

# Chapter 7

## CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHẦN



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Nội dung

7.1. Bảng nguyên hàm

7.2. Tích phân từng phần

7.3. Phương pháp lượng giác

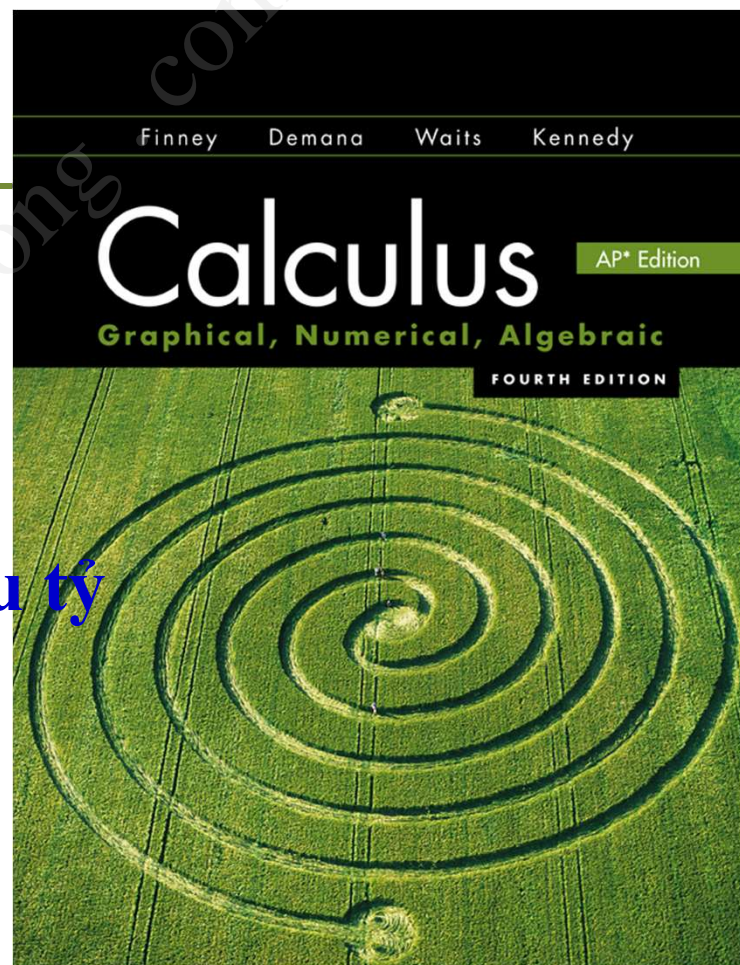
7.4. Phương pháp phân tích hữu tỷ

7.5. Phương trình vi phân cấp 1

7.6. Tích phân suy rộng

7.7. Hàm Hyperbolic

PEARSON



# 7.1. Bảng nguyên hàm



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Ví dụ 7.1

$$I = \int \frac{dx}{x \ln^3 x}$$

## Ví dụ 7.2

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

## Bài giải

# 7.1. Bảng nguyên hàm



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Ví dụ 7.3

$$I = \int \frac{dx}{1 + e^x}$$

## Bài giải

## Ví dụ 7.4

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x} - 8)}$$

# 7.1. Bảng nguyên hàm



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Ví dụ 7.5

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

## Ví dụ 7.6

$$I = \int x^3 \ln 3x dx$$

## Bài giải

# 7.1. Bảng nguyên hàm



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Ví dụ 7.7

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

## Bài giải

## Ví dụ 7.8

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

## 7.2. Tích phân từng phần



GV: Lê Thị Thanh Hải

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$\Rightarrow \int d(uv) = \int u dv + \int v du \Rightarrow uv = \int u dv + \int v du$$

$$\Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

### Ví dụ 7.9

$$I = \int x^2 e^x dx$$

### Bài giải

## 7.3. Phương pháp lượng giác



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Bài giải

#### Ví dụ 7.10

$$I = \int_0^1 \arcsin x dx$$

#### Ví dụ 7.11

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

## 7.3. Phương pháp lượng giác



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Đổi biến Weirstrass

Với  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,

Đặt  $u = \tan \frac{x}{2}$

Khi đó

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

**Ví dụ 7.12**

**Bài giải**

$$I = \int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x}$$

## 7.4. Phương pháp phân tích hữu tỷ



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.13

$$I = \int \frac{(x^3 - 6)dx}{x^2 - 3x + 2}$$

### Bài giải

### Ví dụ 7.14

$$I = \int \frac{x dx}{(x - 2)(x^2 + 4)}$$

# 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

### Dạng tổng quát

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

### Nghiệm tổng quát

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[ \int \mu(x)Q(x)dx + C \right]$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$



thừa số tích phân

### Ví dụ 7.15

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.16

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4}{xy^3 - 1}$$

### Bài giải

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.17

Tìm nghiệm riêng  
của phương trình  
vi phân

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$$

$$y(1) = 1$$

### Bài giải

# 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Ứng dụng của phương trình vi phân

### Mô hình tăng trưởng và suy giảm không bị chặn

$$\frac{dQ}{dt} = k \cdot Q \begin{cases} k > 0 : \text{tăng trưởng} \\ k < 0 : \text{suy giảm} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

- ✓ Tăng trưởng dân số ngắn hạn
- ✓ Lãi kép liên tục
- ✓ Lạm phát
- ✓ Đường giá-cung

- ✓ Phân rã chất phóng xạ
- ✓ Cạn kiệt tài nguyên
- ✓ Đường giá-cầu

# 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Mô hình tăng trưởng logistic

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q) \quad (k > 0)$$

$\Downarrow$

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$$

- ✓ Tăng trưởng dân số dài hạn
- ✓ Tăng trưởng của doanh nghiệp

## Mô hình tăng trưởng bị giới hạn

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q) \quad (k > 0)$$

$\Downarrow$

$$Q(t) = B - Ae^{-kt}$$

- ✓ Sự lan truyền của tin tức
- ✓ Sự truyền thuốc vào tĩnh mạch
- ✓ Định luật làm lạnh của Newton
- ✓ Sự tăng giá của sản phẩm mới

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.18

Giả sử một loại phóng xạ phân rã với tốc độ

$$\frac{dQ}{dt} = -0.25Q \quad (\text{đơn vị/năm})$$

Hỏi sau 5 năm lượng phóng xạ còn lại bao nhiêu nếu sau 1 năm nó còn 100 đơn vị.

### Bài giải

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Bài giải

#### Ví dụ 7.19

Giả sử dân số  $p(t)$  (đơn vị tính: 10 triệu người) của một quốc gia sau  $t$  năm kể từ năm 2013 tăng trưởng với tốc độ

$$\frac{dp}{dt} = 0.25p(1-p), p(0) = 9$$

Ước tính dân số vào năm 2019.

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Mô hình hòa tan

Bài toán này liên quan đến một bồn chứa dung dịch hỗn hợp của cùng một chất (muối chẳng hạn). Một dung dịch với nồng độ đã cho chảy vào với tốc độ cố định, khuấy đều và chảy ra ngoài theo một tốc độ cố định.

*Nếu  $y(t)$  biểu thị lượng chất trong bồn tại thời điểm  $t$  thì  $y'(t)$  là tốc độ mà tại đó các chất chảy vào trừ đi tốc độ mà nó chảy ra.*

Điều này dẫn đến một phương trình vi phân cấp 1.

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.20

### Bài giải

Một bể chứa 20 kg muối hòa tan trong 5000 lít nước. Nước biển có chứa 0.03 kg muối trong 1 lít nước chảy vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Dung dịch được hòa tan và chảy ra ngoài với tốc độ tương tự. Hỏi sau nửa giờ trong bể còn bao nhiêu muối?

# 7.5. Phương trình vi phân cấp 1

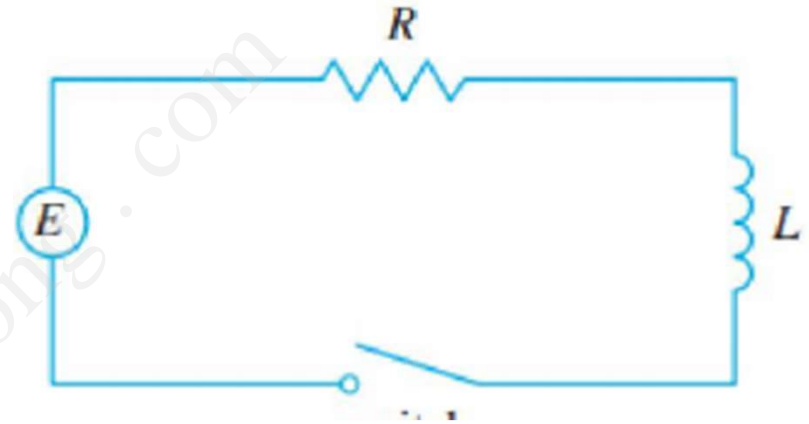


GV: Lê Thị Thanh Hải

## Mô hình mạch điện

Theo định luật Kirchhoffs

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$



$$I(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \rightarrow \frac{E}{R} \text{ khi } t \rightarrow \infty$$

$$= \frac{E}{R} + \left( -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

*Dòng điện ổn định*

*Dòng điện tức thời*

## 7.5. Phương trình vi phân cấp 1



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.21

Cho mạch điện có điện trở là  $12\Omega$  và điện cảm là  $4H$ . Nếu nguồn điện cố định là  $60V$  và chuyển mạch là đóng khi  $t = 0$  thì sau 1 giây dòng điện trong mạch là bao nhiêu và sau một khoảng thời gian dài thì dòng điện trong mạch như thế nào?

### Bài giải

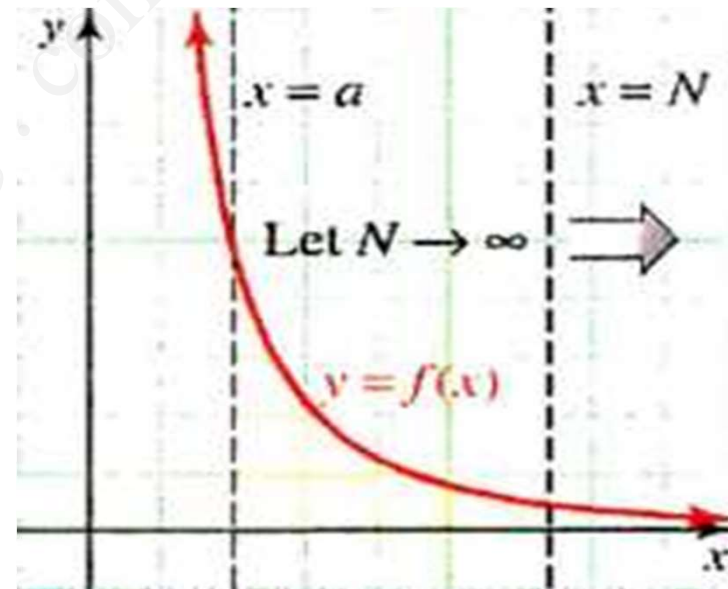
## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Tích phân suy rộng với cận vô hạn (Loại 1)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx$$



$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

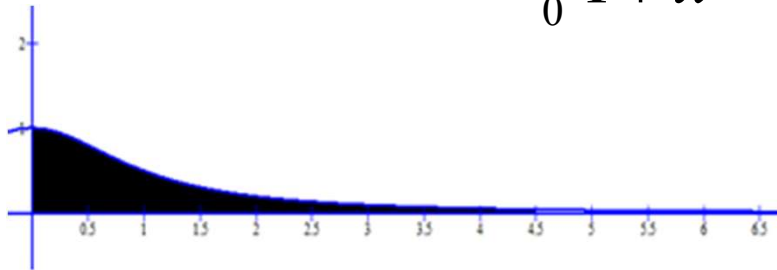
Tích phân suy rộng là **hội tụ** nếu giới hạn hữu hạn và **phân kỳ** nếu ngược lại.

## 7.6. Tích phân suy rộng

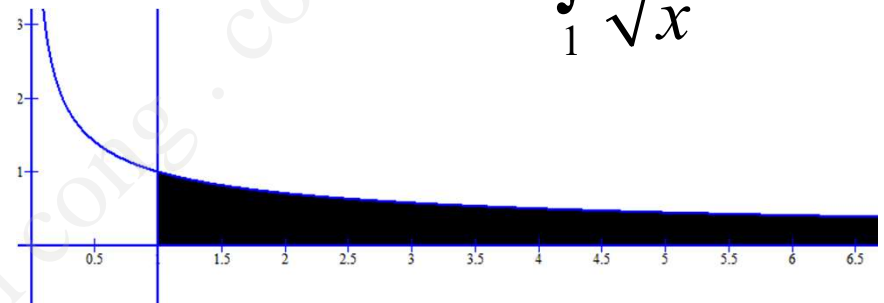


GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.22**  $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$



**Ví dụ 7.23**  $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$



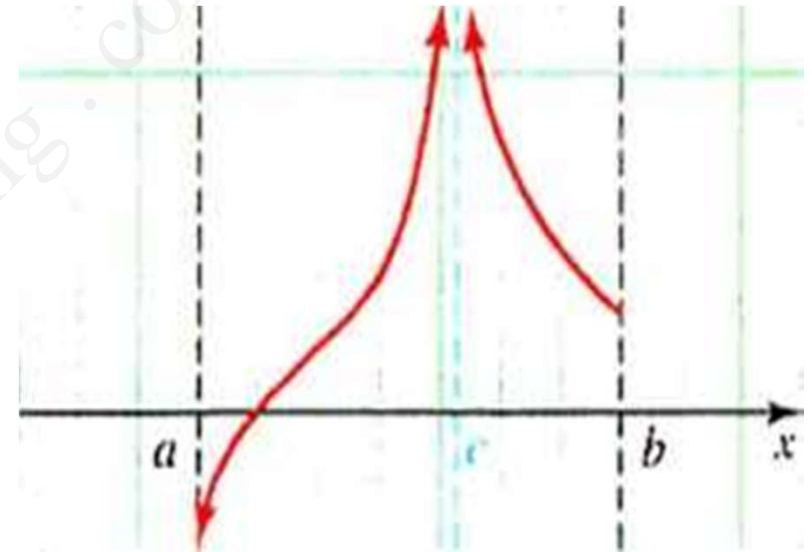
## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Tích phân suy rộng với hàm không bị chặn (Loại 2)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.24**  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.25**  $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Chú ý

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \begin{cases} \text{hội tụ về } \frac{1}{\alpha-1} & \text{khi } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ khi } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx \begin{cases} \text{hội tụ về } \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{khi } \alpha < 1 \\ \text{phân kỳ khi } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Giả sử  $f$  và  $g$  là hai hàm liên tục, không âm thỏa mãn

$f(x) \leq g(x)$  với mọi  $x \geq a$ . Khi đó

➤ Nếu  $\int_a^{\infty} g(x)dx$  hội tụ thì  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  cũng hội tụ.

➤ Nếu  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  phân kỳ thì  $\int_a^{\infty} g(x)dx$  cũng phân kỳ.

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Ví dụ 7.26

### Bài giải

Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$1. \quad I = \int_1^{\infty} \frac{x \sin^2 x}{x^4 + 7} dx$$

$$2. \quad I = \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$3. \quad I = \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

❖ Nếu  $f$  và  $g$  là hai hàm liên tục, không âm thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0. \text{ Khi đó}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ hội tụ}$$

❖ Nếu  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  hội tụ thì  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  hội tụ tuyệt đối.

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.27**

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} dx$$

**Ví dụ 7.28**

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.29**  $I = \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.30**  $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

## 7.6. Tích phân suy rộng



GV: Lê Thị Thanh Hải

**Ví dụ 7.31**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg^2 x + x}{9 + 3x + x^2} dx$$

**Ví dụ 7.32**

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\ln \left( 1 + \sqrt[3]{x^4} \right)} dx$$

# 7.7. Hàm Hyperbolic



GV: Lê Thị Thanh Hải

## Hàm Hyperbolic

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{for all } x.$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{for all } x.$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{for all } x.$$



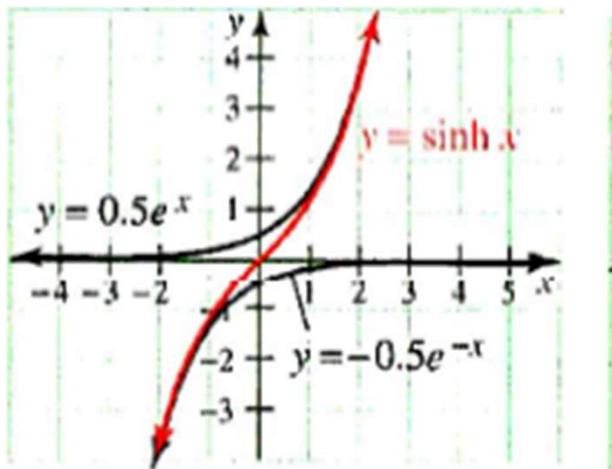
$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

# 7.7. Hàm Hyperbolic

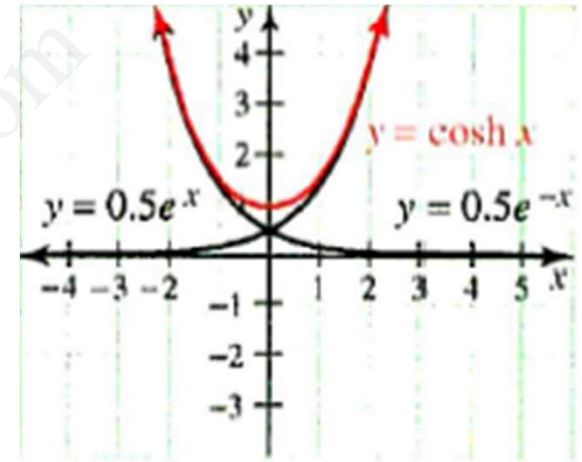


GV: Lê Thị Thanh Hải

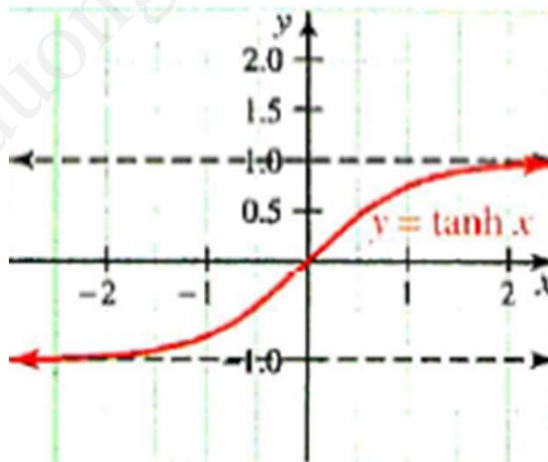
## Đồ thị của hàm Hyperbolic



a. The hyperbolic sine  
 $y = \sinh x$



b. The hyperbolic cosine  
 $y = \cosh x$



c. The hyperbolic tangent  
 $y = \tanh x$

## 7.7. Hàm Hyperbolic



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Tính chất của hàm Hyperbolic

$$1. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$2. \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$3. \cosh(-x) = \cosh x$$

$$4. \tanh(-x) = -\tanh x$$

$$5. \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$6. \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$7. \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$8. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$9. \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$10. \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x; \quad \operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$$

## 7.7. Hàm Hyperbolic



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Đạo hàm của hàm Hyperbolic

$$1. \frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2. \frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \cdot \frac{du}{dx}$$

## 7.7. Hàm Hyperbolic



GV: Lê Thị Thanh Hải

### Bài giải

#### Ví dụ 7.33

Tính đạo hàm  $\frac{dy}{dx}$

biết  $y = \coth(2x^2 - 5)$

#### Ví dụ 7.34

Tính tích phân

$$\int x \operatorname{csc} h^2 x^2 dx$$