VIII. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

1. Khái niệm
2. Cặp bài toán đối ngẫu
3. Quan hệ giữa bài toán P và bài toán D

1. KHÁI NIỆM

- Bài toán đối ngẫu hay gọi là ‘Qui hoạch đối ngẫu’
- Ký hiệu bài toán D

2. CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

- Cho BT QHTT sau đây (BT gốc P): Tìm x = (x_1, x_2,… x_n) là cho hàm mục tiêu $Z_P \rightarrow$ max với các ràng buộc sau:

$$\langle 1 \rangle Z_p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

$$(2) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i ; i = 1 \div m$$

$$(3) x_j \geq 0 ; i = 1 : m ; j = 1 : n$$

- BT đối ngẫu D tương ứng với BT P được phát biểu như sau: tìm y = (y_1, y_2,… y_m) là cho hàm mục tiêu $Z_D \rightarrow$min với các ràng buộc sau

$$\langle 1 \rangle Z_D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min$$

$$(2) \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j ; j = 1 \div n$$

$$(3) y_i \geq 0 ; i = 1 : m ;$$

TRÌNH TỰ LẬP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

- Bước 1: Lập sơ đồ đối ngẫu
- Bước 2: Từ sơ đồ viết bài toán đối ngẫu

TRÌNH TỰ LẬP SƠ ĐỒ ĐỐI NGẪU

- Viết các biến x_j tương ứng
- Viết ma trận hệ số các ma trận ràng buộc thành dạng bảng
- Viết các hệ số C_j tương ứng
- Viết các hệ số b_i tương ứng
- Viết các biến y_i của bài toán D
- Đánh dấu các hạn chế của biến

$$\langle 1\rangle\ Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\ x_1 \geq 0;\ x_2 \text{ tùy ý};\ \ldots . x_n \leq 0$$

		x_1	x_2	…	x_n	
		$\geq$	tùy ý	…	$\leq$	
y_1	$\leq$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\geq b_1$
y_2	tùy ý	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$= b_2$
…	…	…	…	…	…	… …
y_m	$\geq$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq$	$=$	…	$\leq$	
		c_1	c_2	…	c_n	

TRÌNH TỰ LẬP SƠ ĐỒ ĐỐI NGẪU

- Viết các biến x_j tương ứng
- Viết ma trận hệ số các ma trận ràng buộc thành dạng bảng
- Viết các hệ số C_j tương ứng
- Viết các hệ số b_i tương ứng
- Viết các biến y_i của bài toán D
- Đánh dấu các hạn chế của biến

$$\langle 1 \rangle \; Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Max$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle \; x_1 \geq 0; x_2 \text{tùy ý}; \ldots . x_n \leq 0$$

		x_1	x_2	…	x_n	
		$\geq$	tùy ý	…	$\leq$	
y_1	$\leq$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\geq b_1$
y_2	tùy ý	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$= b_2$
…	…	…	…	…	…	……
y_m	$\geq$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq$	$=$	…	$\leq$	
		c_1	c_2	…	c_n	

Từ sơ đồ viết thành BT đối ngẫu D

$$\langle 1\rangle\ Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\ x_1 \geq 0;\ x_2 \text{tùy ý};\ \ldots . x_n \leq 0$$

		x_1	x_2	…	x_n	
		$\geq$	tùy ý	…	$\leq$	
y_1	$\leq$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\geq b_1$
y_2	tùy ý	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$= b_2$
…	…	…	…	…	…	… …
y_m	$\geq$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq$	$=$	…	$\leq$	
		c_1	c_2	…	c_n	

$$\langle 1\rangle\ Z_D = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \rightarrow Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\ y_1 \leq 0;\ y_2 \text{tùy ý};\ \ldots .; y_m \geq 0$$

Chuyển BT gốc P sang BT đối ngẫu D

$$\langle 1\rangle\ Z_p = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \rightarrow Max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le -2 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\ (x_1, x_2)\ tùy\ ý;\ x_3 \le 0$$

		X_1	X_2	X_3		
		$tùy\ ý$	$tùy\ ý$	≤ 0		
Y_1	$\ge$	1	2	1	$\le$	$b_1 = 2$
Y_2	$tùy\ ý$	-2	1	-1	$=$	$b_2 = 4$
Y_3	$\ge$	1	2	-1	$\le$	$b_3 = -2$
		$=$	$=$	$\le$		
		$C_1 = 27$	$C_2 = 50$	$C_3 = 18$		

$$\langle 1\rangle\ Z_D = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \rightarrow Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 27 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 50 \\ y_1 - y_2 - y_3 \le 18 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\ y_1 \ge 0,\ y_2 TY,\ y_3 \ge 0$$

3. QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN P VÀ BÀI TOÁN D

1. Các định lý đối ngẫu

❖ **Đinh lý 1**: Cặp BT P và D chỉ xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

- Cả P và D đều không có phương án
- Cả P và D đều có phương án, lúc đó cả hai đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu $Z_{P(\text{tối ưu})} = Z_{D(\text{tối ưu})}$
- Một trong hai bài toán không có phương án tối ưu, còn bài toán kia có phương án, khi đó bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn.

3. QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN P VÀ BÀI TOÁN D

1. Các định lý đối ngẫu

❖ **Đinh lý 2**: (Định lý về độ lệch bù) điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán P và y^0 của bài toán D tối ưu là:

$$\begin{cases} x_j^0 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j \right) = 0, \; j = 1:n \\ y_i^0 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0, i = 1:m \end{cases}$$

2. Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- **Theo định lý 1**: Nếu bài toán D không có phương án tối ưu thì kết luận bài toán P không có phương án tối ưu
- **Theo định lý 1 và 2**: Nếu bài toán D có phương án tối ưu là và giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{D(Yo)}$ ta có
  - Bài toán P cũng có phương án tối ưu là với giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{P(Xo)} = Z_{D(Yo)}$
  - Việc tính toán giá trị phương án tối ưu được tiến hành như sau:

2. Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- Việc tính toán giá trị phương án tối ưu được tiến hành như sau:

- Thứ 1: Nếu $y_i^0 \neq 0$ thì ta có $\sum a_{ij} x_i^0 = b_i$ nhờ đó ta lập được hệ phương trình tuyến tính để tính giá trị x_j^0
- Thứ 2: Ta thay $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots y_m^0)$ vào các biểu thức $\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = E$

Với các chỉ số j nào mà $E \neq 0$ thì theo định lý 2 có $x_j = 0$

2. Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- Việc tính toán giá trị phương án tối ưu được tiến hành như sau:

- Thứ 1: Nếu $y_i^0 \neq 0$ thì ta có $\sum a_{ij} x_i^0 = b_i$ nhờ đó ta lập được hệ phương trình tuyến tính để tính giá trị x_j^0
- Thứ 2: Ta thay $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots y_m^0)$ vào các biểu thức $\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = E$

Với các chỉ số j nào mà $E \neq 0$ thì theo định lý 2 có $x_j = 0$