CHƯƠNG 11. HÀM NHIỀU BIẾN

BỘ MÔN TOÁN - KHOA KHƯD - HCMUTE

Khái niệm hàm hai biến

Định nghĩa 1

Một hàm hai biến là một quy tắc f mà tương ứng mỗi cặp $(x,\ y)$ trong một tập D với một số duy nhất $f\,(x,\ y)$. Tập D được gọi là miền xác định của hàm số, và các giá trị tương ứng của $f\,(x,\ y)$ tạo thành miền giá trị của f.

Các hàm ba biến hoặc nhiều biến hơn có thể được định nghĩa tương tự.

Khái niệm hàm hai biến

Định nghĩa 1

Một hàm hai biến là một quy tắc f mà tương ứng mỗi cặp $(x,\ y)$ trong một tập D với một số duy nhất $f\,(x,\ y)$. Tập D được gọi là miền xác định của hàm số, và các giá trị tương ứng của $f\,(x,\ y)$ tạo thành miền giá trị của f.

Các hàm ba biến hoặc nhiều biến hơn có thể được định nghĩa tương tự.
Khi cho một hàm hai biến f, ta có thể viết $z = f(x, y)$ và xem x, y là các biến độc lập và z là biến phụ thuộc. Tập xác định của f là tập hợp lớn nhất của những điểm trong mặt phẳng mà biểu thức của hàm số được xác định.

Ví dụ. Cho $f(x,\ y) = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$.
a. Tính $f(2,\ 1)$ và $f\left(2t,\ t^2\right)$.
b. Mô tả miền xác định và miền giá trị của f.

Các phép toán hàm hai biến

Nếu $f(x,\ y)$ và $g(x,\ y)$ là các hàm hai biến với miền xác định là D, thì

Các phép toán hàm hai biến

Nếu $f(x,\ y)$ và $g(x,\ y)$ là các hàm hai biến với miền xác định là D, thì

Tổng	$(f+g)(x,\ y) = f(x,\ y) + g(x,\ y)$
Hiệu	$(f-g)(x,\ y) = f(x,\ y) - g(x,\ y)$
Tích	$(f.g)(x,\ y) = f(x,\ y).g(x,\ y)$
Thương	$\left(\frac{f}{g}\right)(x,\ y) = \frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)},\ g(x,\ y) \neq 0$

Đường mức và mặt

Đồ thị của hàm $f\,(x,\ y)$ là tập hợp tất cả các bộ ba thành phần được sắp thứ tự $(x,\ y,\ z)$ sao cho $(x,\ y)$ thuộc miền xác định của f và $z = f\,(x,\ y)$. Đồ thị của $f\,(x,\ y)$ là một mặt trong $\mathbb{R}^{2^3}$ mà có hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy là miền xác định D.

Đường mức và mặt

Đồ thị của hàm $f(x,\ y)$ là tập hợp tất cả các bộ ba thành phần được sắp thứ tự $(x,\ y,\ z)$ sao cho $(x,\ y)$ thuộc miền xác định của f và $z = f(x,\ y)$. Đồ thị của $f(x,\ y)$ là một mặt trong $\mathbb{R}^{2^3}$ mà có hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy là miền xác định D.

Tập hợp các điểm $(x,\ y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn $f(x,\ y) = C$ được gọi là đường mức (đường đồng mức) của f tại C, và một họ toàn bộ các đường mức được sinh ra khi C thay đổi trên tập giá trị của f.

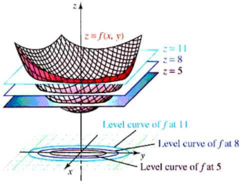
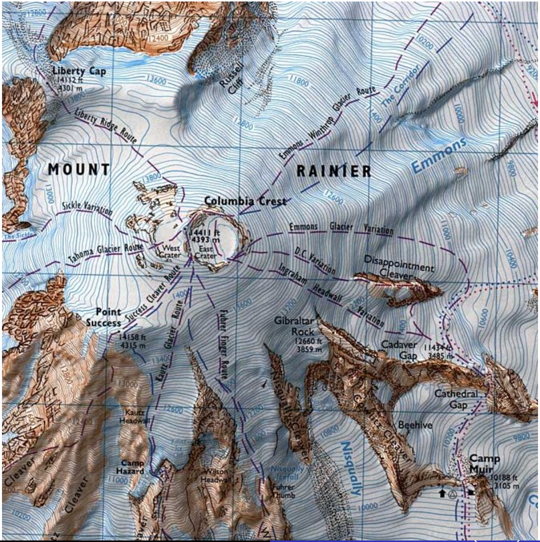


Figure 11.2 Graph of a function of two variables

Bản đồ các đường mức của ngọn núi Rainer



Ví dụ. Vẽ một số đường mức của hàm số $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$.

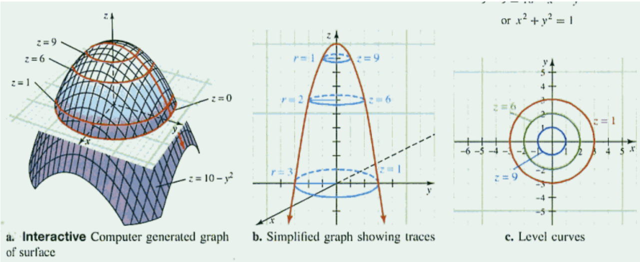
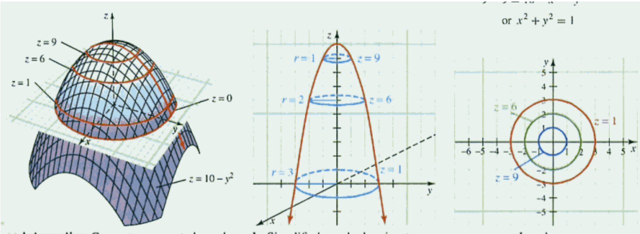


Figure 11.5 Three ways of viewing the surface $z = 10 - x^2 - y^2$

Ví dụ. Vẽ một số đường mức của hàm số $f(x, \ y) = 10 - x^2 - y^2$.



a. Interactive Computer generated graph of surface
b. Simplified graph showing traces
c. Level curves

Figure 11.5 Three ways of viewing the surface $z = 10 - x^2 - y^2$

Khái niệm đường mức có thể được tổng quát áp dụng cho hàm từ hai biến trở lên. Đặc biệt, nếu f là hàm ba biến $x, \ y, \ z$ thì tập nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = C$ là một miền trong $\mathbb{R}^{2^3}$được gọi là mặt mức của f tại C.

Trong $\mathbb{R}^2$:

- Đĩa mở: $B_r(C, r) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$.
- Đĩa đóng: $B[C, r] = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$.

Trong $\mathbb{R}^2$:

- Đĩa mở: $B_r(C,r) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$.
- Đĩa đóng: $B[C,r] = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$.
- Một điểm P được gọi là một **điểm trong** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại C nằm hoàn toàn trong S.

Trong $\mathbb{R}^2$:

- Đĩa mở: $B_r(C, r) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$.
- Đĩa đóng: $B[C, r] = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$.
- Một điểm P được gọi là một **điểm trong** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại C nằm hoàn toàn trong S.
- Tập rỗng hoặc tập chỉ chứa các điểm trong gọi là **tập mở**.

Trong $\mathbb{R}^2$:

- Đĩa mở: $B_r(C, r) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$.
- Đĩa đóng: $B[C, r] = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$.
- Một điểm P được gọi là một **điểm trong** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại C nằm hoàn toàn trong S.
- Tập rỗng hoặc tập chỉ chứa các điểm trong gọi là **tập mở**.
- Một điểm P được gọi là một **điểm biên** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại C nằm hoàn toàn trong S. Tập hợp tất cả các điểm biên của S được gọi là **biên** của S.

Trong $\mathbb{R}^2$:

- Đĩa mở: $B_r(C, r) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$.
- Đĩa đóng: $B[C, r] = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$.
- Một điểm P được gọi là một **điểm trong** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại C nằm hoàn toàn trong S.
- Tập rỗng hoặc tập chỉ chứa các điểm trong gọi là **tập mở**.
- Một điểm P được gọi là một **điểm biên** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại C nằm hoàn toàn trong S. Tập hợp tất cả các điểm biên của S được gọi là **biên** của S.
- Một tập được gọi là **đóng** nếu nó chứa biên của nó. Tập rỗng và $\mathbb{R}^2$ là vừa đóng, vừa mở.

Ta viết $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = L$ có nghĩa là giá trị hàm $f(x,\ y)$ có thể làm cho gần bằng số L một cách tùy ý bằng cách chọn điểm $(x,\ y)$ thích hợp gần điểm $(x_0,\ y_0)$.

Ta viết $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = L$ có nghĩa là giá trị hàm $f(x,\ y)$ có thể làm cho gần bằng số L một cách tùy ý bằng cách chọn điểm $(x,\ y)$ thích hợp gần điểm $(x_0,\ y_0)$.

Định nghĩa 2

Giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = L$ có nghĩa là với mỗi số $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi điểm $(x,\ y)$ thuộc miền xác định D thỏa $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ thì $|f(x,\ y) - L| < \varepsilon$.

Tính giới hạn của hàm hai biến

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Tính giới hạn của hàm hai biến

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$
2. Tính $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2+x-xy-y}{x-y}$.

Tính giới hạn của hàm hai biến

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$
2. Tính $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2+x-xy-y}{x-y}$.
3. Chứng minh giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ không tồn tại, với $f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Tính giới hạn của hàm hai biến

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$
2. Tính $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2+x-xy-y}{x-y}$.
3. Chứng minh giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ không tồn tại, với $f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.HD. Tính dọc theo các đường $y = 0$, $y = x$.

Tính giới hạn của hàm hai biến

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$
2. Tính $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2+x-xy-y}{x-y}$.
3. Chứng minh giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ không tồn tại, với $f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.HD. Tính dọc theo các đường $y = 0,\ y = x$.
4. Chỉ ra $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ không tồn tại.

Tính giới hạn của hàm hai biến

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$
2. Tính $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2+x-xy-y}{x-y}$.
3. Chứng minh giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ không tồn tại, với $f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.HD. Tính dọc theo các đường $y = 0,\ y = x$.
4. Chỉ ra $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ không tồn tại.HD. Tính dọc theo các đường $y = kx,\ y = x^2$.

Các quy tắc tính giới hạn cơ bản của hàm hai biến

Giả sử $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = L$ và $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} g(x,\ y) = M$.

Khi đó, với hằng số a bất kỳ,

Quy tắc nhân vô hướng $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} [af](x,\ y) = aL$

Quy tắc tổng $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} [f+g](x,\ y) = L + M$

Quy tắc tích $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} [fg](x,\ y) = LM$

Quy tắc thương $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} \left[\frac{f}{g}\right](x,\ y) = \frac{L}{M}$, nếu $M \neq 0$

Định nghĩa 3

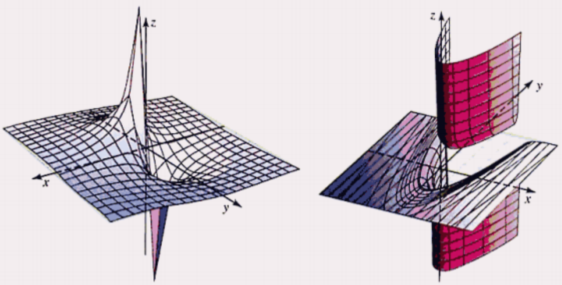
Hàm $f(x, y)$ gọi là **liên tục tại điểm** (x_0, y_0) nếu

1. $f(x_0, y_0)$ xác định;
2. $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ tồn tại;
3. $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Hàm f **liên tục trên tập** S nếu nó liên tục tại mọi điểm trong S.

Hàm f liên tục tại $(x_0, \ y_0)$ nếu giá trị của hàm $f(x, \ y)$ gần $f(x_0, \ y_0)$ với mọi $(x, \ y)$ trong miền xác định của f mà đủ gần với $(x_0, \ y_0)$. Về mặt hình học, điều này có nghĩa là f liên tục nếu mặt $z = f(x, \ y)$ không có các "lỗ hổng" (holes) hoặc các "kẽ hở" (gaps).

Hàm f liên tục tại (x_0, y_0) nếu giá trị của hàm $f(x, y)$ gần $f(x_0, y_0)$ với mọi (x, y) trong miền xác định của f mà đủ gần với (x_0, y_0). Về mặt hình học, điều này có nghĩa là f liên tục nếu mặt $z = f(x, y)$ không có các "lỗ hổng" (holes) hoặc các "kẽ hở" (gaps).



a. A "hole" discontinuity
b. A "gap" discontinuity

Figure 11.14 Two types of discontinuity

Các tính chất cơ bản của hàm liên tục

Từ các tính chất cơ bản của giới hạn, ta có thể suy ra các tính chất sau.

Các tính chất cơ bản của hàm liên tục

Từ các tính chất cơ bản của giới hạn, ta có thể suy ra các tính chất sau.
Nếu f và g là các hàm liên tục trên tập S thì các hàm sau đây liên tục $f+g$, af, fg, f/g tại những điểm mà $g \neq 0$, $\sqrt[n]{f}$ tại những nơi mà nó xác định.

Các tính chất cơ bản của hàm liên tục

Từ các tính chất cơ bản của giới hạn, ta có thể suy ra các tính chất sau.
Nếu f và g là các hàm liên tục trên tập S thì các hàm sau đây liên tục $f+g$, af, fg, f/g tại những điểm mà $g \neq 0$, $\sqrt[n]{f}$ tại những nơi mà nó xác định.
Nếu F là một hàm hai biến sao cho $F(x,\ y)$ liên tục tại $(x_0,\ y_0)$ và G là hàm một biến mà liên tục tại $F(x_0,\ y_0)$, thì hàm hợp $G \circ F$ liên tục tại $(x_0,\ y_0)$.

Các tính chất cơ bản của hàm liên tục

Từ các tính chất cơ bản của giới hạn, ta có thể suy ra các tính chất sau.

Nếu f và g là các hàm liên tục trên tập S thì các hàm sau đây liên tục $f+g$, af, fg, f/g tại những điểm mà $g \neq 0$, $\sqrt[n]{f}$ tại những nơi mà nó xác định.

Nếu F là một hàm hai biến sao cho $F\left(x,\ y\right)$ liên tục tại $\left(x_0,\ y_0\right)$ và G là hàm một biến mà liên tục tại $F\left(x_0,\ y_0\right)$, thì hàm hợp $G \circ F$ liên tục tại $\left(x_0,\ y_0\right)$.

Trong tài liệu này, nếu không nói gì thêm thì các hàm hai biến được xét ở đây đều liên tục tại những nơi mà nó xác định.

Kiểm tra tính liên tục của hàm

a. $f\left(x,\ y\right) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

Kiểm tra tính liên tục của hàm

a. $f(x,\ y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

b. $f(x,\ y) = \frac{1}{y-x^2}$

Kiểm tra tính liên tục của hàm

a. $f(x,\ y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$
b. $f(x,\ y) = \frac{1}{y-x^2}$
c. Chỉ ra hàm f liên tục tại $(0,\ 0)$, với
$$f(x,\ y) = \begin{cases} y\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

Giới hạn và liên tục của hàm ba biến

Giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z) = L$ có nghĩa là với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|f(x,\ y,\ z) - L| < \varepsilon$ với mọi $(x,\ y,\ z)$ là điểm trong miền xác định của f sao cho $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$.

Giới hạn và liên tục của hàm ba biến

Giới hạn $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z) = L$ có nghĩa là với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|f(x,\ y,\ z) - L| < \varepsilon$ với mọi $(x,\ y,\ z)$ là điểm trong miền xác định của f sao cho $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$.

Hàm $f(x,\ y,\ z)$ là liên tục tại điểm $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nếu

1. $f(x_0,\ y_0,\ z_0)$ xác định;
2. $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z)$ tồn tại;
3. $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z) = f(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Một số ký hiệu thay thế

Với $z = f(x, y)$, đạo hàm riêng f_x và f_y được ký hiệu bởi

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x = D_x(f)$$

và

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y = D_y(f).$$

Một số ký hiệu thay thế

Với $z = f(x,\ y)$, đạo hàm riêng f_x và f_y được ký hiệu bởi

$$f_x(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,\ y) = z_x = D_x(f)$$

và

$$f_y(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,\ y) = z_y = D_y(f).$$

Các giá trị đạo hàm riêng của $f(x,\ y)$ tại điểm $(a,\ b)$ được ký hiệu bởi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,\ b)} = f_x(a,\ b) \text{ và } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,\ b)} = f_y(a,\ b).$$

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng của hàm hai biến $f(x, y) = x^3y + x^2y^2$.

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng của hàm hai biến
$f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$.
Ví dụ. Cho $z = x^2 \sin\left(3x + y^3\right)$.

1. Tính $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)}$.

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng của hàm hai biến
$f(x, y) = x^3y + x^2y^2$.
Ví dụ. Cho $z = x^2 \sin\left(3x + y^3\right)$.

1. Tính $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)}$.
2. Tính z_y tại $(1, 1)$.

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng của hàm hai biến
$f(x, y) = x^3y + x^2y^2$.

Ví dụ. Cho $z = x^2 \sin(3x + y^3)$.

1. Tính $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},0\right)}$.
2. Tính z_y tại $(1, 1)$.

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng của hàm ba biến
$f(x, y, z) = x^2 + 2xy^2 + yz^3$.

Ví dụ. Cho z là hàm ẩn theo biến x và y được xác định bởi phương trình $x^2z + yz^3 = x$. Xác định $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$.

Hệ số góc của tiếp tuyến và tốc độ thay đổi

Đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = f(x,\ y)$ tại điểm $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ có hệ số góc $f_x(x_0,\ y_0)$. Tương tự, đường thẳng tiếp xúc với mặt $z = f(x,\ y)$ tại P_0 và song song với mặt phẳng Oyz có hệ số góc $f_y(x_0,\ y_0)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến và tốc độ thay đổi

Đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = f(x, y)$ tại điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ có hệ số góc $f_x(x_0, y_0)$. Tương tự, đường thẳng tiếp xúc với mặt $z = f(x, y)$ tại P_0 và song song với mặt phẳng Oyz có hệ số góc $f_y(x_0, y_0)$.

Ví dụ. Tìm hệ số góc của đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = x\sqrt{x+y}$ tại điểm $P(1, 3, 2)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến và tốc độ thay đổi

Đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = f(x,\ y)$ tại điểm $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ có hệ số góc $f_x(x_0,\ y_0)$. Tương tự, đường thẳng tiếp xúc với mặt $z = f(x,\ y)$ tại P_0 và song song với mặt phẳng Oyz có hệ số góc $f_y(x_0,\ y_0)$.

Ví dụ. Tìm hệ số góc của đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = x\sqrt{x+y}$ tại điểm $P(1,\ 3,\ 2)$.

Khi điểm $(x,\ y)$ di chuyển từ điểm cố định $P_0(x_0,\ y_0)$ thì hàm $f(x,\ y)$ thay đổi với tốc độ được cho bởi $f_x(x_0,\ y_0)$ theo hướng dương của trục Ox, và được cho bởi $f_y(x_0,\ y_0)$ theo hướng dương của trục Oy.

Đạo hàm riêng như là tốc độ thay đổi

Ví dụ. Trong một mạch điện với suất điện động (EMF) E (volt) và điện trở R (ohm) thì cường độ dòng điện là $I = E/R$ (ampere). Tìm đạo hàm riêng ngay khi $E = 120$ và $R = 15$ và giải thích các đạo hàm này như là tốc độ thay đổi.

Giải. Vì $I = ER^{-1}$ nên ta có $\frac{\partial I}{\partial E} = R^{-1}$, $\frac{\partial I}{\partial R} = -ER^{-2}$ và như vậy, khi $E = 120$, $R = 15$ ta tìm được
$\frac{\partial I}{\partial E} \approx 0.0667; \frac{\partial I}{\partial R} \approx -0.5333.$

Đạo hàm riêng như là tốc độ thay đổi

Ví dụ. Trong một mạch điện với suất điện động (EMF) E (volt) và điện trở R (ohm) thì cường độ dòng điện là $I = E/R$ (ampere). Tìm đạo hàm riêng ngay khi $E = 120$ và $R = 15$ và giải thích các đạo hàm này như là tốc độ thay đổi.

Giải. Vì $I = ER^{-1}$ nên ta có $\frac{\partial I}{\partial E} = R^{-1}$, $\frac{\partial I}{\partial R} = -ER^{-2}$ và như vậy, khi $E = 120$, $R = 15$ ta tìm được
$\frac{\partial I}{\partial E} \approx 0.0667; \frac{\partial I}{\partial R} \approx -0.5333.$
Điều này có nghĩa là nếu điện trở cố định là 15 (ohm) thì cường độ dòng điện tăng (vì đạo hàm dương) tương ứng với tốc độ 0.0667 ampere mỗi volt khi suất điện động là 120 volt. Tương tự, với suất điện động EMF cố định thì cường độ dòng điện giảm (vì đạo hàm âm) tương ứng với tốc độ 0.5333 ampere mỗi ohm khi điện trở là 15 ohm.

Đạo hàm cấp cao của hàm hai biến

Cho $z = f(x,\ y)$. Các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_y = f_{yy}.$$

Đạo hàm cấp cao của hàm hai biến

Cho $z = f(x,\ y)$. Các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_y = f_{yy}.$$

Các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}.$$

Ví dụ. Với $z = f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ví dụ. Với $z = f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ví dụ. Với $z = f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Ví dụ. Với $z = f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. $f_{xy}(3, 2)$.

Ví dụ. Với $z = f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. $f_{xy}(3, 2)$.

Định lý 11.1 (Sự bằng nhau của các đạo hàm hỗn hợp)

Nếu hàm $f(x,\ y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp f_{xy} và f_{yx} liên tục trên một khoảng mở chứa $(x_0,\ y_0)$ thì $f_{yx}(x_0,\ y_0) = f_{xy}(x_0,\ y_0)$.

Ví dụ. Với $z = f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. $f_{xy}(3, 2)$.

Định lý 11.1 (Sự bằng nhau của các đạo hàm hỗn hợp)

Nếu hàm $f(x,\ y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp f_{xy} và f_{yx} liên tục trên một khoảng mở chứa $(x_0,\ y_0)$ thì
$f_{yx}(x_0,\ y_0) = f_{xy}(x_0,\ y_0)$.

Ví dụ. Xác định $f_{xy},\ f_{yx},\ f_{xx},\ f_{xxy}$, với $f(x,\ y) = x^2 y e^y$.

Một phương trình chứa các đạo hàm riêng của hàm cần tìm được gọi là một **phương trình đạo hàm riêng**. Một trong những phương trình đạo hàm riêng quan trọng là **phương trình khuếch tán** hay **phương trình truyền nhiệt**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

với $T(x,t)$ là nhiệt độ trong một thanh mỏng tại vị trí x và thời gian t. Hằng số c được gọi là hệ số khuếch tán của loại vật liệu cấu tạo của thanh.

Ví dụ. Kiểm tra $T\left(x,\ t\right) = e^{-t}\cos\frac{x}{c}$ thỏa phương trình nhiệt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Đạo hàm riêng cấp cao của hàm ba biến

Định nghĩa tương tự có thể dùng cho hàm nhiều hơn hai biến. Chẳng hạn đối với hàm ba biến $f(x, y, z)$:

$$f_{zzz} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]; f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]$$

Ví dụ. Bằng cách tính toán trực tiếp, chỉ ra rằng $f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zyx}$, với hàm $f(x, y, z) = xyz + x^2y^3z^4$.

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc

Giả sử S là một mặt có phương trình $z = f(x,\ y)$ và cho $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S mà tại đó tồn tại mặt phẳng tiếp xúc. Khi đó phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với S tại P_0 là

$$z - z_0 = f_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,\ y_0)(y - y_0).$$

Nếu phương trình này được viết dưới dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ thì ta nói phương trình của mặt phẳng này ở dạng chuẩn.

Ví dụ. Tìm phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt $z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ tại điểm $P_0\left(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Nếu $f(x, y)$ và các đạo hàm riêng của nó f_x, f_y xác định trên một miền mở R chứa điểm $P(x_0, y_0)$ và f_x, f_y liên tục tại P thì

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &\approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y,\end{aligned}$$

do đó

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Nếu $f(x,\ y)$ và các đạo hàm riêng của nó $f_x,\ f_y$ xác định trên một miền mở R chứa điểm $P(x_0,\ y_0)$ và $f_x,\ f_y$ liên tục tại P thì

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,\ y_0)\\ &\approx f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y,\end{aligned}$$

do đó

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y.$$

Số gia của hàm ba biến $f(x, y, z)$ có thể được định nghĩa tương tự

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)\\ &\approx f_x(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\,\Delta z\end{aligned}$$

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

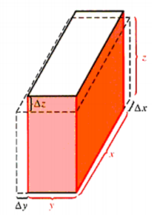


Figure 11.20 Construction of a box

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

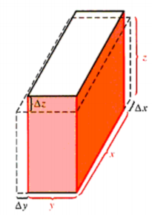


Figure 11.20 Construction of a box

Giải.

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = xy + 2\left(xz + yz\right).$

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

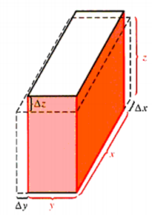


Figure 11.20 Construction of a box

Giải.

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = xy + 2\left(xz + yz\right).$
- Tổng giá trị $C\left(x, y, z\right) = 3xy + 2.2\left(xz + yz\right).$

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

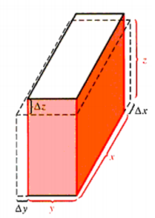


Figure 11.20 Construction of a box

Giải.

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = xy + 2\left(xz + yz\right)$.
- Tổng giá trị $C\left(x, y, z\right) = 3xy + 2.2\left(xz + yz\right)$.
- $C_x = 3y + 4z, C_y = 3x + 4z, C_z = 4x + 4y$.

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

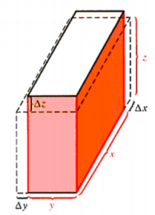


Figure 11.20 Construction of a box

Giải.

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = xy + 2\left(xz + yz\right).$
- Tổng giá trị $C\left(x, y, z\right) = 3xy + 2.2\left(xz + yz\right).$
- $C_x = 3y + 4z, C_y = 3x + 4z, C_z = 4x + 4y.$
- $\Delta x = \frac{3}{12} = 0.25ft; \Delta y = \frac{3}{12} = 0.25ft; \Delta z = \frac{-4}{12} \approx -0.33ft.$

Ứng dụng sự xấp xỉ số gia của hàm hai biến

Ví dụ. Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

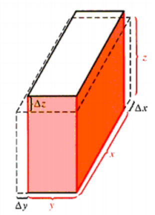


Figure 11.20 Construction of a box

Giải.

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = xy + 2\left(xz + yz\right).$
- Tổng giá trị $C\left(x, y, z\right) = 3xy + 2.2\left(xz + yz\right).$
- $C_x = 3y + 4z, C_y = 3x + 4z, C_z = 4x + 4y.$
- $\Delta x = \frac{3}{12} = 0.25ft; \Delta y = \frac{3}{12} = 0.25ft; \Delta z = \frac{-4}{12} \approx -0.33ft.$
- $\Delta C \approx C_x\left(3, 1, 2\right)\Delta x + C_y\left(3, 1, 2\right)\Delta y + C_z\left(3, 1, 2\right)\Delta z \approx 1.67.$

Tính sai số phần trăm cực đại bằng cách sử dụng vi phân

Bán kính và chiều cao của một hình nón tròn thẳng được đo với các sai số tối đa tương ứng 3% và 2%. Sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích của hình nón này bằng cách sử dụng những phép đo này và sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Tính sai số phần trăm cực đại bằng cách sử dụng vi phân

Bán kính và chiều cao của một hình nón tròn thẳng được đo với các sai số tối đa tương ứng 3% và 2%. Sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích của hình nón này bằng cách sử dụng những phép đo này và sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Giải. Ta có

- $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leq 0.03; \left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leq 0.02; V_R = \frac{2}{3}\pi RH; V_H = \frac{1}{3}\pi R^2.$

Tính sai số phần trăm cực đại bằng cách sử dụng vi phân

Bán kính và chiều cao của một hình nón tròn thẳng được đo với các sai số tối đa tương ứng 3% và 2%. Sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích của hình nón này bằng cách sử dụng những phép đo này và sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Giải. Ta có

- $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \le 0.03; \left|\frac{\Delta H}{H}\right| \le 0.02;\ V_R = \frac{2}{3}\pi RH;\ V_H = \frac{1}{3}\pi R^2.$
- $\Delta V \approx \left(\frac{2}{3}\pi RH\right)\Delta R + \left(\frac{1}{3}\pi R^2\right)\Delta H.$

Tính sai số phần trăm cực đại bằng cách sử dụng vi phân

Bán kính và chiều cao của một hình nón tròn thẳng được đo với các sai số tối đa tương ứng 3% và 2%. Sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích của hình nón này bằng cách sử dụng những phép đo này và sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Giải. Ta có

- $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leq 0.03$; $\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leq 0.02$; $V_R = \frac{2}{3}\pi RH$; $V_H = \frac{1}{3}\pi R^2$.
- $\Delta V \approx \left(\frac{2}{3}\pi RH\right)\Delta R + \left(\frac{1}{3}\pi R^2\right)\Delta H$.
- $\frac{\Delta V}{V} \approx 2\left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta H}{H}\right) \Rightarrow \left|\frac{\Delta V}{V}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta H}{H}\right| = 0.08.$

Tính sai số phần trăm cực đại bằng cách sử dụng vi phân

Bán kính và chiều cao của một hình nón tròn thẳng được đo với các sai số tối đa tương ứng 3% và 2%. Sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích của hình nón này bằng cách sử dụng những phép đo này và sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Giải. Ta có

- $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leq 0.03; \left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leq 0.02;\ V_R = \frac{2}{3}\pi RH;\ V_H = \frac{1}{3}\pi R^2.$
- $\Delta V \approx \left(\frac{2}{3}\pi RH\right)\Delta R + \left(\frac{1}{3}\pi R^2\right)\Delta H.$
- $\frac{\Delta V}{V} \approx 2\left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta H}{H}\right) \Rightarrow \left|\frac{\Delta V}{V}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta H}{H}\right| = 0.08.$

Vậy sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích V là xấp xỉ 8%.

Vi phần toàn phần của hàm hai biến

Định nghĩa 5

Vi phần toàn phần của hàm hai biến $f(x, y)$ là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x\left(x, y\right)dx + f_y\left(x, y\right)dy,$$

với x và y là các biến độc lập.

Vi phần toàn phần của hàm hai biến

Định nghĩa 5

Vi phần toàn phần của hàm hai biến $f(x, y)$ là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy,$$

với x và y là các biến độc lập. Tương tự cho hàm ba biến $f(x, y, z)$, vi phân toàn phần của hàm ba biến là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Vi phần toàn phần của hàm hai biến

Định nghĩa 5

Vi phần toàn phần của hàm hai biến $f(x,y)$ là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x\left(x,y\right)dx + f_y\left(x,y\right)dy,$$

với x và y là các biến độc lập. Tương tự cho hàm ba biến $f(x,y,z)$, vi phân toàn phần của hàm ba biến là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Ví dụ. Xác định vi phần toàn phần của hàm:

1. $f\left(x,y\right) = x^2\ln\left(3y^2 - 2x\right).$

Vi phần toàn phần của hàm hai biến

Định nghĩa 5

Vi phần toàn phần của hàm hai biến $f(x,y)$ là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x\left(x,y\right)dx + f_y\left(x,y\right)dy,$$

với x và y là các biến độc lập. Tương tự cho hàm ba biến $f(x,y,z)$, vi phân toàn phần của hàm ba biến là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Ví dụ. Xác định vi phần toàn phần của hàm:

1. $f\left(x,y\right) = x^2 \ln\left(3y^2 - 2x\right).$
2. $f\left(x,y,z\right) = 2x^3 + 5y^4 - 6z.$

Ví dụ. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô la) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là \$900,000 và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sự thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng \$1,000 và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Ví dụ. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô la) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là \$900,000 và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sự thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng \$1,000 và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Giải. Sự thay đổi của sản lượng được đặc trưng bởi đại lượng ΔQ.

Ví dụ. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô la) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là \$900,000 và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sự thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng \$1,000 và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Giải. Sự thay đổi của sản lượng được đặc trưng bởi đại lượng ΔQ.

- $K = 900, \ L = 1000, \ \Delta K = 1, \ \Delta L = -2$

Ví dụ. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô la) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là \$900,000 và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sự thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng \$1,000 và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Giải. Sự thay đổi của sản lượng được đặc trưng bởi đại lượng ΔQ.

- $K = 900,\ L = 1000,\ \Delta K = 1,\ \Delta L = -2$
- $dQ(L, K) = \frac{\Delta Q}{\Delta K}dK + \frac{\Delta Q}{\Delta L}dL =$ $30K^{-1/2}L^{1/3}dK + 20K^{1/2}L^{-2/3}dL$

Ví dụ. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô la) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là \$900,000 và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sự thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng \$1,000 và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Giải. Sự thay đổi của sản lượng được đặc trưng bởi đại lượng ΔQ.

- $K = 900,\ L = 1000,\ \Delta K = 1,\ \Delta L = -2$
- $dQ(L, K) = \frac{\Delta Q}{\Delta K}dK + \frac{\Delta Q}{\Delta L}dL =$ $30K^{-1/2}L^{1/3}dK + 20K^{1/2}L^{-2/3}dL$
- $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = -2$

Ví dụ. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô la) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là \$900,000 và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sự thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng \$1,000 và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Giải. Sự thay đổi của sản lượng được đặc trưng bởi đại lượng ΔQ.

- $K = 900,\ L = 1000,\ \Delta K = 1,\ \Delta L = -2$
- $dQ(L, K) = \frac{\Delta Q}{\Delta K}dK + \frac{\Delta Q}{\Delta L}dL =$ $30K^{-1/2}L^{1/3}dK + 20K^{1/2}L^{-2/3}dL$
- $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = -2$

Như vậy, sản lượng giảm xấp xỉ 2 đơn vị khi vốn đầu tư tăng 1000 đô và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Ví dụ. (Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện) Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2 đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Ví dụ. (Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện) Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2 đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Giải.

- Ta có $\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leq 0.02; \left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \leq 0.03$, ta tìm GTLN của $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$.

Ví dụ. (Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện) Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2 đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Giải.

- Ta có $\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leq 0.02$; $\left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \leq 0.03$, ta tìm GTLN của $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$.
- Từ $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, suy ra $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$; $\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$.

Ví dụ. (Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện) Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2 đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Giải.

- Ta có $\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leq 0.02$; $\left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \leq 0.03$, ta tìm GTLN của $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$.
- Từ $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, suy ra $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$; $\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$.
- $\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\Delta R_2 = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_2$.

Ví dụ. (Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện) Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2 đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Giải.

- Ta có $\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leq 0.02$; $\left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \leq 0.03$, ta tìm GTLN của $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$.
- Từ $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, suy ra $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$; $\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$.
- $\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\Delta R_2 = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_2$.
- Vì $\frac{1}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$, nên $\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1+R_2}.\frac{\Delta R_2}{R_2}$.

Ví dụ. (Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện) Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2 đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Giải.

- Ta có $\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leq 0.02; \left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \leq 0.03$, ta tìm GTLN của $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$.
- Từ $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, suy ra $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}; \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$.
- $\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\Delta R_2 = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_2$.
- Vì $\frac{1}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$, nên $\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1+R_2}.\frac{\Delta R_2}{R_2}$.
- $\frac{\Delta R}{R} \leq \left|\frac{R_2}{R_1+R_2}\right|\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| + \left|\frac{R_1}{R_1+R_2}\right|\left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right|$
  $\leq \frac{500}{300+500}(0.02) + \frac{300}{300+500}(0.03) = 0.02375.$

Sự khả vi

Hàm $f(x,y)$ **khả vi** tại (x_0,y_0) nếu số gia của f, $\Delta f = f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0,y_0\right)$, có thể biểu diễn

$$\Delta f = f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x + f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

trong đó $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ khi cả $\Delta_x \to 0$ và $\Delta_y \to 0$. Ngoài ra, $f\left(x,y\right)$ được gọi là **khả vi trong miền** R của mặt phẳng nếu f khả vi tại mọi điểm trong R.

Sự khả vi

Hàm $f(x, y)$ **khả vi** tại (x_0, y_0) nếu số gia của f,
$\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$, có thể biểu diễn

$$\Delta f = f_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

trong đó $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ khi cả $\Delta_x \to 0$ và $\Delta_y \to 0$. Ngoài ra, $f\left(x, y\right)$ được gọi là **khả vi trong miền** R của mặt phẳng nếu f khả vi tại mọi điểm trong R.

Định lý 11.2

Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì nó cũng liên tục tại đó.

Ví dụ. Cho $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$ Chỉ ra rằng các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại tại gốc tọa độ nhưng f không khả vi tại đó.

Ví dụ. Cho $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$ Chỉ ra rằng các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại tại gốc tọa độ nhưng f không khả vi tại đó.

Giải.

- Ta có $f_x\left(0,0\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$. Tương tự $f_y\left(0,0\right) = 0$.

Ví dụ. Cho $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$ Chỉ ra rằng các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại tại gốc tọa độ nhưng f không khả vi tại đó.

Giải.

- Ta có $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$. Tương tự $f_y(0,0) = 0$.
- Tính dọc theo $y = x$ trong góc phần tư thứ nhất ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Ví dụ. Cho $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$ Chỉ ra rằng các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại tại gốc tọa độ nhưng f không khả vi tại đó.

Giải.

- Ta có $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$. Tương tự $f_y(0,0) = 0$.
- Tính dọc theo $y = x$ trong góc phần tư thứ nhất ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.
- Tính dọc theo trục x ta lại có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Ví dụ. Cho $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$ Chỉ ra rằng các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại tại gốc tọa độ nhưng f không khả vi tại đó.

Giải.

- Ta có $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$. Tương tự $f_y(0,0) = 0$.
- Tính dọc theo $y = x$ trong góc phần tư thứ nhất ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.
- Tính dọc theo trục x ta lại có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
- Như vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại, và do đó f không liên tục tại $(0,0)$ và cũng không khả vi tại đó.

Điều kiện đủ cho sự khả vi

Định lý 11.3

Nếu $f(x, y)$ là hàm theo biến x và y, và f, f_x, f_y liên tục trên một đĩa D có tâm tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Điều kiện đủ cho sự khả vi

Định lý 11.3

Nếu $f(x, y)$ là hàm theo biến x và y, và f, f_x, f_y liên tục trên một đĩa D có tâm tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Ví dụ. Chỉ ra rằng $f(x, y) = x^2y + xy^3$ khả vi tại mọi (x, y).

Điều kiện đủ cho sự khả vi

Định lý 11.3

Nếu $f(x, y)$ là hàm theo biến x và y, và f, f_x, f_y liên tục trên một đĩa D có tâm tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Ví dụ. Chỉ ra rằng $f(x, y) = x^2y + xy^3$ khả vi tại mọi (x, y).

Giải. Ta có

$$\begin{array}{l} f_x(x, y) = 2xy + y^3 \\ f_y(x, y) = x^2 + 3xy^2 \end{array}.$$

Điều kiện đủ cho sự khả vi

Định lý 11.3

Nếu $f(x,y)$ là hàm theo biến x và y, và f, f_x, f_y liên tục trên một đĩa D có tâm tại (x_0,y_0) thì f khả vi tại (x_0,y_0).

Ví dụ. Chỉ ra rằng $f(x,y) = x^2y + xy^3$ khả vi tại mọi (x,y).
Giải. Ta có

$$\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2xy + y^3 \\ f_y(x,y) = x^2 + 3xy^2 \end{array}.$$

Do f, f_x, f_y là các hàm đa thức, chúng liên tục trên toàn mặt phẳng. Vì vậy f khả vi tại mọi (x,y).