

# BÀI TẬP CHƯƠNG PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

GV: Lê Nguyễn Kim Hằng

1/ Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a.  $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$

c.  $z = \arctg\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

b.  $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

d.  $z = \int_x^y \frac{\cos t}{t^2 + 3} dt$

2/ Tính các giới hạn sau

a.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

c.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$

b.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{2x}$

d.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + 3y^2}{x^4 + y^4}$

3/ Chứng minh rằng hàm số  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  thỏa phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ (phương trình Laplace).}$$

4/ Cho  $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$ . Hãy tính định thức

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

5/ Tính vi phân toàn phần cấp 1 và cấp 2 của hàm số

a.  $z = x^3 y^2 + 9y^4 - 5$

b.  $z = \ln(x^2 + 3y)$

6/ Tính gần đúng các giá trị sau

a.  $\ln(0,99^4 + 1,03^4 - 1)$

c.  $(2,03)^{2,98}$

b.  $\sqrt{3,02^2 + 4,03^2}$

d.  $\sin 29^0 \cdot \cos 62^0$

7/ Chứng minh rằng hàm số  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$  thỏa mãn phương trình

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$$

8/ Tính  $\frac{dz}{dt}$  biết  $z = \ln\left(\sin \frac{x}{y}\right)$ , trong đó  $x = 3t^2$ ,  $y = \sqrt{t^2 + 1}$

9/ Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  biết  $z = u^2 \ln v$ , trong đó  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = e^{xy}$

10/ Chứng minh rằng hàm số  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  có  $d^2u \geq 0$  với mọi  $x, y, z$  không đồng thời bằng không.

11/ Giả sử  $z$  là hàm theo biến  $x, y$  xác định bởi phương trình  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

12/ Tìm cực trị của các hàm số sau

a.  $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$

b.  $z = x^3 + 15xy + y^3$

c.  $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$

d.  $z = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$

e.  $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

f.  $z = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

13/ Tìm cực trị có điều kiện tương ứng sau

a.  $z = x^2 + y^2$  với  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

b.  $z = x + 2y$  với  $x^2 + y^2 = 5$

c.  $u = x + y + z$  với  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

d.  $u = x + 2y + 3z$  với điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ .

14/ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau

a.  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  trên miền  $D$  giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0, y = 0$  và  $x + y = -3$ .

b.  $z = x^2 + 2y^2 - x$  trên hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$

c.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  trên miền  $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$

d.  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  trên hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 25$

15/ Tìm trên elip  $x^2 + 9y^2 = 9$  các điểm gần nhất và xa nhất đối với đường thẳng  $4x + 9y = 16$ .

16/ Tìm đạo hàm theo hướng  $\overrightarrow{AB}$  của hàm  $u = xy^2z^3$  tại điểm  $A(3, 2, 1)$  với  $B = (5, 4, 2)$ .

17/ Tìm đạo hàm của  $z = \ln(x^2 + y^2)$  tại điểm  $M(3, 4)$  theo hướng gradient của hàm  $z$  tại điểm ấy.

18/ Tìm độ lớn và hướng của  $\text{grad}u$  với  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  tại điểm  $A(2, 1, 1)$ . Tại những điểm nào thì  $\text{grad}u$  vuông góc với trục  $Oz$ ?  $\text{grad}u$  triệt tiêu?

19/ Tính các tích phân sau:

a.  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2}} (x^2 + y^2) dx dy$

b.  $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3 - 1) dx$

c.  $\iint_D x\sqrt{y} dx dy$  với  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $x = y^2$ ,  $x = 2 - y^2$

d.  $\iint_D y \ln x dx dy$  với  $D$  là miền giới hạn bởi các đường cong  $xy = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 2$

e.  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$  với  $D$  là nửa hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$  nằm phía trên trục hoành.

f.  $\iint_D (3x + y) dx dy$  với  $D$  xác định bởi:  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $y \geq \frac{2}{3}x + 3$ .

20/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 4y = 0$

21/ Tính diện tích phần mặt paraboloid  $y = 1 - x^2 - z^2$  và  $x^2 + z^2 = 1$

22/ Tính thể tích phần khối cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  bên trong mặt trụ  $x^2 + y^2 = 4$ .