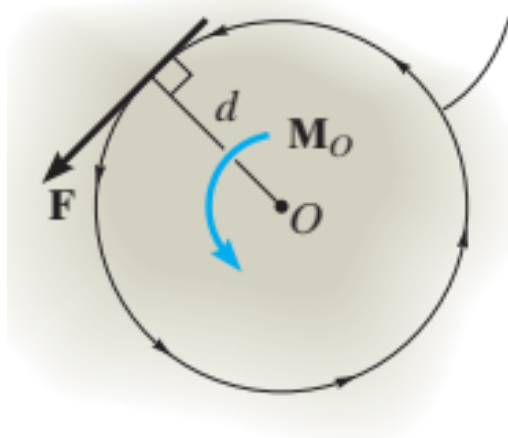


ALWAYS
LEARNING

Mô men của lực

Mô men lực là gì? Là đại lượng cơ học đặc trưng cho khả năng gây **QUAY** của lực quanh một **TÂM (ĐIỂM)** hay quanh một **TRỤC**

Mô men lực đối với tâm quay (quay trong mặt phẳng)



Độ lớn mô men lực đối với tâm quay O

$$M_O = \pm F \cdot d$$

M_O là mô men lực đối với (hay quay quanh) tâm O

F là trị số lực

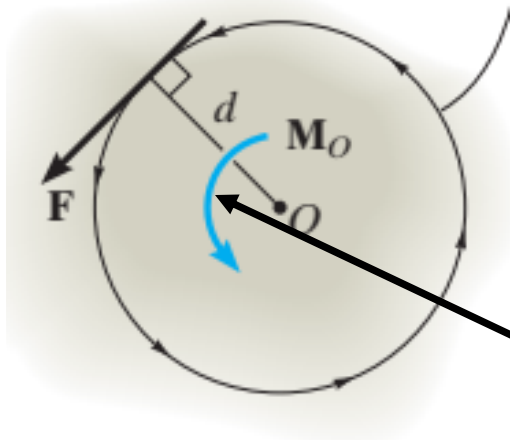
d là cánh tay đòn (khoảng cách vuông góc đo từ tâm quay đến giá của lực)



Mô men của lực

Mô men lực là gì? Là đại lượng cơ học đặc trưng cho khả năng gây **QUAY** của lực quanh một **TÂM (ĐIỂM)** hay quanh một **TRỤC**

Mô men lực đối với tâm quay (quay trong mặt phẳng)



Dấu + thể hiện chiều quay (mũi tên quay màu xanh thể hiện chiều quay của lực **F** quanh tâm O)

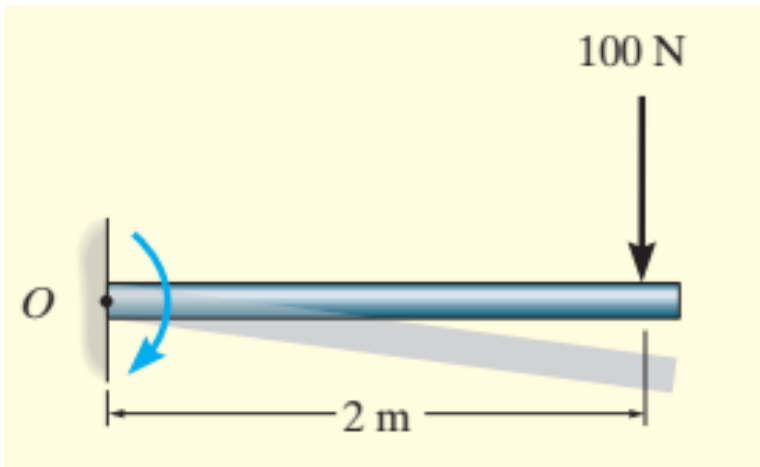
Dấu - ứng với ngược chiều quay kim đồng hồ

Dấu + ứng với cùng chiều quay kim đồng hồ



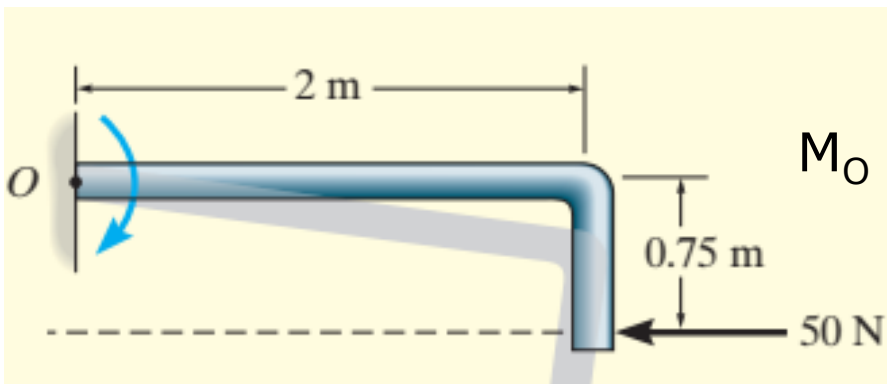
Ví dụ áp dụng

Ví dụ 21: *Xác định trị số mô men lực đã cho đối với tâm O trong các trường hợp như hình vẽ.*



$$M_O = - (100 \text{ N}) \cdot (2 \text{ m}) = -200 \text{ N.m}$$
$$= 200 \text{ N.m} \curvearrowright$$

Nếu trị số **là âm** thì **viết lại trị số dương** và **thêm chiều quay cùng chiều kim đồng hồ**

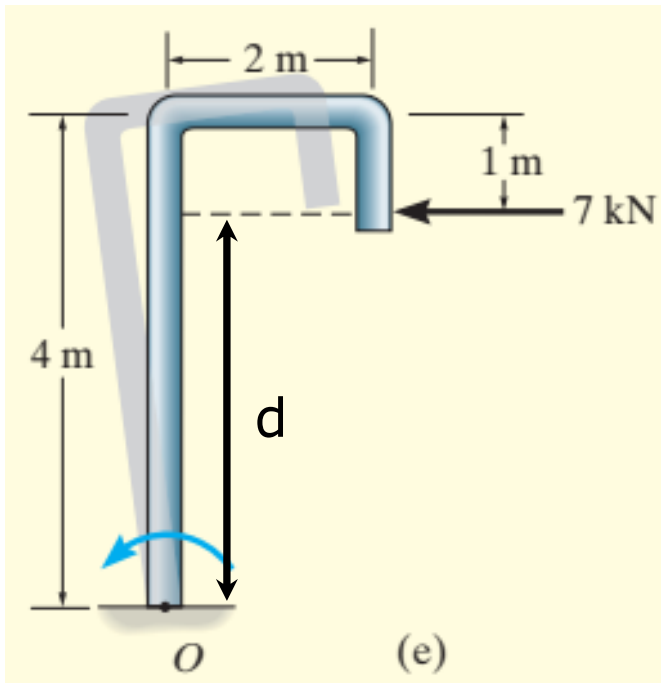


$$M_O = - (50 \text{ N}) \cdot (0,75 \text{ m}) = -37,5 \text{ N.m}$$
$$= 37,5 \text{ N.m} \curvearrowright$$



Ví dụ áp dụng

Ví dụ 21: *Xác định trị số mô men lực đã cho đối với tâm O trong các trường hợp như hình vẽ.*

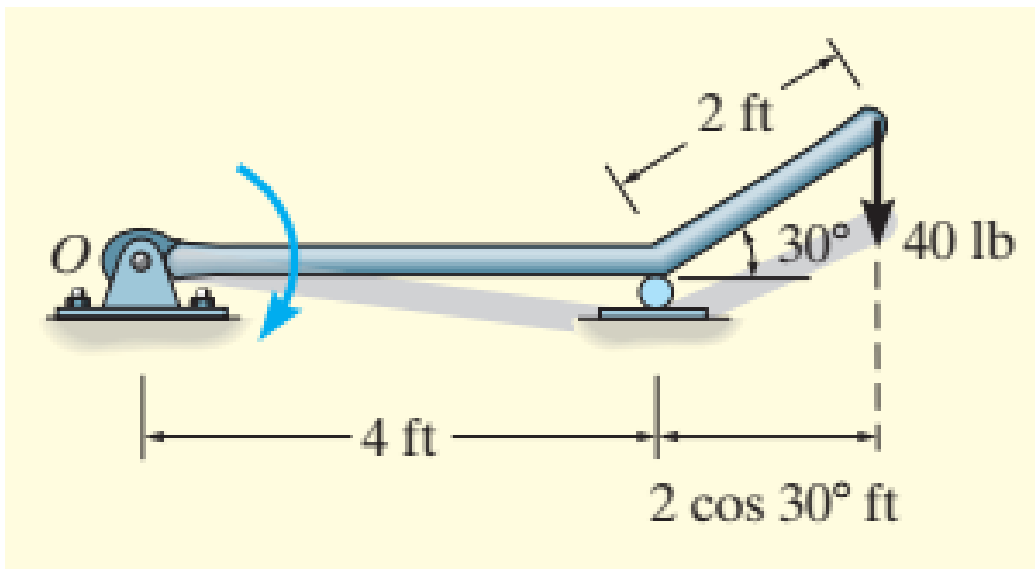


$$M_O = (7 \text{ kN}) \cdot (3 \text{ m}) = 21 \text{ kN.m} \curvearrowright$$



Ví dụ áp dụng

Ví dụ 21: *Xác định trị số mô men lực đã cho đối với tâm O trong các trường hợp như hình vẽ.*



Chú ý:

$$1 \text{ lb} = 4,48 \text{ N}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

$$1 \text{ in} = 25,4 \text{ mm}$$

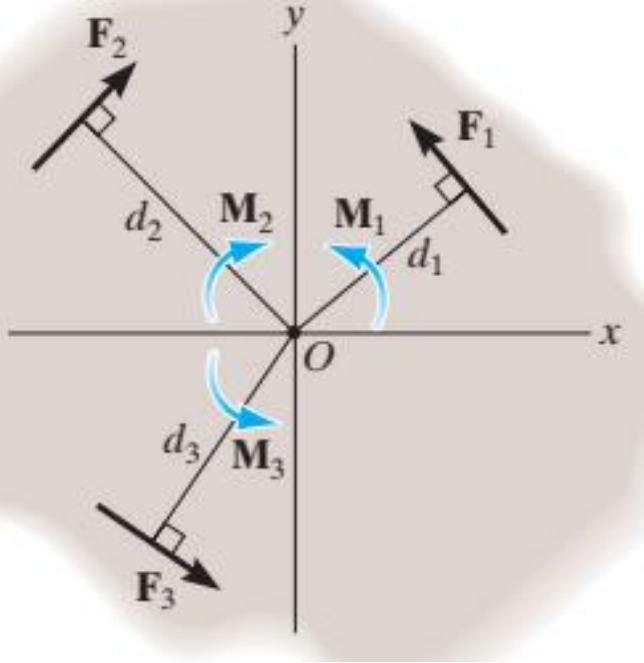
$$\begin{aligned} M_O &= -(40 \text{ lb}) \cdot (4 \text{ ft} + 2 \cos 30 \text{ ft}) = -229 \text{ lb.ft} \\ &= 229 \text{ lb.ft} \quad \curvearrowright \end{aligned}$$



Mô men của lực

Mô men tổng hợp (Resultant Moment) của các lực đồng phẳng đối với tâm quay O, kí hiệu $(M_R)_O$: bằng **tổng đại số** mô men của từng lực đối với tâm quay O

$$\zeta + (M_R)_O = \sum Fd;$$



$$(M_R)_O = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

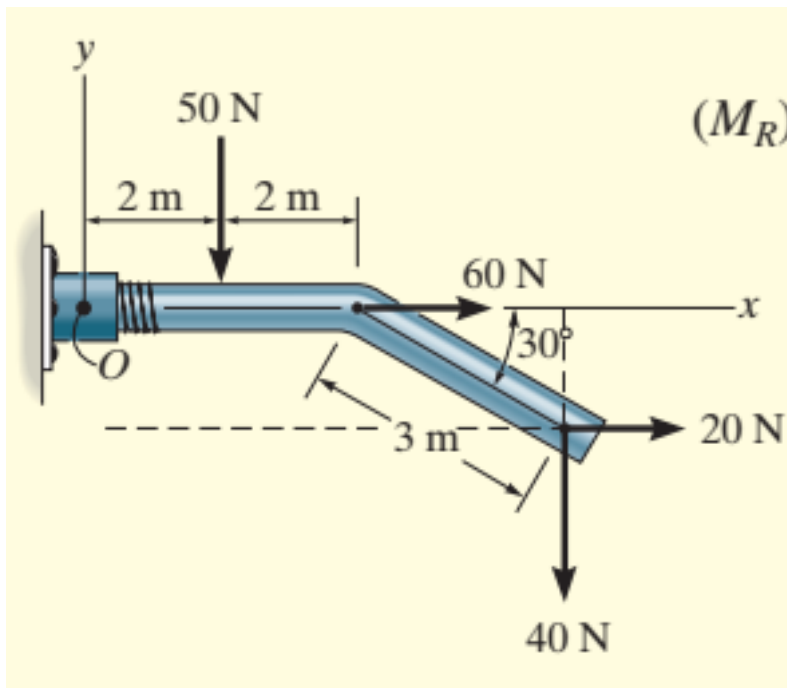
Dấu + ứng với chiều lực quay quanh O **ngược chiều** kim đồng hồ

Dấu - ứng với chiều lực quay quanh O **cùng chiều** kim đồng hồ



Ví dụ áp dụng

Ví dụ 22: *Xác định mô men tổng hợp của bốn lực tác dụng lên thanh như hình vẽ quanh tâm quay O.*



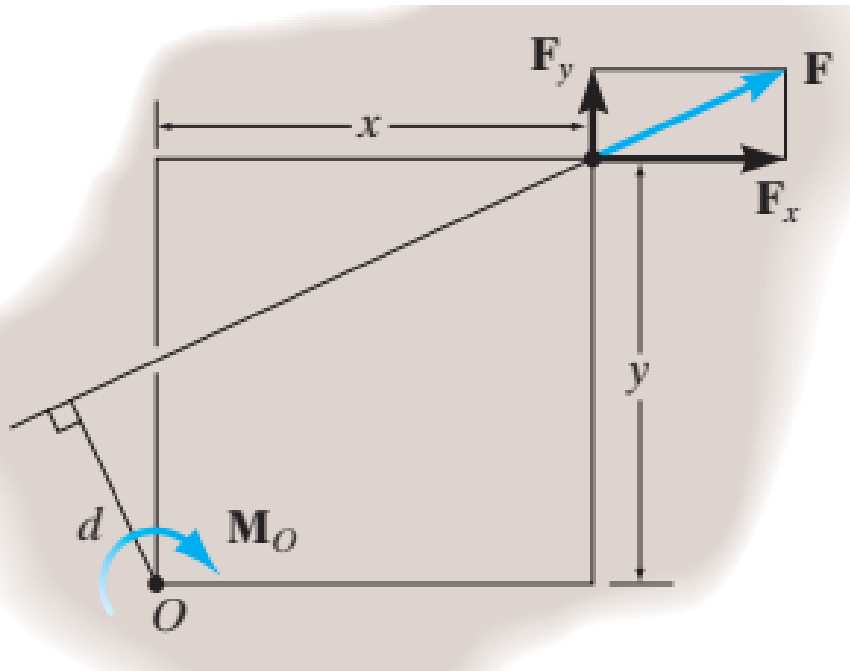
$$(M_R)_O = -50 \text{ N}(2 \text{ m}) + 60 \text{ N}(0) + 20 \text{ N}(3 \sin 30^\circ \text{ m}) \\ - 40 \text{ N}(4 \text{ m} + 3 \cos 30^\circ \text{ m})$$

$$(M_R)_O = -334 \text{ N} \cdot \text{m} = 334 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$



Mô men của lực

Cách tính mô men của lực đối với tâm quay khi CÁNH TAY ĐÒN KHÓ XÁC ĐỊNH: tiến hành chia lực ra hai thành phần theo HÌNH CHỮ NHẬT mà cánh tay đòn của từng thành phần có thể tính được dễ dàng.



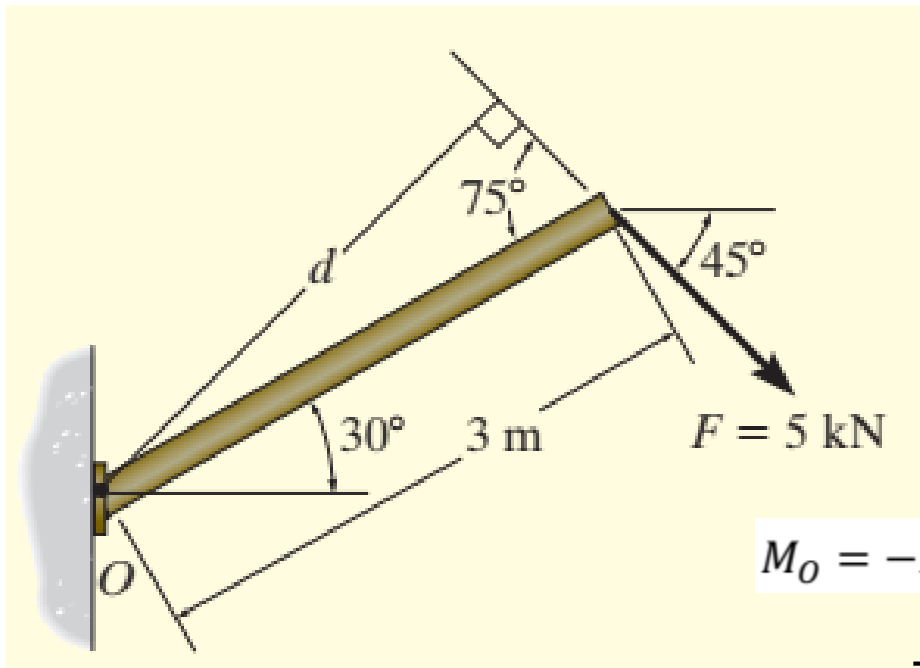
$$M_O = -F \cdot d = F_x \cdot y - F_y \cdot x$$

Ở đây d khó xác định



Ví dụ áp dụng

Ví dụ 23: *Xác định mô men của lực đối với tâm quay O như hình vẽ*



Cách 1:

$$d = (3 \text{ m}) \sin 75^\circ = 2.898 \text{ m}$$

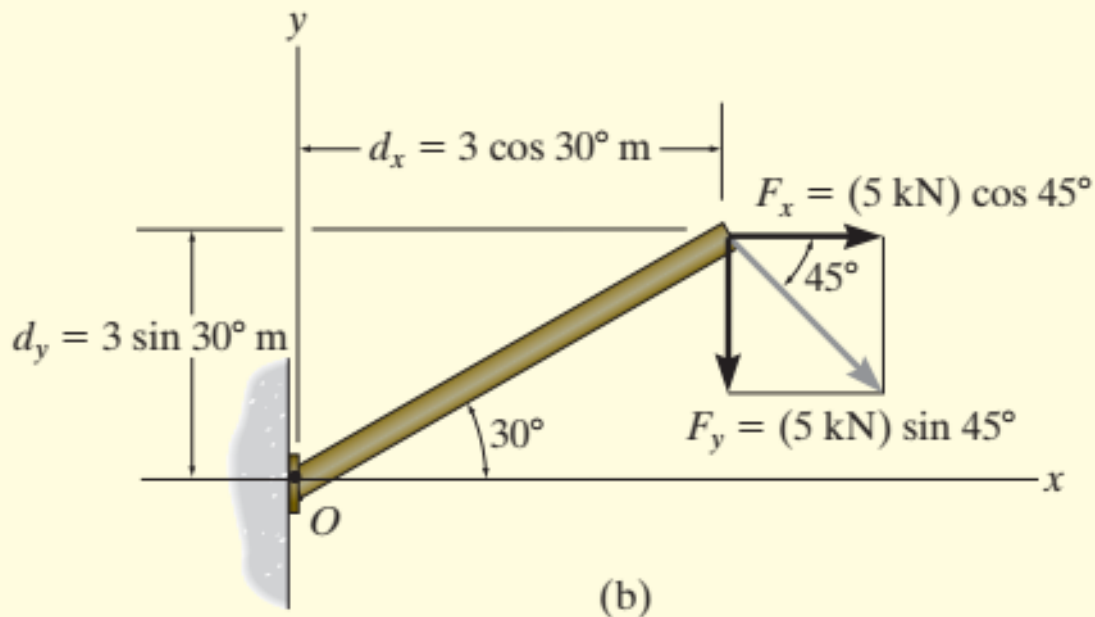
$$M_O = -F \cdot d = -(5 \text{ kN}) \cdot (2.898 \text{ m}) = -14.5 \text{ kN.m}$$

$$= 14.5 \text{ kN.m} \quad \curvearrowright$$



Ví dụ áp dụng

Ví dụ 23: *Xác định mô men của lực đối với tâm quay O như hình vẽ*



Cách 2:

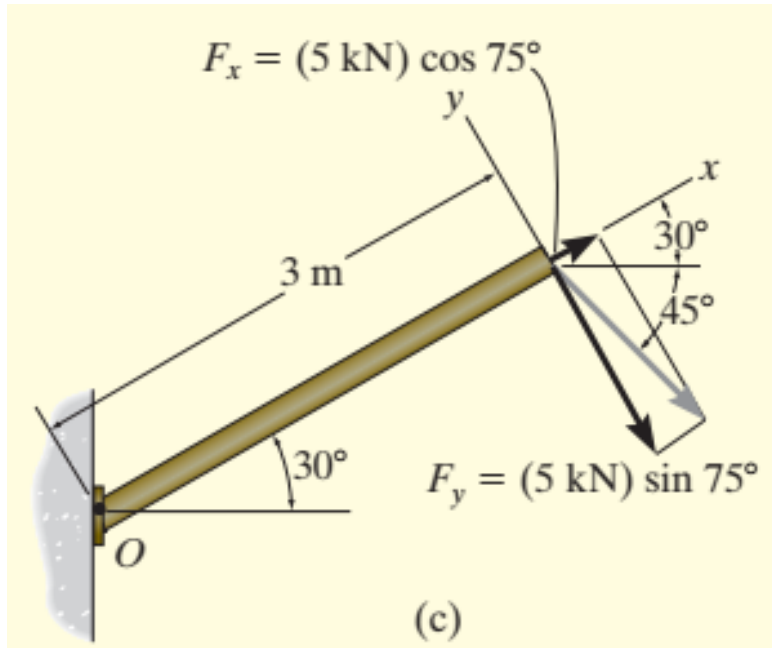
$$\zeta + M_O = -F_x d_y - F_y d_x$$

$$\begin{aligned}\zeta + M_O &= -(5 \cos 45^\circ \text{ kN})(3 \sin 30^\circ \text{ m}) - (5 \sin 45^\circ \text{ kN})(3 \cos 30^\circ \text{ m}) \\ &= -14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} = 14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright\end{aligned}$$



Ví dụ áp dụng

Ví dụ 23: *Xác định mô men của lực đối với tâm quay O như hình vẽ*



Cách 3:

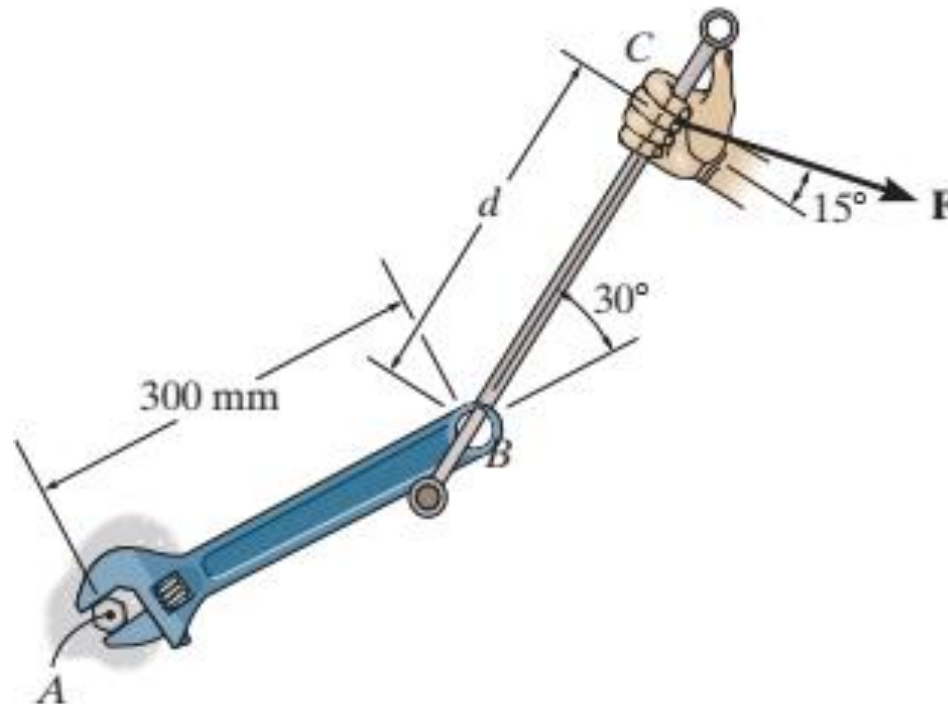
$$\begin{aligned}\zeta + M_O &= F_x \cdot 0 - F_y \cdot d_y \\ &= -(5 \sin 75^\circ \text{ kN})(3 \text{ m}) \\ &= -14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} = 14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \zeta\end{aligned}$$

Chú ý: Giá của F_x qua tâm quay O nên $d_x = 0$



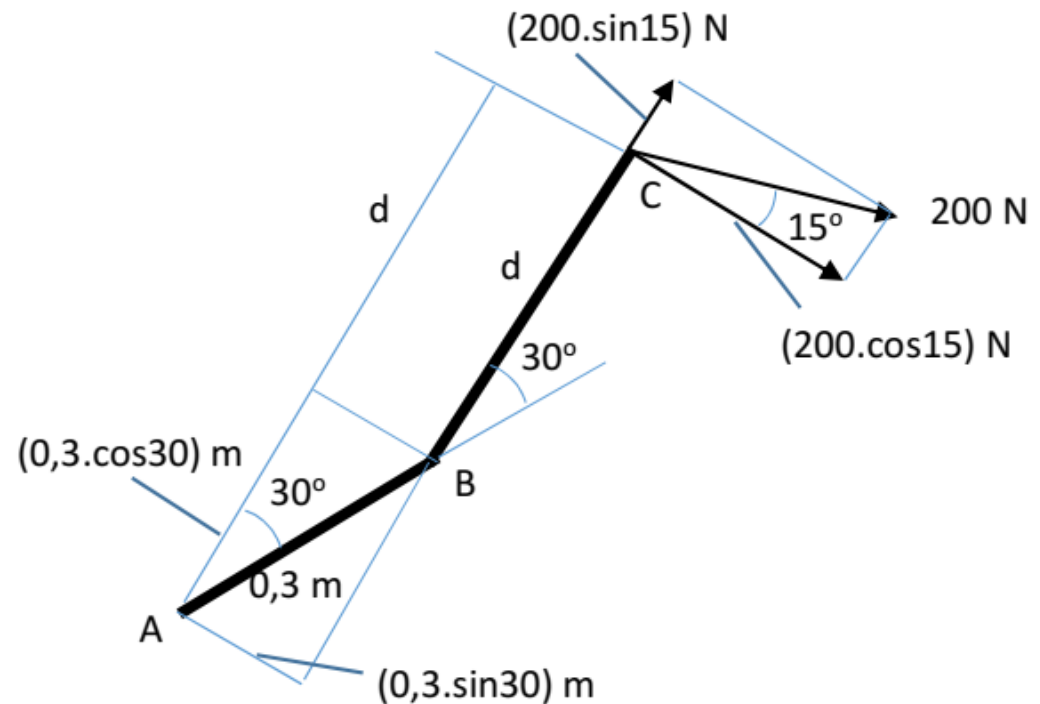
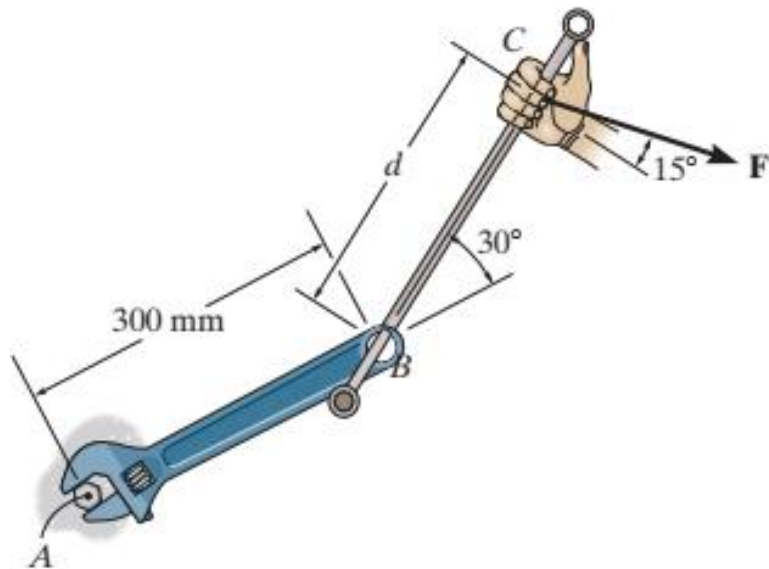
Ví dụ áp dụng

Ví dụ 24: Người ta dùng cần tuyp nối vào mỏ lết tăng cánh tay đòn dụng để vặn chặt bu lông tại A. Cho biết mô men cần vặn chặt bu lông có trị số $M_A = 120 \text{ N.m}$ và lực tay có thể sinh ra là $F = 200 \text{ N}$. Hãy xác định d để có thể tạo ra mô men nói trên.



Ví dụ áp dụng

Sơ đồ tính toán như hình vẽ

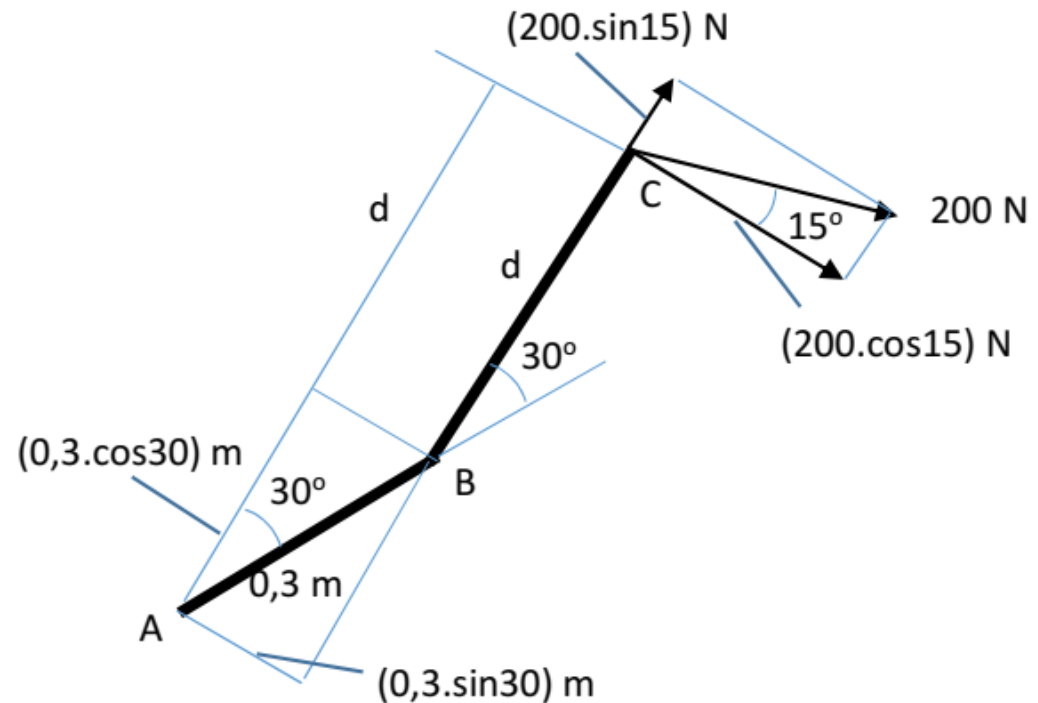


Ví dụ áp dụng

$$\zeta + (M_R)_A = \Sigma Fd;$$

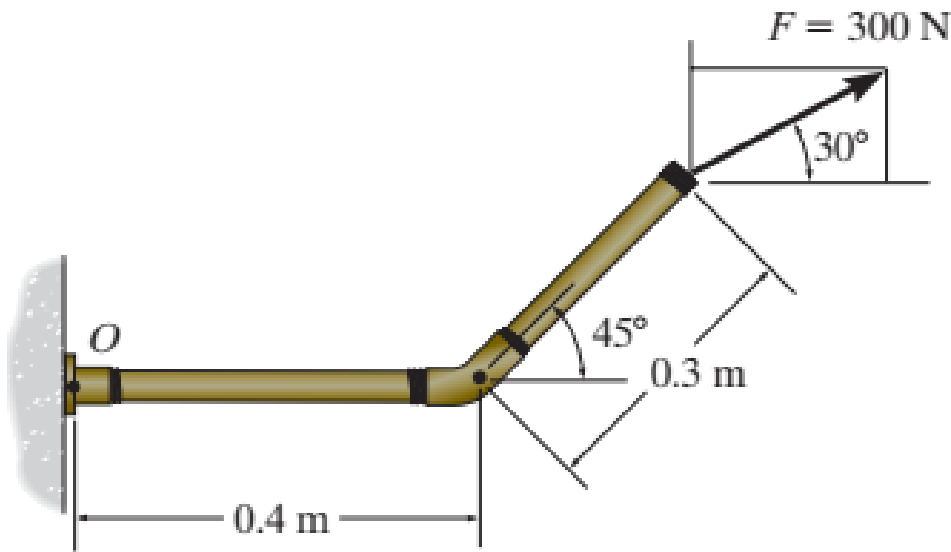
$$-120 = 200 \sin 15^\circ (0.3 \sin 30^\circ) - 200 \cos 15^\circ (0.3 \cos 30^\circ + d)$$

$$d = 0.4016 \text{ m} = 402 \text{ mm}$$



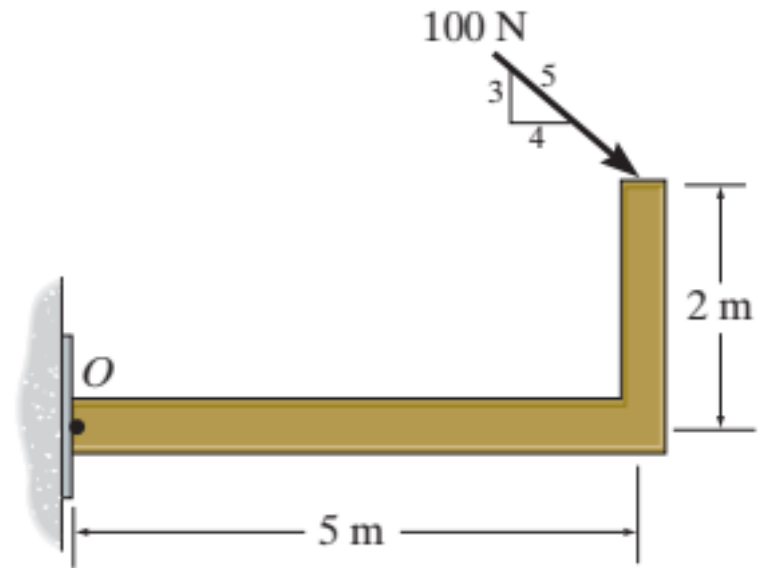
Các bài tập tương tự

Bài tập 25: *Xác định mô men của lực đã cho đối với tâm O.*



Đáp số:

$$\zeta + M_O = 36.7 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$



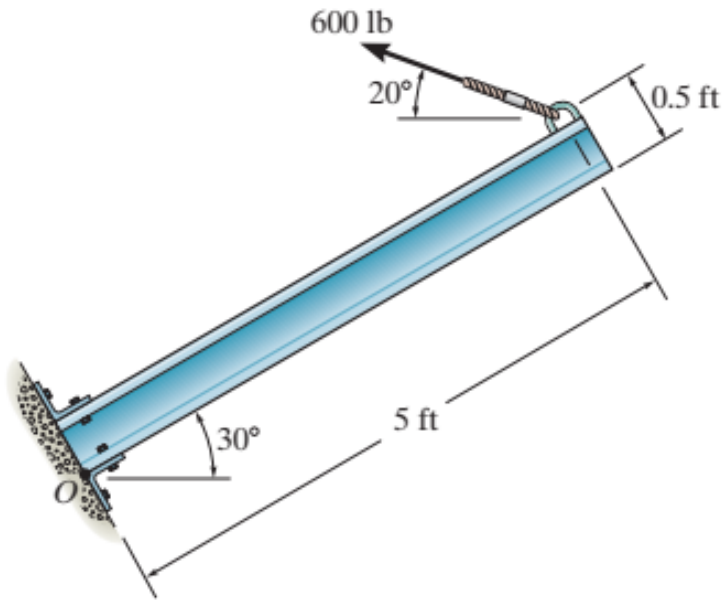
Đáp số:

$$\zeta + M_O = 460 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$



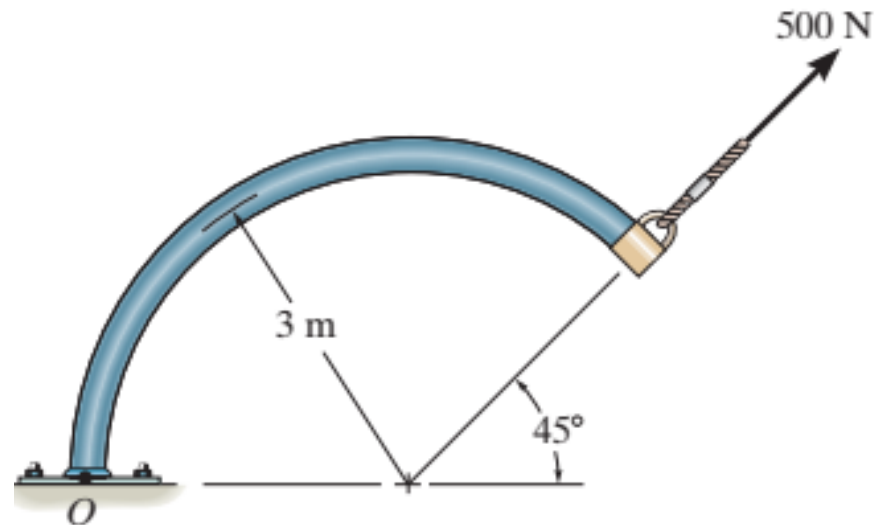
Các bài tập tương tự

Bài tập 26: *Xác định mô men của lực đã cho đối với tâm O.*



Đáp số:

$$\zeta + M_O = 2.49 \text{ kip} \cdot \text{ft} \curvearrowright$$



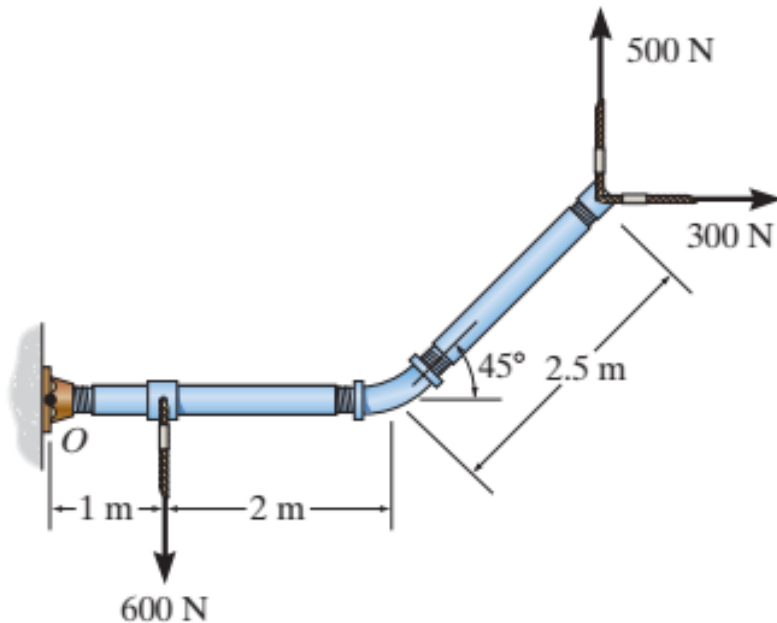
Đáp số:

$$\zeta + M_O = 1.06 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

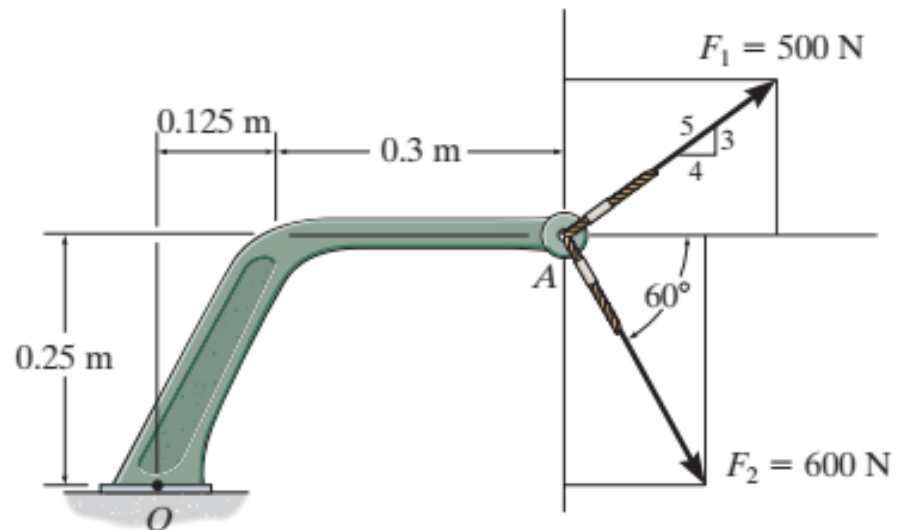


Các bài tập tương tự

Bài tập 27: *Xác định mô men tổng hợp của các lực đã cho đối với tâm O như hình vẽ*



Đáp số:



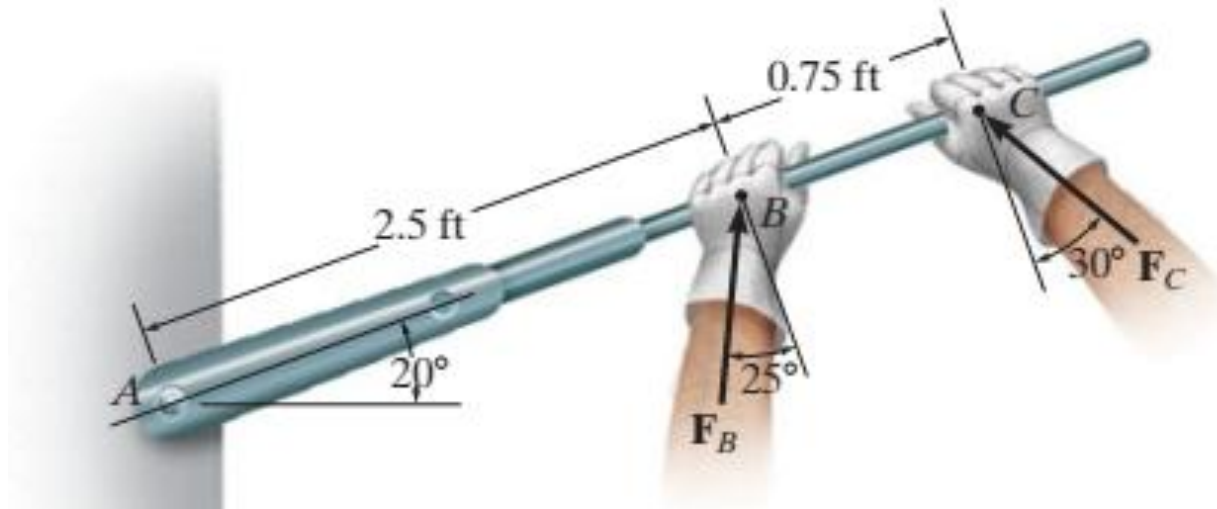
Đáp số:

$$\zeta + (M_R)_O = 1254 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.25 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \curvearrowright \quad \zeta + (M_R)_O = -268 \text{ N} \cdot \text{m} = 268 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$



Các bài tập tương tự

Bài tập 28: *Xác định mô men tổng hợp của các lực đã cho đối với tâm A như hình vẽ. Biết $F_B = 30 \text{ lb}$; $F_C = 45 \text{ lb}$*



Đáp số:

$$\zeta + (M_R)_A = 195 \text{ lb} \cdot \text{ft} \zeta$$

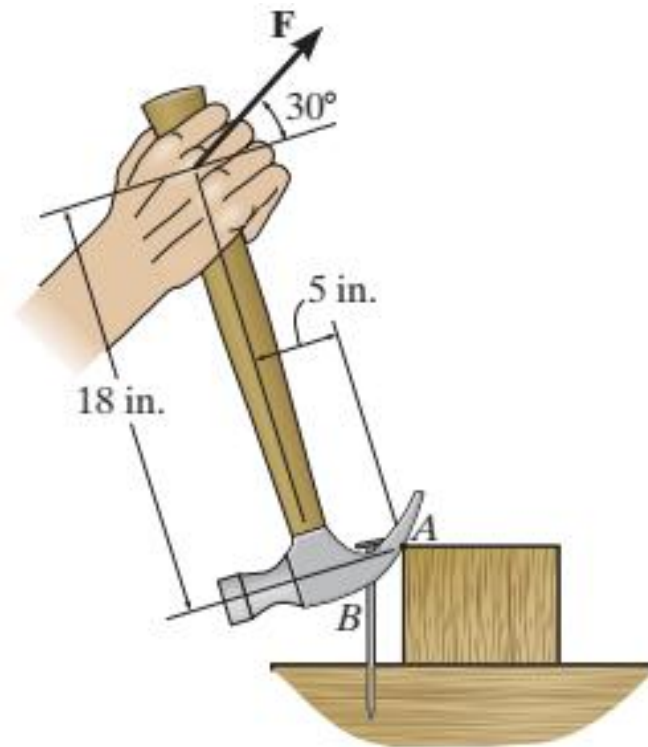


Các bài tập tương tự

Bài tập 29: Để có thể nhổ cái đinh tại B, người ta đặt một lực vào cán búa như hình vẽ, sinh ra một mô men lực quay cùng chiều kim đồng hồ quanh tâm A, có trị số 500 lb.in . Xác định trị số của lực F.

Đáp số:

$$F = 27.6 \text{ lb}$$



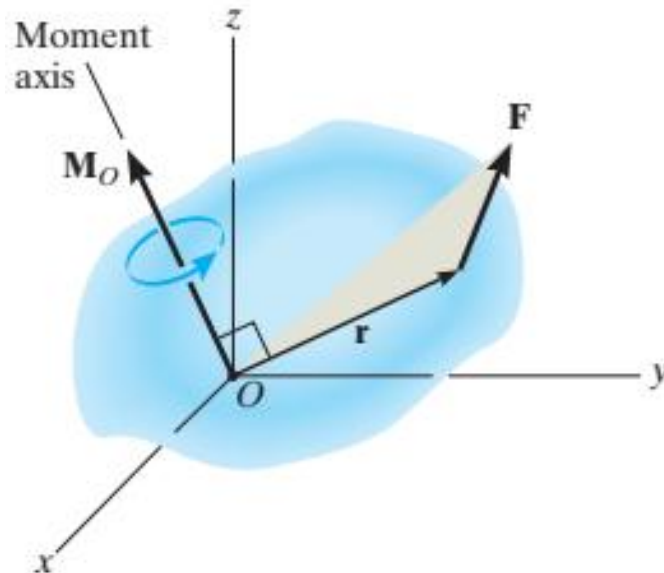
Mô men của lực

Phân biệt mô men lực đối với tâm trong mặt phẳng và không gian:

- Nếu lực và tâm quay **thuộc** mặt phẳng TỜ GIẤY ta có mô men của lực đối với tâm trong MẶT PHẪNG.
- Nếu lực và tâm quay **không thuộc** mặt phẳng TỜ GIẤY ta có mô men của lực đối với tâm trong KHÔNG GIAN.

Mô men của lực đối với tâm trong mặt phẳng là đại lượng **đại số**, kí hiệu M_O (viết **in thường**)

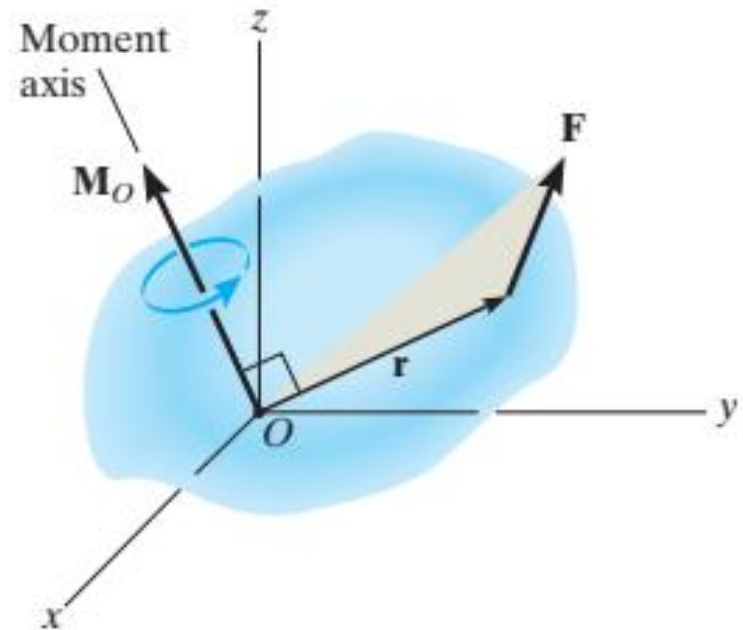
Mô men của lực đối với tâm trong không gian là đại lượng **véc tơ**, kí hiệu \mathbf{M}_O (viết **in đậm**)



Mô men của lực

Phân biệt mô men lực đối với tâm trong mặt phẳng và không gian:

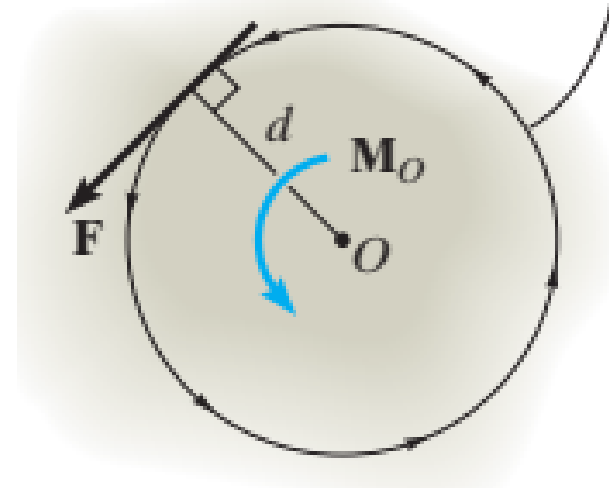
Vec tơ mô men lực đối với tâm **O trong không gian** có trục quay (Moment axis) **chưa xác định hướng**, nhưng đi qua tâm quay O và vuông góc với mặt phẳng chứa tâm O và lực **F**.



Mô men của lực

Phân biệt mô men lực đối với tâm trong mặt phẳng và không gian:

Vec tơ mô men lực đối với tâm **O trong mặt phẳng** có trục quay (Moment axis) **vuông góc với mặt phẳng TỜ GIẤY**, nên sẽ suy biến thành **điểm O** khi nhìn.



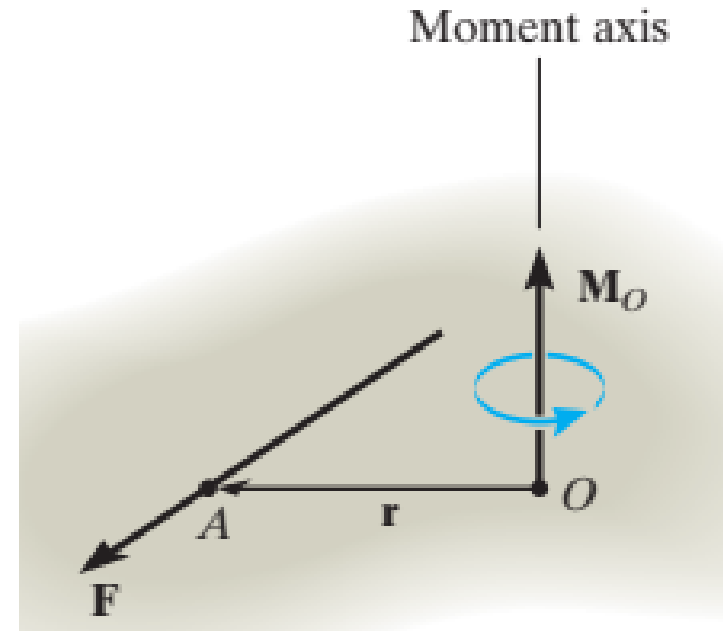
Mô men của lực

Cách xác định mô men của lực đối với tâm trong không gian:

Vec tơ mô men lực đối với tâm O **trong không gian**, kí hiệu \mathbf{M}_O , được xác định:

- Điểm đặt (gốc \mathbf{M}_O) tại tâm quay O.
- Phương (đường thẳng chứa \mathbf{M}_O cũng là trục quay) vuông góc với mặt phẳng chứa tâm quay và lực \mathbf{F}
- Chiều \mathbf{M}_O xác định theo qui tắc bàn tay phải
- Độ lớn $M_O = F \cdot d$

Với F là trị số lực, d là cánh tay đòn



Mô men của lực

Cách xác định mô men của lực đối với tâm trong không gian:

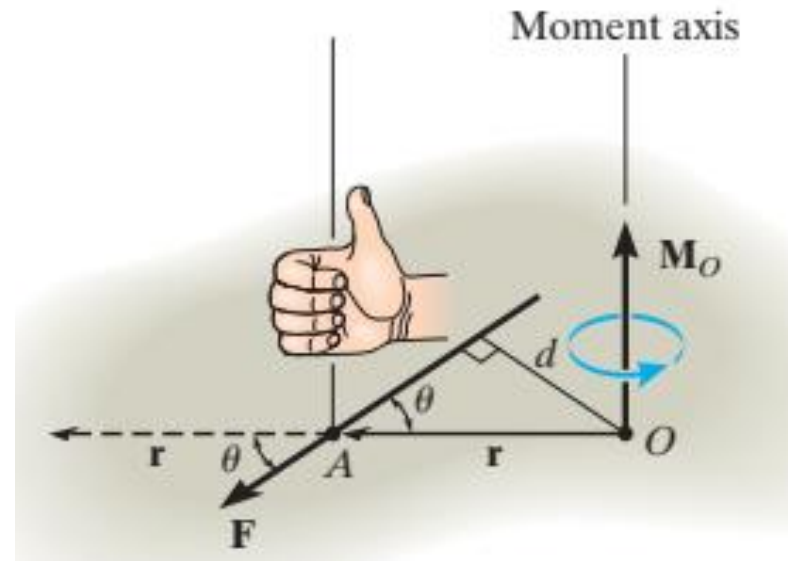
Qui tắc bàn tay phải:

Giơ bàn tay phải sao cho bốn ngón tay trở chỉ chiều quay của \mathbf{F} quanh O thì chiều ngón tay cái choãi ngang chỉ chiều \mathbf{M}_O

Ứng dụng **tích có hướng** trong toán học, ta có thể viết: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Dấu x kí hiệu tích có hướng

\mathbf{r} là vec tơ có gốc phải là tâm quay, còn ngọn là điểm bất kỳ trên giá của lực



Mô men của lực

Cách xác định mô men của lực đối với tâm trong không gian:

Như vậy, mô men của lực với tâm trong không gian cần phải xác định **độ lớn của mô men** và **hướng của trục quay**

Dùng công thức sau:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} là ba véc tơ đơn vị của hệ trục tọa độ x, y, z

r_x , r_y , r_z là ba thành phần (hay ba tọa độ) của véc tơ \mathbf{r}

F_x , F_y , F_z là ba thành phần (hay ba tọa độ) của véc tơ lực \mathbf{F}

Dấu $| \quad |$ là kí hiệu định thức cấp ba

\mathbf{r} được gọi là **vec tơ biểu diễn vị trí đặt lực**



Mô men của lực

Cách xác định mô men của lực đối với tâm trong không gian:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức cấp ba ở trên, ta được như sau:

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$

Hay khai triển dưới dạng tọa độ (**xem lại phần hình giải tích**):

$$\mathbf{M}_O = \left(\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ F_y & F_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} r_x & r_z \\ F_x & F_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right)$$



Ví dụ áp dụng

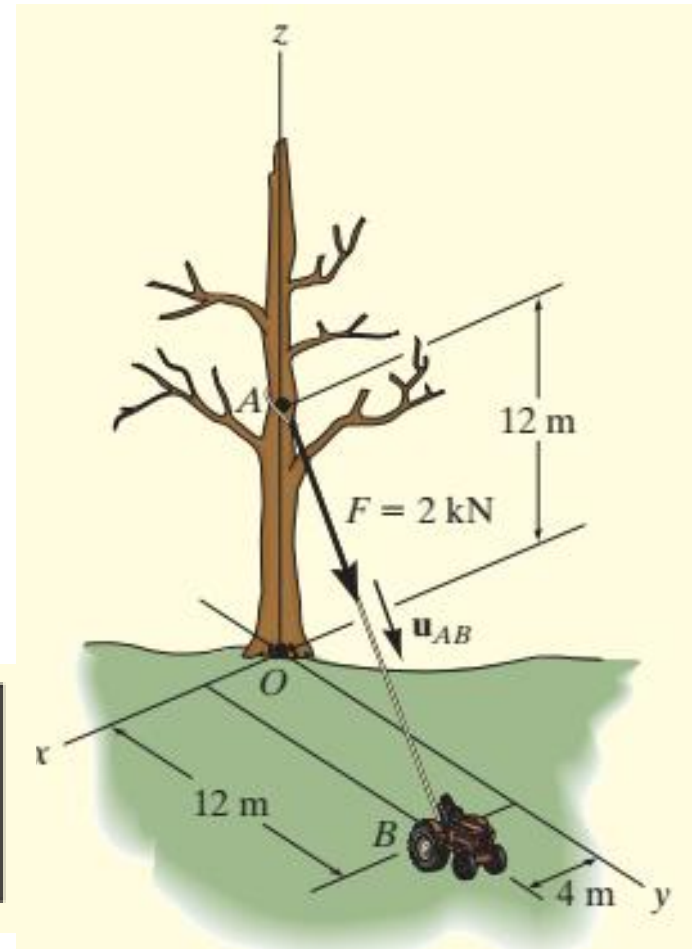
Ví dụ 25: *Xác định mô men của lực $F = 2 \text{ kN}$ đối với tâm O (mô men kéo ngã cây) dưới dạng vec tơ Đề các. Tính độ lớn và góc chỉ hướng vec tơ mô men.*

Chia lực \mathbf{F} ra ba thành phần theo ba trục tọa độ

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB}$$

$$= 2 \text{ kN} \left[\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k}\} \text{ m}}{\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (12 \text{ m})^2 + (-12 \text{ m})^2}} \right]$$

$$= \{0.4588\mathbf{i} + 1.376\mathbf{j} - 1.376\mathbf{k}\} \text{ kN}$$



Ví dụ áp dụng

r là vec tơ có **gốc là tâm mô men**, có **ngọn là điểm bất kỳ nằm trên giá của lực**

Có thể chọn: $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA} = (0; 0; 12) \text{ m}$

Với O, A có tọa độ:

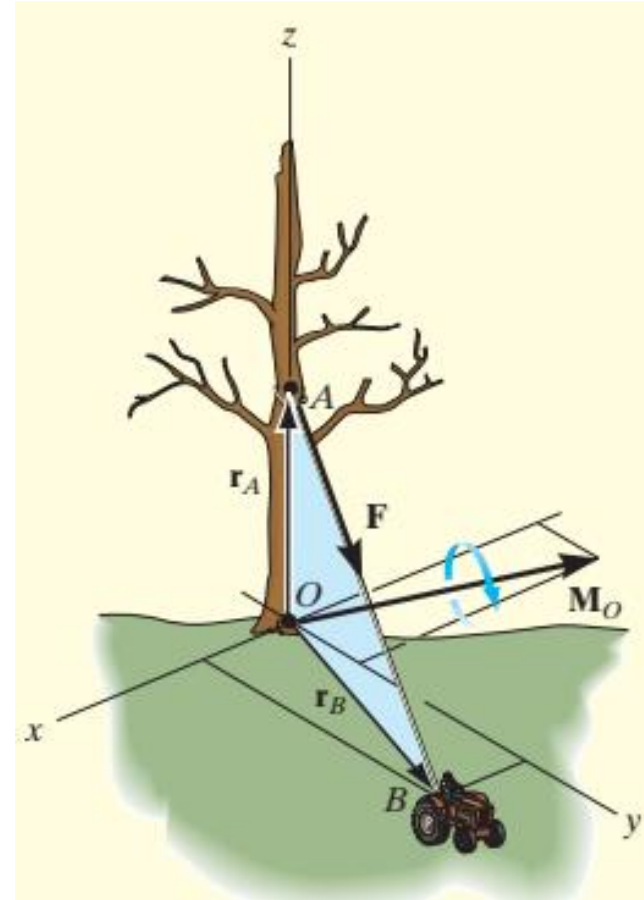
O(0;0;0) ; A(0;0;12) m

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$$= [0(-1.376) - 12(1.376)]\mathbf{i} - [0(-1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{j} \\ + [0(1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{k}$$

$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Đây là dạng vec tơ Đề các



Ví dụ áp dụng

$$\mathbf{M}_O = \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Độ lớn :

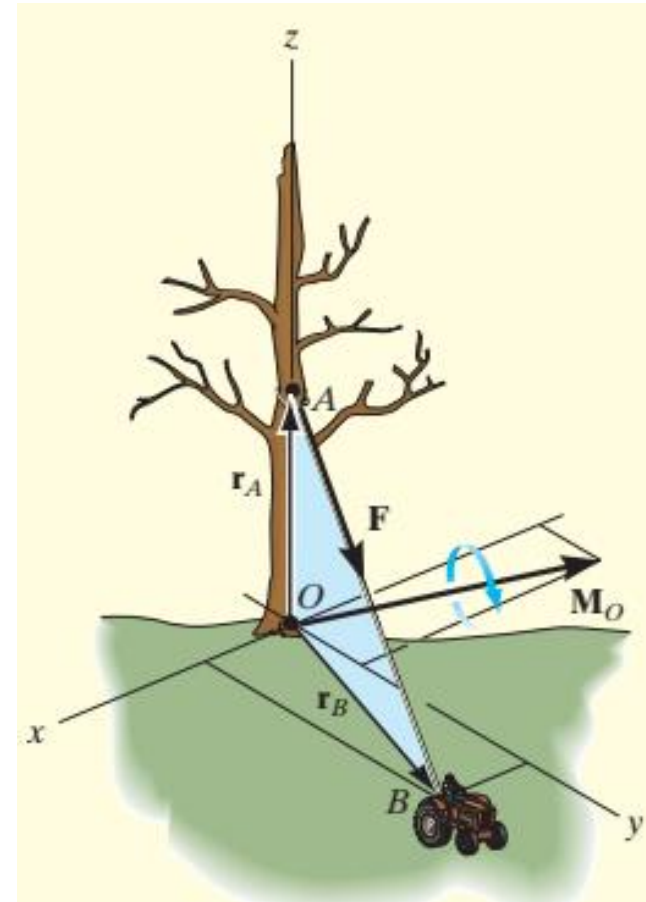
$$M_O = \sqrt{(-16,5)^2 + (5,51)^2 + 0^2} = 17,4 \text{ kN.m}$$

Hướng \mathbf{M}_O hợp với trục x, y, z các góc chỉ hướng :

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{-16,5}{17,4} \right) = 161,6^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{5,51}{17,4} \right) = 71,6^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{0}{17,4} \right) = 90^\circ$$



Ví dụ áp dụng

Nếu chọn: $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{OB} = (4; 12; 0) \text{ m}$

$O(0;0;0)$; $B(4;12;0) \text{ m}$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

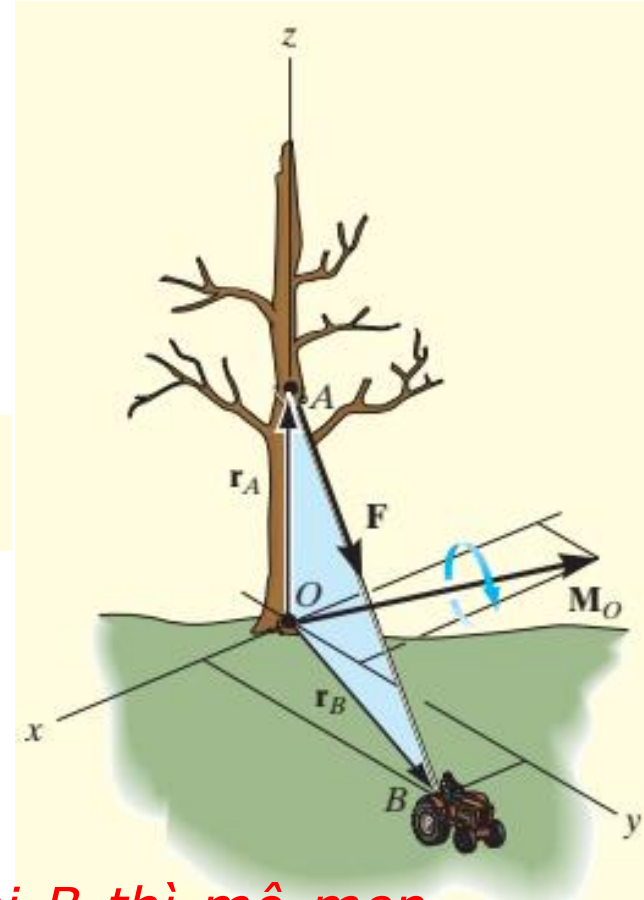
$$= [12(-1.376) - 0(1.376)]\mathbf{i} - [4(-1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{j} \\ + [4(1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{k}$$

$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Kết quả vẫn giống như trang trước

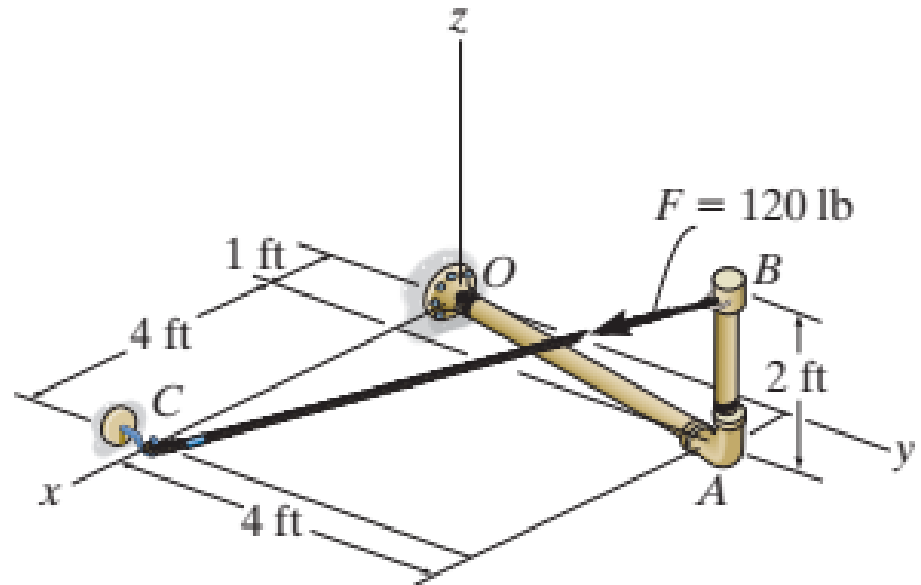
Chọn \mathbf{r}_A thì việc khai triển định thức dễ hơn vì có nhiều số 0 trong phép tính.

Ở đây cho dù lực F đặt tại A hoặc đặt tại B thì mô men quay đối với tâm O vẫn không thay đổi miễn là A, B nằm trên giá của lực



Các bài tập tương tự

Bài tập 30: *Xác định mô men của lực F đối với tâm O như hình vẽ dưới dạng vec tơ Đề các*



Đáp số:

$$\mathbf{M}_O = \{200\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{ft}$$



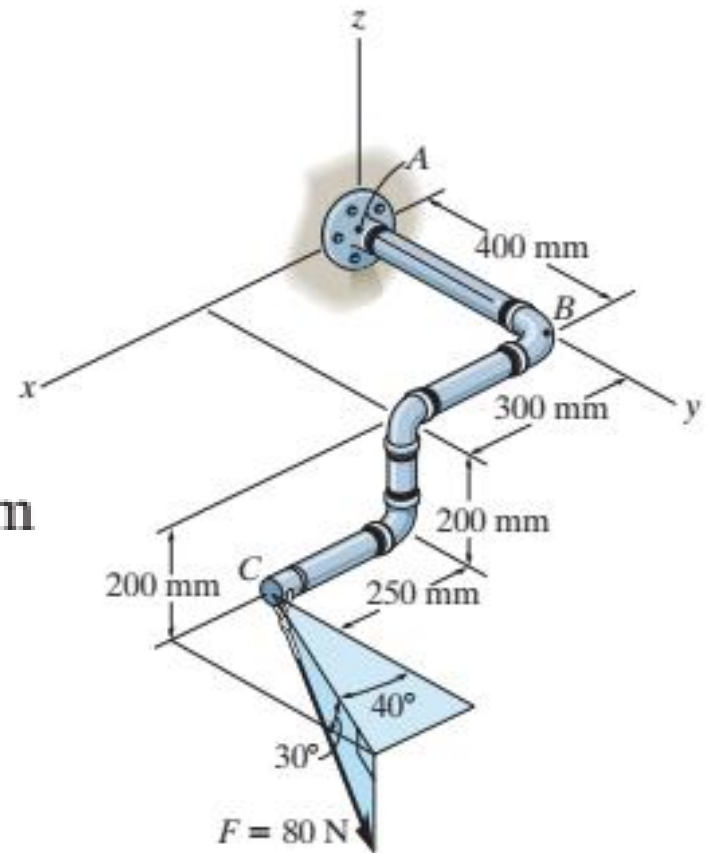
Các bài tập tương tự

Bài tập 31: Hệ ống nối chịu một lực có trị số 80 N. Xác định mô men của lực này đối với tâm A và đối với tâm B dưới dạng vec tơ Đề các.

Đáp số:

$$\mathbf{M}_A = \{-5.39\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 11.4\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M}_B = \{10.6\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 29.2\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

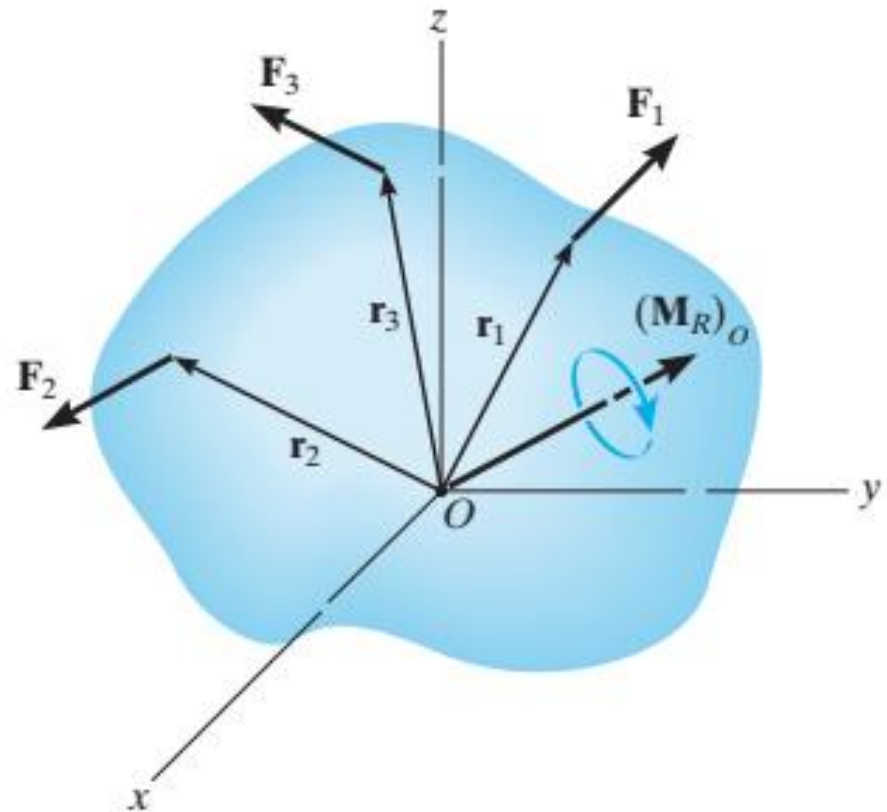


Mô men của lực

Mô men tổng hợp của hệ lực đối với cùng tâm quay:

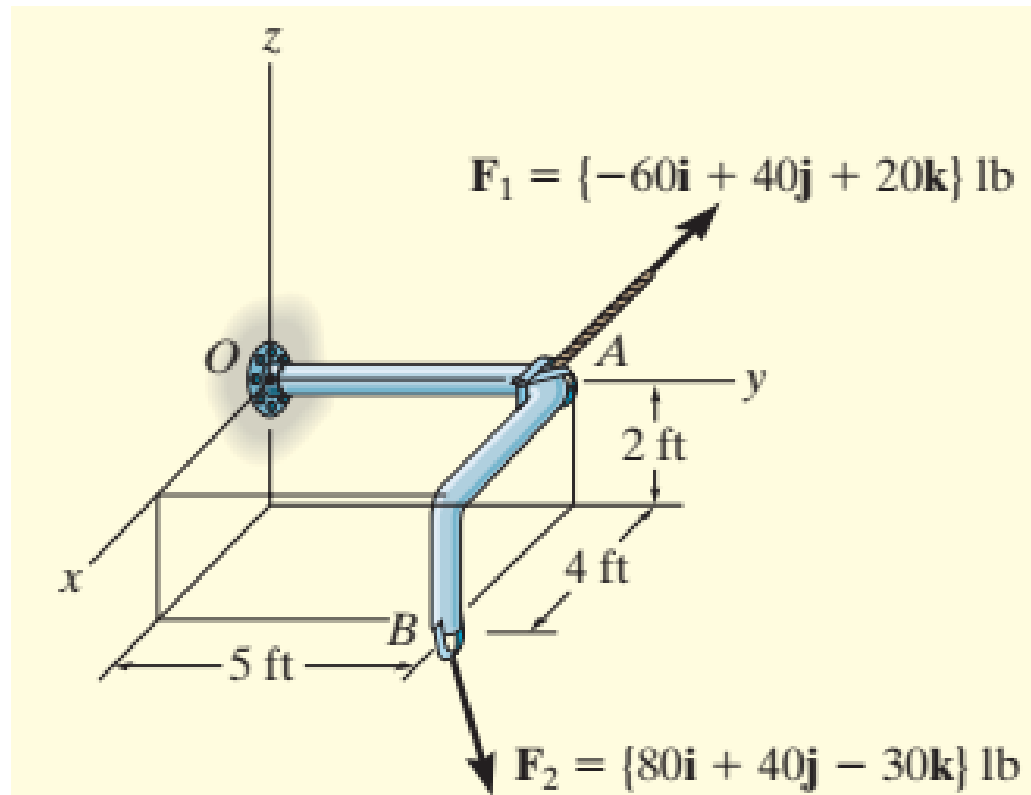
Cho hệ lực tác dụng lên vật màu xanh. **Tổng tác dụng gây quay của các lực đối với tâm quay O** được gọi là **mô men tổng hợp đối với tâm O**, kí hiệu $(\mathbf{M}_R)_O$ bằng tổng véc tơ mô men của từng lực đối với tâm O :

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

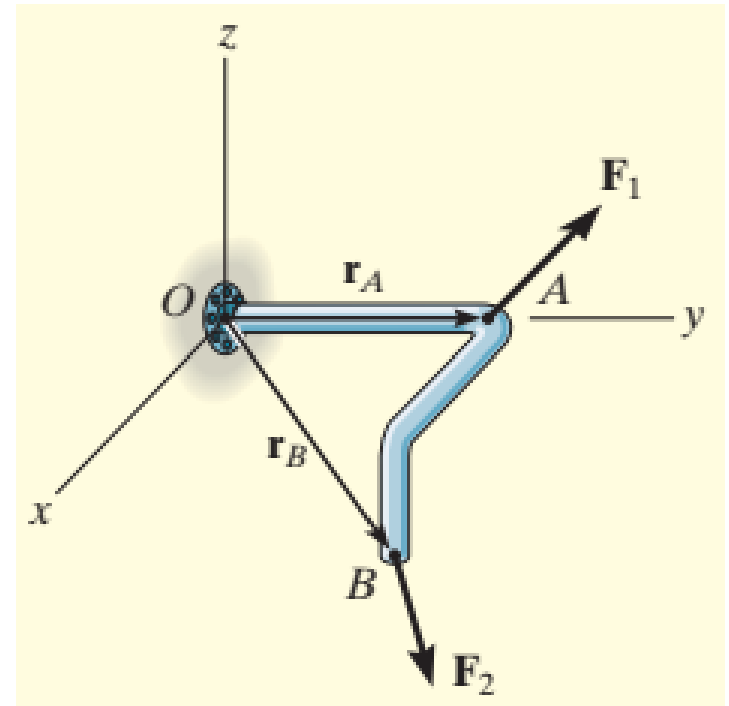
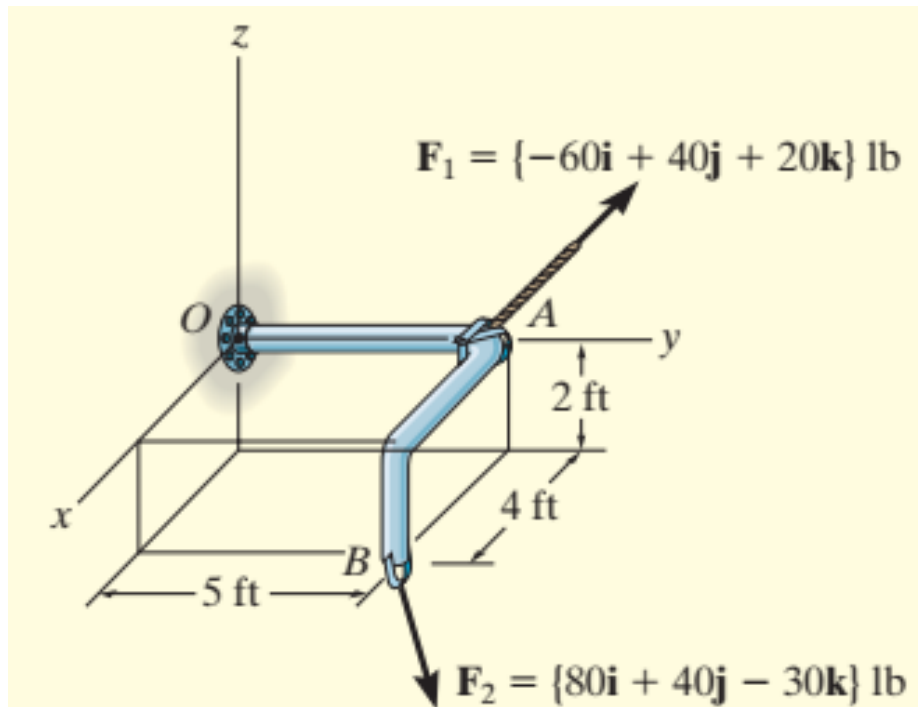


Ví dụ áp dụng

Ví dụ 26: Cho hai lực tác dụng lên thanh gấp khúc như hình vẽ. Xác định mô men tổng hợp của hai lực đối với tâm O dưới dạng vec tơ Đề các.



Ví dụ áp dụng



Viết các vec tơ vị trí đặt lực \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 dưới dạng vec tơ Đề các

$$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\} \text{ ft}$$

$$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ ft}$$



Ví dụ áp dụng

Mô men tổng hợp đối với tâm O được tính:

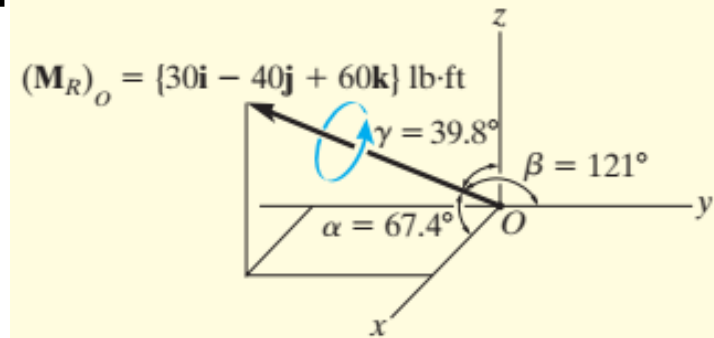
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$= [5(20) - 0(40)]\mathbf{i} - [0]\mathbf{j} + [0(40) - (5)(-60)]\mathbf{k}$$

$$+ [5(-30) - (-2)(40)]\mathbf{i} - [4(-30) - (-2)(80)]\mathbf{j} + [4(40) - 5(80)]\mathbf{k}$$

$$= \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{ft}$$



Dễ dàng tính góc chỉ hướng của vec tơ mô men tổng hợp và biểu diễn như hình vẽ như trên.



Các bài tập tương tự

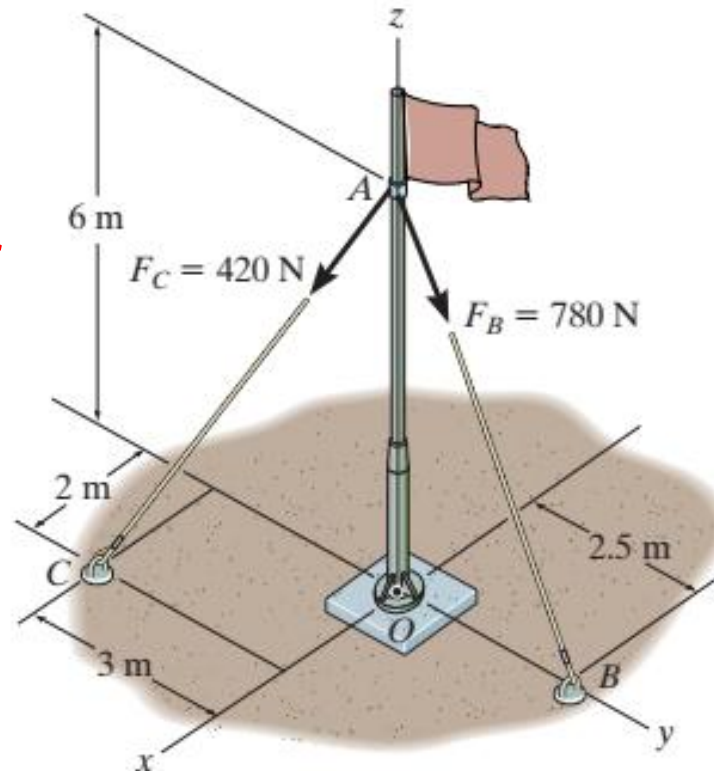
Bài tập 32: *Xác định mô men tổng hợp của hai lực F_B và F_C như hình vẽ đối với tâm O dưới dạng vec tơ Đề các theo 2 cách dưới đây. So sánh kết quả hai cách tính và cho nhận xét.*

Cách 1: Giống như ví dụ 26

Cách 2: Tổng hợp hai lực đã cho thành một lực, sau đó tính mô men của lực tổng hợp đối với tâm O .

Đáp số:

$$\mathbf{M}_O = \{-720\mathbf{i} + 720\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$



End of the Lecture

Let Learning Continue

