

ÔN TẬP VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ - GIỚI HẠN HÀM SỐ

I. Giới hạn dãy số:

I.1. Các giới hạn cơ bản:

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} &= 0 (\alpha > 0) & 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} &= 1, \forall p & 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 (\alpha > 0) \\
 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(1+a)^n} &= 0 (a > 0, \forall p) & 5. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= 0, (|q| < 1) & 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \\
 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= e^{-1} & 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^p n}{n^\varepsilon} &= 0 (\alpha > 0, \forall p) & 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= e
 \end{aligned}$$

I.2. Định lý giới hạn kẹp

Cho các dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$.

Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n \geq n_0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Bài tập

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n} & & 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} & & 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \\
 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & & 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 1} & & 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \\
 7^*. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) & & 8. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n, |q| < 1 & & \\
 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right] & & 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & & \\
 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) & & 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n} & & \\
 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right] & & 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} & &
 \end{aligned}$$

II. Giới hạn hàm số

II.1 Các giới hạn cơ bản:

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tgt}{t} = 1 & 2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 & 3. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} &= \frac{1}{2} \\
 4. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^a - 1}{t} &= a & 5. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^p}{e^t} &= 0, \forall p & 6. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln^p t}{t^\alpha} &= 0, \alpha > 0, \forall p
 \end{aligned}$$

II.2 Quy tắc L'Hospital:

Cho $x_0 \in \mathbb{R}$ hoặc $x_0 = \pm \infty$.

f, g có đạo hàm liên tục thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

Giả sử tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Khi đó: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

II.3 Giới hạn dạng: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$

1. **Giả sử** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a (a > 0)$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ (a, b hữu hạn) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b$

2. **Tìm** $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)}$. Đặt $y = u^v$ thì $\ln y = v \cdot \ln u$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x) = a$ **thì** $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = e^a$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ **có dạng 1^∞ . Khi đó:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[1 + (f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]^{(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)-1]^{g(x)}}$$

Bài tập:

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x}) \cdot (1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^3} \right]$

Bài 2: Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} \cdot x^{-100}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{\frac{1+x^2}{2}}$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{tg \frac{\pi \cdot x}{2}}$

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(ctgx - \frac{1}{x} \right)$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$