

Bài tập **ĐẠO HÀM RIÊNG – VI PHÂN TOÀN PHẦN** **ĐẠO HÀM HÀM HỢP – ĐẠO HÀM HÀM ẨN**

A. Đạo hàm riêng:

Tính các đạo hàm riêng:

$$1. z = e^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} \quad 2. z = x^y \quad 3. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad 4. u = \left(\frac{y}{z}\right)^x$$

$$5. \text{Tính } \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \text{ nếu } f(x,y) = \int_{x+y}^{x^2+y^2} e^t dt$$

$$6. \text{CMR: nếu } f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \text{ thì:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

$$7. \text{Cho hàm } f(x,y) = \frac{y^2}{2x} + \frac{y}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ CMR hàm thỏa phương trình: } x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^3}{x}$$

$$8. \text{Cho hàm } f(x, y, z) = (z-y)(x-z)(y-x).$$

$$\text{CMR: hàm thỏa phương trình: } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$9. \text{Cho } x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta. \text{ Tính: } \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix}$$

$$10. \text{Tìm hàm } f(x,y), \text{ biết rằng: } \frac{\partial f}{\partial x} = x - 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = y - x^2$$

B. Vi phân hàm số:

Tính các vi phân của các hàm sau:

$$11. z = e^{xy} \quad 12. \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad 13. \ln\left(\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad 14. (xy)^z$$

$$15. \text{Tính } df(0, 1, 2) \text{ biết } f(x, y, z) = \frac{z^2}{x+y} \quad 16. \text{Tính } df(1, 1) \text{ biết } f(x, y, z) = xy.e^{x+y}$$

$$17. \text{Tính gần đúng } \sqrt{3,98^2 + 3,03^2} \quad 18. \text{Tính gần đúng } (1,99)^{3,02}$$

$$19. \text{Tính gần đúng } \sin 32^\circ \cos 59^\circ \quad 20. \text{Tìm } d^2f \text{ nếu } f(x,y) = x^y$$

$$21. \text{Tìm } d^2f \text{ nếu } f(x,y) = xy + yz + x$$

$$22. \text{Tìm } d^2f(1, 1) \text{ nếu } f(x,y) = x^2 + x y + y^2 - 4 \ln x - 2 \ln y$$

23. Tìm: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, nếu $f(x, y) = x \ln(xy)$
24. Tính $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}$, nếu $f(x, y) = x^3 \sin y + y^3 \sin x$
25. Tính $d^3 f$ nếu $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy(x - y)$
26. Tính $d^3 f$ nếu $f(x, y) = xyz$
27. Tính $d^2 f$ (2,3, 4) nếu: $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
28. Tính $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$, nếu $f(x, y) = \ln(x + y + z)$

C. ĐẠO HÀM HÀM SỐ HỢP

29. Tính $\frac{df}{dt}$, nếu $f(x, y) = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$
30. Tính $\frac{df}{dt}$, nếu $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$
31. Tính $\frac{df}{dy}, \frac{\partial f}{\partial y}$, nếu $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ và $x = \frac{1}{2} y^2 + y$
32. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, nếu $f(x, y) = u \ln v$ và $u = xy$, $v = x^2 - y^2$
33. Tính df nếu $f(x, y) = u^2 v - uv^2$, $u = x \cos y$, $v = y \sin x$.
34. CMR: hàm $g = y.f(\cos(x-y))$ thỏa phương trình:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{g}{y}, \text{ giả sử } f \text{ là hàm khả vi.}$$

35. CMR: hàm $g = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ thỏa phương trình:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{g}{y^2}, \text{ giả sử } f \text{ là hàm khả vi.}$$

36. CMR: hàm $g = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ thỏa phương trình:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{g}{y^2}, \text{ giả sử } f \text{ là hàm khả vi.}$$

37. CMR: hàm $h(x, y) = x.f(x+y) + y.g(x+y)$ thỏa phương trình:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \text{ giả sử } f, g \text{ là hàm khả vi.}$$

38. CMR: $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ nếu $h = f(x-at) + g(x - at)$ trong đó f, g là hàm khả vi. và a là hằng số.

39. CMR hàm số $z = \frac{x^2}{3y} f(xy)$, với f là hàm khả vi, thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - xy \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

40. CMR hàm số $z = e^x f\left(x.e^{\frac{y^2}{2x^2}}\right)$, với f là hàm khả vi, thỏa mãn phương trình:

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

D. ĐẠO HÀM HÀM SỐ ẨN:

41. Tính y'_x biết $\cos(xy) - e^{xy} - xy^2 = 0$

42. Tính y'_x biết $x^y = y^x$

43. Tính $y'(1)$ và $y''(1)$ nếu biết: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và $y(1) = 2$

44. Tính z'_x, z'_y biết $x/z = \ln(z/y) + 10$

45. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, nếu $\frac{xy}{z} - z \ln(y+z) = 0$

46. Cho $z = y + \arctg\left(\frac{x}{z-y}\right)$. Tính z'_x và z''_{xx}

47. Cho $u = x \cos z + z \sin y$ với $z = z(x, y)$ xác định bởi $xyz + e^z = 0$. Tính u'_x và u'_y

48. Cho $u = z = \frac{x+z}{y+z}$. Tính u'_x và u'_y với $z = z(x, y)$ xác định bởi $ze^z = xe^x + ye^y$.

49. Tìm $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ biết: x, y, z là nghiệm hệ phương trình:

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

50. Tìm $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ biết: biết u, v là hàm số của x và y xác định bởi: $\begin{cases} u + v - x = 0 \\ u^2 + v^2 - y = 0 \end{cases}$

51. Tính dz nếu $yz - e^{\frac{z}{x}} + x^2 + y^2 = 0$

52. Tính d^2z nếu $x + y + z = ez$

53. Giả sử $z = z(x, y)$ là hàm khả vi được xác định từ phương trình $z^3 - yz + x = 0$. Biết $z(3, -2) = 2$. Tính $dz(3, -2)$ và $d^2z(3, -2)$.