

e)  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ .

f)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

## Xét sự liên tục của hàm nhiều biến

1) Chứng minh rằng hàm số:

Liên tục theo mỗi biến  $x$  và  $y$  riêng biệt (với giá trị cố định của biến kia), nhưng không liên tục đồng thời theo cả hai biến đó.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

2) Chứng minh rằng hàm số:

Liên tục tại điểm  $(0, 0)$ .

$$\begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

## Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

1) Cho hàm số:  $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$  tìm  $f'_x(x, 1)$ .

2) Cho  $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$ . Tìm  $\frac{\partial u}{\partial x}$  và  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

3)  $z = e^{x^2+y^2}$ , tìm  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

4) Chứng tỏ rằng, hàm  $z = y \ln(x^2 - y^2)$ , thỏa mãn phương trình:  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

### Xét sự khả vi của hàm

1) Cho hàm  $u = f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ . Hàm số đó có khả vi tại điểm  $O(0, 0)$  hay không?

2) Khảo sát tính khả vi của hàm  $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$  khi  $x^2 + y^2 > 0$  và  $f(0, 0) = 0$  tại điểm  $O(0, 0)$ .

3) Chứng minh rằng  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  liên tục tại  $O(0, 0)$ , có cả hai đạo hàm riêng  $f'_x(0, 0)$ ,  $f'_y(0, 0)$  tại điểm đó, tuy nhiên hàm này không khả vi tại  $O(0, 0)$ .

4) Cho hàm 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ khi } x \text{ ngoài đoạn } [a, b]$$

Chứng minh rằng trong lân cận của điểm  $(0, 0)$ , hàm liên tục và có các đạo hàm riêng  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  giới nội. Tuy nhiên hàm đó không khả vi tại điểm  $O(0, 0)$ .

### Tìm vi phân của hàm

1) Tìm du nếu:

a.)  $u = \arctg \frac{x+y}{x-y}$ .

b)  $u = x^{y^2z}$ .

2) Bằng cách thay số gia của hàm bởi vi phân, hãy tính gần đúng:

a.)  $\sqrt{\sin^2 1.55 + 8} \cdot e^{0.015}$ .

b)  $\operatorname{arctg} \frac{1.02}{0.95}$ .

### Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

1) Cho  $u = y \ln x$ . Tìm  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

2) Cho  $u = \sin x \cdot \sin y$ . Tìm  $d^2 u$ .

3) Cho  $u = x^2 y$ . Tìm  $d^3 u$ .

### Tìm cực trị của hàm nhiều biến

1) Tìm cực trị của hàm

a.)  $u = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .

b)  $u = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$ .

c)  $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{1}{y} + 2.$

d)  $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

2) Tìm cực trị có điều kiện của hàm:  $u = xy$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 2a^2$ .

3) Tìm cực trị của hàm  $f(x, y, z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z}.$

4) Tìm cực trị của hàm  $f(x, y) = x + y$  với điều kiện:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$

5) Tìm cực trị của hàm  $f(x, y, z, u) = x + y + z + u$  với điều kiện:  
 $g(x, y, z, u) = 16 - xyzu = 0.$