

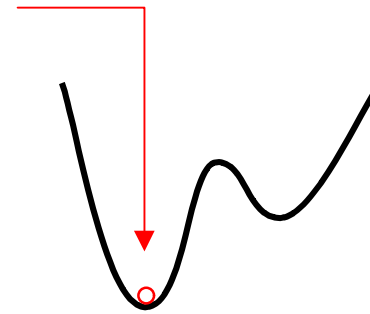
Systèmes à plusieurs ddl

Cas général des oscillations libres d'un système discret

Energie potentielle : $V=0$ à l'équilibre

Position d'équilibre stable

$$\begin{cases} V(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0 \\ \text{Choix : } q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0 \text{ à l'équilibre} \end{cases}$$



\Rightarrow L'équilibre correspond à un minimum de V

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{q} = 0$$

Développement de $V(\mathbf{q})$ en série de Taylor au voisinage de la configuration d'équilibre stable

$$V(\mathbf{q}) = \underbrace{V(0)}_{=0 \text{ par définition}} + \sum_{r=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial q_r} \right)_{\mathbf{q}=0}}_{=0} q_r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \right)_{\mathbf{q}=0}}_{=k_{rs}} q_r q_s + \cancel{O(q^3)} \quad \text{linéarisation}$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs} q_r q_s \quad \text{soit} \quad \boxed{V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \geq 0}$$

On en déduit $k_{rs} = k_{sr} \Rightarrow \mathbf{K}^T = \mathbf{K}$

La matrice de raideur \mathbf{K} est **symétrique** et **semi-définie positive**.

De la même manière, on peut linéariser l'énergie cinétique sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad \text{soit} \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} > 0$$

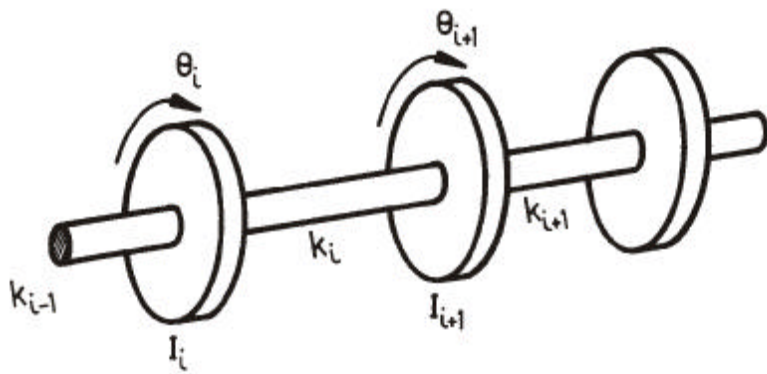
en supposant que le système ne comporte aucune vitesse d'entraînement.

La matrice de masse \mathbf{M} est **symétrique** et **définie positive**.

L'application des équations de Lagrange donne les équations d'équilibre dynamique sous la forme

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t)$$

Exemple d'un système à N d.d.l. : la chaîne en torsion



$$T = \sum_{\text{disques}} \frac{1}{2} I_i \dot{\mathbf{q}}_i^2$$

$$V = \sum_{\text{arbres}} \frac{1}{2} k_i (\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i)^2$$

Equations de Lagrange

disque i : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = T_i$ où $L = T - V$

Couple extérieur sur le disque i

$$I_i \ddot{\mathbf{q}}_i + k_{i-1} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) - k_i (\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = T_i$$

$$\Rightarrow I_i \ddot{\mathbf{q}}_i - k_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + (k_{i-1} + k_i) \mathbf{q}_i - k_i \mathbf{q}_{i+1} = T_i$$

disque i : $I_i \ddot{\mathbf{q}}_i - k_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + (k_{i-1} + k_i) \mathbf{q}_i - k_i \mathbf{q}_{i+1} = T_i$

$$\Rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{N-1} + k_N & -k_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{N-1} & k_N \end{bmatrix}$$

Vibrations libres

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0$$

Recherchons une solution de la forme

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} \mathbf{f}(t) \quad (\text{mouvement synchrone})$$

Par substitution $\mathbf{M} \mathbf{x} \frac{\ddot{\mathbf{f}}}{\mathbf{f}} = -\mathbf{K} \mathbf{x}$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{\mathbf{f}}}{\mathbf{f}} = - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = -\omega^2$$

> 0

indépendant
du temps

\Rightarrow On doit donc réaliser

$$\begin{cases} \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{x} \\ \ddot{\mathbf{f}} + \omega^2 \mathbf{f} = 0 \end{cases}$$

Solution de
$$\begin{cases} \mathbf{w}^2 \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{x} \\ \ddot{\mathbf{f}} + \mathbf{w}^2 \mathbf{f} = 0 \end{cases}$$

Partie spatiale :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{w}^2 \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0 \quad (\text{équation aux valeurs propres})$$

\Rightarrow **n fréquences propres** (valeurs propres) solutions du polynôme caractéristique

$$\det |\mathbf{K} - \mathbf{w}^2 \mathbf{M}| = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w}_2 \leq \dots \leq \mathbf{w}_n$$

auxquelles on associe **n modes propres** (vecteurs propres) obtenus en résolvant le système homogène



$$(\mathbf{K} - \mathbf{w}_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}_{(i)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{(1)} \quad \mathbf{x}_{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{(n)}$$

Partie temporelle :

A chacune des solutions propres $\mathbf{w}_i, \mathbf{x}_{(i)}$

correspond une composante harmonique solution de :

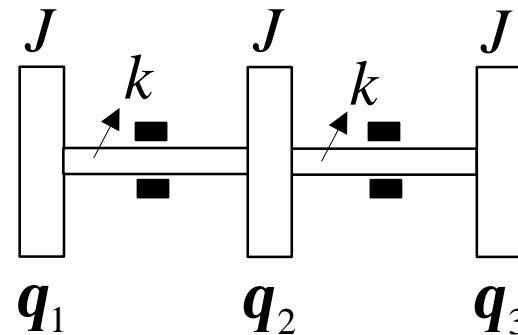
$$\ddot{\mathbf{f}}_i + \mathbf{w}_i^2 \mathbf{f}_i = 0$$

à savoir : $\mathbf{f}_i(t) = A_i \cos \mathbf{w}_i t + B_i \sin \mathbf{w}_i t$

d'où la solution générale de l'équation homogène

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n (A_i \cos \mathbf{w}_i t + B_i \sin \mathbf{w}_i t) \mathbf{x}_{(i)}$$

Exemple : système en torsion à 3 d.d.l.



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

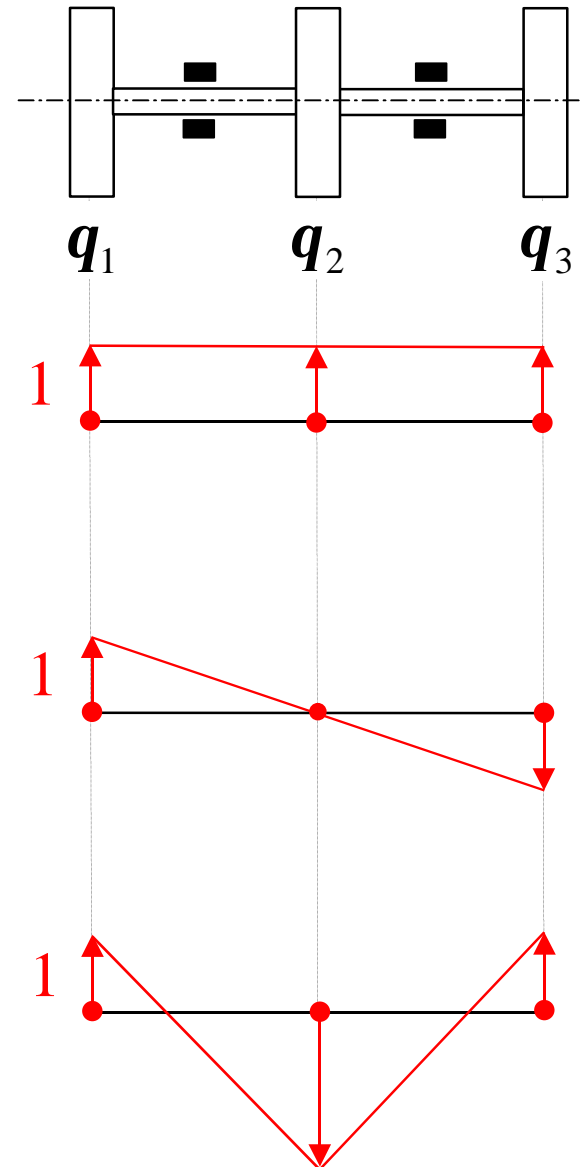
$$dtm \left| \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 J & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 J & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 J \end{vmatrix} = 0$$

Solutions :

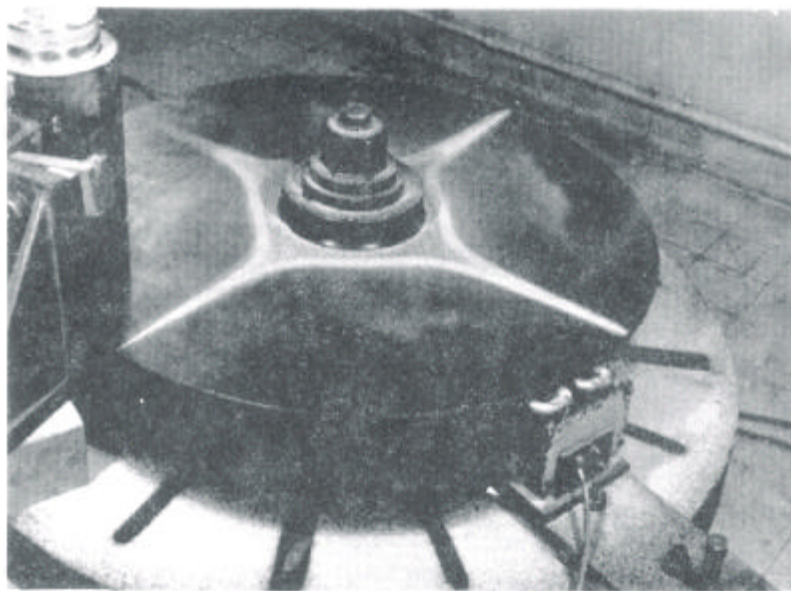
$$1) \quad w_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$2) \quad w_2 = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

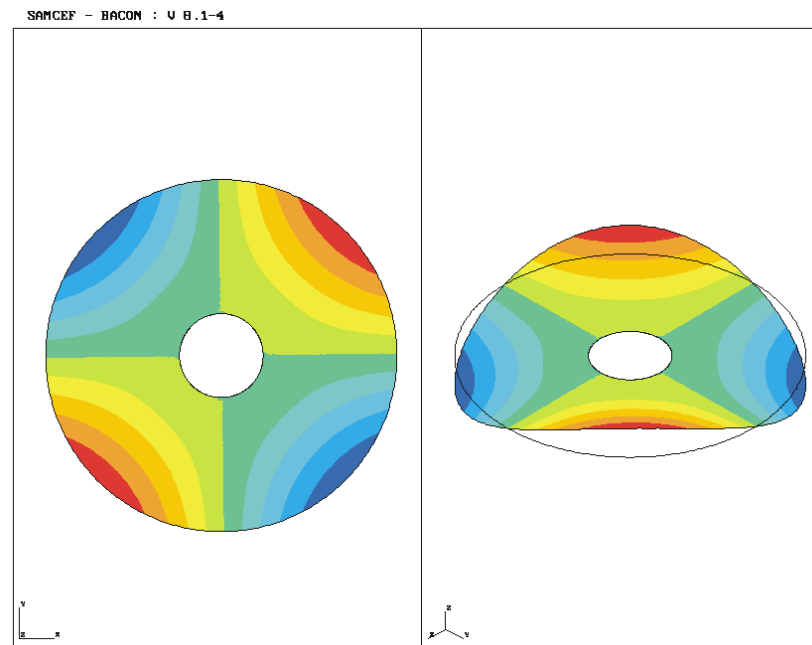
$$3) \quad w_3 = \sqrt{\frac{3k}{I}} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Exemple : plaque circulaire encastrée au centre



Mode à 2 diamètres nodaux



Modèle éléments finis

Relations d'orthogonalité

Les solutions propres du système à n d.d.l

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{w}_1 & \leq & \mathbf{w}_2 & \leq & \dots & \leq & \mathbf{w}_n \\ \mathbf{x}_{(1)} & , & \mathbf{x}_{(2)} & , & \dots & , & \mathbf{x}_{(n)} \end{array}$$

vérifient l'équation d'équilibre dynamique

$$(\mathbf{K} - \mathbf{w}_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}_{(i)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\text{mode } i : \quad \mathbf{x}_{(j)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(i)} = \mathbf{w}_i^2 \mathbf{x}_{(j)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(i)}$$

$$\text{mode } j : \quad \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)} = \mathbf{w}_j^2 \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)}$$

$$\text{par différence :} \quad (\mathbf{w}_i^2 - \mathbf{w}_j^2) \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = 0$$

Pour des modes distincts $i \neq j$ et si $w_i \neq w_j$

on déduit $\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = 0$ et $\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)} = 0$

Les modes propres sont orthogonaux entre eux **dans la métrique** des matrices de masse et de raideur.

Si $i = j$, on a
$$\begin{cases} \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(i)} = \mathbf{m}_i & \text{masse généralisée} \\ \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(i)} = \mathbf{g}_i & \text{raideur généralisée} \end{cases}$$

du mode i

Relations d'orthogonalité

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = \mathbf{m}_i d_{ij} \\ \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)} = \mathbf{g}_i d_{ij} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{\mathbf{g}_i}{\mathbf{m}_i} = w_i^2$$

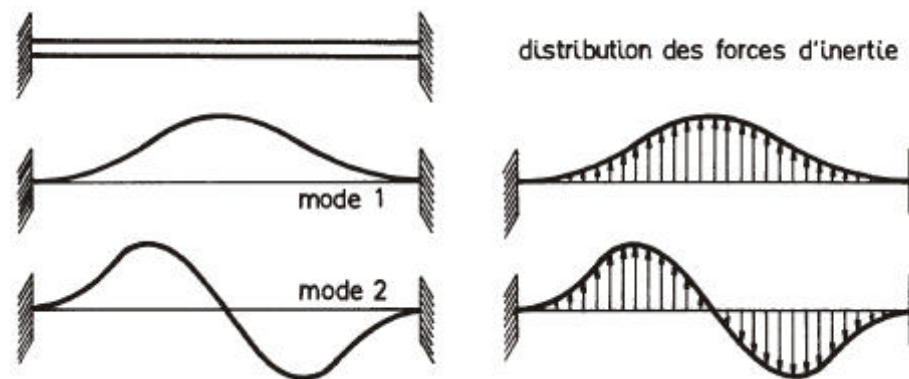
Signification physique des relations d'orthogonalité

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{w}_j^2 \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = 0$$

déplacement
dans le mode i

distribution des forces
d'inertie du mode j

Exemple d'une poutre bi-encastée



Méthodes numériques de résolution du problème aux valeurs propres

Problème à résoudre : $\mathbf{K} \mathbf{x} = w^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$

Solutions propres : $\left\{ \begin{array}{l} w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n \\ \mathbf{x}_{(1)} , \mathbf{x}_{(2)} , \dots , \mathbf{x}_{(n)} \end{array} \right.$

Difficultés rencontrées

- Taille du système (méthode des éléments finis \rightarrow modèles jusqu'à 100.000 d.d.l et plus);
- fréquences propres voisines ou confondues;
- population de \mathbf{K} et \mathbf{M} ;
- extraction de modes rigides.

Type de méthodes numériques disponibles

- Développement de l'équation caractéristique (uniquement pour un petit nombre de d.d.l.).
- Calcul du déterminant $|\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}|$ pour différentes valeurs de μ et localisation des fréquences propres par approximations successives; calcul aisé si les matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} sont tri-diagonales.
- Transformations successives du système sous la forme standard $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ à une forme tri-diagonale.
- Itération sur les vecteurs propres par la méthode de la puissance $\mathbf{K} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{x}_n$ (méthode très utilisée).
 - extraction du spectre basses fréquences.

Le quotient de Rayleigh

Equation aux valeurs propres : $\mathbf{K} \mathbf{x} = w^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$

Par définition :
$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = w^2$$

Propriété de stationnarité :

- le quotient de Rayleigh admet un minimum absolu pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)}$ et ce minimum absolu est égal à la valeur propre correspondante ω_1^2 ;
- à une erreur du 1er ordre sur le mode $\mathbf{x}_{(1)}$ correspond une erreur du 2ème ordre sur ω_1^2 .

Calcul par superposition modale de la réponse à une excitation extérieure

Soit le système
$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 ; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases}$$

Réponse :
$$\mathbf{q}(t) = \sum_{r=1}^n \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coordonnées modales}}}{\mathbf{h}_r(t)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{modes propres}}}{\mathbf{x}_{(r)}}$$

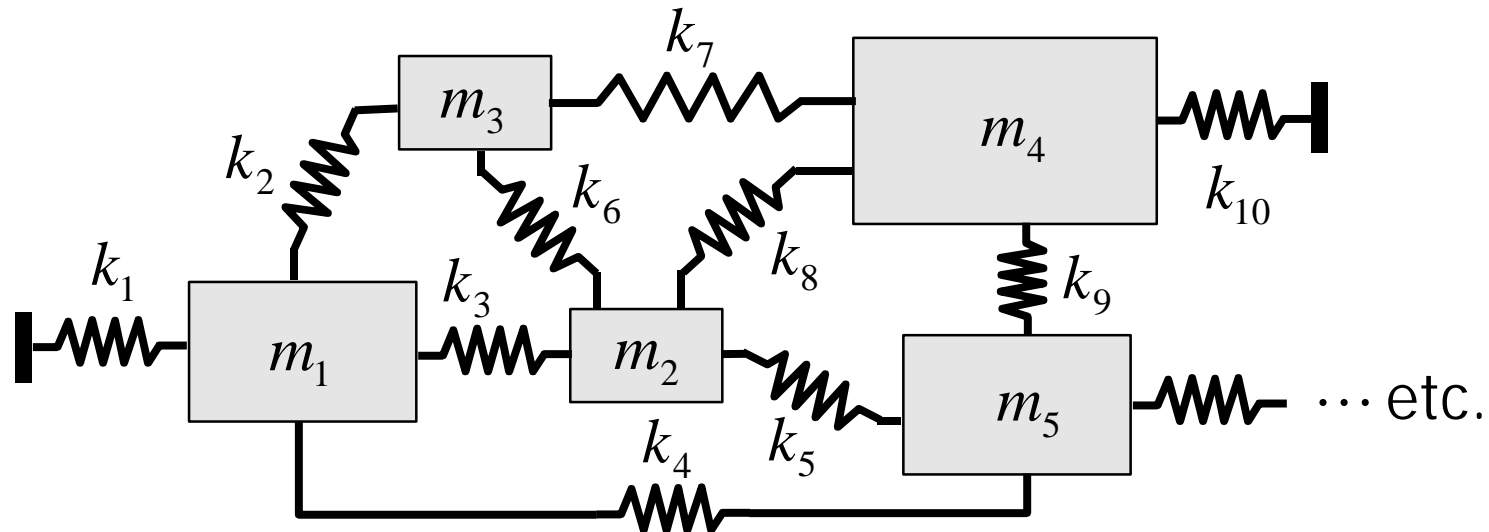
Equations normales du système

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{h}}_k + \mathbf{w}_k^2 \mathbf{h}_k = \Phi_k(t) & (k = 1, \dots, n) \\ \mathbf{h}_k(0) = \mathbf{h}_{k,0} ; \quad \dot{\mathbf{h}}_k(0) = \dot{\mathbf{h}}_{k,0} \end{cases}$$

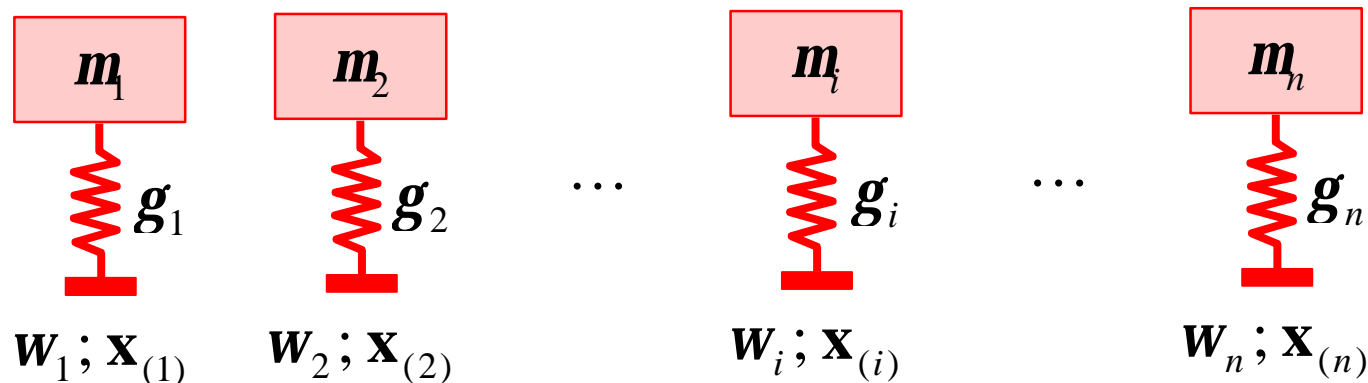
Facteur de participation
du mode k à la charge

où
$$\Phi_k(t) = \frac{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{p}}{m_k}$$

En résumé : système à n degrés de liberté



⇒ n oscillateurs à 1 degré de liberté



Réponse du système non amorti à une excitation harmonique

Soit $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{s} \cos \omega t$

La réponse forcée du système est harmonique

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{x} = \boxed{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}} \mathbf{s}$$

$= \mathbf{H}(\omega)$ (matrice de FRF)

Décomposition spectrale de $\mathbf{H}(\omega)$

Exprimons la réponse sous la forme $\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_r \mathbf{x}_{(r)}$

Des relations $(\mathbf{K} - w^2 \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{s}$ et $\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_r \mathbf{x}_{(r)}$

on déduit : $(\mathbf{K} - w^2 \mathbf{M}) \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_r \mathbf{x}_{(r)} = \mathbf{s}$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_r \underbrace{\mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(r)}}_{\mathbf{g}_r \mathbf{d}_{rs}} - \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_r w^2 \underbrace{\mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(r)}}_{\mathbf{m}_r \mathbf{d}_{rs}} = \mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{s}$$

$$\text{soit } \mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{s}}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - w^2)} \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{s}}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - w^2)} \mathbf{x}_{(r)}$$

et par conséquent

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - w^2)} \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{H}(w) = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - w^2)}$$

matrice des F.R.F.

Représentation d'un coefficient de la matrice des F.R.F.

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - \mathbf{w}^2)}$$

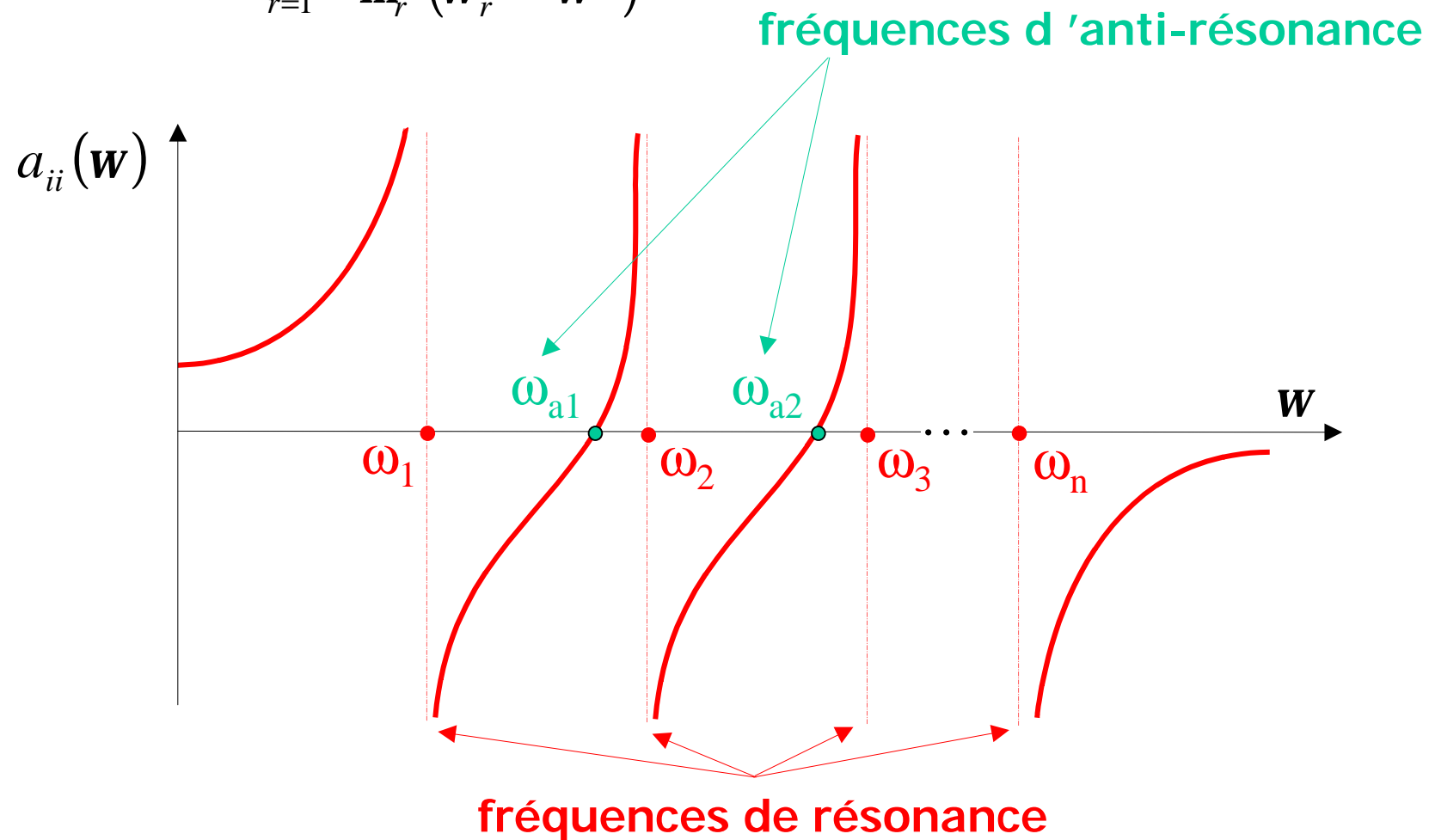
coefficient $a_{ij}(\mathbf{w}) = \sum_{r=1}^n \frac{x_{(r),i} x_{(r),j}}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - \mathbf{w}^2)}$

coefficient principal $a_{ii}(\mathbf{w}) = \sum_{r=1}^n \frac{x_{(r),i}^2}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - \mathbf{w}^2)}$

$$\frac{d a_{ii}}{d \mathbf{w}^2} = \sum_{r=1}^n \frac{x_{(r),i}^2}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - \mathbf{w}^2)^2} > 0$$

⇒ Un coefficient d'influence dynamique **principal** est toujours une fonction croissante de ω^2

$$a_{ii}(w) = \sum_{r=1}^n \frac{x_{(r),i}^2}{m_r (w_r^2 - w^2)}$$



Réponse du système amorti à une excitation harmonique

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{s} e^{i \omega t}$$

La réponse forcée du système est harmonique

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} e^{i \omega t}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i \omega \mathbf{C}) \mathbf{x} = \mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{s}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i \omega \mathbf{C})^{-1} \quad \mathbf{H}(\omega) = \text{matrice de FRF}$$

Décomposition spectrale de $\mathbf{H}(\omega)$

Exprimons la réponse sous la forme $\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_r \mathbf{x}_{(r)}$

Par substitution dans l'équation d'équilibre, on a :

$$\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_s^2 - \mathbf{w}^2) \mathbf{a}_s + i \mathbf{w} \sum_{r=1}^n \mathbf{a}_s \mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_{(r)} = \mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{s}$$

Hypothèse :

$$c_r \mathbf{d}_{rs}$$

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_{(j)} = c_i \mathbf{d}_{ij} \quad \text{avec} \quad c_i = 2 \mathbf{e}_i \mathbf{w}_i \mathbf{m}_i$$

pourcentage d'amortissement modal

$$\text{soit } \mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{s}}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - \mathbf{w}^2 + 2 i \mathbf{e}_r \mathbf{w}_r \mathbf{w})}$$

matrice des F.R.F.

et par conséquent

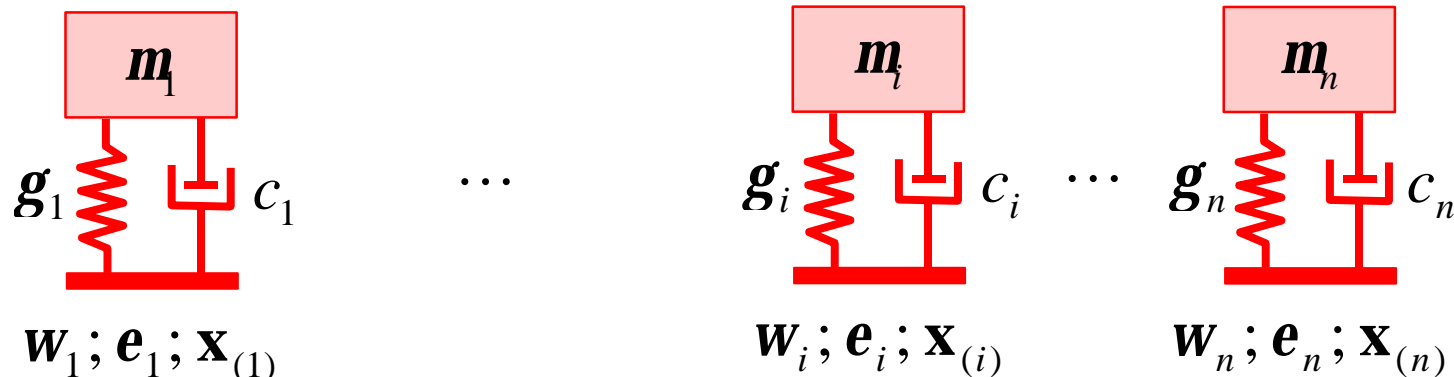
$$\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T}{\mathbf{m}_r (\mathbf{w}_r^2 - \mathbf{w}^2 + 2 i \mathbf{e}_r \mathbf{w}_r \mathbf{w})}$$

Choix particulier de la matrice d'amortissement

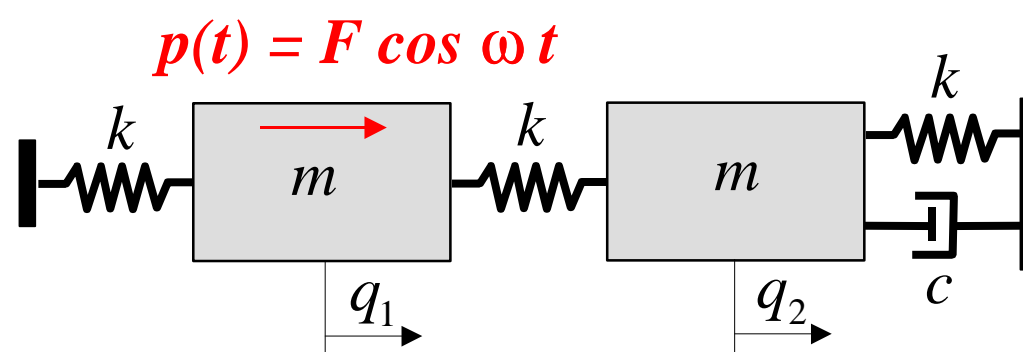
$$\boxed{\mathbf{C} = a \mathbf{K} + b \mathbf{M}} \quad (\text{hypothèse d'amortissement diagonal})$$

auquel cas $\underbrace{\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_{(j)}}_{2 \mathbf{e}_i \mathbf{w}_i \mathbf{m}_i d_{ij}} = a \underbrace{\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)}}_{\mathbf{g}_i d_{ij}} + b \underbrace{\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)}}_{\mathbf{m}_i d_{ij}}$

et par conséquent $\mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \left(a \mathbf{w}_i + \frac{b}{\mathbf{w}_i} \right)$



Exemple du calcul de la réponse harmonique d'un système faiblement amorti



$$k = 10^4 \text{ N/m}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$c = 20 \text{ N} \times \text{s/m}$$

$$F = 1 \text{ N}$$

Equations du mouvement du système

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 2 \cdot 10^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solutions propres du système amorti

Posons $\mathbf{q} = \mathbf{z} e^{p t} \Rightarrow (\mathbf{K} + p \mathbf{C} + p^2 \mathbf{M}) \mathbf{z} = 0$

soit
$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 + p^2 & -10^4 \\ -10^4 & 2 \cdot 10^4 + 20 p + p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Valeurs propres et vecteurs propres complexes :

1) $p_{1,2} = 100.09 (-0.05 \pm i)$ $\mathbf{z}_{(1),(2)} = \begin{Bmatrix} 0.98996 \pm \underline{0.09962 i} \\ 1 \end{Bmatrix}$

2) $p_{3,4} = 172.66 (-0.029 \pm i)$ $\mathbf{z}_{(3),(4)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.98 \pm \underline{0.1718 i} \end{Bmatrix}$

\Rightarrow la partie imaginaire du mode propre supprime le caractère synchrone de la solution.

Solutions propres du système conservatif

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 - \omega^2 & -10^4 \\ -10^4 & 2 \cdot 10^4 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Solutions : 1) $\omega_1 = 100 \text{ rad / s}$ $\mathbf{x}_{(1)}^T = \{1 \quad 1\}$

2) $\omega_2 = 173.2 \text{ rad / s}$ $\mathbf{x}_{(2)}^T = \{1 \quad -1\}$

masses généralisées : $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = 2$

Calcul des pourcentages d'amortissement critique

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{\mathbf{x}_{(1)}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_{(1)}}{2 \omega_1 \mathbf{m}_1} = \frac{20}{2 \times 100 \times 2} = 0.05 \\ e_2 &= \frac{\mathbf{x}_{(2)}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_{(2)}}{2 \omega_2 \mathbf{m}_2} = \frac{20}{2 \times 173.2 \times 2} = 0.0289 \end{aligned} \right\} \text{amortissement faible}$$

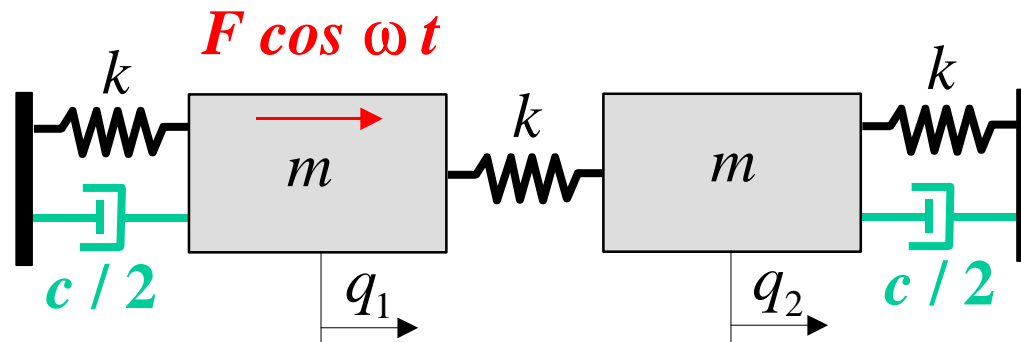
Construction d'une matrice d'amortissement diagonal

Soit $\mathbf{C}^* = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}$ avec α et β solutions de :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a} \mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{w}_1} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a} \mathbf{w}_2 + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{w}_2} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = 10 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

d'où le système modifié



Calcul de la réponse du système amorti

Pour rappel : $\mathbf{q}(t) = \mathbf{x} \cos \omega t$ avec $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{f}$

$$\text{où } \mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + 2i \mathbf{e}_r \omega_r \omega)}$$

$$q_1(t) = \text{Re}(x_1 e^{i\omega t}) = \text{Re}((H_{11} f_1 + H_{12} f_2) e^{i\omega t})$$

$$\underbrace{\frac{x_{(1),1}^2}{m_1 (\omega_1^2 - \omega^2 + 2i \mathbf{e}_1 \omega_1 \omega)} + \frac{x_{(2),2}^2}{m_2 (\omega_2^2 - \omega^2 + 2i \mathbf{e}_2 \omega_2 \omega)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{red arrow} \\ \text{red arrow} = 1 \quad \text{red arrow} = 0}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = H_1 \cos(\omega t - f_1) \\ q_2(t) = H_2 \cos(\omega t - f_2) \end{cases}$$

Diagramme de Bode

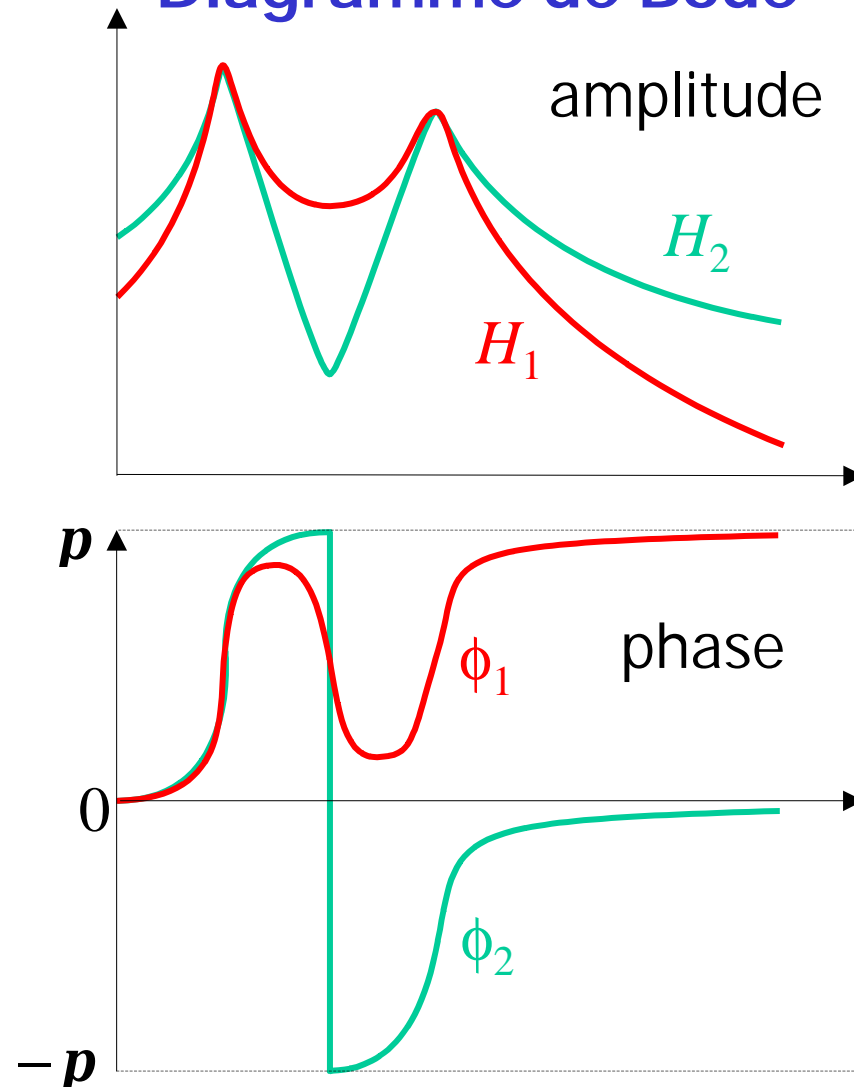
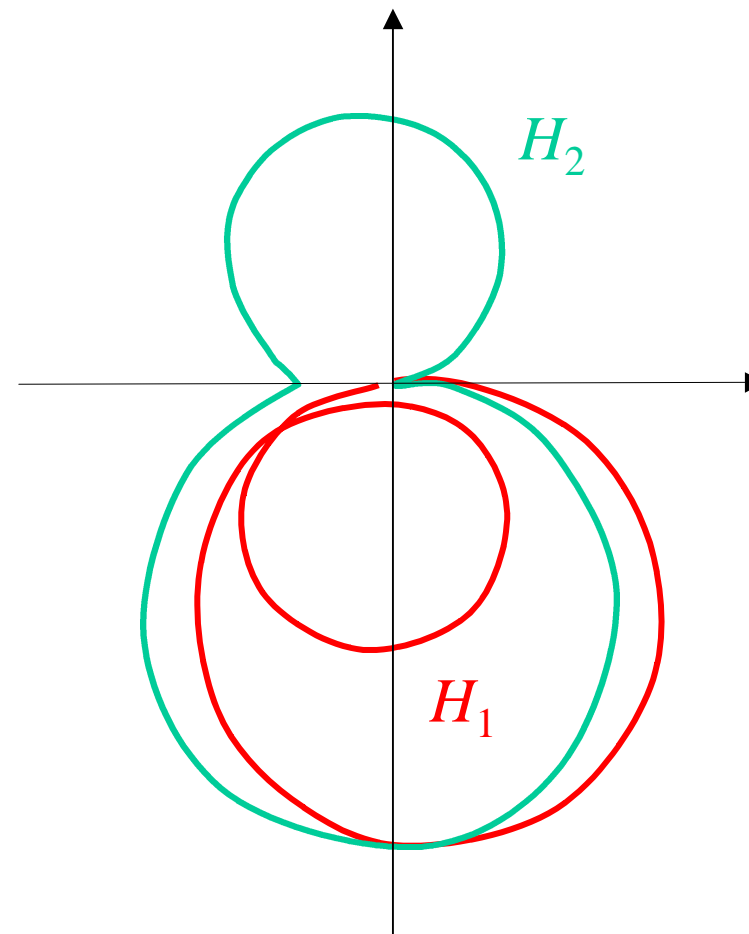


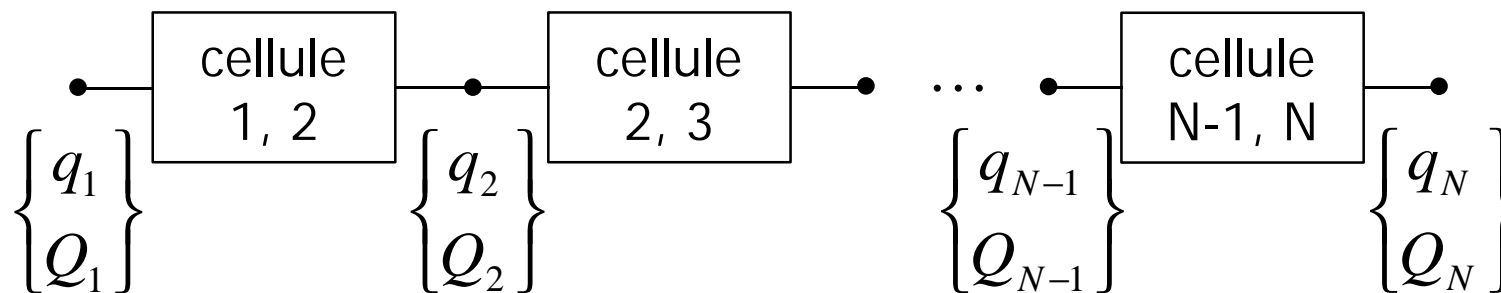
Diagramme de Nyquist



Réponse forcée harmonique des systèmes en chaîne

Propriété : un d.d.l. est connecté avec les d.d.l. immédiatement voisins.

Application : systèmes de transmission, arbres en torsion.



Relation :

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ Q_r \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{r,r-1} \begin{Bmatrix} q_{r-1} \\ Q_{r-1} \end{Bmatrix}$$

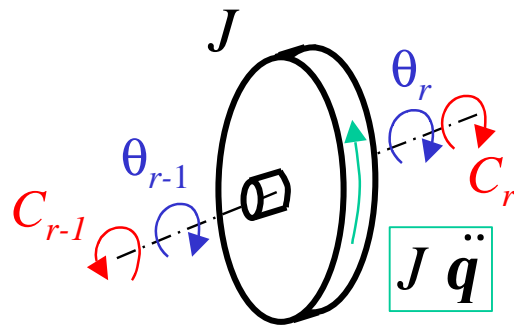
vecteur d'état \leftarrow $\mathbf{T}_{r,r-1}$ \rightarrow matrice de transfert

 $\begin{Bmatrix} q_{r-1} \\ Q_{r-1} \end{Bmatrix} \rightarrow$ déplacement

 $\begin{Bmatrix} q_{r-1} \\ Q_{r-1} \end{Bmatrix} \rightarrow$ effort conjugué

Méthode de Holzer-Tolle (chaînes en torsion)

Disque rigide



$$\mathbf{q}_{r-1} = \mathbf{q}_r$$

$$C_{r-1} - C_r + J \ddot{\mathbf{q}} = 0$$

soit, en régime harmonique

$$\mathbf{q}_{r-1} = \mathbf{q}_r$$

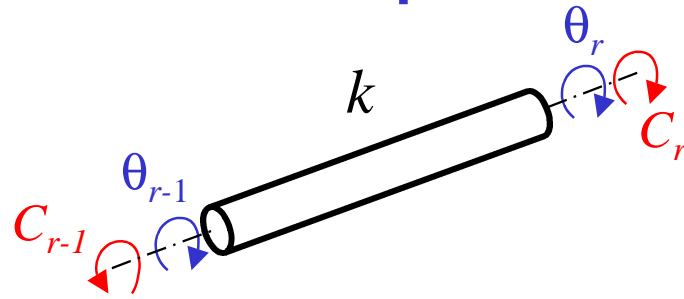
$$C_{r-1} = \omega^2 J \mathbf{q}_r + C_r$$

d'où la matrice de transfert du disque infiniment rigide

$$\mathbf{T}_{\text{disque}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{bmatrix} \quad (dtm |\mathbf{T}| = 1)$$

Coefficient d'influence dynamique $a_{rr}(\omega^2) = \frac{\mathbf{q}_r}{C_r} = -\frac{1}{\omega^2 J}$ **filtre mécanique passe-bas**

Arbre élastique



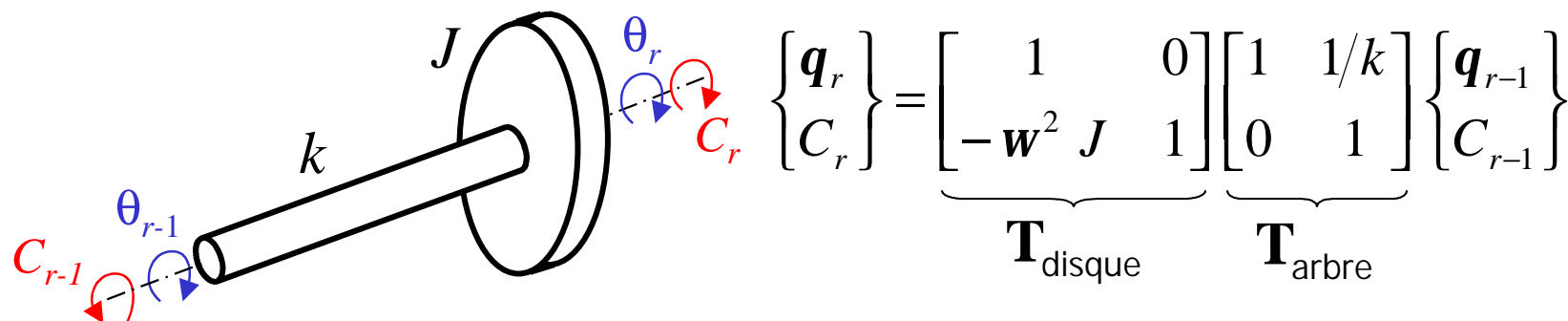
$$C_r = C_{r-1}$$

$$C_r = k (q_r - q_{r-1})$$

d'où la matrice de transfert de l'arbre

$$\mathbf{T}_{\text{arbre}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (dtm |\mathbf{T}| = 1)$$

Disque rigide + arbre élastique



$$\begin{Bmatrix} q_r \\ C_r \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{\text{disque}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{\text{arbre}}} \begin{Bmatrix} q_{r-1} \\ C_{r-1} \end{Bmatrix}$$

Cas général : résolution par transfert

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n \\ C_n \end{Bmatrix} = T_{n,n-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n-1} \\ C_{n-1} \end{Bmatrix} = \boxed{T_{n,n-1} T_{n-1,n-2} \cdots T_{2,1}} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ C_1 \end{Bmatrix} \\ = \mathbf{T}(\omega^2) \\ \text{(matrice de transfert de la chaîne)}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n \\ C_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{qq}(\mathbf{w}^2) & T_{qc}(\mathbf{w}^2) \\ T_{cq}(\mathbf{w}^2) & T_{cc}(\mathbf{w}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ C_1 \end{Bmatrix}$$

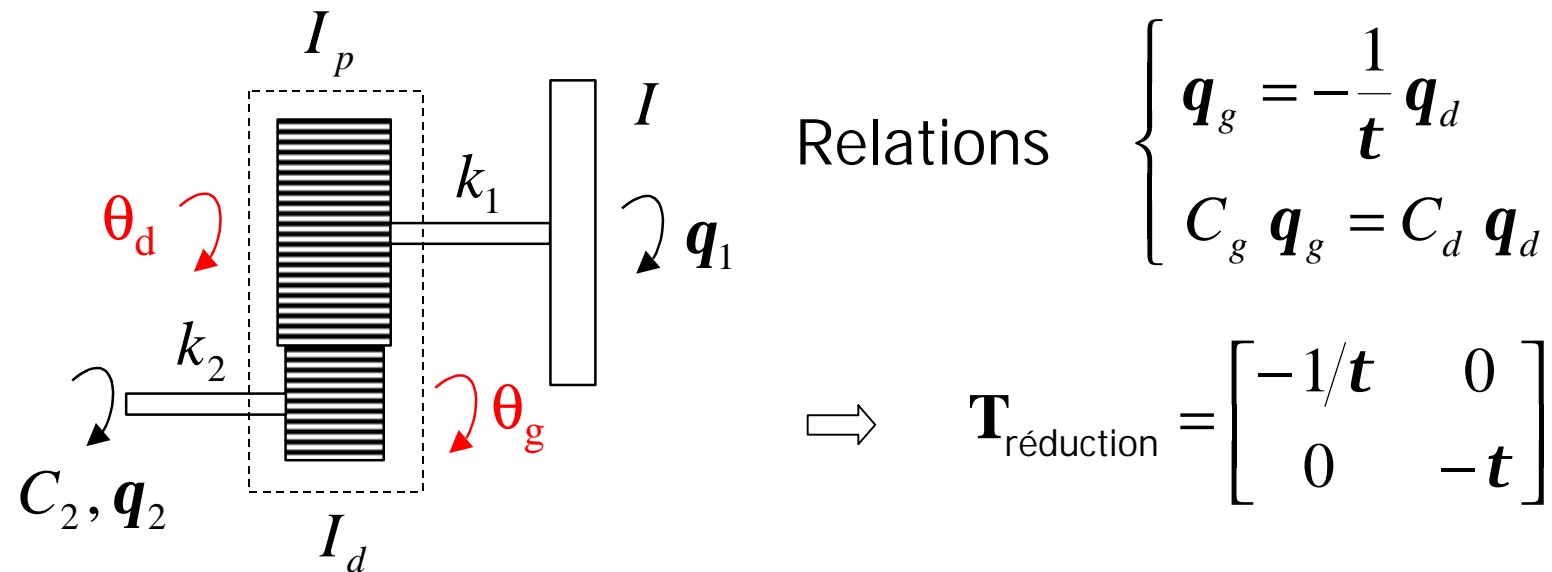
Résolution d'un problème aux fréquences propres

Conditions aux limites

- libre-libre : $T_{c\theta}(\omega^2) = 0$
- encastré-libre : $T_{\theta\theta}(\omega^2) = 0$
- libre-encastré : $T_{cc}(\omega^2) = 0$
- encastré-encastré : $T_{\theta c}(\omega^2) = 0$

\Rightarrow recherche des zéros du polynôme.

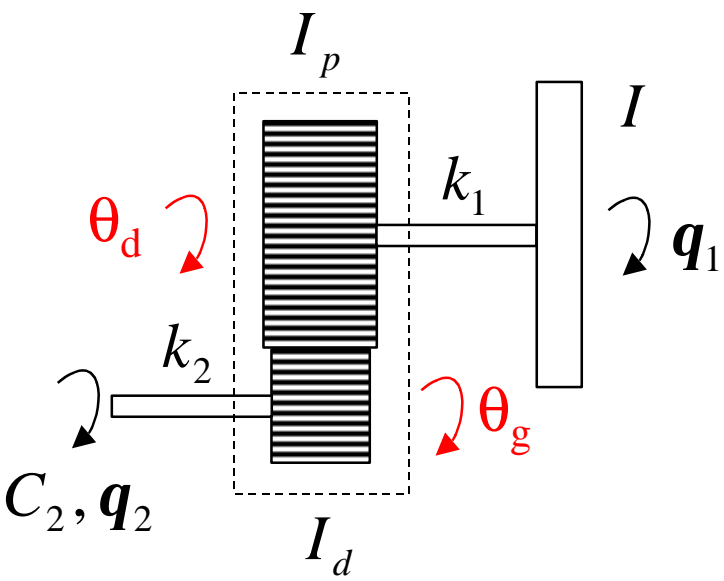
Exemple du réducteur de vitesse



Matrice de transfert du réducteur

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{réducteur}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 I_d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 I_p & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w^2 (I_d + t^2 I_p) & t^2 \end{bmatrix} \rightarrow I_{eq} \end{aligned}$$

Matrice de transfert de l'ensemble



$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/k_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{arbre 2}} \times$$

$$-\frac{1}{t} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{w}^2 (I_d + t^2 I_p) & t^2 \end{bmatrix}}_{\text{réducteur}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/k_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{arbre 1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{w}^2 I & 1 \end{bmatrix}}_{\text{disque}} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Système libre-libre

$$T_{Cq}(w^2) = \frac{w^2}{t} I_{eq} \left(1 - \frac{w^2 I}{k_1} \right) + t w^2 I = 0$$

$$\Rightarrow w_1 = 0 \quad \text{et} \quad w_2 = \sqrt{\frac{k_1 (I_{eq} + t^2 I)}{I I_{eq}}}$$

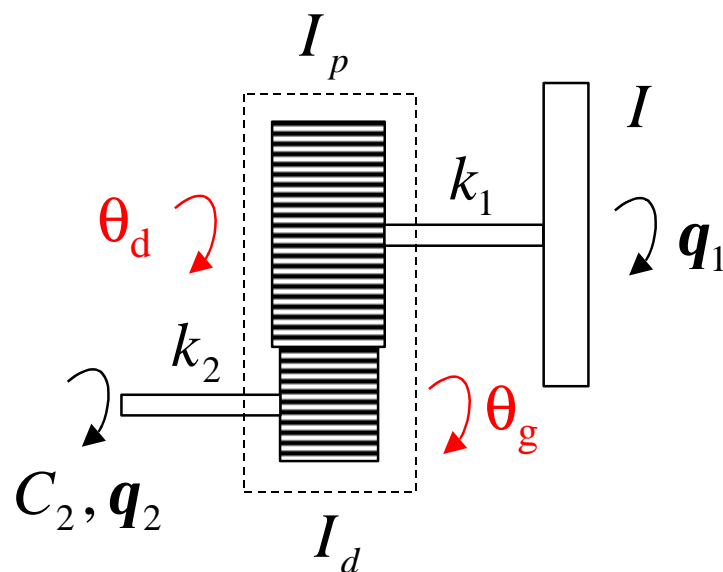


Schéma équivalent

