

# PHÂN TÍCH ĐỘ NHẠY

Phân tích này nhằm tìm hiểu xem phương án tối ưu sẽ thay đổi như thế nào khi các yếu tố đầu vào ( $C_j$ ,  $b_i$ ) thay đổi.

## 1- Phân tích khoảng biến thiên của hệ số $C_j$ :

Nếu các hệ số  $C_j$  của các hoạt động biến thiên trong khoảng Lower Bound - Upper Bound thì :

- **Không làm thay đổi** : Thành phần và giá trị của các hoạt động ( $x_j$ ) trong giải pháp tối ưu, mức lợi lỏng (Slack/Surplus) và khoảng biến thiên của các ràng buộc  $b_i$  (RHS ranges).
- **Có thể làm thay đổi** : Chi phí rút giảm (Reduced Cost), Giá đối ngẫu (Dual Value), và khoảng biến thiên hệ số  $C_j$  của các hoạt động (Objective Coefficient Ranges).

# CÁCH XÁC ĐỊNH KHOẢNG BIẾN THIÊN CỦA HỆ SỐ $C_j$ TRONG BÀI TOÁN MAX

1-Trường hợp có biến không cơ sở trong giải pháp tối ưu : [VD](#)

- Phần tăng thêm : bằng giá trị | Reduced Cost | của biến không cơ sở tương ứng.
- Phần giảm đi: Không bị chặn (No Limit).

2-Trường hợp có biến cơ sở trong giải pháp tối ưu : Dựa vào bảng đơn hình cuối cùng :

- Phần tăng thêm:  $\text{Min} (|Z_j/a_{ij}|) \quad (a_{ij} < 0)$
- Phần giảm đi:  $\text{Min} (Z_j/a_{ij}) \quad (a_{ij} > 0)$

Trong đó:  $i$  là hàng chứa ẩn cơ bản  $X_j$ ;  $j$  là cột chứa ẩn không cơ bản  $S_i$

Ví dụ : Xét mô hình:

$$\text{Max } (Z = 5 * x_1 + 3 * x_2)$$

$$6 * x_1 + 2 * x_2 \leq 36$$

$$5 * x_1 + 5 * x_2 \leq 40$$

$$2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, ta có bảng đơn hình cuối cùng như sau:

Ấn CB	Hệ số (Cb)	5	3	0	0	0	Hằng số bi
		x1	x2	s1	s2	s3	
x1	5	1	0	1/4	-1/10	0	5
x2	3	0	1	-1/4	3/10	0	3
s3	0	0	0	1/2	-1	1	6
$Z_j = \sum_{i=1}^3 C_b.a_{ij}$		5	3	1/2	2/5	0	34
$C_j - Z_j$		0	0	- 1/2	- 2/5	0	

Khoảng biến thiên của hệ số C1:

$$\text{Xét hàng 1: Phần tăng thêm} = \text{Min} \left| \frac{Z_4}{a_{14}} \right| = \text{Min} \left| \frac{2/5}{-1/10} \right| = 4$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min} \left( \frac{Z_3}{a_{13}} \right) = \text{Min} \left( \frac{1/2}{1/4} \right) = 2$$

Giá trị hiện tại = 5  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của C1: (3 ; 9)

Khoảng biến thiên của hệ số C2:

$$\text{Xét hàng 2: Phần tăng thêm} = \text{Min} \left| \frac{Z_3}{a_{23}} \right| = \text{Min} \left| \frac{1/2}{-1/4} \right| = 2$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min} \left( \frac{Z_4}{a_{24}} \right) = \text{Min} \left( \frac{2/5}{3/10} \right) = 1,33$$

Giá trị hiện tại = 3  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của C2: (1,67 ; 5)

# CÁCH XÁC ĐỊNH KHOẢNG BIẾN THIÊN CỦA HỆ SỐ $C_j$ TRONG BÀI TOÁN MIN

1-Trường hợp có biến không cơ sở trong giải pháp tối ưu :

- Phần tăng thêm : Không bị chặn (No Limit).
- Phần giảm đi: Bằng giá trị | Reduced Cost | của biến không cơ sở tương ứng.

2-Trường hợp có biến cơ sở trong giải pháp tối ưu : Dựa vào bảng đơn hình cuối cùng :

- Phần tăng thêm:  $\text{Min} (|Z_j/a_{ij}|) \quad (a_{ij} > 0)$
- Phần giảm đi:  $\text{Min} (Z_j/a_{ij}) \quad (a_{ij} < 0)$

Trong đó:  $i$  là hàng chứa ẩn cơ bản  $X_j$  ;  $j$  là cột chứa ẩn không cơ bản  $S_i$ .

Ví dụ: Xét mô hình :

$$\text{Min } (Z = 2 * x_1 + 4 * x_2)$$

$$2 * x_1 + x_2 \geq 14$$

$$x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1 + 3 * x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, ta có bảng đơn hình cuối cùng như sau:

ÂnCB	Hệ số Cb	2	4	0	0	0	M	M	M	Hằng số bi
		x1	x2	s1	s2	s3	A1	A2	A3	
x1	2	1	0	0	-3/2	1/2	0	3/2	-1/2	9
s1	0	0	0	1	-5/2	1/2	-1	5/2	-1/2	7
x2	4	0	1	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	3
Zj = $\sum C_b.a_{ij}$		2	4	0	-1	-1	0	1	1	30
Cj - Zj		0	0	0	1	1	M	M-1	M-1	

Khoảng biến thiên của hệ số C1:

$$\text{Xét hàng 1: Phần tăng thêm} = \text{Min} \left| \frac{Z_5}{a_{15}} \right| = \text{Min} \left| \frac{-1}{1/2} \right| = 2$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min} \left( \frac{Z_4}{a_{14}} \right) = \text{Min} \left( \frac{-1}{-3/2} \right) = 0,667$$

Giá trị hiện tại = 2  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của C1: (1,33 ; 4)

Khoảng biến thiên của hệ số C2:

$$\text{Xét hàng 3: Phần tăng thêm} = \text{Min} \left| \frac{Z_4}{a_{34}} \right| = \text{Min} \left| \frac{-1}{1/2} \right| = 2$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min} \left( \frac{Z_5}{a_{35}} \right) = \text{Min} \left( \frac{-1}{-1/2} \right) = 2$$

Giá trị hiện tại = 4  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của C2: (2 ; 6)

## 2- Phân tích khoảng biến thiên các ràng buộc (bi) :

Nếu giá trị các ràng buộc (bi) biến thiên trong khoảng Lower Bound - Upper Bound thì :

- **Không làm thay đổi** : Thành phần các hoạt động ( $x_j$ ), giá đối ngẫu (Dual Value) , chi phí rút giảm (Reduced Cost) và khoảng biến thiên của các hệ số  $C_j$  (Objective Coefficient Ranges).

- **Có thể làm thay đổi** : Mức độ của các hoạt động trong giải pháp tối ưu ( $x_j$ ), mức lợi lỏng (Slack/Surplus) và khoảng biến thiên của các ràng buộc bi (RHS Range).



## CÁCH XÁC ĐỊNH KHOẢNG BIẾN THIÊN CỦA HỆ SỐ $b_i$ TRONG BÀI TOÁN MAX

1-Trường hợp nguồn thứ  $i$  sử dụng không hết :

- Phần tăng thêm: Không bị chặn (No Limit).
- Phần giảm đi: bằng giá trị thừa (Slack) của nguồn thứ  $i$  tương ứng.

2-Trường hợp nguồn thứ  $i$  sử dụng hết :

- Phần tăng thêm:  $\text{Min} (|b_i/a_{ij}|) \quad (a_{ij} < 0)$
- Phần giảm đi:  $\text{Min} (b_i/a_{ij}) \quad (a_{ij} > 0)$

Trong đó:  $i$  là hàng chứa  $a_{ij}$  âm (hay dương) ;  $j$  là cột chứa biến  $S_i$  tương ứng.

Ví dụ : Xét mô hình:

$$\text{Max } (Z = 5 * x_1 + 3 * x_2)$$

$$6 * x_1 + 2 * x_2 \leq 36$$

$$5 * x_1 + 5 * x_2 \leq 40$$

$$2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, ta có bảng đơn hình cuối cùng như sau:

Ấn CB	Hệ số (Cb)	5	3	0	0	0	Hằng số bi
		x1	x2	s1	s2	s3	
x1	5	1	0	1/4	-1/10	0	5
x2	3	0	1	-1/4	3/10	0	3
s3	0	0	0	1/2	-1	1	6
$Z_j = \sum_{i=1}^3 C_b.a_{ij}$		5	3	1/2	2/5	0	34
$C_j - Z_j$		0	0	- 1/2	- 2/5	0	

Khoảng biến thiên của hệ số b1 (Sử dụng hết):

$$\text{Xét cột 3: Phần tăng thêm} = \text{Min}\left(\left|\frac{b_2}{a_{23}}\right|\right) = \text{Min}\left(\left|\frac{3}{-\frac{1}{4}}\right|\right) = 12$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min}\left(\frac{b_1}{a_{13}}, \frac{b_3}{a_{33}}\right) = \text{Min}\left(\frac{5}{1/4}, \frac{6}{1/2}\right) = 12$$

Giá trị hiện tại = 36  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của b1: (24 ; 48)

Khoảng biến thiên của hệ số b2 (Sử dụng hết):

$$\text{Xét cột 4: Phần tăng thêm} = \text{Min}\left|\frac{b_1}{a_{14}}, \frac{b_3}{a_{34}}\right| = \text{Min}\left|\frac{5}{-1/10}, \frac{6}{-1}\right| = 6$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min}\left(\frac{b_2}{a_{24}}\right) = \text{Min}\left(\frac{3}{3/10}\right) = 10$$

Giá trị hiện tại = 40  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của b2: (30 ; 46)

Khoảng biến thiên của hệ số b3 (Sử dụng thừa):

Phần tăng thêm = No limit

Phần giảm đi = Slack = 6

Giá trị hiện tại = 28  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của b3: (22 ; No limit)

# CÁCH XÁC ĐỊNH KHOẢNG BIẾN THIÊN CỦA HỆ SỐ $b_i$ TRONG BÀI TOÁN MIN

1-Trường hợp nguồn thứ  $i$  cung cấp thừa:

- Phần tăng thêm: bằng giá trị thừa (Surplus) của nguồn thứ  $i$  tương ứng.
- Phần giảm đi: Không bị chặn (No Limit).

2-Trường hợp nguồn thứ  $i$  cung cấp vừa đủ:

- Phần tăng thêm:  $\text{Min } (b_i/a_{ij}) \quad (a_{ij} > 0)$
- Phần giảm đi:  $\text{Min } (|b_i/a_{ij}|) \quad (a_{ij} < 0)$

Trong đó:  $i$  là hàng chứa  $a_{ij}$  âm (hay dương) ;  $j$  là cột chứa biến Si tương ứng.

Ví dụ: Xét mô hình :

$$\text{Min } (Z = 2 * x_1 + 4 * x_2)$$

$$2 * x_1 + x_2 \geq 14$$

$$x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1 + 3 * x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, ta có bảng đơn hình cuối cùng như sau:

ẤnCB	Hệ số Cb	2	4	0	0	0	M	M	M	Hằng số bi
		x1	x2	s1	s2	s3	A1	A2	A3	
x1	2	1	0	0	- 3/2	1/2	0	3/2	- 1/2	9
s1	0	0	0	1	- 5/2	1/2	-1	5/2	- 1/2	7
x2	4	0	1	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	3
Zj = $\sum C_b.a_{ij}$		2	4	0	-1	-1	0	1	1	30
Cj - Zj		0	0	0	1	1	M	M-1	M-1	

Khoảng biến thiên của hệ số b1 (Cung cấp thừa):

Phần tăng thêm = 7

Phần giảm đi = No limit

Giá trị hiện tại = 14  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của b1: (No limit ; 21)

Khoảng biến thiên của hệ số b2 (Cung cấp vừa đủ):

Xét cột 4: Phần tăng thêm =  $Min \left( \frac{b_3}{a_{34}} \right) = Min \left( \frac{3}{1/2} \right) = 6$

Phần giảm đi =  $Min \left( \left\lfloor \frac{b_1}{a_{14}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_3}{a_{34}} \right\rfloor \right) = Min \left( \left\lfloor \frac{9}{-3/2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{7}{-5/2} \right\rfloor \right) = 2,8$

Giá trị hiện tại = 12  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của b2: (9,2 ; 18)

Khoảng biến thiên của hệ số  $b_3$  (Cung cấp vừa đủ):

$$\text{Xét cột 5: Phần tăng thêm} = \text{Min} \left( \frac{b_1}{a_{15}}; \frac{b_3}{a_{35}} \right) = \text{Min} \left( \frac{9}{1/2}; \frac{7}{1/2} \right) = 14$$

$$\text{Phần giảm đi} = \text{Min} \left( \left\lfloor \frac{b_3}{a_{34}} \right\rfloor \right) = \text{Min} \left( \left\lfloor \frac{3}{-1/2} \right\rfloor \right) = 6$$

Giá trị hiện tại = 18  $\rightarrow$  Khoảng biến thiên của  $b_3$ : (12 ; 32)

Chú ý: Kết quả phân tích chỉ đúng khi thay đổi giá trị của một yếu tố nào đó trong khoảng biến thiên và cố định các yếu tố còn lại.