

## Đáp án Toán cao cấp A1 (ngày thi 09/06/2017)

1.  $z = \frac{2+i}{2-i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta = \arctan(4/3) \approx 0.927 \quad (0.5)$

$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3}, \cos \frac{\theta+2\pi}{3} + i \sin \frac{\theta+2\pi}{3}, \cos \frac{\theta+4\pi}{3} + i \sin \frac{\theta+4\pi}{3} \right\} \quad (0.5)$

2.  $y' = \frac{6x^2 \cos(3x^2 - 2) - \sin(3x^2 - 2)}{x^2} \quad (1)$

3. Điểm nghi ngờ:  $x=0$ . (0.25)

Để  $f$  liên tục tại mọi nơi thì  $f$  phải liên tục tại 0. Điều này xảy ra khi

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (0.25)$$

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \cos 4x}{2} = 8 \quad (0.5)$$

Ta chỉ cần xét sự khả vi tại 0. (0.25)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 4x}{x^2} - 8}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x - 8x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x - 16x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \cos 4x - 16}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-64 \sin 4x}{6} = 0. \quad (0.5) \end{aligned}$$

Vậy  $f$  khả vi tại mọi nơi. (0.25)

4.  $a = 3$ . (0.5)

$$\tan \omega = \frac{r}{r'} = \frac{1 + 3 \sin \varphi}{3 \cos \varphi}; \quad \tan \omega = \infty \text{ khi } \cos \varphi = 0. \text{ Suy ra } \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (0.25)$$

Có 2 điểm  $(3, \pi/2), (-2, 3\pi/2)$ . (0.25)

5.  $I = \int_1^3 \left( -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{4}{3(x+4)} \right) dx \quad (0.5)$

$$= \left( -\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{4}{3} \ln |x+4| \right) \Big|_1^3 = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{4}{3} \ln \frac{7}{5} \quad (0.5)$$

6. Ta có  $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, \frac{1}{\sqrt{x-2}} > 0$  với mọi  $2 < x \leq 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} : \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) = 2 \quad (0.5)$

$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$  hội tụ nên  $J = \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$  hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn. (0.5)

7. Chuỗi đã cho là chuỗi số dương và

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{(k+1)^2(2k+2)!}{3^{k+1}} : \frac{k^2(2k)!}{3^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{3} = \infty > 1 \quad (0.5)$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn tỷ số. (0.5)

8. Dùng tiêu chuẩn căn tổng quát  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^2 |2x+1|^k}{e^{2k}}} = \frac{|2x+1|}{e^2} \quad (0.25)$

Chuỗi hội tụ khi  $|2x+1| < e^2$  và phân kỳ khi  $|2x+1| > e^2$ . (0.25)

Nếu  $|2x+1| = e^2$  chuỗi trở thành  $\sum_{k=2}^{\infty} k^2$  hoặc  $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k^2$  phân kỳ theo TC phân kỳ. (0.25)

Vậy chuỗi hội tụ khi  $\frac{-e^2-1}{2} < x < \frac{e^2-1}{2}$ . (0.25)

9.  $a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} 2dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2xdx \right) = 3\pi + 2 \quad (0.25)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} 2 \cos nxdx + \int_{\pi}^{2\pi} 2x \cos nxdx \right) = \frac{2}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n] \quad (0.25)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} 2 \sin nxdx + \int_{\pi}^{2\pi} 2x \sin nxdx \right) = \frac{-2}{n\pi} (-1)^n + \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n} + \frac{2}{n} (-1)^n \quad (0.25)$$

Tại  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có khai triển Fourier

$$f(x) = \frac{3\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n] \cos nx + \left[ \frac{-2}{n\pi} (-1)^n + \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n} + \frac{2}{n} (-1)^n \right] \sin nx \right\} \quad (0.25)$$