HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

=====📖=====

GIẢI TÍCH 1

(Dùng cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa ngành QTKD)

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2007

GIẢI TÍCH 1

Biên soạn : **TS. VŨ GIA TÊ**

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích (Toán cao cấp A1) là học phần đầu tiên của chương trình toán dành cho sinh viên các nhóm ngành Quản trị kinh doanh. Để học tốt môn Toán cao cấp theo phương thức Đào tạo từ xa, bên cạnh các học liệu: sách, giáo trình in, băng đĩa hình,..., sách hướng dẫn cho người học toán cao cấp là rất cần thiết. Tập sách hướng dẫn này được biên soạn là nhằm mục đích trên. Tập sách được biên soạn theo chương trình qui định năm 2001 của Bộ Giáo dục Đào tạo và theo đề cương chương trình được Học viện Công nghệ BC-VT thông qua năm 2007.

Sách hướng dẫn học toán cao cấp A1 bám sát các giáo trình của các trường đại học đang giảng dạy chuyên ngành Quản trị kinh doanh, giáo trình dành cho hệ chính qui của Học viện Công nghệ BC-VT biên soạn năm 2001 và kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của tác giả. Chính vì thế, tài liệu này có thể dùng để học tập và tham khảo cho sinh viên của tất cả các trường, các ngành đại học và cao đẳng.

Cách trình bày trong sách thích hợp cho người tự học, đặc biệt phục vụ đắc lực trong công tác đào tạo từ xa. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương để thấy được mục đích, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được thông qua các ví dụ minh hoạ. Sau các chương, người đọc phải tự trả lời được các câu hỏi ôn tập dưới dạng trắc nghiệm. Nhờ các ví dụ minh hoạ được đưa ra từ đơn giản đến phức tạp, người đọc có thể coi đó là bài tập mẫu để tự giải các bài tập có trong tài liệu. Người đọc có thể tự kiểm tra, đánh giá kiến thức, khả năng thu nhận dựa vào phần hướng dẫn và đáp số được cung cấp ở những trang cuối sách.

Cũng cần nhấn mạnh rằng, nội dung chính của toán cao cấp là phép tính vi phân và phép tính tích phân mà nền tảng của nó là phép tính giới hạn của hàm số. Chính vì thế chúng tôi trình bày khá tỉ mỉ hai chương đầu của tài liệu để người học tự đọc cũng có thể có được các kiến thức vững vàng để đọc tiếp các chương sau. Trong quá trình tự đọc và học qua mạng, tuỳ theo khả năng tiếp thu, học viên có thể chỉ cần nhớ các định lý và bỏ qua phần chứng minh của nó.

Nhân đây tác giả cũng lưu ý rằng ở bậc trung học phổ thông của nước ta, chương trình toán cũng đã bao hàm các kiến thức về vi, tích phân. Tuy nhiên các nội dung đó chỉ mang tính chất giới thiệu do lượng thời gian hạn chế, do cấu tạo chương trình. Vì thế nếu không tự đọc một cách nghiêm túc các định nghĩa, định lý cũng sẽ vẫn chỉ nắm được một cách hời hợt và như vậy rất gặp khó khăn trong việc giải các bài tập toán cao cấp.

Sách gồm 5 chương tương ứng với học phần gồm 45 đến 60 tiết:

Chương I: Hàm số và giới hạn

Chương II: Đạo hàm và vi phân.

Chương III: Hàm số nhiều biến số

Chương IV: Phép tính tích phân.

Chương V: Phương trình vi phân

Tuy rằng tác giả đã cố gắng rất nhiều, song thời gian bị hạn hẹp.Vì vậy các thiếu sót còn tồn tại trong cuốn sách là điều khó tránh khỏi. Tác giả chân thành chờ đón sự đóng góp ý kiến của các bạn đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cảm ơn về điều đó.

Chúng tôi bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ BC-VT, Trung tâm Đào tạo BC-VT1, Phòng Đào tạo Đại học từ xa và các bạn đồng nghiệp trong Bộ môn Toán của Học viện Công nghệ BC-VT đã khuyến khích động viên, tạo điều kiện cho ra tập tài liệu này

Hà Nội, ngày 7 tháng 6 năm 2006

Tác giả

CHƯƠNG I: HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Mọi vật xung quanh ta đều biến đổi theo thời gian. Chúng ta có thể nhận thấy điều đó qua sự chuyển động cơ học của các vật thể: ô tô, máy bay; sự thay đổi của các đại lượng vật lý: nhiệt độ, tốc độ, gia tốc; sự biến động kinh tế trong một xã hội: Giá cổ phiếu, lãi suất tiết kiệm,.... Tất cả các loại hình đó được gán một tên chung là đại lượng hay hàm số, nó phụ thuộc vào đối số nào đó, chẳng hạn là thời gian. Xem xét hàm số tức là quan tâm đến giá trị, tính chất và biến thiên của nó. Việc đó đặt ra như một nhu cầu khách quan của con người và xã hội.

Trong chương này, chúng ta cần nắm được các nội dung sau:

1. Mô tả định tính và định lượng các hàm số sơ cấp cơ bản. Nhận biết hàm số sơ cấp, tính chất giới hạn và liên tục của nó.

2. Khái niệm giới hạn của hàm số trong các quá trình khác nhau, các tính chất về giới hạn và thành thạo các phương pháp khử các dạng bất định dựa trên phép thay thế các VCB, VCL tương đương, đặc biệt các giới hạn đáng nhớ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\ \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

3. Khái niệm liên tục, gián đoạn của một hàm số. Các tính chất hàm số liên tục trên một đoạn kín.

4. Các hàm số thường dùng trong phân tích kinh tế.

NỘI DUNG

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

1.1.1. Các định nghĩa cơ bản

A. Định nghĩa hàm số

Cho X là tập không rỗng của $\mathbb{R}$. Một ánh xạ f từ X vào $\mathbb{R}$ gọi là một hàm số một biến số

$$f: X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

X gọi là tập xác định của f, $f(X)$ gọi là tập giá trị của f. Đôi khi ký hiệu

$y=f(x),\ x\in X$, x gọi là đối số (biến độc lập), y gọi là hàm số (biến phụ thuộc)

B. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho X đối xứng với 0 tức là $\forall x\in X, -x\in X$

Hàm số f (x) chẵn khi và chỉ khi $f(x)=f(-x)$.

Hàm số f (x) lẻ khi và chỉ khi $f(x)=-f(-x)$.

C. Hàm số tuần hoàn

Hàm số f (x) gọi là tuần hoàn trên X nếu tồn tại $\tau \in \mathbb{R}_+^*$,($\mathbb{R}_+^*$ được kí hiệu là tập các số dương) sao cho $\forall x \in X$ thì

$x+\tau \in X$ và $f(x+\tau)=f(x)$.

Số T dương bé nhất trong các số τ gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x).

D. Hàm số đơn điệu

Cho f (x) với $x \in X$.

1. Nói rằng f (x) tăng nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

   và f (x) tăng ngặt nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2. Nói rằng f (x) giảm nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

   và f (x) giảm ngặt nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3. Nói rằng f (x) đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm.

   Nói rằng f (x) đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt.

E. Hàm số bị chặn

1. Hàm số f (x) bị chặn trên trong X nếu tồn tại số A sao cho :

$\forall x \in X, f(x) \le A$.

2. Hàm số f (x) bị chặn dưới trong X nếu tồn tại số B sao cho: $\forall x \in X, B \le f(x)$.

3. Hàm số f (x) bị chặn trong X nếu tồn tại các số A,B sao cho:

$\forall x \in X, B \le f(x) \le A$.

F. Hàm số hợp

Cho $f: X \to \mathbb{R}$ và g: $Y \to \mathbb{R}$ với $f(X) \subset Y$ gọi ánh xạ

$$g_0 f : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Hay y = g(f (x)) là hàm số hợp của hai hàm f và g.

G. Hàm số ngược

Cho song ánh $f: X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$

Ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$ gọi là hàm số ngược của f

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Thông thường đối số kí hiệu là x, hàm số kí hiệu là y, vậy hàm ngược của $y = f(x)$ là hàm số $y = f^{-1}(x)$. Vì thế trên cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} là đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III.

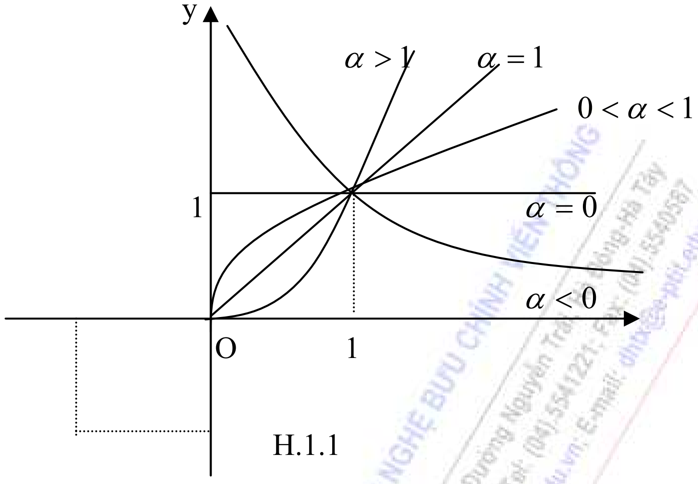
1.1.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

A. Hàm luỹ thừa

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm luỹ thừa với số mũ α ,được kí hiệu là P_α, là ánh xạ từ $\mathbb{R}_+^*$ vào $\mathbb{R}$, xác định như sau $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P_\alpha(x) = x^\alpha$

Nếu $\alpha > 0$, coi rằng $P_\alpha(0) = 0$. Nếu $\alpha = 0$, coi rằng $P_0(0) = 1$

Đồ thị của $P_\alpha(x)$ cho bởi h.1.1



H.1.1

B. Hàm mũ cơ số a

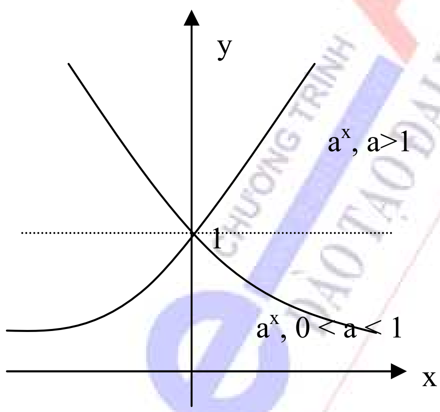
Xét $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Hàm mũ cơ số a, kí hiệu là $\exp_a x$, là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}_+^*$, xác định như sau: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a x = a^x$. Đồ thị của $y = a^x$ cho bởi h.1.2.

C. Hàm lôgarit cơ số a

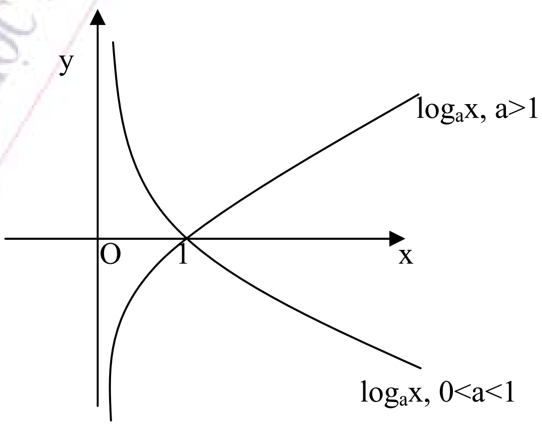
Xét $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Hàm lôgarit cơ số a, kí hiệu là $\log_a$, là ánh xạ ngược với ánh xạ $\exp_a$, như vậy $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ cho bởi hình h.1.3.

Chú ý: Hàm luỹ thừa có thể mở rộng khi miền xác định là $\mathbb{R}$.



H.1.2



H.1.3

Tính chất của hàm số lôgarit

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log_b x = \log_b a . \log_a x$

4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

Chú ý: Sau này người ta thường lấy cơ số a là số e và gọi là lôgarit Nêpe hay lôgarit tự nhiên của x, kí hiệu y = lnx và suy ra $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, e = 2,718281828459045…,

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,434294...$$

D. Các hàm số lượng giác

Các hàm số lượng giác: sinx, cosx, tgx, cotgx đã được xét kỹ trong chương trình phổ thông trung học. Dưới đây chúng ta chỉ nhắc lại một số tính chất cơ bản của chúng.

Tính chất:

1. sinx xác định trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

2. cosx xác định trên $\mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

3. tgx xác định trên $\mathbb{R} \backslash \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

4. cotgx xác định trên $\mathbb{R} \backslash \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

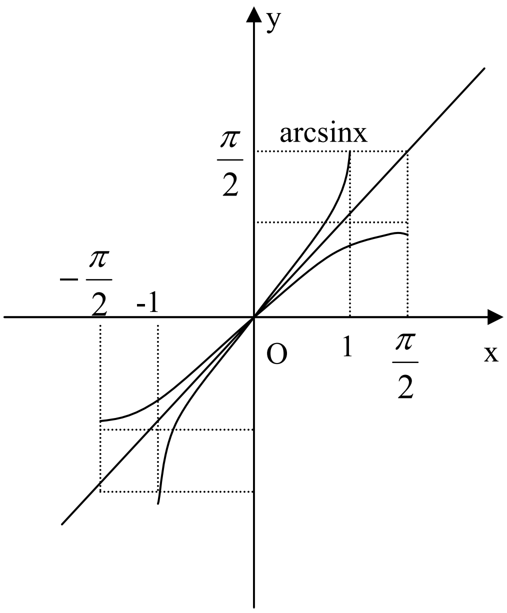
E. Các hàm số lượng giác ngược

1. Hàm arcsin (đọc là ác-sin) là ánh xạ ngược của sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

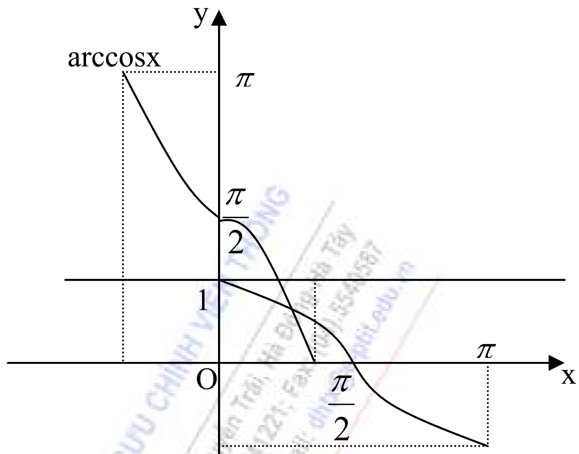
Kí hiệu là arcsin: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy ta có: $\forall x \in [-1,1], \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\qquad y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

Đồ thị của y = arcsinx cho trên hình 1.4



H.1.4



H.1.5

2. Hàm arccosin (đọc là ác- cô- sin) là ánh xạ ngược của $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ kí hiệu:

$$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$$

$$\forall x\in[-1,1],\forall y\in[0,\pi],\ y=\arccos x\Leftrightarrow x=\cos y$$

Đồ thị hàm số y = arccosx cho trên hình 1.5

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)\in[0,\pi]\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)=\sin(\arcsin x)=x$$

Vậy $\quad \arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$

3. Hàm arctang (đọc là ác-tang) là ánh xạ ngược của $tg:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, kí hiệu:

$$arctg:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy ta có $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\quad y=arctgx\Leftrightarrow x=tgy$

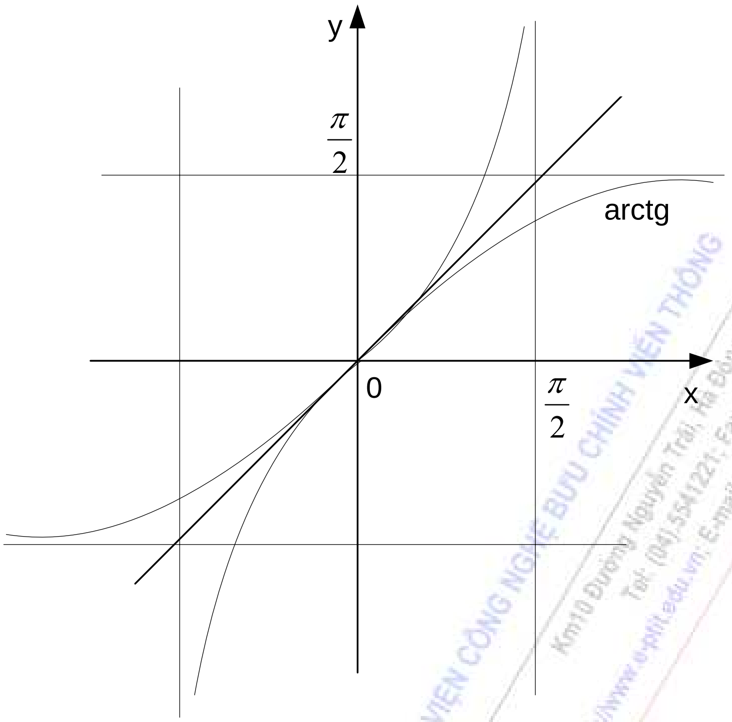
Đồ thị của y = arctgx cho trên hình 1.6.

4. Hàm arccôtang (đọc là ác-cô-tang) là ánh xạ ngược của $\text{cotg}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ kí hiệu:

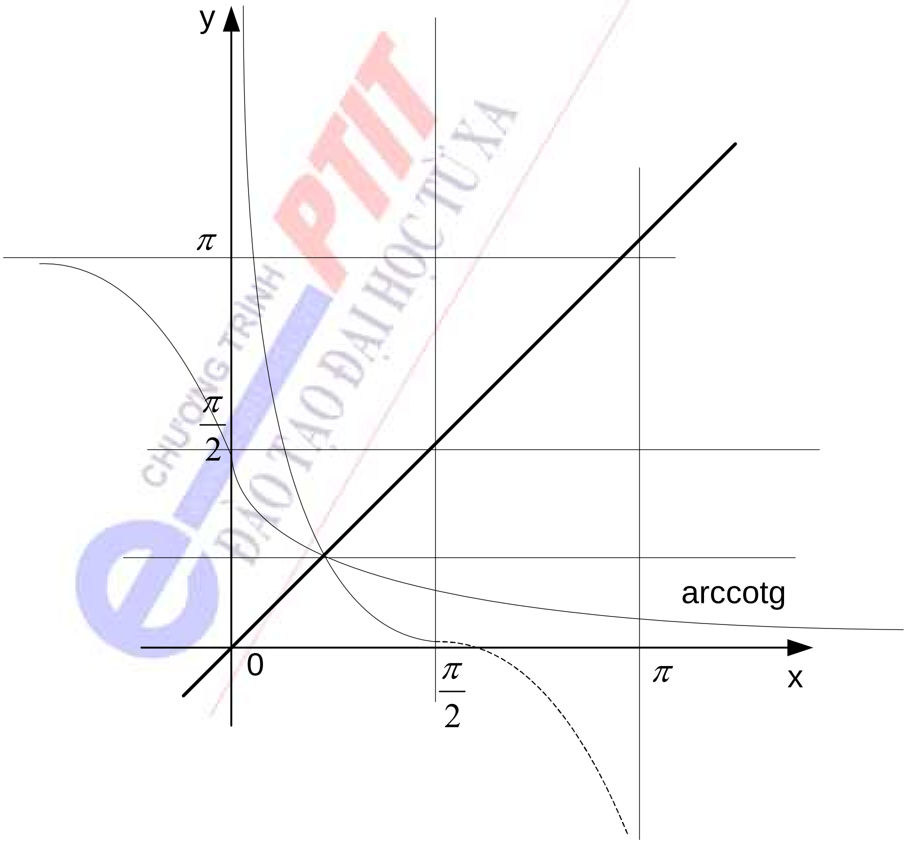
$$arc\cot g:\mathbb{R}\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy ta có $\quad\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\quad y=arc\cot gx\Leftrightarrow x=\cot gy$

Đồ thị hàm y = arccotgx cho trên hình 1.7


y
$\frac{\pi}{2}$
arctg
0
$\frac{\pi}{2}$
x

H.1.6


y
π
$\frac{\pi}{2}$
arccotg
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x

H.1.7

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cot g(arc\cot gx) = x$

Vậy $\quad arctgx + arc\cot gx = \dfrac{\pi}{2}$

Người ta gọi hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, các hàm số lượng giác và các hàm số lượng giác ngược là các hàm số sơ cấp cơ bản.

H. Đa thức, hàm hữu tỉ.

1. Ánh xạ P: $X \to \mathbb{R}$ được gọi là đa thức khi và chỉ khi tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và

$(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $\forall x \in X$, $\qquad P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Nếu $a_n \neq 0$, gọi n là bậc của đa thức, kí hiệu degP(x) = n

2. Ánh xạ $f: \quad X \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm hữu tỉ khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức

P, Q: $\quad X \to \mathbb{R}$ sao cho $\forall x \in X, Q(x) \neq 0, \qquad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Gọi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm hữu tỉ thực sự khi và chỉ khi: degP(x) < degQ(x)

3. Hàm hữu tỉ tối giản là các phân thức có dạng:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ hoặc } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

Trong đó $k \in \mathbb{N}^*$, a, p, q, A, B, C là các số thực và $p^2 - 4q < 0$

Dưới đây ta đưa ra các định lí được chứng minh trong lí thuyết đại số

Định lí 1.1: *Mọi đa thức bậc n với các hệ số thực đều có thể phân tích ra thừa số trong dạng:*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}$$

trong đó $\alpha_i \ (i = \overline{1,l})$ *là các nghiệm thực bội* k_i *của đa thức, còn* $p_j, q_j, \beta_j \in \mathbb{R}$

với $j = 1,2,...,m$ *và* $\sum_{i=1}^{l} k_i + 2\sum_{j=1}^{m} \beta_j = n$, $\qquad p_j^{\,2} - 4q_j < 0$; $j = \overline{1,m}$

Định lí 1.2: *Mọi hàm hữu tỉ thực sự đều có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm hữu tỉ tối giản.*

1.1.3. Hàm số sơ cấp

Định nghĩa: Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số, chẳng hạn $f(x) = e^{-\cos x}\sqrt{\ln x} - 2x^3 \arcsin x^2$ là một hàm số sơ cấp.

1.1.4. Các hàm số trong phân tích kinh tế

A. Hàm cung và hàm cầu

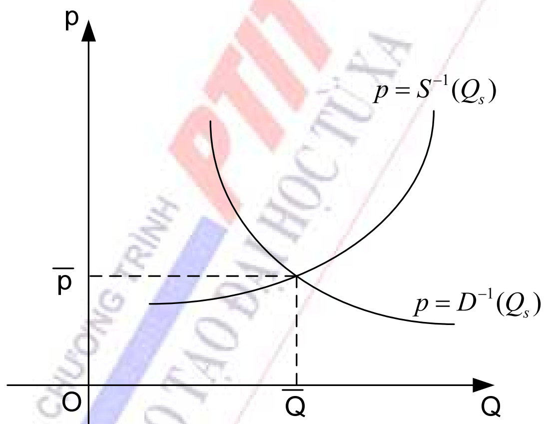
Khi phân tích thị trường hàng hóa và dịch vụ, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm hàm cung (supply function) và hàm cầu (demand function) để biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu của một loại hàng hóa vào giá trị của hàng hóa đó. Hàm cung và hàm cầu biểu diễn tương ứng là: $Q_s = S(p), Q_d = D(p)$, trong đó: p là giá hàng hóa, Q_s là lượng cung (quantity supplied), tức là lượng hàng hóa mà người bán bằng lòng bán ở mỗi mức giá; Q_d là lượng cầu (quantity demanded), tức là lượng hàng hóa mà người mua bằng lòng mua ở mỗi mức giá.

Tất nhiên, lượng cung và lượng cầu hàng hóa không chỉ phụ thuộc vào giá cả của hàng hóa đó, mà còn chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố khác, chẳng hạn như thu nhập và giá của các hàng hóa liên quan. Khi xem xét các mô hình hàm cung và hàm cầu ở dạng nêu trên người ta giả thiết rằng các yếu tố khác không thay đổi. Quy luật thị trường trong kinh tế học nói rằng, đối với các hàng hóa thông thường, hàm cung là hàm đơn điệu tăng, còn hàm cầu là đơn điệu giảm. Điều này có nghĩa là, với các yếu tố khác giữ nguyên, khi giá hàng hóa tăng lên thì người bán sẽ muốn bán nhiều hơn và người mua sẽ mua ít đi. Các nhà kinh tế gọi đồ thị của hàm cung và hàm cầu là đường cung và đường cầu. Giao điểm của đường cung và đường cầu gọi là điểm cân bằng của thị trường. Ở mức giá cân bằng $\overline{p}$ ta có $Q_s = Q_d = \overline{Q}$, tức là người bán bán hết và người mua mua đủ, thị trường không có hiện tượng dư thừa hoặc khan hiếm hàng hóa.

Chú ý: Trong các tài liệu kinh tế người ta thường sử dụng trục hoành để biểu diễn lượng Q, trục tung để biểu diễn giá p. Cách biểu diễn như vậy tương ứng với việc biểu diễn hàm ngược của hàm cung và hàm cầu: $p = S^{-1}(Q_s), p = D^{-1}(Q_d)$. Trong kinh tế học nhiều khi người ta vẫn gọi các hàm này là hàm cung và hàm cầu. Đồ thị của chúng được cho trên H.1.8.

B. Hàm sản xuất ngắn hạn

Các nhà kinh tế học sử dụng khái niệm hàm sản xuất để mô tả sự thuộc của sản lượng hàng hóa (tổng số lượng sản phẩm hiện vật) của một nhà sản xuất vào các yếu tố đầu vào của sản xuất, như vốn và lao động v,v…



H.1.8

Trong kinh tế học khái niệm ngắn hạn và dài hạn không được xác định bằng một khoảng thời gian cụ thể, mà được hiểu theo nghĩa như sau:

Ngắn hạn là khoảng thời gian mà ít nhất một trong các yếu tố sản xuất không thay đổi. Dài hạn là khoảng thời gian mà tất cả các yếu tố sản xuất có thể thay đổi.

Khi phân tích sản xuất, người ta thường quan tâm đến hai yếu tố sản xuất quan trọng là vốn (capital) và lao động (labor), được kí hiệu tương ứng là K và L.

Trong ngắn hạn thì K không thay đổi, do đó hàm sản xuất ngắn hạn có dạng:

$$Q = f(L)$$

trong đó L là lượng lao động được sử dụng và Q là mức sản lượng tương ứng. Chú ý rằng người ta xét hàm sản xuất sản lượng Q và các yếu tố sản xuất K, L được đo theo luồng (flow), tức là đo theo định kì (hàng ngày, hàng tuần, hàng tháng, hàng năm v,v…)

C. Hàm doanh thu, hàm chi phí và hàm lợi nhuận

Tổng doanh thu (total revenue), tổng chi phí (total cost) và tổng lợi nhuận (total profit) của nhà sản xuất phụ thuộc vào hàng hóa. Khi phân tích sản xuất, cùng với hàm sản xuất, các nhà kinh tế học còn sử dụng các hàm số:

1. Hàm doanh thu là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng doanh thu, kí hiệu TR vào sản lượng Q:

$$TR = TR(Q)$$

Chẳng hạn, tổng doanh thu của nhà sản xuất cạnh tranh là hàm bậc nhất:

$$TR = pQ$$

trong đó p là giá sản phẩm trên thị trường.

2. Hàm chi phí là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng chi phí, kí hiệu TC vào sản lượng Q:

$$TC = TC(Q)$$

. 3. Hàm lợi nhuận là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng lợi nhuận, kí hiệu π vào sản lượng Q:

$$\pi = \pi(Q)$$

Hàm lợi nhuận có thể xác định thông qua hàm doanh thu và hàm chi phí:

$$\pi = TR(Q) - TC(Q).$$

D. Hàm tiêu dùng

Lượng tiền mà người tiêu dùng dành để mua sắm hàng hóa và dịch vụ phụ thuộc vào thu nhập. Các nhà kinh tế sử dụng hàm tiêu dùng để biểu diễn sự phụ thuôc của biến tiêu dùng, kí hiệu C (consumption) vào biến thu nhập Y (income):

$$C = f(Y)$$

Theo qui luật chung, khi thu nhập tăng, người ta có xu hướng tiêu dùng nhiều hơn, do đó hàm tiêu dùng là hàm đồng biến.

1.2.GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1.2.1. Khái niệm về giới hạn

A. Định nghĩa giới hạn

Ta gọi $\delta-$lân cận của điểm $a \in \mathbb{R}$ là tập $\Omega_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$

Gọi A- lân cận của $+\infty$ là tập $\Omega_A(+\infty) = (A, +\infty)$ với A>0 và khá lớn.

Gọi B- lân cận của $-\infty$ là tập $\Omega_B(-\infty) = (-\infty, -B)$ với B>0 và khá lớn.

Cho f xác định ở lân cận điểm a (có thể không xác định tại a)

1. Nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến a (gọi tắt: có giới hạn là l tại a) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_\eta(a) \subset X, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại a nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_\eta(a) \subset X, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > A .$$

3. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại a nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại a

4. Nói rằng f có giới hạn là l tại $+\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_A(+\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_A(+\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

5. Nói rằng f có giới hạn là l tại $-\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_B(-\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_B(-\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

6. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_M(+\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_M(+\infty) \Rightarrow f(x) > A .$$

7. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $+\infty$ nếu và chỉ nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$

8. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_M(-\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_M(-\infty) \Rightarrow f(x) > A .$$

9. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $-\infty$ khi và chỉ khi $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$

Khi $f(x)$ có giới hạn là l tại a hoặc tại $\pm\infty$ nói rằng $f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại a hoặc tại $\pm\infty$. Ngược lại $f(x)$ có giới hạn là $\pm\infty$, nói rằng nó có giới hạn vô hạn.

B. Định nghĩa giới hạn một phía.

1. Nói rằng f có giới hạn trái tại a là l_1 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ (\exists \Omega_\eta(a) \subset X), \forall x, 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon.$$

2. Nói rằng f có giới hạn phải tại a là l_2 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,\ \ 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

Kí hiệu f có giới hạn là l tại a thường là:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ hoặc $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$

Tương tự có các kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, -\infty;$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l, +\infty, -\infty$

Kí hiệu f có giới hạn trái tại a là l_1, thường dùng $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f\left(a^-\right) = l_1$

Tương tự $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f\left(a^+\right) = l_2$

Hệ quả: *Điều kiện cần và đủ để* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *là* $f(a^-) = f(a^+) = l.$

1.2.2. Tính chất của hàm có giới hạn.

A. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí 1.3: *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *thì* l *là duy nhất.*

B. Tính bị chặn

Định lí 1.4: *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *thì* $f(x)$ *bị chặn trong một lân cận của a.*

Chứng minh:

Lấy $\varepsilon = 1, \quad \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < 1.$

Hay $|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| \le 1 + |l|$

Chú ý:

• Trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$ cũng chứng minh tương tự.

• Định lí đảo: Hàm $f(x)$ không bị chặn trong lân cận của a thì không có giới hạn hữu hạn tại a.

Chẳng hạn $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ không có giới hạn hữu hạn tại 0.

C. Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.

Định lí 1.5: *Cho* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. *Khi đó:*

1. Nếu $c < l$ *thì trong lân cận đủ bé của* $a: c < f(x)$

2. Nếu $l < d$ *thì trong lân cận đủ bé của* $a: f(x) < d$

3. Nếu $c < l < d$ *thì trong lân cận đủ bé của* $a: c < f(x) < d$

Chứng minh:

1. $\varepsilon = l - c > 0, \exists \eta_1, \forall x \in \Omega_{\eta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < l - c \Rightarrow c < f(x)$

2. $\varepsilon = d - l \quad , \exists \eta_2, \forall x \in \Omega_{\eta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < d - l \Rightarrow f(x) < d$

3. $\exists \eta = Min(\eta_1, \eta_2), \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow c < f(x) < d$

Chú ý: Định lí trên không còn đúng khi thay các bất đẳng thức ngặt bằng các bất đẳng thức không ngặt.

Định lí 1.6: *Cho* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, *khi đó*

1. Nếu $c \le f(x)$ *trong lân cận của a thì* $c \le l$

2. Nếu $f(x) \le d$ *trong lân cận của a thì* $l \le d$

3. Nếu $c \le f(x) \le d$ *trong lân cận của a thì* $c \le l \le d$

Nhờ vào lập luận phản chứng, chúng ta thấy định lí trên thực chất là hệ quả của định lí 1.

Định lí 1.7(Nguyên lí kẹp): *Cho ba hàm số* f, g, h *thoả mãn:* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *trên X; và*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ *Khi đó* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Chứng minh: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1, \eta_2, \forall x: \quad 0 < |x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$$0 < |x - a| < \eta_2 \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$$

Lấy $\eta = Min(\eta_1, \eta_2)$ thì $\forall x \in X: \quad 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \\ |h(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - l \le g(x) - l \le h(x) - l < \varepsilon$. Tức là $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Chú ý: Định lí đúng với các trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$

Định lí 1.8: *Nếu trong lân cận của a có* $f(x) \le g(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *thì:*

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

Chứng minh:

$$\forall A > 0, \exists \eta_1, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow f(x) > A$$

Mặt khác $\exists \eta_2, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta_2 \Rightarrow f(x) \le g(x)$

Lấy $\eta = Min(\eta_1, \eta_2), \forall x: 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow g(x) > A$ chứng tỏ $g(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$

Chú ý:

- Định lí đúng với trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$
- Tương tự có định lí khi $f(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$

D. Các phép tính đại số của hàm số có giới hạn

Định lí 1.9: (Trường hợp giới hạn hữu hạn):

1. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l \Rightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} |l|$
2. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} 0$
3. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 + l_2$
4. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l \Rightarrow \lambda . f(x) \underset{x\to a}{\to} \lambda l, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
5. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ *và* $g(x)$ *bị chặn trong lân cận của* $a \Rightarrow f(x).g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$
6. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \Rightarrow f(x).g(x) \underset{x\to a}{\to} l_1 . l_2$
7. $f(x) \underset{x\to a}{\to} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\to} l_2 \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{l_1}{l_2}$

Định lí 1.10 (Trường hợp giới hạn vô hạn):

1. *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ *và* $g(x) \ge m$ *trong lân cận của a thì* $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$
2. *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ *và* $g(x) \ge m > 0$ *trong lân cận của a thì* $f(x).g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$

E. Giới hạn của hàm hợp

Cho $f: \quad X \to \mathbb{R}, \quad g: \quad Y \to \mathbb{R}$ và $f(X) \subset Y$

Định lí 1.11: *Nếu* $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$ *và* $g(y) \underset{y\to b}{\to} l$ *thì* $g(f(x)) \underset{x\to a}{\to} l$

Chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall y: \quad 0 < |y-b| < \eta \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_\eta, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta_\eta \Rightarrow |f(x) - b| < \eta$$

$\forall x: \ 0 < |x-a| < \delta_\eta \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$, vậy $g(f(x)) \underset{x\to a}{\to} l$

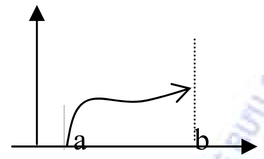
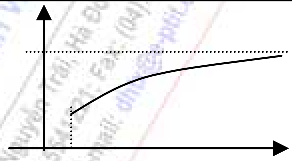
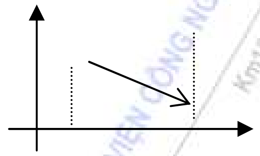
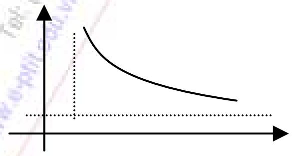
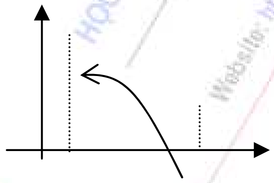
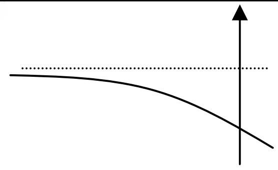
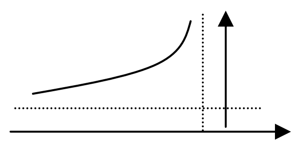
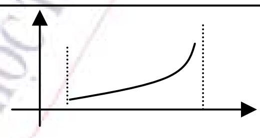
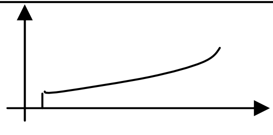
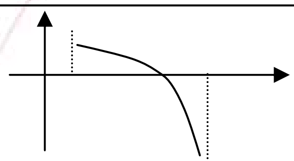
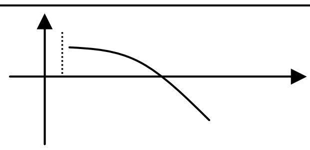
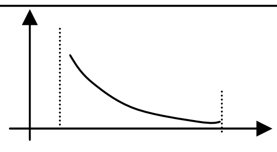
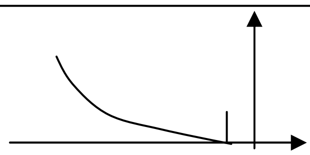
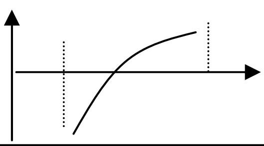
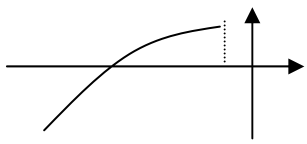
F. Giới hạn của hàm đơn điệu

Định lí 1.12: *Cho* $f: \ (a,b) \to \mathbb{R}, \quad a,b \in \mathbb{R}$ *hoặc* $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ *và là hàm tăng.*

1. *Nếu* f *bị chặn trên bởi M thì* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = M^* \le M$

2. *Nếu* f *không bị chặn trên thì* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

Định lí 1.12 có thể suy diễn cho trường hợp $f(x)$ giảm trên (a,b).Kết quả cho trên hình 1.9

$f: \ (a,b) \to \mathbb{R}$	Kết luận	Đồ thị	
Tăng và bị chặn trên	$f(x) \underset{x \to b^-}{\to} \underset{(a,b)}{Sup} f(x)$		
Giảm và bị chặn dưới	$f(x) \underset{x \to b^-}{\to} \underset{(a,b)}{Inf} f(x)$		
Giảm và bị chặn trên	$f(x) \underset{x \to a^+}{\to} \underset{(a,b)}{Sup} f(x)$		
Tăng và bị chặn dưới	$f(x) \underset{x \to a^+}{\to} Inf f(x)$		
Tăng và không bị chặn trên	$f(x) \underset{x \to b^-}{\to} +\infty$		
Giảm và không bị chặn dưới	$f(x) \underset{x \to b^-}{\to} -\infty$		
Giảm và không bị chặn trên	$f(x) \underset{x \to a^+}{\to} +\infty$		
Tăng và không bị chặn dưới	$f(x) \underset{x \to a^+}{\to} -\infty$		

H.1.9

Định lí 1.13: *Nếu $f(x)$ xác định tại a và tăng ở lân cận của a thì luôn tồn tại một giới hạn trái và một giới hạn phải hữu hạn tại a đồng thời có hệ bất đẳng thức:*

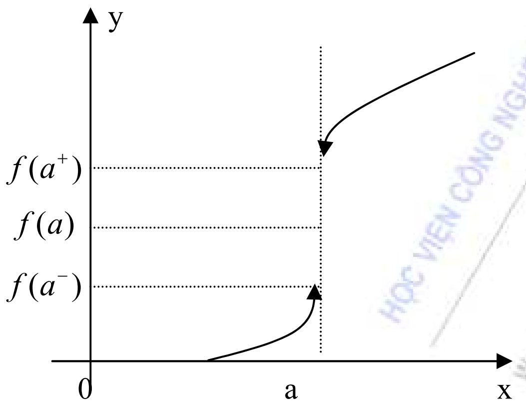
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Chứng minh:

Rõ ràng: $f(x)$ tăng và bị chặn trên bởi $f(a)$ ở lân cận bên trái của a.

$f(x)$ tăng và bị chặn dưới bởi $f(a)$ ở lân cận bên phải của a.

Theo định lí 1.12, chúng ta nhận được kết quả cần chứng minh. Ta có kết quả tương tự khi f giảm. Hình 1.10. mô tả định lí 1.13.



H.1.10

1.2.3. Các giới hạn đáng nhớ

A. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \qquad (1.1)$$

Chứng minh: Dễ dàng thấy được $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$

thì có bất đẳng thức kép: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Dùng định nghĩa chứng minh được $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. Vậy suy ra công thức (1.1)

B. $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (1.2)$$

C. $$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad (1.3)$$

Chứng minh: Vì lnx tăng trên $\mathbb{R}_+^*$ nên tại $+\infty$ hàm số có giới hạn hữu hạn hoặc là $+\infty$.

Giả sử có giới hạn hữu hạn l thì $\lim_{x\to+\infty} \ln x = l = \lim_{x\to\infty} \ln 2x.$

Tuy nhiên $\ln 2x = \ln 2 + \ln x \to l = l + \ln 2$ vô lý.

Vậy $\ln x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty.\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \ln x = -\ln\frac{1}{x} \underset{x\to o^+}{\to} -\infty$

Ví dụ 1: Chứng minh: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

Giải:

$\forall\varepsilon > 0$ (ε bé) $\forall x \in \Omega_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$ có $|\sin x| < |x|$.

Lấy $\eta = \varepsilon, \forall x: \quad 0 < |x| < \varepsilon \Rightarrow |\sin x| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0$ để $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon} = A$

Vậy $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x: \quad |x| > A \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Chứng tỏ $\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}, \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Giải:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{2(x-4).(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4).(\sqrt{2x+1}+3)}\underset{x\to 4}{\longrightarrow}\frac{2.2\sqrt{2}}{2.3} = \frac{2}{3}.\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

Giải:

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = \frac{(\cos x - 1)+(1-\cos 3x)}{x^2} = \frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}\frac{\sin^2\dfrac{3x}{2}}{\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}+\frac{9}{2} = 4$$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}, \qquad \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Giải:

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^{\left(-\frac{1+x^2}{2}\right)\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$$

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} e$$

D. Sự tồn tại giới hạn của các hàm sơ cấp

Định lí 1.14: *Hàm số sơ cấp xác định tại* x_0 *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

1.3. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ(VCB) VÀ ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG LỚN(VCL)

1.3.1. Đại lượng VCB

A. Định nghĩa:

Hàm số $\alpha: \quad X \to \mathbb{R}$, gọi là đại lượng VCB tại a nếu như $\alpha(x) \underset{x \to a}{\to} 0$, a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$

Hệ quả: *Để tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ điều kiện cần và đủ là hàm số $\alpha(x) = f(x) - l$ là VCB tại a.*

B. Tính chất đại số của VCB

Dựa vào tính chất đại số của hàm có giới hạn, nhận được tính chất đại số của các VCB sau đây:

1. Nếu $\alpha_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCB tại a thì tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)$, tích $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)$ cũng là VCB tại a
2. Nếu $\alpha(x)$ là VCB tại a, $f(x)$ bị chặn trong lân cận của a thì $\alpha(x).f(x)$ là VCB tại a.

C. So sánh các VCB

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB tại a.

1. Nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x \to a}{\to} 0$ thì nói rằng α là VCB cấp cao hơn β tại a, kí hiệu $\alpha = o(\beta)$ tại a, cũng nói rằng β là VCB cấp thấp hơn α tại a.
2. Nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x \to a}{\to} c \neq 0$ thì nói rằng α, β là các VCB ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c = 1$ thì nói rằng α, β là các VCB tương đương tại a. Khi đó kí hiệu $\alpha \sim \beta$ tại a.

Rõ ràng nếu α, β ngang cấp tại a thì tồn tại hằng số c khác không để: $\alpha \sim c\beta$ tại a.

3. Nếu $\gamma = o(\alpha^k)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp cao hơn k so với VCB α tại a
4. Nếu $\gamma \sim c\alpha^k \quad (c \neq 0)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp k so với VCB α tại a

Hệ quả 1: *Nếu $\gamma \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ tại a thì* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$

Hệ quả 2: *Nếu $\alpha = o(\beta)$ tại a thì $\alpha + \beta \sim \beta$ tại a .*

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao:

Nếu α^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB α_i, $\left(i = \overline{1,m}\right)$

và β^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB β_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ tại a . Khi đó:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

Chú ý: Các VCB đáng nhớ là:

1. $x^{\alpha} \underset{x\to 0}{\to} 0, \alpha > 0$

2. $a^{x} \underset{x\to -\infty}{\to} 0, (a > 1)$ $\quad$ $a^{x} \underset{x\to +\infty}{\to} 0, (0 < a < 1)$

3. $sinx \underset{x\to 0}{\to} 0,$ $\quad$ $tgx \underset{x\to 0}{\to} 0,$ $\quad$ $\arcsin x \underset{x\to 0}{\to} 0$

4. $arctg \underset{x\to 0}{\to} 0$

1.3.2. Đại lượng VCL

A. Định nghĩa

Hàm số A: $X \to \mathbb{R}$ gọi là đại lượng VCL tại a nếu như $A(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ hoặc $-\infty$ (a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Hệ quả: Để $A(x)$ là VCL tại a thì cần và đủ là $\alpha(x) = \dfrac{1}{A(x)}$ là VCB tại a.

B. Tính chất của VCL

1. Nếu $A_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL cùng dấu $(+\infty)$ hay $(-\infty)$ tại a thì tổng $\sum_{i=1}^{n} A_i(x)$ là VCL mang dấu đó tại a.

Nếu $B_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL tại a thì tích $\prod_{i=1}^{n} B_i(x)$ là VCL tại a

2. Nếu $A(x)$ là VCL tại a và $f(x)$ giữ nguyên dấu tại a và lân cận của nó thì $A(x).f(x)$ là VCL tại a.

C. So sánh các VCL

Cho $A(x), B(x)$ là các VCL tại a

1. Nếu $\dfrac{A(x)}{B(x)} \underset{x\to a}{\to} \infty$ thì nói rằng $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a, hay B là VCL có cấp thấp hơn A tại a

2. Nếu $\dfrac{A(x)}{B(x)} \underset{x\to a}{\to} c \neq 0$ thì nói rằng A, B là VCL ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c = 1$ thì nói rằng A, B là các VCL tương đương tại a, kí hiệu $A \sim B$ tại a.

Hệ quả 1: *Nếu $A \sim A_1, B \sim B_1$ tại a thì* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Hệ quả 2: *Nếu $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a thì $A + B \sim A$.*

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ các VCL cấp thấp:

Nếu A^* là các VCL cấp cao nhất trong số các VCL $A_i(x), i = 1,2,...,m$ và B^* là VCL cấp cao nhất trong số các VCL $B_j(x), j = 1,2,...,n$ tại a thì ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{i=1}^{m}A_i(x)}{\sum_{j=1}^{n}B_j(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A^*(x)}{B^*(x)}$$

Chú ý: Các VCL sau đây thường hay dùng:

1. $x^{\alpha}\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty,\quad (\alpha>0)$
2. $a^x\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty,\ (a>1)$ $\qquad a^x\underset{x\to-\infty}{\to}+\infty,\ (0<a<1)$
3. $\log_a x\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty,\ (a>1)$ $\qquad \log_a x\underset{x\to0^+}{\to}+\infty,\ (0<a<1)$
4. $\log_a x\underset{x\to0^+}{\to}-\infty,\ (a>1)$ $\qquad \log_a x\underset{x\to+\infty}{\to}-\infty,\ (0<a<1)$

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x.\cos\frac{1}{x}\right)$, $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

Giải:

$$sinx\underset{x\to0}{\to}0,\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le1\Rightarrow\lim_{x\to0}\sin x.\cos\frac{1}{x}=0$$

$$\frac{1}{x}\underset{x\to\infty}{\to}0,\left|\sin x\right|\le1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}$, $\qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2x-x^3}{\sin^2x}$

Giải:

$$\left.\begin{matrix}\sin 2x\sim 2x\\ \sin 4x\sim 4x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}$$

$$tg^2x\sim x^2,\sin^2x\sim x^2\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{tg^2x-x^3}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Ví dụ 7: Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}$, $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}$, $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

Giải: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

1.4. SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

1.4.1. Các khái niệm cơ bản

A. Hàm liên tục tại một điểm

Cho $f:\quad X\to\mathbb{R}$ và $a\in X$. Nói rằng $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\quad\text{hay}\quad\lim_{x\to a}f(x)=f(\lim_{x\to a}x)$$

Tức là $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x:\qquad |x-a|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

B. Hàm liên tục một phía tại a

Cho $f:\quad X\to\mathbb{R},a\in X$. Nói rằng hàm f liên tục bên trái tại a nếu

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = f(a)$$

Hàm f liên tục bên phải tại a nếu

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = f(a)$$

Hệ quả: *Để hàm $f(x)$ liên tục tại a điều kiện cần và đủ là:*

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

C. Hàm liên tục trên một khoảng

1. Hàm $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in X$ thì nói rằng nó liên tục trên tập X.

2. Hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a nói rằng nó liên tục trên [a,b]

D. Điểm gián đoạn của hàm số

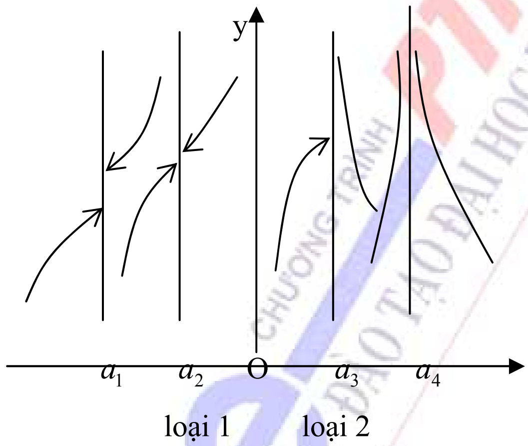
1. Nếu $f(x)$ không liên tục tại a, nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x = a$.

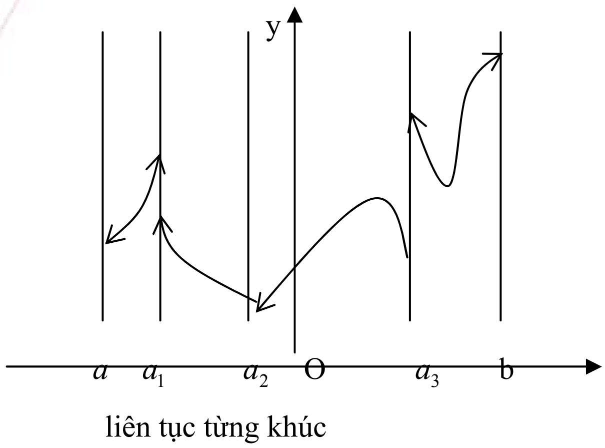
2. Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì gọi $x = a$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số và gọi $h_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$ là bước nhảy của $f(x)$ tại a.

Hệ quả: *Nếu $f(x)$ tăng (giảm) ở lân cận điểm a khi đó $f(x)$ liên tục tại a khi và chỉ khi* $h_f(a) = 0$. Điều này suy ra từ định lí 1.13 của hàm số đơn điệu.

3. Nếu a là điểm gián đoạn của $f(x)$ và không phải là điểm gián đoạn loại 1 thì nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn loại 2 tại $x = a$.

Các định nghĩa trên được mô tả trên hình 1.11.





H.1.11

E. Hàm liên tục từng khúc

Hàm $f: \quad [a,b] \to \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Nói rằng hàm f liên tục từng khúc trên $[a,b]$ nếu như chỉ có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 của hàm số trên đoạn đó.

1.4.2. Các phép toán đại số của hàm liên tục

Định lí 1.15: *Cho* $f, g: \quad X \to \mathbb{R}, \qquad a \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

1. *Nếu* $f(x)$ *liên tục tại a thì* $|f(x)|$ *liên tục tại a.*
2. *Nếu* $f(x), g(x)$ *cùng liên tục tại a thì* $f(x)+g(x)$ *liên tục tại a.*
3. *Nếu* $f(x)$ *liên tục tại a thì* $\lambda f(x)$ *liên tục tại a.*
4. *Nếu* $f(x), g(x)$ *liên tục tại a thì* $f(x).g(x)$ *liên tục tại a.*
5. *Nếu* $f(x), g(x)$ *liên tục tại a và* $g(x) \neq 0$ *thì* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục tại a.*

Định lí 1.16: *Cho* $f: \quad X \to \mathbb{R} \quad a \in X, \qquad g: \quad Y \to \mathbb{R}$ *và* $f(X) \subset Y$. *Nếu* $f(x)$ *liên tục tại a và* $g(y)$ *liên tục tại* $b = f(a)$ *thì hàm hợp* $g(f(x))$ *liên tục tại a.*

Chứng minh tương tự như chứng minh định lí về giới hạn của hàm hợp.

Chú ý:

- Định lí 1.16 cũng được phát biểu tương tự cho f liên tục trên X và g liên tục trên Y.
- Sử dụng định lí 1.16, nhận được các giới hạn quan trọng dưới đây:

Vì khi thỏa mãn định lí 1.16 thì $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to a} f(x))$ do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \tag{1.4}$$

Đặc biệt
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{1.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \qquad (0 < a \neq 1) \tag{1.6}$$

Thật vậy gọi $y = a^x - 1 \Rightarrow x = \log_a(y+1)$. Theo (1.4) sẽ có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \tag{1.7}$$

Gọi $y = (x+1)^\alpha - 1 \Rightarrow \alpha\ln(1+x) = \ln(1+y)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(y+1)}\frac{\alpha\ln(x+1)}{x}\right) = \alpha$$

Từ trên dễ dàng nhận được định lý sau:

Định lý 1.17: *Mọi hàm số sơ cấp xác định tại* $x = a$ *thì liên tục tại a.*

1.4.3. Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Cho $f: \quad [a,b] \to \mathbb{R}$ là liên tục, $a < b$.

A.Tính trù mật của hàm số liên tục

Định lí 1.18: *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và* $f(a).f(b) < 0$ *thì tồn tại* $c \in (a,b)$ *để* $f(c) = 0$

Chứng minh: Thực hiện phương pháp chia đôi đoạn $[a,b]$. Nếu trong quá trình chia đôi tìm được điểm c sẽ dừng lại. Nếu không tìm được c thì nhận được dãy các đoạn lồng nhau $([a_n,b_n])$ trong đó $f(a_n)<0, f(b_n)>0$ và $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)=f(c)\le 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)=f(c)\ge 0$

trong đó $c\in(a,b)$. Vậy $f(c)=0$.

Định lí 1.19: *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ khi đó $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, nghĩa là:* $\forall\gamma\in[f(a),f(b)], \exists c\in[a,b], f(c)=\gamma$

Chứng minh :

Định lí đúng với $\gamma=f(a)$ hoặc $\gamma=f(b)$.

Giả sử $f(a)<f(b)$ và xét $f(a)<\gamma<f(b)$. Đặt $g(x)=f(x)-\gamma$ liên tục trên $[a,b]$ và $g(a)<0, g(b)>0$. Theo định lí 1.18 thì tồn tại $c\in(a,b)$ để $g(c)=0$ hay $f(c)=\gamma$.

B.Tính bị chặn của hàm số liên tục

Định lí 1.20: *Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$, nghĩa là:*

$\exists x_m, x_M\in[a,b], \quad \forall x\in[a,b]$ *có* $f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)$

Chúng ta không chứng minh định lí này.

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG I

- **Các khái niệm và tính chất cơ bản về hàm số:** định nghĩa hàm số, hàm số tuần hoàn, hàm số chẵn, lẻ, hàm số hợp, hàm số ngược, hàm số cho dưới dang tường minh, dạng ẩn, dạng tham số. Tính chất cơ bản của hàm số: đơn điệu, bị chặn.
- **Các hàm số sơ cấp cơ bản:** hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, hàm số lượng giác, hàm số lượng giác ngược, đa thức, hàm hữu tỉ. Hàm số sơ cấp.
- **Các hàm số được dùng trong phân tích kinh tế**
- **Định nghĩa giới hạn của hàm số tương ứng với các quá trình**

Chẳng hạn, f có giới hạn là l khi x dần đến a (gọi tắt: có giới hạn là l tại a) nếu

$$\forall\varepsilon>0,\exists\Omega_\eta(a)\subset X,\forall x\in\Omega_\eta(a)\setminus\{a\}\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

- **Tính chất của hàm có giới hạn.**

A. Tính duy nhất của giới hạn

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ *thì* l *là duy nhất.*

B. Tính bị chặn

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ *thì* $f(x)$ *bị chặn trong một lân cận của a.*

C. Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.

Cho $\lim_{x\to a} f(x) = l$. *Khi đó:*

1. Nếu $c < l$ *thì trong lân cận đủ bé của* $a: c < f(x)$

2. Nếu $l < d$ *thì trong lân cận đủ bé của* $a: f(x) < d$

3. Nếu $c < l < d$ *thì trong lân cận đủ bé của* $a: c < f(x) < d$

4. Nếu $c \le f(x)$ *trong lân cận của a thì* $c \le l$

5. Nếu $f(x) \le d$ *trong lân cận của a thì* $l \le d$

6. Nếu $c \le f(x) \le d$ *trong lân cận của a thì* $c \le l \le d$

Cho ba hàm số f, g, h *thoả mãn:* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *trên X;* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$

khi đó $\lim_{x\to a} g(x) = l$

7. Nếu trong lân cận của a có $f(x) \le g(x)$ *và* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *thì:*

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

D. Các phép tính đại số của hàm số có giới hạn

(Trường hợp giới hạn hữu hạn):

1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Rightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |l|$

2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

3. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1 + l_2$

4. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Rightarrow \lambda . f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda l, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

5. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ *và* $g(x)$ *bị chặn trong lân cận của* $a \Rightarrow f(x).g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

6. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2 \Rightarrow f(x).g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1 . l_2$

7. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ *và* $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2 \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{l_1}{l_2}$

(Trường hợp giới hạn vô hạn):

1 .Nếu $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ *và* $g(x) \ge m$ *trong lân cận của a thì* $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

2. Nếu $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ *và* $g(x) \ge m > 0$ *trong lân cận của a thì* $f(x).g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

E. Giới hạn của hàm số hợp

Nếu $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ *và* $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} l$ *thì* $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$

F. Giới hạn của hàm số bị chặn

Cho $f: \ (a,b) \to \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}$ *hoặc* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *và là hàm tăng.*

3. Nếu f *bị chặn trên bởi M thì* $\lim_{x\to b^-} f(x) = M^* \le M$

4. Nếu f không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

G. Giới hạn của hàm số sơ cấp

Hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- **Các giới hạn đáng nhớ**

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad \text{Đặc biệt} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \qquad (0 < a \neq 1)$$

- **Đại lượng VCB**

A. Định nghĩa:

Ánh xạ $\alpha: \quad X \to \mathbb{R}$, gọi là đại lượng VCB tại a (trong quá trình x dần về a) nếu như $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, a có thể là $+\infty$ (hoặc $-\infty$)

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ điều kiện cần và đủ là hàm số $\alpha(x) = f(x) - l$ là VCB tại a.

B. Tính chất đại số của VCB

1. Nếu $\alpha_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCB tại a thì tổng $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$, tích $\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ cũng là VCB tại a

2. Nếu $\alpha(x)$ là VCB tại a, $f(x)$ bị chặn trong lân cận của a thì $\alpha(x).f(x)$ là VCB tại a.

C. So sánh các VCB

1. Nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ thì nói rằng α là VCB cấp cao hơn β tại a, kí hiệu $\alpha = o(\beta)$ tại a, cũng nói rằng β là VCB cấp thấp hơn α tại a.

2 .Nếu $\dfrac{\alpha}{\beta} \underset{x\to a}{\longrightarrow} c \neq 0$ thì nói rằng α, β là các VCB ngang cấp tại a.

$c = 1$ thì nói rằng α, β là các VCB tương đương tại a. Khi đó kí hiệu $\alpha \sim \beta$ tại a.

Rõ ràng nếu α, β ngang cấp tại a thì tồn tại hằng số c khác không để $\alpha \sim c\beta$ tại a.

3. Nếu $\gamma = o(\alpha^k)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp cao hơn k so với VCB α tại a

4. Nếu $\gamma \sim c\alpha^k \quad (c \neq 0)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp k so với VCB α tại a

5. Nếu $\gamma \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ *tại a thì* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$

6. Nếu $\alpha = o(\beta)$ *tại a thì* $\alpha + \beta \sim \beta$ *tại a.*

7. Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao:

Nếu α^* *là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB* α_i, $\left(i = \overline{1,m}\right)$

và β^* *là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB* β_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ *tại a. Khi đó:*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

- **Đại lượng VCL**

A. Định nghĩa

Ánh xạ A: $X \to \mathbb{R}$ gọi là đại lượng VCL tại a (trong quá trình x dần về a)nếu như $A(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ hoặc $-\infty$,(a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Để $A(x)$ là VCL tại a thì cần và đủ là $\alpha(x) = \dfrac{1}{A(x)}$ là VCB tại a.

B. Tính chất của VCL

1. Nếu $A_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL cùng dấu $(+\infty)$ hay $(-\infty)$ tại a thì tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x)$ là VCL mang dấu đó tại a.

2. Nếu $B_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL tại a thì tích $\prod\limits_{i=1}^{n} B_i(x)$ là VCL tại a

3. Nếu $A(x)$ là VCL tại a và $f(x)$ giữ nguyên dấu tại a và lân cận của nó thì $A(x).f(x)$ là VCL tại a.

C. So sánh các VCL

Cho $A(x), B(x)$ là các VCL tại a

1. Nếu $\dfrac{A(x)}{B(x)} \underset{x\to a}{\to} \infty$ thì nói rằng $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a, hay B là VCL có cấp thấp hơn A tại a

2. Nếu $\dfrac{A(x)}{B(x)} \underset{x\to a}{\to} c \neq 0$ thì nói rằng A, B là VCL ngang cấp tại a.

$c = 1$ thì nói rằng A, B là các VCL tương đương tại a, kí hiệu $A \sim B$ tại a.

3. Nếu $A \sim A_1, B \sim B_1$ *tại a thì* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$

4. Nếu $A(x)$ *là VCL cấp cao hơn* $B(x)$ *tại a thì* $A + B \sim A$.

5. Qui tắc ngắt bỏ các VCL cấp thấp:

Nếu A^* *là các VCL cấp cao nhất trong số các VCL* $A_i(x), i = 1,2,...,m$ *và* B^* *là VCL cấp cao nhất trong số các VCL* $B_j(x), j = 1,2,...,n$ *tại a thì ta có*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{i=1}^{m} A_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} B_j(x)} = \lim_{x\to a}\frac{A^*(x)}{B^*(x)}$$

- **Các khái niệm cơ bản về sự lien tục của hàm số**

A. Hàm liên tục tại một điểm

Cho $f: \quad X \to \mathbb{R}$ và $a \in X$. Nói rằng $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{hay} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$$

Tức là $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x: \qquad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

B. Hàm liên tục một phía tại a

Cho $f: \quad X \to \mathbb{R}, a \in X$. Nói rằng hàm f liên tục bên trái tại a nếu

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) = f(a)$$

Hàm f liên tục bên phải tại a nếu

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+) = f(a)$$

Để hàm $f(x)$ *liên tục tại a điều kiện cần và đủ là:*

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

C. Điểm gián đoạn của hàm số

1.Nếu $f(x)$ không liên tục tại a, nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x = a$.

2.Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì gọi $x = a$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số và gọi $h_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$ là bước nhảy của $f(x)$ tại a.

Nếu $f(x)$ *tăng (giảm) ở lân cận điểm a khi đó* $f(x)$ *liên tục tại a khi và chỉ khi* $h_f(a) = 0$.

D. Các phép toán đại số của hàm liên tục

1. Nếu $f(x)$ *liên tục tại a thì* $|f(x)|$ *liên tục tại a.*

2 Nếu $f(x), g(x)$ *cùng liên tục tại a thì* $f(x) + g(x)$ *liên tục tại a.*

3. Nếu $f(x)$ *liên tục tại a thì* $\lambda f(x)$ *liên tục tại a.*

4. Nếu $f(x), g(x)$ *liên tục tại a thì* $f(x).g(x)$ *liên tục tại a.*

5. Nếu $f(x), g(x)$ *liên tục tại a và* $g(x) \neq 0$ *thì* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục tại a.*

6. Cho $f: \quad X \to \mathbb{R} \quad a \in X, \qquad g: \quad Y \to \mathbb{R}$ *và* $f(X) \subset Y$. *Nếu* $f(x)$ *liên tục tại a* *và* $g(y)$ *liên tục tại* $b = f(a)$ *thì hàm hợp* $g(f(x))$ *liên tục tại a.*

7. Mọi hàm số sơ cấp xác định tại $x = a$ *thì liên tục tại a.*

E.Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

1 .Nếu $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và* $f(a).f(b) < 0$ *thì tồn tại* $c \in (a,b)$ *để* $f(c) = 0$

2. Nếu $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *khi đó* $f(x)$ *nhận giá trị trung gian giữa* $f(a)$ *và* $f(b)$*, nghĩa là:*

$$\forall \gamma \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a,b], f(c) = \gamma$$

3. Hàm số $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên* $[a,b]$*, nghĩa là:*

$$\exists x_{m,} x_M \in [a,b], \qquad \forall x \in [a,b] \text{ có } f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Hàm số không xác định tại a thì không có giới hạn tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.2. Hàm số bị chặn tại lân cận điểm a thì có giới hạn tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.3. Hàm số không bị chặn tại lân cận điểm a thì có giới hạn tại a là vô cùng?

Đúng ☐ Sai ☐

1.4. Tổng hoặc tích vô hạn các hàm số có giới hạn hữu hạn tại a là hàm có giới hạn tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.5. Tổng hoặc tích hai hàm số không có giới hạn hữu hạn tại a là hàm không có giới hạn tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.6. Hàm số có giới hạn trái và phải tại điểm a thì có giới hạn tại a ?

Đúng ☐ Sai ☐

1.7. Tích vô hạn các VCB cũng là một VCB?

Đúng ☐ Sai ☐

1.8. Tổng vô hạn các VCB cũng là một VCB?

Đúng ☐ Sai ☐

1.9. Tổng hữu hạn các VCL cũng là một VCL?

Đúng ☐ Sai ☐

1.10. Hàm số liên tục tại điểm a thì có giới hạn tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.11. Hàm số liên tục trái và phải tại điểm a thì liên tục tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.12. Hàm số xác định tại điểm a thì liên tục tại a?

Đúng ☐ Sai ☐

1.13. Hàm số liên tục trên khoảng mở (a,b) thì bị chặn trên khoảng đó?

Đúng ☐ Sai ☐

1.14. Hàm số liên tục trên khoảng mở (a,b) thì không thể có GTNN, GTLN trên khoảng đó?

Đúng ☐ Sai ☐

1.15. Hàm số liên tục trên khoảng (a,b) và $f(a)f(b) > 0$ thì vô nghiệm trên khoảng đó?

Đúng ☐ Sai ☐

1.16. Cho hàm số $f(x) = \arccos(\lg x)$. Tính $f(\frac{1}{10}), f(1), f(10)$.

1.17. Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số:

a. $f(x) = 2 - x^2$, b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$,

c. $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$, d. $k(x) = \sqrt{2-x}$.

1.18. Xét xem hàm số có chẵn hoặc lẻ không và phác hoạ đồ thị của nó.

a. $f(x) = \sqrt{|x|}$, b. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$,

c. $h(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, d. $k(x) = |x| + |x-2|$.

1.19. Xét xem hàm số nào tuần hoàn và tìm chu kì của nó

a. $f(x) = 10\sin 3x$, b. $g(x) = \sin^2 x$,

c. $h(x) = \sqrt{tgx}$, d. $k(x) = \sin\sqrt{x}$.

1.20. Tìm hàm ngược của các hàm số sau:

a. $y = 2x + 3$, b. $y = x^2 - 1, x < 0$,

c. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$, d. $y = \ln\dfrac{x}{2}$,

1.21. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$, b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$,

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$, d. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

1.22. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

1.23. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

1.24. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{1-\cos x}$, d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

1.25. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x$.

1.26. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$, b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$, d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.27. Tính giới hạn các hàm số sau

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$,

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, d. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$, $x>0$.

1.28. Tính giới hạn các hàm số sau

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot g^2 x}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$.

1.29. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a. $f(x)=|x|$, b. $f(x)=\begin{cases}\left(x^2-4\right)\left(x-2\right) & x\neq 2\\ A & x=2\end{cases}$

1.30. Hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và chỉ nhận giá trị hữu tỉ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Hãy tính $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1.31. Chứng minh rằng mỗi phương trình đại số bậc lẻ có ít nhất một nghiệm thực.

CHƯƠNG II: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Phép tính vi phân của hàm một biến số gắn liền với phép tính đạo hàm của hàm số. Khái niệm đạo hàm là một trong những tư tưởng quan trọng nhất của giải tích. Trong chương I, chúng ta đã đặt vấn đề xem xét hàm số, nhưng vấn đề cốt lõi của hàm số là tốc độ biến thiên của nó chưa được xét đến. Nhờ vào khái niệm đạo hàm người ta có thể khảo sát toàn diện một đại lượng biến thiên. Khái niệm đạo hàm gắn liền với các đại lượng vật lý: vận tốc tại thời điểm t của một vật chuyển động, nhiệt dung của vật thể ở nhiệt độ t^o, cường độ dòng điện,v.v...; gắn liền với các hiện tượng hoá học: tốc độ phản ứng hoá học ở thời điểm t; gắn liền với các bài toán kinh tế xã hội: tốc độ tăng trưởng kinh tế, phương án tối ưu trong giao thông, trong sản xuất kinh doanh, v.v....

Các nội dung cơ bản cần nắm vững gồm:

1. Phân biệt các khái niệm: đạo hàm, vi phân, tính khả vi của hàm số. Ý nghĩa của chúng.

2. Nắm vững các qui tắc tính đạo hàm, vi phân của hàm số dựa vào: bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản; các tính chất của hàm số khả vi, đặc biệt công thức đạo hàm của hàm số hợp.

3. Công thức đạo hàm và vi phân cấp cao của các hàm số sơ cấp cơ bản, từ đó nhận được công thức Taylor của chúng. Ý nghĩa của công thức Taylor.

4. Ứng dụng đạo hàm: khử các dạng bất định (qui tắc Lôpitan), xét sự biến thiên của hàm số, tìm cực trị của hàm số, tìm điểm uốn và xét tính lồi hoặc lõm của hàm số.

NỘI DUNG

2.1. ĐẠO HÀM

Từ nay về sau ta coi rằng $f: X \to \mathbb{R}$, $X \neq \phi$ và X không thu về một điểm, tức là X là khoảng nào đó trên $\mathbb{R}$, và $\mathbb{R}^X$ là tập các ánh xạ đã nói ở trên, còn C_f là đồ thị của hàm số f.

2.1.1. Đạo hàm tại một điểm

2.1.1.1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho $a \in X, a+h \in X, f \in \mathbb{R}^X$. Nói rằng f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Giới hạn này thường kí hiệu $f'(a)$ hay $\frac{df}{dx}(a)$ gọi là đạo hàm của f tại a.

Nếu cho hàm $y = f(x)$ thì đạo hàm của hàm số tại a còn được kí hiệu $y'(a)$

Tỉ số $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ gọi là tỉ số của các số gia hàm số và số gia đối số.

2.1.1.2. Định nghĩa đạo hàm một phía

1. Cho $a\in X, a+h\in X$. Nói rằng f khả vi phải tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_p'(a)$, gọi là đạo hàm phải của f tại a.

2. Cho $a\in X, a+h\in X$. Nói rằng f khả vi trái tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_t'(a)$, gọi là đạo hàm trái của f tại a.

Hệ quả 1: *Để f khả vi tại a điều kiện cần và đủ là f khả vi trái và phải tại a đồng thời*

$$f_t'(a)=f_p'(a)=f'(a)$$

Hệ quả 2: (điều kiện cần của hàm khả vi*): Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a*

Chứng minh: Lấy $h\in\mathbb{R}^*$ để $a+h\in X$, ($\mathbb{R}^*$ được kí hiệu tập các số thực khác không)

rõ ràng $f(a+h)=f(a)+h.\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

mà $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\underset{h\to 0}{\to} f'(a)\Rightarrow f(a+h)\underset{h\to 0}{\to} f(a)$. Chứng tỏ f liên tục tại a.

Chú ý:

1. f có thể liên tục tại a nhưng không khả vi tại a chẳng hạn các hàm dưới đây và đồ thị của chúng trên hình 2.1. mô tả điều đó

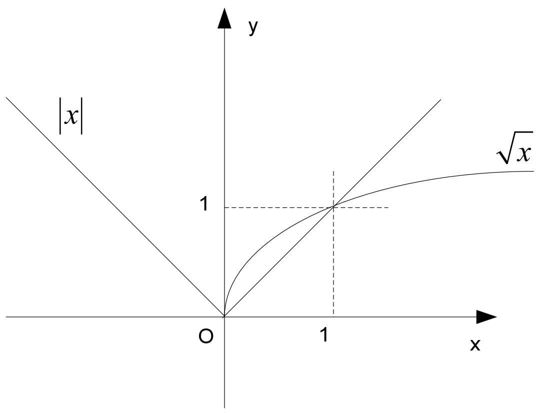
- $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cho bởi $f(x)=|x|$. liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì $\dfrac{|h|}{h}$ không có giới hạn khi $h\to 0$, ở đây ta thấy: $f_t'(0)=-1\neq 1=f_p'(0)$

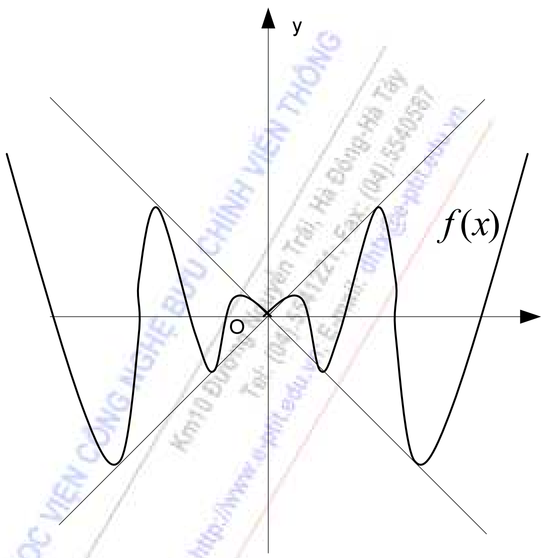
- $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ cho bởi $f(x)=\sqrt{x}$ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì với $h\in\mathbb{R}_+^*$ $\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}\underset{h\to 0^+}{\to}+\infty$ ($\mathbb{R}_+$ được kí hiệu tập các số không âm)

- $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cho bởi $f(x)=\begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

liên tục tại 0 vì $\left|f(x)\right| \le |x| \underset{x\to 0}{\rightarrow} 0 = f(0)$ nhưng không khả vi vì $\dfrac{h.\sin\frac{1}{h}}{h} = \sin\dfrac{1}{h}$

không có giới hạn khi $h \to 0$





H.2.1

1. Nếu f khả vi phải (hoặc trái) tại a thì f liên tục phải (hoặc trái) tại a.
2. Nếu f khả vi phải và trái tại a thì f liên tục tại a.

2.1.1.3.Ý nghĩa hình học của đạo hàm

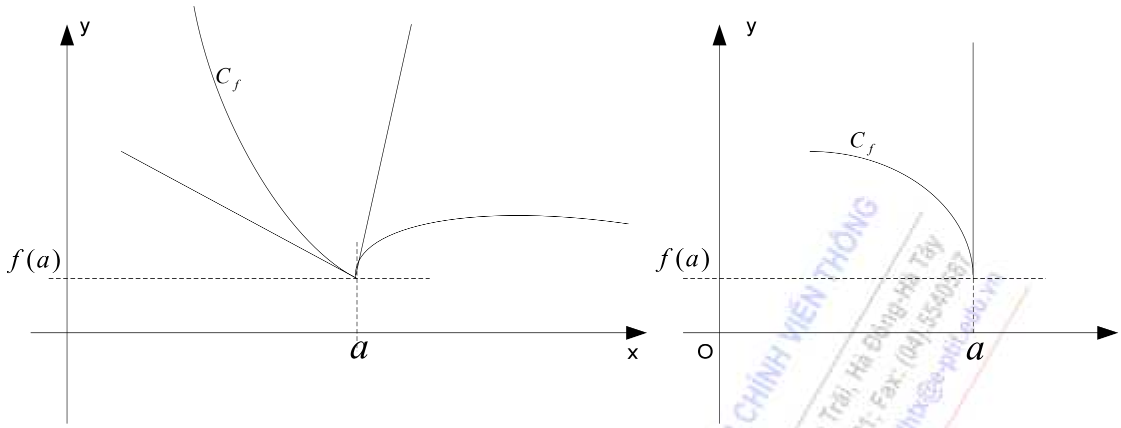
Nếu f khả vi tại a thì tồn tại tiếp tuyến của đồ thị C_f tại điểm $A(a, f(a))$. Tiếp tuyến này không song song với trục 0y và có hệ số góc là $f'(a)$.

Trường hợp f không khả vi tại a mà tồn tại $f_t'(a)$ và $f_p'(a)$. Lúc đó gọi điểm $A(a, f(a)) \in C_f$ là điểm góc của C_f,và hai bán tiếp tuyến tại A không song song với nhau.

Trường hợp f không khả vi tại a nhưng có

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0^+}{\rightarrow} +\infty \text{ hoặc } -\infty$$

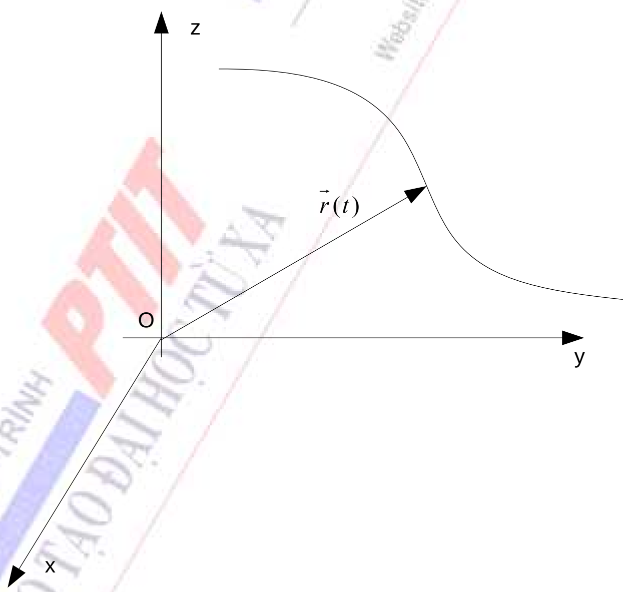
hoặc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0^-}{\rightarrow} +\infty$ hoặc $-\infty$ thì tại $A(a, f(a))$ đường cong C_f có một bán tiếp tuyến song song với Oy. Hình 2.2. mô tả các nội dung trên.



H.2.2

2.1.1.4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Cho chất điểm chuyển động tại thời điểm t được định vị bởi véc tơ bán kính $\vec{r}(t)$ (Xem hình 2.3.)



H.2.3

Gọi $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là phương trình chuyển động của chất điểm.

Giả sử tại thời điểm t_1, t_2 véc tơ bán kính của chất điểm là $\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$

Gọi $\overrightarrow{v_{TB}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$ là vận tốc trung bình từ thời điểm t_1 đến t_2

Vận tốc tức thời $\vec{v}(t_1)$ của chất điểm tại thời điểm t_1 sẽ là giới hạn của tỉ số trên khi $t_2 - t_1 \to 0$

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{\vec{r}}(t_1)$$

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm chính bằng đạo hàm của véc tơ bán kính theo thời gian t.

2.1.1.5. Ý nghĩa của đạo hàm đối với các bài toán kinh tế

Xét mô hình hàm số:

$$y = f(x)$$

Trong đó x và y là các biến số kinh tế (ta coi biến độc lập x là biến số đầu vào và biến số phụ thuộc y là biến số đầu ra). Trong kinh tế học người ta quan tâm đến xu hướng biến thiên của biến phụ thuộc y tại một điểm x_0 khi biến độc lập x thay đổi một lượng nhỏ. Chẳng hạn, khi xét mô hình sản xuất $Q = f(L)$ người ta thường quan tâm đến số lượng sản phẩm hiện vật tăng thêm khi sử dụng thêm một đơn vị lao động

Khi hàm số khả vi tại x_0 và khi $\Delta x = 1$ suy ra $\Delta y \approx f'(x_0)$. Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi giá trị của biến số y khi biến số x tăng thêm một đơn vị. Trong kinh tế học, các nhà kinh tế gọi $f'(x_0)$ là giá trị y – cận biên của x tại điểm x_0. Đối với mỗi hàm kinh tế, giá trị cận biên có tên gọi cụ thể như sau:

- Đối với mô hình hàm sản xuất $Q = f(L)$ thì $f'(L_0)$ được gọi là sản phẩm hiện vật cận biên của lao động tại L_0. Sản phẩm hiện vật cận biên của lao động được kí MPP_L (hiệu là Marginal Physical Product of labor): $MPP_L = f'(L)$. Tại mỗi điểm L, MPP_L cho biết xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị lao động.

- Đối với mô hình hàm doanh thu $TR = TR(Q)$ thì $TR'(Q_0)$ gọi là doanh thu cận biên tại điểm Q_0. Doanh thu cận biên được kí hiệu là MR (Marginal Revenue): $MR = TR'(Q)$. Tại mỗi mức sản lượng Q, MR cho biết xấp xỉ lượng doanh thu tăng thêm khi xuất thêm một đơn vị sản phẩm. Đối với doanh nghiệp cạnh tranh ta có: $TR = pQ \Rightarrow MR = p$ (p là giá sản phẩm trên thị trường).

- Đối với mô hình hàm chi phí $TC = TC(Q)$ thì $TC'(Q_0)$ được gọi là chi phí cận biên tại điểm Q_0. Chi phí cận biên được kí hiệu là MC (Marginal Ccst)): $MC = TC'(Q)$. Tại mỗi mức sản lượng Q, MC cho biết xấp xỉ lượng chi phí tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm

- Đối với hàm tiêu dùng $C = C(Y)$ thì $C'(Y_0)$ được gọi là xu hướng tiêu dùng cận biên tại Y_0. Xu hướng tiêu dùng cận biên được kí hiệu là MPC (Marginal Propensity to Consume): $MPC = C'(Y)$. Tại mỗi mức thu nhập Y, MPC là số đo xấp xỉ lượng tiêu dùng gia tăng khi có thêm \$1 thu nhập.

Chẳng hạn, hàm sản xuất của một doanh nghiệp là $Q = 5\sqrt{L}$. Ở mức sử dụng L = 100 đơn vị lao động (chẳng hạn 100 giờ lao động một tuần), mức sản lượng tương ứng là Q = 50 sản phẩm. Sản phẩm cận biên của lao động tại điểm L = 100 sẽ là:

$$MPP_L = Q' = \frac{5}{2\sqrt{L}} = 0,25 \text{ (khi L = 100)}$$

Điều này có nghĩa là khi tăng mức sử dụng lao động hàng tuần từ 100 lên 101 thì sản lượng hàng tuần sẽ tăng thêm khoảng 0,25 đơn vị hiện vật.

2.1.2. Các phép tính đại số của các hàm khả vi tại một điểm

Định lí 2.1: *Cho f và g khả vi tại a khi đó:*

1. *$f + g$ khả vi tại a và $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ khả vi tại a và $(\lambda f)'(a) = \lambda . f'(a)$*
3. *$f.g$ khả vi tại a và $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$*
4. *Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ khả vi tại a và $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}$.*

Định lí 2.2: (Đạo hàm của hàm hợp).

Cho $a \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ với $f(X) \subset Y$. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ thì hàm hợp gof khả vi tại a và

$$(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big).f'(a). \tag{2.1}$$

Định lí 2.3: (Đạo hàm của hàm ngược).

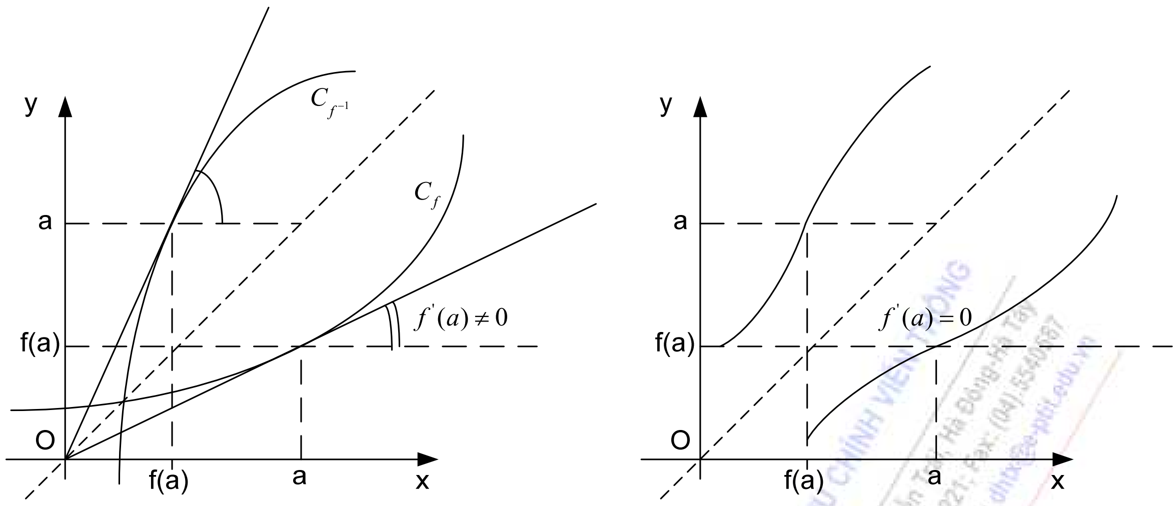
Giả sử $f : X \to \mathbb{R}$ đơn điệu ngặt và liên tục trên X khả vi tại $a \in X$ và $f'(a) \neq 0$

Khi đó hàm ngược của f là $f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}$ khả vi tại $f(a)$ và

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)} \tag{2.2}$$

Nếu gọi $C_{f^{-1}}$ là đồ thị của hàm f^{-1} thì các tiếp tuyến tại $A\big(a, f(a)\big) \in C_f$ và $A'\big(f(a), a\big) \in C_{f^{-1}}$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III

Hình 2.4. mô tả điều đó



H.2.4

2.1.3. Đạo hàm trên một khoảng (ánh xạ đạo hàm)

A.Định nghĩa: Cho $f \in \mathbb{R}^X$ khả vi tại mỗi điểm $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

Kí hiệu ánh xạ $f': (a,b) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là ánh xạ đạo hàm hay đạo hàm của $f(x)$ trên (a,b) thường kí hiệu $f'(x)$ hay

$\dfrac{df}{dx}(x), \forall x \in (a,b)$. Cũng nói rằng $f(x)$ khả vi trên $(a,b) \subseteq X$

B.Các tính chất

Các định lí dưới đây suy ra một cách dễ dàng từ các định lí ở mục 3.12.

Định lí 2.4: *Cho $f, g : X \to \mathbb{R}$ khả vi trên X, (tức là $(a,b) = X$) khi đó.*

1. *$f+g$ khả vi trên X và $(f+g)' = f' + g'$*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ khả vi trên X và $(\lambda f)' = \lambda f'$* (2.3)
3. *$f.g$ khả vi trên X và $(f.g)' = f'g + fg'$*
4. *$g(x) \neq 0$ trên X thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi trên X và $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$*

Bằng một phép qui nạp đơn giản, nhận được:

Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ và $f_1, f_2, ..., f_n$ khả vi trên X thì

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \text{ khả vi trên } X \text{ và } \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'$$

$\prod_{i=1}^{n} f_i$ khả vi trên X và $\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 ... f_{k-1} f_k' f_{k+1} ... f_n$

Định lí 2.5: *Cho $f \in \mathbb{R}^X$ và $g \in \mathbb{R}^Y$. Nếu f khả vi trên X và g khả vi trên $f(X)$ thì gof khả vi trên X và*

$$(gof)' = (g'of)f' \tag{2.1'}$$

Mở rộng $(hogof)' = (h'ogof)(g'of)f'$

Định lí 2.6: *Cho $f \in \mathbb{R}^X$ đơn điệu ngặt trên X, khả vi trên X và $f'(x) \neq 0$ trên X khi đó f^{-1} khả vi trên $f(X)$ và*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \tag{2.2'}$$

2.1.4. Đạo hàm của các hàm số thông thường

A. Hàm số mũ

Cho $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \to a^x \ln a \text{ (nhờ vào công thức (1.6))}$$

Vậy hàm mũ khả vi trên $\mathbb{R}$. Đặc biệt $(e^x)' = e^x$ (2.4)

B. Hàm số lôgarit

Cho $f(x) = \log_a x = y, f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$. Hàm ngược $x = a^y$

$$x' = a^y \ln a \Rightarrow y' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \tag{2.5}$$

Đặc biệt $y = \ln x$ thì $y' = \frac{1}{x}$

C. Hàm luỹ thừa

Cho $f(x) = x^\alpha = y, \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ lấy logarit cả 2 vế sẽ có

$$\ln y = \alpha \ln x$$

Sử dụng đạo hàm của hàm hợp ta có

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha - 1} \tag{2.6}$$

Trường hợp $x \leq 0$ tuỳ theo α để biểu thức $x^{\alpha-1}$ xác định thì ta vẫn có $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$

D. Hàm lượng giác

Cho $f(x)=\sin x, f\in[-1,1]^{\mathbb{R}}$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\sin x\frac{\cosh-1}{h}+\cos x\frac{\sinh}{h}$$

$$=\sin x\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}+\cos x\frac{\sinh}{h}$$

Theo công thức (1.1) suy ra $\frac{\sinh}{h}\underset{h\to0}{\to}1,\quad \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\underset{h\to0}{\to}0$

Vậy $\qquad(\sin x)'=\cos x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ (2.7)

Tương tự có thể chỉ ra $f(x)=\cos x$ cũng khả vi trên $\mathbb{R}$

và $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow(\cos x)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ (2.8)

suy ra tgx khả vi trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ và

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=1+tg^2x \tag{2.9}$$

cotgx khả vi trên $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ và

$$(\cot gx)'=-\frac{1}{\sin^2x}=-(1+\cot g^2x)\,. \tag{2.10}$$

E. Hàm lượng giác ngược

Cho $f(x)=\arccos x=y, f\in[0,\pi]^{[-1,1]}$ ta sẽ chứng minh $f(x)$ khả vi trên $(-1,1)$.

Thật vậy hàm ngược của nó $x=\cos y$. $x'=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2y}$ vì $y\in(0,\pi)$

Vậy $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2.11)

Tương tự $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2.12)

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2} \tag{2.13}$$

$$(arc\cot gx)'=-\frac{1}{1+x^2} \tag{2.14}$$

F. Hàm cho theo tham số

Cho $f \in \mathbb{R}^X$ dưới dạng tham số

$$x:(\alpha,\beta)\to X, \qquad y:(\alpha,\beta)\to \mathbb{R}$$

Cụ thể $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ với $t\in(\alpha,\beta)=T$

Nếu x, y khả vi trên T, tồn tại hàm ngược $t=\varphi^{-1}(x)$ khả vi và $\varphi'(t)$ khác không trên T, thì theo công thức tính đạo hàm của hàm số ngược và hàm số hợp sẽ nhận được

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{2.15}$$

G. Đạo hàm lôgarit

Nếu f có dạng tích của các nhân tử với số mũ cố định hoặc $f(x)=u^v, u=u(x)>0, v=v(x)$ thì ta có thể xét đạo hàm logarit của f tương tự như hàm luỹ thừa trong mục C hoặc hàm số mũ trong mục A. Sau đó sử dụng định lí đạo hàm của hàm hợp.

Thật vậy $f(x)=u^\alpha v^\beta \omega^\gamma$ trong đó $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ còn các hàm $u(x), v(x), \omega(x)$ khả vi trên X và luôn dương trên X. Khi đó.

$$\ln f(x)=\alpha\ln u+\beta\ln v+\gamma\ln\omega$$

$$\frac{f'}{f}=\alpha\frac{u'}{u}+\beta\frac{v'}{v}+\gamma\frac{\omega'}{\omega}.$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\alpha\frac{u'}{u}+\beta\frac{v'}{v}+\gamma\frac{\omega'}{\omega}\right)f(x) \tag{2.16}$$

Hoặc có thể biểu diễn

$$f(x)=e^{\alpha\ln u+\beta\ln v+\gamma\ln w}$$

Các cách tính đạo hàm thông qua công thức đạo hàm của hàm lôgarit gọi là đạo hàm lôga.

H. Bảng các đạo hàm của các hàm số thông dụng

$y=C=const \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad y'=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$y=x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R} \quad \forall x\in X \qquad y'=\alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x\in X_1\subset X$

$y=\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad y'=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$y=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad y'=-\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$y=tgx \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}, \quad y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$y = \cot gx, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot g^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$y = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y' = a^x \ln a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y = \log_a x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad y' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$y = \arcsin x \quad \forall x \in [-1,1] \qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$

$y = \arccos x \quad \forall x \in [-1,1] \qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$

$y = arctgx \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y = arc\cot gx \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1: Hãy tính đạo hàm tại 0 của các hàm số sau (nếu có)

1. $f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$

3. $f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Giải:

1. $\dfrac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \dfrac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \sin \dfrac{1}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$

2. $\dfrac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \dfrac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$, $f_2(x)$ không khả vi tại 0

3. $\dfrac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \dfrac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \dfrac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$

$\underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, $f_3(x)$ không khả vi tại 0

Ví dụ 2: Tính đạo hàm, vẽ đồ thị của hàm số và đạo hàm của nó các hàm sau đây.

1. $y = x|x|$

2. $y = \ln|x|$

Giải:

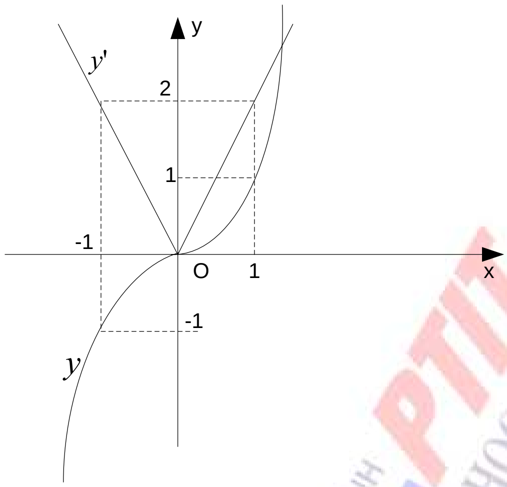
Trước hết ta hãy tính $y'(x)$

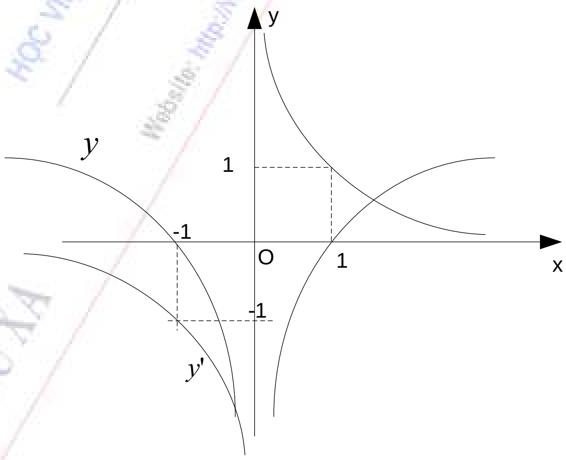
1. $y = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

$y_t'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0$, $y_p'(0) = 0$. $y_t'(0) = y_p'(0) = 0 \Rightarrow y' = 2|x|$ trên $\mathbb{R}$

2. $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & x < 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{1}{-x}(-1) & x < 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$ với $x \in \mathbb{R}^*$

Hình 2.5. mô tả các đồ thị của y và y'





H.2.5

Ví dụ 3 : Tính đạo hàm y_x' của hàm số

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$$

Giải: $$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(t - arctgt)}{d\ln(1 + t^2)} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

2.2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

2.2.1. Định nghĩa vi phân tại một điểm

Cho $f \in \mathbb{R}^X, f$ khả vi tại $a \in X$. Vi phân của f tại a kí hiệu $df(a)$ xác định bởi công thức

$$df(a) = f'(a).h \quad \text{với } h \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

Vậy $df(a)$ là một hàm tuyến tính của h

Xét hàm số $f(x) = x$ trên R, $f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ vậy $dx = 1.h$

Từ đó cũng thường kí hiệu $df(a) = f'(a).dx$ hoặc $dy(a) = f'(a).dx$

Hệ quả: *Để $f(x)$ khả vi tại a điều kiện cần và đủ là tồn tại hằng số $\lambda \in \mathbb{R}$ và một VCB $\alpha(h)$ tại 0 sao cho*

$$f(a+h) - f(a) = \lambda h + h\alpha(h) \text{ đồng thời } \lambda = f'(a).$$

Thật vậy $f(x)$ khả vi tại a khi và chỉ khi tồn tại $f'(a)$

nghĩa là $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

hay $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \alpha(h) \underset{h \to 0}{\rightarrow} 0$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a).h + h\alpha(h)$$

Vậy $f'(a) = \lambda$

Tương tự như đạo hàm tại một điểm, ta nhận được tính chất đại số của vi phân.

Định lí 2.7: *Nếu $f, g \in \mathbb{R}^X$ và khả vi tại $a \in X$ thì*

1. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$
2. $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$ *với* $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $d(f \circ g)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$
4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}\big(g(a)df(a) - f(a)dg(a)\big)$ *khi* $g(a) \neq 0$

Chú ý:

- $f(a+h) - f(a) = \Delta f(a)$ là số gia của hàm số ứng với số gia đối số $\Delta x = h$. Vậy nếu $f(x)$ khả vi tại a thì với h khá bé sẽ có công thức tính gần đúng số gia của hàm số

$\Delta f(a) \approx df(a)$. Từ đó nhận được $f(a+h) \approx f(a) + df(a)$

- Xét hàm hợp gof. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ theo định lí 2 thì gof khả vi tại a. Tức là

$$d\left(gof\right)(a)=\left(gof\right)'(a)h=g'\left(f(a)\right)f'(a)h=g'\left(f(a)\right)df(a).$$

Như vậy dù x là biến độc lập hay biến phụ thuộc thì dạng vi phân đều giống nhau. Người ta nói vi phân cấp 1 có tính bất biến.

2.2.2. Vi phân trên một khoảng

Cho $f\in\mathbb{R}^X$ khả vi trên $(a,b)\subseteq X$. Vi phân của hàm số trên (a,b) được xác định theo công thức

$$df(x)=f'(x).h \text{ với } x\in(a,b).$$

Tương tự như định lí trên, ta nhận được định lí sau đây.

Định lí 2.8: *Nếu f,g khả vi trên (a,b) thì trên khoảng đó cũng thoả mãn các hệ thức sau.*

1. $d(f+g)(x)=df(x)+dg(x)$
2. $d(\lambda f)(x)=\lambda df(x)$
3. $d(f\circ g)(x)=f(x)dg(x)+g(x)df(x)$
4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{g^2(x)}\left(g(x)df(x)-f(x)dg(x)\right)$ khi $g(x)\neq 0$

Ví dụ 4: Tính gần đúng $\sin 60^o 40'$

Giải:

Đặt $f(x)=\sin x$, ta có $f'(x)=\cos x$

Chọn $x_o=60^o=\dfrac{\pi}{3}$, khi đó $h=40'=\dfrac{40.\pi}{60.180}=\dfrac{\pi}{270}$

Theo công thức xấp xỉ ta có:

$$\sin 60^o 40'\approx \sin 60^o+\cos 60^o.\frac{\pi}{270}$$

$$\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\pi}{270}=0{,}866+0{,}006=0{,}872$$

Ví dụ 5: Một hình cầu bằng kim loại bán kính R, khi nóng lên bán kính nở thêm một đoạn ΔR.

Tính thể tích mới của hình cầu một cách chính xác và gần đúng.

Áp dụng bằng số $R=5cm, \Delta R=0{,}1cm$

Giải:

Công thức tính thể tích V của hình cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sau khi giãn nở, bán kính hình cầu là $R + \Delta R$, thể tích mới của hình cầu tính chính xác là:

$$V + \Delta V = \frac{4}{3}\pi(R + \Delta R)^3 = \frac{4}{3}\pi(5 + 0,1)^3 = 176,868\pi\ cm^3$$

Nếu tính gần đúng, ta xem : $\Delta V \approx dV$ (Số gia của thể tích gần bằng vi phân) và khi đó thể tích $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ xem như hàm số của đối số R. Vậy:

$$dV = V_R'.\Delta R = 4\pi R^2.\Delta R$$
$$= 4\pi.5^2.0,1 = 10\pi\ cm^3$$

Thể tích ban đầu của hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = 166,666\pi\ cm^3$$

Vậy thể tích mới của hình cầu tính gần đúng là:

$$V + \Delta V \approx V + dV = 176,666\pi\ cm^3$$

Sai số tuyệt đối trong bài toán này là:

$$176,868\pi\ cm^3 - 176,666\pi\ cm^3 = 0,202\pi\ cm^3$$

Như vậy sai số tương đối là:

$$\delta = \frac{0,202\pi}{176,868\pi} = 0,0011$$

2.3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

2.3.1. Đạo hàm cấp cao

A.Định nghĩa

1. Cho f khả vi trên X, nếu $f'(x)$ khả vi tại $a \in X$ thì nói rằng f có đạo hàm cấp 2 tại a và kí hiệu đạo hàm đó là $f''(a)$. Tương tự đạo hàm cấp n của $f(x)$ tại a, kí hiệu là $f^{(n)}(a)$ chính là đạo hàm của hàm $f^{(n-1)}(x)$ tại a.

2. Nói rằng $f(x)$ khả vi đến cấp n (hay n lần) trên X khi và chỉ khi tồn tại $f^{(n)}(x)$ trên X, $n \in \mathbb{N}^*$ trong đó $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm của $f^{(n-1)}(x)$

3. Nói rằng $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên X khi và chỉ khi $f(x)$ khả vi mọi cấp trên X, . Sau đây thường kí hiệu $f^{(0)}(x) = f(x)$

Chú ý:

- Nếu f khả vi đến cấp n trên X thì $\forall p,q \in \mathbb{N}$ sao cho $p+q \le n$ ta có

$$\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$$

- Tập xác định của $f^{(n)}$ thường chứa trong tập xác định của $f^{(n-1)}$

B.Định lí 2.9:

Cho $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,g \in \mathbb{R}^X$, $n \in \mathbb{N}^*$ khả vi n lần trên X, khi đó trên X có các hệ thức sau đây

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ *gọi là công thức Leibnitz*
4. $g(x) \neq 0$ *trên* X *thì* $\frac{f}{g}$ *khả vi n lần trên* X

2.3.2. Vi phân cấp cao

A.Định nghĩa

1. Nếu f khả vi đến cấp n tại $a \in X$ thì biểu thức $f^{(n)}(a).h^n$ gọi là vi phân cấp n tại a kí hiệu là $d^n f(a)$. Vậy là $d^n f(a) = f^{(n)}(a)h^n$ hay $d^n f(a) = f^{(n)}(a)dx^n$

2. Nếu f khả vi đến cấp n trên X thì vi phân cấp n của f trên X được kí hiệu là $d^n f(x), x \in X$ và xác định theo công thức sau

$$\forall x \in X,\ d^n f(x) = f^{(n)}(x)h^n = f^{(n)}(x)dx^n \text{ hoặc } d^n y(x) = f^{(n)}(x)dx^n$$

B.Công thức tính vi phân cấp cao

Từ định lí về đạo hàm cấp cao, trực tiếp nhận được các công thức tính vi phân cấp cao dưới đây

Định lí 2.10: *Nếu f,g khả vi đến cấp n trên X thì khi đó*

1. $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$
2. *Với* $\lambda \in \mathbb{R}$, $d^n(\lambda f) = \lambda d^n f$
3. $d^n(f.g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f.d^{n-k} g$
4. *Nếu* $g(x) \neq 0$ *thì* $\frac{f}{g}$ *có vi phân đến cấp n.*

Chú ý:

- Không có công thức tổng quát cho $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$ cũng như $d^n \dfrac{f}{g}$.

- Tính bất biến của vi phân bị phá vỡ khi lấy vi phân cấp cao (từ 2 trở lên), Ví dụ sau sẽ chứng tỏ điều đó. Cho hàm hợp gof , trong đó

$$f(x) = x^3, g(f) = f^2 \Rightarrow g(f(x)) = x^6$$

$$\Rightarrow dg\left(f(x)\right) = 6x^5dx \Rightarrow d^2g\left(f(x)\right) = 30x^4dx^2$$

Mặt khác $dg\left(f\right) = 2fdf \Rightarrow d^2g\left(f\right) = 2(df)^2$

mà $df = 3x^2dx \Rightarrow d^2g(f) = 18x^4dx^2 \neq 30x^4dx^2$

Ví dụ 6: Cho $f(x) = x^m, x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

Tính $f^{(n)}(x)$ với $n \in \mathbb{N}$

Giải:

$$f'(x) = mx^{m-1}, \qquad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \ ...$$

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k}$$

Chứng tỏ

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n} & \text{nếu } n < m \\ m! & \text{nếu } n = m \\ 0 & \text{nếu } n > m \end{cases}$$

Ví dụ 7: Chứng minh nếu $f(x) = \sin x$ thì

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \ n \in \mathbb{N}^*$$

Giải:

Trường hợp n =1. Đúng $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Giả sử công thức đúng với n

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Tương tự cũng nhận được

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall x, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số $f(x)=x^2\sin x$

Giải: Áp dụng công thức Leibnitz

$$f^{(100)}(x)=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}(x^2)^{(k)}(\sin x)^{(100-k)}$$

$$f^{(100)}(x)=C_{100}^{0}x^2(\sin x)^{(100)}+C_{100}^{1}(x^2)'(\sin x)^{(99)}+C_{100}^{2}(x^2)''(\sin x)^{(98)}$$

$$=x^2\sin(x+50\pi)+200x\sin\left(x+\frac{99\pi}{2}\right)+9900\sin(x+49\pi)$$

$$=x^2\sin x-200x\cos x-9900\sin x$$

Ví dụ 9: Cho $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}\quad \text{hãy tính } f^{(n)}(x)$$

Giải: Phân tích $f(x)$ thành các phân thức tối giản

$$f(x)=\frac{5}{2}.\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{x+1}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{5}{2}.(-1)^n.\frac{(n+1)!}{(x-1)^{2+n}}-\frac{1}{4}.(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{4}.(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^n}$$

2.4. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

2.4.1. Định lí Phéc ma (Fermat)

A. Điểm cực trị của hàm số

Cho $f\in\mathbb{R}^X$. Gọi hàm số đạt cực trị địa phương tại $a\in X$ khi và chỉ khi tồn tại $\Omega_\delta(a)\subset X$ để $f(x)-f(a)\geq 0$ hoặc $f(x)-f(a)\leq 0$ $\forall x\in\Omega_\delta(a)$.

Trường hợp thứ nhất xảy ra nói rằng f đạt cực tiểu địa phương tại a, trường hợp sau nói rằng f đạt cực đại địa phương tại a.

Nếu chỉ có $f(x)-f(a)>0$ hoặc $f(x)-f(a)<0$ nói rằng hàm số đạt cực trị địa phương ngặt tại a.

B. Định lí Fermat

Định lí 2.11: *Nếu* $f(x)$ *khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì* $f'(a)=0$

Chứng minh: Theo giả thiết tồn tại $\Omega_\delta(a)$ sao cho $\forall x\in\Omega_\delta(a)$ ta có $f(x)-f(a)\leq 0$

(Ta đã giả thiết hàm đạt cực đại địa phương)

$\forall h\in\mathbb{R}^*$ sao cho $a+h\in\Omega_\delta(a)$ sẽ có

$$\begin{cases} h > 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \\ h < 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0 \end{cases}$$

Chuyển qua giới hạn khi $h \to 0$ sẽ có

$$\begin{cases} f'(a) \le 0 \\ f'(a) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow f'(a) = 0$$

Hàm đạt cực tiểu địa phương cũng được chứng minh tương tự

Chú ý:

- Sau này thường nói rằng hàm đạt cực trị tại a theo nghĩa là đạt cực trị địa phương tại a.
- Nếu hàm đạt cực trị tại a thì a phải là điểm trong của X. Như vậy nếu $f(x)$ xác định trên [a, b] thì không có khái niệm đạt cực trị tại đầu mút a và b, có chăng chỉ nói về các đạo hàm trái tại b và phải tại a.
- Định lí Fermat có thể phát biểu tổng quát hơn: Nếu $f(x)$ khả vi phải và trái tại a và đạt cực đại (cực tiểu) tại a thì

$$f_t'(a) \ge 0 \text{ và } f_p'(a) \le 0$$

$$(f_t'(a) \le 0 \text{ và } f_p'(a) \ge 0)$$

- Hàm số có cực trị tại a chưa chắc khả vi tại a

Chẳng hạn $f(x) = |x|$ có cực tiểu chặt tại 0 vì $0 < |x|, \forall x \neq 0,\ f(0) = 0,$.

Tuy nhiên không khả vi tại 0 vì

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \text{ không có giới hạn khi } h \to 0$$

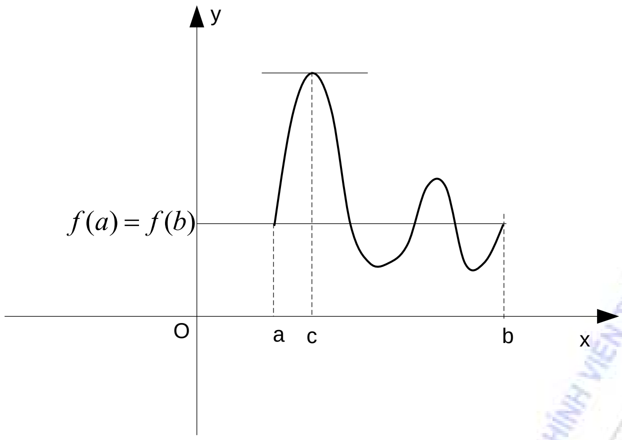
- Hàm số khả vi tại a và $f'(a) = 0$ chưa chắc đạt cực trị tại a, chẳng hạn

$f(x) = x^3$ có $f'(0) = 0$ tuy nhiên $\begin{cases} x^3 \le 0 & \text{với } x \le 0 \\ x^3 \ge 0 & \text{với } x \ge 0 \end{cases}$ Vậy nó không có cực trị tại 0.

2.4.2. Định lí Rôn (Rolle)

Định lí 2.12: *Cho $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ thoả mãn.*

1. *f liên tục trên [a, b]*
2. *f khả vi trên (a, b)*
3. *$f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$*



H.2.6

Chứng minh:

Theo tính chất của hàm liên tục trên [a, b] thì $f(x)$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M trên [a, b]

$$m = \underset{[a,b]}{Min}\, f(x) = \underset{[a,b]}{Inf}\, f(x) \;; \quad M = \underset{[a,b]}{Max}\, f(x) = \underset{[a,b]}{Sup}\, f(x)$$

Nếu m = M thì $f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Nếu m < M, vì $f(a) = f(b)$ nên không có đồng thời $M = f(a)$ và $m = f(b)$ hoặc $m = f(a)$ và $M = f(b)$. Chứng tỏ hàm đạt giá trị nhỏ nhất m hoặc lớn nhất M tại điểm $c \in (a,b)$ Tức là $f(c) \le f(x)$ hoặc $f(c) \ge f(x)$ theo định lí Fermat thì $f'(c) = 0$

Chú ý:

- Định lí Rolle có thể minh hoạ hình học như sau :

Tồn tại ít nhất một điểm $M(c, f(c)) \in C_f$ với $c \in (a,b)$ tại đó tiếp tuyến của C_f song song với trục 0x. Xem hình 3.6.

- Điểm $c \in (a,b)$ tương ứng số $\theta \in (0,1)$ sao cho $c = a + \theta(b-a)$

2.4.3. Định lí số gia hữu hạn. (định lí Lagorăng (Lagrange))

Định lí 2.13*: Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn:*

1. *liên tục trên [a, b]*
2. *khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *để có*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \tag{2.18}$$

Chứng minh:

Xét hàm $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ xác định bởi $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ Rõ ràng $\varphi(x)$ liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b) và $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$. Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Suy ra $\qquad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ hay $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Như vậy $\qquad \Delta f(a) = f'(c).h$ trong đó $h + a = b$

$$\theta \in (0,1), \quad c = a + \theta h$$

Chú ý:

Định lí Lagrange có thể minh hoạ hình học như sau :

Tồn tại ít nhất một điểm $M(c, f(c)) \in C_f$ với $c \in (a,b)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng AB, trong đó $A(a, f(a)), B(b, f(b))$. Xem hình 2.7.

Hệ quả 1: (Định lí giới hạn của đạo hàm)

Cho $x_0 \in (a,b), f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ *thoả mãn:*

1. $f(x)$ *liên tục tại* x_0
2. $f(x)$ *khả vi trên* $(a,b) \setminus \{x_0\}$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$. *Khi đó* f *khả vi tại* x_0 *và* $f'(x)$ *liên tục tại* x_0

Chứng minh:

Vì $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}: \quad 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f'(x) - l| < \varepsilon$$

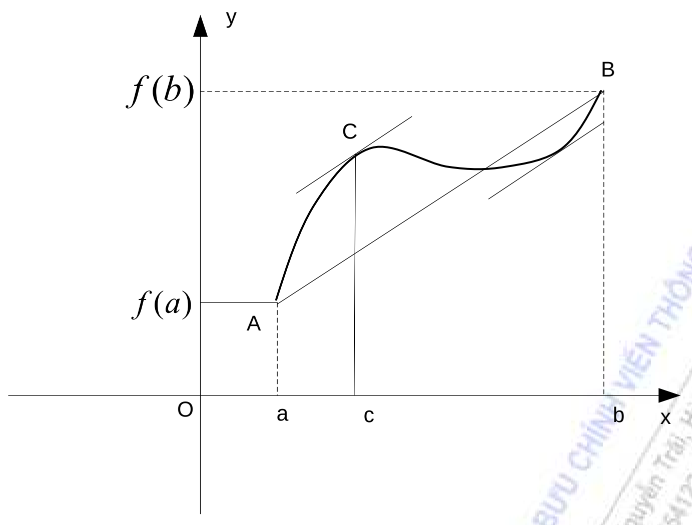
Áp dụng định lí Lagrange trên $[x, x_0]$, như vậy tồn tại $c_x \in (x, x_0)$ sao cho

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_x) \text{ và đương nhiên}$$

$$|c_x - x_0| < |x - x_0| < \eta$$

Từ đó suy ra $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| = |f'(c_x) - l| < \varepsilon$

Điều này chứng tỏ $f'(x_0) = l$ và từ điều kiện của định lí suy ra $f'(x)$ liên tục tại x_0.



H.2.7

Chú ý:

Chúng ta nhận được định lí tương tự đối với đạo hàm trái hoặc phải

Hệ quả 2: *Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn:*

1. f *liên tục phải tại a*
2. f *khả vi trên (a,b)*
3. $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = l$ *khi đó có* $f_p'(a) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$

Hệ quả 3: *Cho* $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ *thoả mãn.*

1. f *liên tục tại* $x_0 \in (a,b)$
2. f *khả vi trên* $(a,b) \setminus \{x_0\}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = +\infty, (-\infty)$ *khi đó* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, (-\infty)$

2.4.4. Định lí số gia hữu hạn suy rộng (Định lí Côsi(Cauchy))

Định lí 2.14: *Cho* $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn:*

1. f, g *liên tục trên [a, b]*
2. f, g *khả vi trên (a, b)* (2.19)
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. *Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *để có* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Chứng minh:

Trước hết thấy ngay $g(a) \neq g(b)$, vì nếu $g(a) = g(b)$, theo định lí Rolle suy ra tồn tại $c \in (a,b)$ để $g'(c) = 0$, vô lí theo giả thiết.

Xét hàm số $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ cho bởi

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$$

Hàm φ thoả mãn các điều kiện của định lí Rolle nên tồn tại $c \in (a,b)$ để $\varphi'(c) = 0$,

tức là $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$ hay $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Chú ý:

- Thấy ngay rằng định lí Lagrange là trường hợp riêng của định lí Cauchy (lấy $g(x) = x$ trên [a, b])
- Định lí Rolle là trường hợp riêng của định lí Lagrange (cho $f(a) = f(b)$).

2.5. ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

2.5.1. Công thức Taylo (Taylor), công thức Maclôranh (McLaurin)

A.Định nghĩa

1. Cho hàm f khả vi đến cấp (n + 1) tại $a \in X$. Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg P_n(x) \leq n$ thoả mãn điều kiện

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad k = \overline{0,n}$$

là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm a, hay là phần chính qui của khai triển hữu hạn bậc n tại a của $f(x)$

2. Nếu a = 0 thì $P_n(x)$ gọi là đa thức McLaurin của $f(x)$

B.Định lí 2.15:

Nếu $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a thì nó là duy nhất và có dạng

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Chứng minh:

Giả sử tồn tại đa thức thứ hai là $Q_n(x)$ khi đó hiệu $P_n(x) - Q_n(x)$ là đa thức có bậc không vượt quá n và có nghiệm $x = a$ bội n + 1, chứng tỏ $P_n(x) = Q_n(x)$

Đặt $P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + ... + A_n(x-a)^n$

$$P_n^{(k)}(a) = k!A_k = f^{(k)}(a) \Rightarrow A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0,1,...,n)$$

Chứng tỏ $\quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n$

C.Công thức Taylor

Cho $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a

1. Gọi $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ là phần dư Taylor bậc n tại a của $f(x)$

Hệ quả: *Phần dư $r_n(x)$ có dạng:*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ với } c \in (a,x) \tag{2.20}$$

tức là $c = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1$, gọi là phần dư trong dạng Lagrange

Chứng minh:

Rõ ràng $r_n(a) = r_n'(a) = ... = r_n^{(n)}(a) = 0$

Đặt $G(x) = (x-a)^{n+1} \Rightarrow G(a) = G'(a) = ... = G^{(n)}(a) = 0$ và $G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$

Với $x \neq a$ và $x \in \Omega_\delta(a)$, theo định lý Cauchy sẽ có

$$\frac{r_n(x)}{G(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{r_n'(c_1)}{G'(c_1)}, \ c_1 \in (a,x)$$

$$\frac{r_n'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{r_n'(c_1) - r_n'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{r_n''(c_2)}{G''(c_2)}, \ c_2 \in (a, c_1)$$

Sau (n +1) lần áp dụng định lí Cauchy, kết quả sẽ là

$$\frac{r_n(x)}{G(x)} = \frac{r_n^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)} \text{ với } c \in (a, c_n) \subset (a, c_{n-1}) \subset ... \subset (a,x)$$

mà $r_n^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c), G^{(n+1)}(c) = (n+1)!$

Suy ra $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

2. $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2.21}$$

Được gọi là công thức Taylor bậc n, hay khai triển hữu hạn bậc n hàm $f(x)$ tại lân cận của a

3. $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{2.22}$$

Được gọi là công thức McLaurin bậc n, hay khai triển hữu hạn bậc n của $f(x)$ tại lân cận của 0.

Chú ý:

- Nếu $f^{(n+1)}$ bị chặn ở lân cận của a thì rõ ràng $\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)$ dần đến 0 khi $x \to a$ nghĩa là $r_n(x) = 0\left((x-a)^n\right)$

- Với giả thiết $f^{(n+1)}$ bị chặn ở lân cận của a thì có thể lấy gần đúng $f(x)$ ở lân cận của a bằng đa thức $P_n(x)$ với sai số là $r_n(x) = 0\left((x-a)^n\right)$.

- Người ta đã chứng minh phần dư viết trong dạng khác, gọi là dạng Cauchy:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

D.Công thức McLaurin của các hàm thường dùng

1. $f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f^{(k)}(0) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Suy ra $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n) \qquad (2.23)$$

2. $f(x) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m, & k = 2m+1 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + 0(x^{2n+2}) \qquad (2.24)$$

Tương tự $$\cos x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0(x^{2n+1}). \qquad (2.25)$$

$f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$, X phụ thuộc α. Với x ở lân cận của 0, $\forall k \in \mathbb{N}$ ta có

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)$$

Suy ra $$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n). \qquad (2.26)$$

Các trường hợp đặc biệt:

- Với $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + 0(x^n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + 0(x^n)$$

- Với $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + 0(x^2)$$

- Với $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + 0(x^2)$$

3. $f(x) = \ln(1+x)$. Trong lân cận 0 thì

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = (-1)^n .n!, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n) \qquad (2.27)$$

4. $f(x) = tgx.$ Trong lân cận của 0 hàm khả vi mọi cấp

Ta biểu diễn $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...} = x + \dfrac{x^3}{3} + 0(x^3)$ (2.28)

2.5.2. Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)

Cho $a \in X$, $f, g \in \mathbb{R}^X$ thoả mãn các điều kiện sau:

1. *liên tục tại a và khả vi ở lân cận $\Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$*

2. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.

Chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$$

Lấy $x \in \Omega_\alpha(a) \setminus \{a\}$ sao cho $0 < |x-a| < \alpha$. Theo định lí Cauchy sẽ tồn tại

$c_x \in \Omega_\alpha(a) \setminus \{a\}$ sao cho $0 < |c_x - a| < |x-a|$ để có $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

Chứng tỏ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \Omega_\alpha(a) \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$

Chú ý:

- Nếu $f(a) = g(a) = 0$ thì rõ ràng qui tắc L'Hospital cho ta điều kiện đủ để tìm giới hạn

dạng $\dfrac{0}{0}$ $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, thì bằng cách xét các hàm số $\dfrac{1}{f(x)}$ và $\dfrac{1}{g(x)}$ và như vậy

cũng nhận được điều kiện để tìm giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- Nhận thấy rằng trong phép chứng minh qui tắc L'Hospital nếu $a = \infty$ hoặc $l = \infty$ kết quả vẫn đúng.

- Cần lưu ý rằng qui tắc L'Hospital chỉ cho điều kiện đủ để tìm giới hạn. Bởi vì khi không tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn có thể tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Chẳng hạn :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{2x} = \frac{1}{2}.\ \text{Tuy nhiên}\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{2}\ \text{không tồn tại}$$

- Để tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ đương nhiên có thể áp dụng qui tắc L'Hospital trong đó f và g thay

bởi f' và g'. Như vậy, trong một bài toán tìm giới hạn , có thể lặp lại qui tắc L'Hospital một số lần.

Ví dụ 10: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$

Giải:

Áp dụng các công thức khai triển hữu hạn sẽ nhận được

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 + 0(x^4)}{x\left(\frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right)} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 11: Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

Giải:

$$\sqrt{1-e^{-x}}=\sqrt{1-\left(1-x+0(x)\right)}=\sqrt{x+0(x)}=\sqrt{x}+0(\sqrt{x})$$

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+0(x^3)\right)}=\sqrt{\frac{x^2}{2}+0(x^3)}=\frac{x}{\sqrt{2}}+0(x)$$

$$\sqrt{\sin x}=\sqrt{x-\frac{x^3}{6}+0(x^4)}=\sqrt{x}+0(\sqrt{x})$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+0(\sqrt{x})-\dfrac{x}{\sqrt{2}}-0(x)}{\sqrt{x}+0(\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

Ví dụ 12: Tìm

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$, b. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\ln x$, $(\alpha>0)$

Giải:

a. Nhận xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+\alpha x))'}{(\beta x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}=I$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x^{\alpha}})'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^{\alpha}}{\alpha}=0$ .Vậy I = 0.

Ví dụ 13: Tính

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$, $(\alpha>0)$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}$, $(a>1,\alpha>0)$

Giải:

a. $\dfrac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}\to 0$ khi $x\to+\infty$ chứng tỏ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

b. $\dfrac{(x^{\alpha})'}{(a^{x})'}=\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln a}$, lấy đạo hàm hữu hạn n lần sao cho $\alpha-n\le 0$. Khi đó

$\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^{x}\ln^{n}a}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ chứng tỏ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0$

Vậy ta đã so sánh được các VCL $\ln x, x^{\alpha}, a^{x}$ tại ∞.

Ví dụ 14: Bằng phương pháp lôga hãy tính các giới hạn sau đây

$$I_1 = \lim_{x\to 0^+} x^x,\quad I_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}},\quad I_3 = \lim_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Giải:

$$\ln x^x = x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ (theo ví dụ 4)}$$

$$\Rightarrow I_1 = e^0 = 1$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x} = \frac{\ln|\sin x| - \ln|x|}{1-\cos x}$$

$$\frac{(\ln|\sin x| - \ln|x|)'}{(1-\cos x)'} = \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}$$

$$\frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x\sin^2 x)'} = \frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2\cos x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I_2 = e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\ln(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\ln x}\ln\cot gx$$

$$\frac{(\ln\cot gx)'}{(\ln x)'} = \frac{\frac{1}{\cot gx}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = -\frac{x}{\sin x\cos x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

$$\Rightarrow I_3 = e^{-1}$$

2.6. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

2.6.1. Tính đơn điệu của hàm khả vi

Định lí 2.16: *Cho* $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thỏa mãn:*

1. *f liên tục trên đoạn [a, b]*
2. *f khả vi trên khoảng (a, b)*
3. $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$ *khi đó f(x) không đổi trên [a, b]*

Chứng minh:

Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in [a,b]$. Theo định lí Lagrange tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ vì x_1, x_1 tùy ý vậy f(x) không đổi trên đoạn [a, b], tức là f(x) = const trên [a, b]

Định lí 2.17: *Cho f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b). Để f tăng trên [a, b] thì cần và đủ là* $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

Chứng minh:

* Giả sử f tăng trên [a, b]. Cho $x_0 \in (a,b), \forall h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $x_0 + h \in (a,b)$, ta có:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Qua giới hạn khi $h \to 0$ nhận được $f'(x_0) \geq 0$

* Ngược lại, giả sử $\forall x \in (a,b), f'(x) \geq 0$. Lấy tùy ý $x_1, x_2 \in [a,b]$. Áp dụng định lí Lagrange trên $[x_1, x_2]$ sẽ có $c \in (x_1, x_2)$ sao cho:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ tăng trên [a, b]}$$

Thay f bởi –f sẽ nhận được định lí trong trường hợp hàm giảm.

2.6.2. Điều kiện hàm số đạt cực trị

Định lí 2.18: *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$. *Nếu tồn tại lân cận* $\Omega_\delta(a) \subset X$ *và* $f'(x) \geq 0$ *trên* $(a-\delta, a)$ *và* $f'(x) \leq 0$ *trên* $(a+\delta, a)$ *thì f có một cực đại tại a.*

Định lí này suy trực tiếp từ định lí 2.17 trong mục 2.6.1 và định nghĩa cực trị của hàm số.

Định lí 2.19: *Cho có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận* $\Omega_\delta(a)$ *và thỏa mãn điều kiện:*

$$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$$

Khi đó:

a. Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại a: đạt cực tiểu nếu $f^{(n)}(a) > 0$, *đạt cực đại nếu* $f^{(n)}(a) < 0$.

b. Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại a.

Chứng minh:

Trong lân cận đủ bé của a, ta có công thức Taylor tại lân cận đó:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n, \quad \theta \in (a,x)$$

a. Nếu n chẵn thì $(x-a)^n \geq 0$

Giả sử $f^{(n)}(a) > 0$, do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ ở lân cận a nên $f^{(n)}(\theta) > 0$ trong $\Omega_\delta(a)$.

Vậy f đạt cực tiểu tại a.

Giả sử $f^{(n)}(a) > 0$, khi đó $f(x) \leq f(a)$ chứng tỏ f đạt cực đại tại a.

b. Nếu n lẻ, $(x-a)^n$ đổi dấu ở lân cận $\Omega_\delta(a)$ trong khi đó $f^{(n)}(a) \neq 0$. Giả sử $f^{(n)}(a) = f_0 > 0$ do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ nên $f^{(n)}(\theta) > 0$ ở lân cận khá bé của a. Lúc đó $f^{(n)}(\theta)(x-a)^n$ có dấu thay đổi khi x đi qua a. Vậy

$$f(x) < f(a) \text{ nếu } x < a$$

$$f(x) > f(a) \text{ nếu } x > a$$

Suy ra f(x) không đạt cực trị tại a.

Ví dụ 15: Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$

Giải: Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ và khả vi trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

$y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), y' = 0$ khi $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{x-1}$ .Giải phương trình này nhận được $x = \dfrac{1}{2}$

Từ biểu thức của y' ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		-	$\Vert$	+	0	-	$\Vert$	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số giảm trong các khoảng $(-\infty;0), (\frac{1}{2};1)$

hàm số tăng trong các khoảng $(0;\frac{1}{2}), (1;+\infty)$

$y_{\min} = y(0) = y(1) = 1$

$$y_{\max} = y(\frac{1}{2}) = \sqrt[3]{2}$$

2.7. BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ BÉ NHẤT

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập X. Tìm giá trị bé nhất (GTBN) , giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số trên tập đó.

Nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTBN là m tại $x_1 \in X$ khi và chỉ khi :

$$m = f(x_1) \le f(x), \quad \forall x \in X$$

Nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTLN là M tại $x_2 \in X$ khi và chỉ khi :

$$M = f(x_2) \ge f(x), \quad \forall x \in X$$

2.7.1. Hàm liên tục trên đoạn kín [a, b]

Theo tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn kín bao giờ cũng tồn tại m,M. Theo định lý Fermat nếu hàm khả vi tại x_0 và đạt cực trị tại đó thì $f'(x_0) = 0$. Vì cực trị có tính địa phương nên các điểm tại đó hàm đạt GTBN, GTLN chỉ có thể là hoặc các điểm tại đó hàm số không khả vi hoặc các điểm làm đạo hàm triệt tiêu hoặc các điểm a, b. Từ đó các quy tắc tìm m, M tương ứng x_1, x_2 như sau:

a. Tìm các giá trị f(a), f(b).

b. Tìm các giá trị của hàm số tại các điểm hàm số không khả vi.

c. Tìm giá trị của hàm số tại các điểm làm triệt tiêu đạo hàm f'(x).

d. So sánh các giá trị tìm được ở trên để tìm ra giá trị bé nhất, đó là m, tìm ra giá trị lớn nhất, đó là M.

2.7.2. Hàm liên tục trên khoảng mở, khoảng vô hạn

Trong trường hợp này, thay vì tính f(a), f(b), ta tìm giới hạn của hàm số khi x dần tới a, dần đến b, hoặc dần đến ∞. Tuy nhiên phải xem xét hàm số có đạt được giới hạn này không. Các bước tiếp theo thực hiện như mục trên.

Ví dụ 16: Tìm GTBN, GTLN của hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}, \quad 0 \le x \le 3$

Giải:

$$y(0) = 0, y(3) = \sqrt[3]{9}$$

Hàm số khả vi trên khoảng (0, 3) \ {2}. $y(2) = 0$.

$$y' = \frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x(x-2)}} = 0 \text{ khi } x = 1,\ y(1) = 1$$

$$m = \min\{0, 1, \sqrt[3]{9}\} = 0 \text{ đạt được tại } x = 0, x = 2$$

$$M = \max\{0, 1, \sqrt[3]{9}\} = \sqrt[3]{9} \text{ đạt được tại } x = 3$$

Ví dụ 17: Tìm GTBN, GTLN của hàm số $y = x^x$, $0{,}1 \le x < +\infty$

Giải:

Hàm số khả vi trên khoảng $(0{,}1;+\infty)$.

$$y(0{,}1) = \frac{1}{\sqrt[10]{10}}, \quad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$$

$$y' = x^x(\ln x + 1) = 0 \text{ khi } x = e^{-1}$$

$$y(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}}$$

Vậy $m = \min\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}, \frac{1}{\sqrt[10]{10}}\right\} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ đạt được tại $x = e^{-1}$

Hàm số không có GTLN.

2.8. HÀM LỒI

2.8.1. Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn

A. Định nghĩa

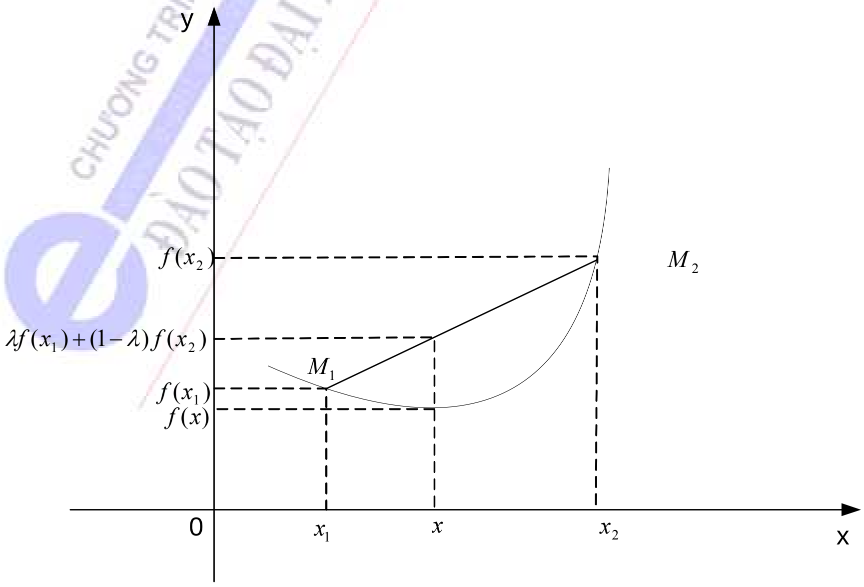
1. Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad (2.29)$$

Nói rằng f là lõm khi và chỉ khi –f là lồi.

Đồ thị của hàm lồi f trên (a, b) được mô tả trên hình 2.8.

Đặt $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2)), C_f$ là đồ thị của hàm số f



H.2.8

Như vậy ánh xạ f lồi khi và chỉ khi với bất kỳ cặp điểm (M_1, M_2) của C_f, mọi điểm $M \in C_f$ có hoành độ nằm giữa các hoành độ của M_1 và M_2 đều nằm phía dưới đoạn M_1M_2. Nói cách khác đường cong nằm dưới mọi dây cung tương ứng

2. Cho $f \in \mathbb{R}^X$. Giả sử $X = [a,b] \cup [b,c]$ mà f lồi (lõm) trên [a, b], f lõm (lồi) trên [b, c] Khi đó điểm U(b, f(b)) gọi là điểm uốn của đồ thị C_f của hàm số. Như vậy điểm uốn là điểm phân biệt giữa các cung lồi và cung lõm của đồ thị hàm số.

B. Định lí

Định lí 2.20: *Để f là lồi trên X điều kiện cần và đủ là $\forall a \in X$, tỷ số gia tại a của f tăng trên $X \setminus \{a\}$, tức là*

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ tăng trên } X \setminus \{a\}.$$

Chứng minh:

Lấy tùy ý $a, b, c \in X$ sao cho a <b <c . Gọi A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)) và P(AB), P(AC), P(BC) là các hệ số góc của các đường AB, AC, BC.

Như vây $\tau_a(b) = P(AB), \tau_a(c) = P(AC)$. Do vậy định lí được chứng minh khi ta chỉ ra $P(AB) \le P(AC)$ là điều kiện cần và đủ của hàm lồi.

Đặt $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, trong đó $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a} \in [0,1]$

f lồi có nghĩa là:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)c) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

$$\Leftrightarrow (c-a) f(b) \le (c-b) f(a) + (b-a) f(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le \frac{f(c) - f(a)}{c-a}$$

hay $P(AB) \le P(AC)$

2.8.2. Điều kiện hàm lồi

Định lí 2.21: *Giả sử f là lồi trên X khi đó f khả vi phải và trái tại mọi điểm trong của X và $\forall a, b, c \in X$ sao cho a < b < c, ta có*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

Định lí 2.22: *Cho $f \in \mathbb{R}^X$ khả vi. Để f lồi trên X điều kiện cần và đủ là f' tăng trên* X

Chứng minh:

Giả sử f lồi trên X , lấy $a, b \in X$ sao cho $a < b$. Theo định lí 1 ta có:

$$f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b) \Rightarrow f'(x) \text{ tăng trên X}$$

Ngược lại cho f'(x) tăng trên X, cho $a,b \in X$ sao cho a < b và $\lambda \in [0,1]$, đặt $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ (các trường hợp a = b hoặc $\lambda = 0, \lambda = 1$ là tầm thường). Áp dụng định lí Lagrange cho f trên [a, x], [x, b] thì tồn tại $c \in (a,x), d \in (x,b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(c) = (1-\lambda)(b-a)f'(c)$$

$$f(b) - f(x) = (b-x)f'(d) = \lambda(b-a)f'(d)$$

Vì f' tăng nên $f'(c) \le f'(d) \Rightarrow \lambda(f(x)-f(a)) \le (1-\lambda)(f(b)-f(x))$. Nghĩa là

$$f(x) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Chứng tỏ f lồi trên X.

Hệ quả 1: *Cho f khả vi hai lần trên X. Để f là lồi điều kiện cần và đủ là* $f''(x) \ge 0$

Hệ quả 2: *Để u(a, f(a)) là điểm uốn của đồ thị hàm $f \in \mathbb{R}^X$ với $a \in X$, f khả vi hai lần trên X, điều kiện cần và đủ là f''(a) = 0 và f''(x) đổi dấu khi x đi qua điểm a.*

Ví dụ 18: Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}\ln\frac{a}{x}, \quad a > 0$

Giải:

Hàm số khả vi mọi cấp khi $x > 0$.

$$y' = -\frac{a}{x^2}\left(1 + \ln\frac{a}{x}\right)$$

$$y'' = \frac{a}{x^3}\left(3 + 2\ln\frac{a}{x}\right)$$

$y'' = 0$ khi $3 + 2\ln\frac{a}{x} = 0$ hay $x = ae^{\frac{3}{2}}$

Ta có $y'' < 0$ khi $x > a.e^{\frac{3}{2}}$ và $y'' > 0$ khi $x < ae^{\frac{3}{2}}$.

Vậy hàm số lõm trong khoảng $\left(0, ae^{\frac{3}{2}}\right)$, lồi trong khoảng $\left(ae^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ vậy $x_U = ae^{\frac{3}{2}}$

$$y_U = -\frac{3}{2}ae^{-\frac{3}{2}}$$

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG II

- **Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

Cho $a \in X, a+h \in X, f \in \mathbb{R}^X$. Nói rằng f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Giới hạn này thường kí hiệu $f'(a)$ hay $\frac{df}{dx}(a)$ gọi là đạo hàm của f tại a.

- **Định nghĩa đạo hàm một phía**

1. Cho $a \in X, a+h \in X$. Nói rằng f khả vi phải tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_p'(a)$, gọi là đạo hàm phải của f tại a.

2. Cho $a \in X, a+h \in X$. Nói rằng f khả vi trái tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_t'(a)$, gọi là đạo hàm trái của f tại a.

Để f khả vi tại a điều kiện cần và đủ là f khả vi trái và phải tại a đồng thời

$$f_t'(a) = f_p'(a) = f'(a)$$

Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a

- **Các phép tính đại số của đạo hàm tại một điểm**

Cho f và g khả vi tại a khi đó:

1. $f+g$ khả vi tại a và $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ khả vi tại a và $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

3. $f.g$ khả vi tại a và $(f \circ g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

4. Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ khả vi tại a và $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

5. Đạo hàm của hàm hợp:

Cho $a \in X$, $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ với $f(X) \subset Y$. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ thì hàm hợp gof khả vi tại a và

$$(gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

6. Đạo hàm của hàm ngược:

Giả sử $f: X \to \mathbb{R}$ đơn điệu ngặt và liên tục trên X khả vi tại $a \in X$ và $f'(a) \neq 0$

Khi đó hàm ngược của f là $f^{-1}: f(X) \to \mathbb{R}$ khả vi tại $f(a)$ và

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \frac{1}{f'(a)}$$

- **Các phép tính đại số của các hàm khả vi trên một khoảng**

Cho $f, g : X \to \mathbb{R}$ *khả vi trên* X *, (tức là* $(a,b) = X$ *) khi đó.*

1. $f + g$ *khả vi trên* X *và* $(f+g)' = f' + g'$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ *khả vi trên* X *và* $(\lambda f)' = \lambda f'$
3. fg *khả vi trên* X *và* $(fg)' = f'g + fg'$
4. $g(x) \neq 0$ *trên* X *thì* $\frac{f}{g}$ *khả vi trên* X *và* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5. *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$ *và* $g \in \mathbb{R}^Y$*. Nếu* f *khả vi trên* X *và g khả vi trên* $f(X)$ *thì* gof *khả vi trên và* $(gof)' = (g'of)f'$*. Mở rộng* $(hogof)' = (h'ogof)(g'of)f'$
6. *Cho* $f \in \mathbb{R}^X$ *đơn điệu ngặt trên* X*, khả vi trên* X *và* $f'(x) \neq 0$ *trên* X *khi đó*

   f^{-1} *khả vi trên* $f(X)$ *và* $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$

- **Bảng các đạo hàm của các hàm số thông dụng**
- **Định nghĩa vi phân tại một điểm**

Cho $f \in \mathbb{R}^X$, f khả vi tại $a \in X$. Vi phân của f tại a kí hiệu $df(a)$ xác định bởi công thức: $df(a) = f'(a).dx$

- **Các phép tính đại số của vi phân tại một điểm**

Cho f *và* g *khả vi tại a khi đó:*

1. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$
2. $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$ *với* $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $d(f.g)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g^2(a)}\left(g(a)df(a) - f(a)dg(a)\right)$ *khi* $g(a) \neq 0$

- **Các phép tính đại số của vi phân trên một khoảng**

Cho $f, g \in \mathbb{R}^X$ khả vi trên $(a,b) \subseteq X$. Vi phân của hàm số trên (a,b) được xác định theo công thức: $df(x) = f'(x)dx$ **với** $x \in (a,b)$**.**

1. $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$

2. $d(\lambda f)(x) = \lambda df(x)$

3. $d(f.g)(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$

4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g^2(x)}\big(g(x)df(x) - f(x)dg(x)\big)$ khi $g(x) \neq 0$

- **Đạo hàm cấp cao**

Qui ước: $f^{(0)}(x) = f(x)$. Đạo hàm cấp n được kí hiệu là $f^{(n)}(x)$ và xác định như sau:

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}$$

Nếu f khả vi n lần trên X thì $\forall p, q \in \mathbb{N}$ sao cho $p + q \leq n$ ta có

$$\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$$

- **Các phép tính đại số của đạo hàm cấp cao**

Cho $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R}^X$, $n \in \mathbb{N}^*$ khả vi n lần trên X, khi đó trên X có các hệ thức sau đây

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ *gọi là công thức Leibnitz*

4. $g(x) \neq 0$ *trên* X *thì* $\dfrac{f}{g}$ *khả vi n lần trên* X

- **Vi phân cấp cao**

$$d^n f(a) = f^{(n)}(a)dx^n, \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$$

- **Các phép tính đại số của vi phân cấp cao**

Nếu f, g khả vi đến cấp n trên X thì khi đó

1. $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$

2. *Với* $\lambda \in \mathbb{R}$, $d^n(\lambda f) = \lambda d^n f$

3. $d^n(f.g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f . d^{n-k} g$

4. *Nếu* $g(x) \neq 0$ *thì* $\dfrac{f}{g}$ *có vi phân đến cấp n.*

- **Định lí Fermat**

Nếu $f(x)$ *khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì* $f'(a)=0$

- **Định lí Rôn (Rolle)**

Cho $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn.*

1. f *liên tục trên [a, b]*
2. f *khả vi trên (a, b)*
3. $f(a)=f(b)$. *Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *sao cho* $f'(c)=0$

Điểm $c \in (a,b)$ tương ứng số $\theta \in (0,1)$ sao cho $c = a + \theta(b-a)$

- **Định lí số gia hữu hạn. (định lí Lagơrăng (Lagrange))**

Cho $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn:*

1. *liên tục trên [a, b]*
2. *khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *để có*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

- **Định lí số gia hữu hạn suy rộng (Định lí Côsi(Cauchy))**

Cho $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thoả mãn:*

1. f, g *liên tục trên [a, b]*
2. f, g *khả vi trên (a, b)*
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. *Khi đó tồn tại* $c \in (a,b)$ *để có* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

- **Công thức Taylo (Taylor), công thức Maclôranh (McLaurin)**

1. Cho hàm f khả vi đến cấp (n + 1) tại $a \in X$. Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg P_n(x) \le n$ thoả mãn điều kiện

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad k=\overline{0,n}$$

là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm a, hay là phần chính qui của khai triển hữu hạn bậc n tại a của $f(x)$

2. Nếu a = 0 thì $P_n(x)$ gọi là đa thức McLaurin của $f(x)$

Nếu $P_n(x)$ *là đa thức Taylor của* $f(x)$ *tại lân cận của a thì nó là duy nhất và có dạng*

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

3. Gọi $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ là phần dư Taylor bậc n tại a của $f(x)$

Phần dư $r_n(x)$ có dạng:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ với } c \in (a,x)$$

$c = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1$, *gọi là phần dư trong dạng Lagrange*

- **Công thức McLaurin của các hàm thường dùng**

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n)$

2. $\sin x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + 0(x^{2n+2})$

3. $\cos x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0(x^{2n+1})$.

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n)$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + 0(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + 0(x^n)$$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$

6. $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} = x + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$

- **Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)**

Cho $a \in X,\ f, g \in \mathbb{R}^X$ thoả mãn các điều kiện sau:

1. liên tục tại a và khả vi ở lân cận $\Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$

2. $g'(x) \neq 0, \qquad \forall x \in \Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$

3. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *Khi đó* $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$

- **Tính đơn điệu của hàm khả vi**

Cho $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ *thỏa mãn:*

1. f liên tục trên đoạn [a, b]

2. f khả vi trên khoảng (a, b)

3. $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$*. Khi đó f(x) không đổi trên [a, b]*

Cho f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b). Để f tăng trên [a, b] thì cần và đủ là $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

- **Điều kiện hàm số đạt cực trị**

1. Cho $f \in \mathbb{R}^X$*. Nếu tồn tại lân cận* $\Omega_\delta(a) \subset X$ *và* $f'(x) \geq 0$ *trên* $(a-\delta, a)$ *và* $f'(x) \leq 0$ *trên* $(a+\delta, a)$ *thì f có một cực đại tại a.*

2. Cho có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận $\Omega_\delta(a)$ *và thỏa mãn điều kiện:*

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$$

Khi đó:

a Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại a: đạt cực tiểu nếu $f^{(n)}(a) > 0$*, đạt cực đại nếu* $f^{(n)}(a) < 0$.

b .Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại a.

- **Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn**

Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Nói rằng f là lõm khi và chỉ khi –f là lồi.

1. Cho f khả vi hai lần trên X. Để f là lồi điều kiện cần và đủ là $f''(x) \geq 0$

2. Để u(a, f(a)) là điểm uốn của đồ thị hàm $f \in \mathbb{R}^X$ *với* $a \in X$*, f khả vi hai lần trên X, điều kiện cần và đủ là f''(a) = 0 và f''(x) đổi dấu khi x đi qua điểm a.*

3. Cho $f \in \mathbb{R}^X$ *khả vi. Để f lồi trên X điều kiện cần và đủ là f' tăng trên* X

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG II.

2.1. Hàm số liên tục tại x_0 thì khả vi tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.2. Hàm số khả vi tại x_0 thì liên tục tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.3. Hàm số khả vi tại x_0 khì và chỉ khi có đạo hàm tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.4. Hàm số khả vi tại x_0 khi có các đạo hàm trái và phải tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.5. Tổng, tích, hai hàm số khả vi tại x_0 là một hàm khả vi tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.6. Tổng, tích, thương các hàm số không khả vi tại x_0 là một hàm không khả vi tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.7. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì có tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ tại x_0?

Đúng ☐ Sai ☐

2.8. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0?

Đúng ☐ Sai ☐

2.9. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì đạt GTLN hoặc GTNN tại điểm x_0?

Đúng ☐ Sai ☐

2.10. GTLN hoặc GTNN đạt được tại điểm x_0 là giá trị cực trị tại đó?

Đúng ☐ Sai ☐

2.11. Hàm số liên tục trên khoảng hở (a,b) và có đạo hàm trên khoảng đó thì các kết luận của định lí Rolle, Lagrange vẫn đúng?

Đúng ☐ Sai ☐

2.12. Định lí Rolle, Lagrange, Cauchy khẳng định tính duy nhất về giá trị trung bình?

Đúng ☐ Sai ☐

2.13. Phần dư Taylor, phần dư Cauchy của hàm số tại điểm x_0 là đa thức của x?

Đúng ☐ Sai ☐

2.14. Qui tắc Lôpitan mô tả điều kiện cần và đủ cho phép tính giới hạn?

Đúng ☐ Sai ☐

2.15. Vi phân cấp 3 của hàm số có tính bất ?

Đúng ☐ Sai ☐

2.16. Dùng định nghĩa hãy tính các đạo hàm các hàm số

a. $f(x)=\sqrt{2x+1}$

b. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

c. $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$

d. $f(x)=\sqrt{x}$

2.17. Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$ b. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

c. $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ d. $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

e. $y=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$ f. $y=\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{2x}{1-x^2}$

2.18. Tính đạo hàm của các hàm số

a. $y=\ln\dfrac{x\ln x-1}{x\ln x+1}$ b. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$

c. $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$ d. $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$

2.19. Tính đạo hàm của các hàm số

a. $y=\cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ b. $y=\sqrt{1+tg\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

c. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ d. $y=\log_2\log_3\log_5 x$

2.20. Tính đạo hàm sau bằng phương pháp đạo hàm lôga:

a. $y=x^{x^2}$ b. $y=(\sin x)^{\cos x}$

c. $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$ d. $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

e. $y=(x^2+1)^{\sin x}$ f. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

2.21. Tính đạo hàm sau bằng phương pháp đạo hàm lôga

a. $y=x^{\frac{1}{x}}$ b. $y=x^{-x}2^x x^2$

c. $y=\dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$ d. $y=\log_{\cos x}\sin x$

2.22. Tính vi phân của hàm số

a. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2}$

b. Cho $f(x)=x^3-2x+1$. Tính $\Delta f(1), df(1)$ $(a>0)$

c. Với $|x|<<a^2$ chứng minh $\sqrt{a^2+x}\approx a+\dfrac{x}{2a}$ $(a>0)$

d. $y=3^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$ tại $x=1$ và $dx=0,2$

2.23. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

a. $y=2^x+2^{-x}$ b. $y=\ln(ax+b)$

c. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ c. $y=\sqrt{x}$

2.24. Tính các đạo hàm cấp cao sau:

a. $y=(x^2+1)\sin x$, tính $y^{(20)}$

b. $y=\dfrac{e^x}{x}$, tính $y^{(10)}$

c. $y=e^x.\sin x$, tính $y^{(n)}$

d. $y=\sin ax.\sin bx$, tính $y^{(n)}$

2.25. Dùng qui tắc L'Hospital tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^{x}}$ b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ c. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^{x}-e^{a})}$

d. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{tg\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$ e. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\cot g\frac{\pi}{2}x}$

2.26. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x.\ln(x-1)$

c. $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}$ d. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^{p}}-\dfrac{q}{1-x^{q}}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$ f. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{\cot gx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

2.27. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$, b. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2\cos x}$, c. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, e. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$, f. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x}-x\ln a}{b^{x}-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.28. Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của các hàm số sau:

a. $y=x(1+\sqrt{x})$ b. $y=x\ln x$ c. $y=(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$

d. $y=\dfrac{e^{x}}{x}$ e. $y=x\sqrt{ax-x^2},(a>0)$

2.29. Tìm cực trị các hàm số sau:

a. $y=x^2(1-x\sqrt{x})$ b. $y=|x|(x+2)$ c. $y=x^{\frac{2}{3}}+(x-2)^{\frac{2}{3}}$

d. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$ f. $y=2\cos\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$

2.30. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của các hàm số:

a. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $\quad 0\le x\le 1$

b. $y=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x}$, $\quad 0<x<1, a>0, b>0$

c. $y=2tgx-tg^2x$, $\quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2}$

d. $y=arctg\dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad 0\le x\le 1$

CHƯƠNG III. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Phép tính vi phân hàm số nhiều biến số là sự mở rộng một cách tự nhiên và cần thiết của phép tính vi phân hàm số một biến số. Các bài toán thực tế thường xuất hiện sự phụ thuộc một biến số vào hai biến số hoặc nhiều hơn, chẳng hạn nhiệt độ T của một chất lỏng biến đổi theo độ sâu z và thời gian t theo công thức $T = e^{-t}z$, nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn phụ thuộc vào điện trở của dây, cường độ của dòng và thời gian dẫn điện theo công thức $Q = 0,24RI^2t$,v.v…Vì vậy, khảo sát hàm số nhiều biến số vừa mang tính tổng quát vừa mang tính thực tiễn. Để học tốt chương này, ngoài việc nắm vững các phép tính đạo hàm của hàm một biến số, người học phải có các kiến thức về hình học không gian (xem $[2]$).Trong chương này, yêu cầu người học nắm vững các nội dung chính sau:

1. Các khái niệm chung của không gian $\mathbb{R}^n$ (n chiều).

Mô tả được miền xác định và đồ thị của hàm hai biến.

2. Phép tính đạo hàm riêng và vi phân toàn phần.

Nắm vững các qui tắc tính đạo hàm riêng trên cơ sở tính đạo hàm của hàm một biến. Công thức tính đạo hàm riêng của hàm số ẩn. Công thức vi phân toàn phần và biết cách áp dụng vào phép tính gần đúng.

3. Nắm vững khái niệm và cách tính đạo hàm theo hướng. Giải thích được đạo hàm riêng theo các biến x, y, z chính là đạo hàm theo hướng các trục Ox, Oy, Oz.

4. Bài toán tìm cực trị.

Qui tắc tìm cực trị tự do, phương pháp nhân tử Lagrange.

NỘI DUNG

3.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

3.1.1. Không gian n chiều

* Ta đã biết mỗi điểm trong không gian 3 chiều được đặc trưng hoàn toàn bởi bộ 3 số (x, y, z) là 3 tọa độ Descartes của nó: x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ.

Tổng quát như sau: Mỗi bộ có thứ tự n số thực $(x_1, x_2,..., x_n)$ gọi là một điểm n chiều. Kí hiệu $M(x_1, x_2,..., x_n)$ có nghĩa là điểm n chiều M có các toạ độ $x_1, x_2,..., x_n$. Tập các điểm $M(x_1, x_2,..., x_n)$ gọi là không gian Euclide n chiều. Kí hiệu tập này là $\mathbb{R}^n$.

* Cho $M(x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N(y_1, y_2,..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Gọi khoảng cách giữa M và N, kí hiệu d(M, N), là số thực tính theo công thức:

$$d(M,N)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+......+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Tương tự như trong $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ ta nhận được bất đẳng thức tam giác trong $\mathbb{R}^n$. Tức là với 3 điểm A, B, C bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ ta có:

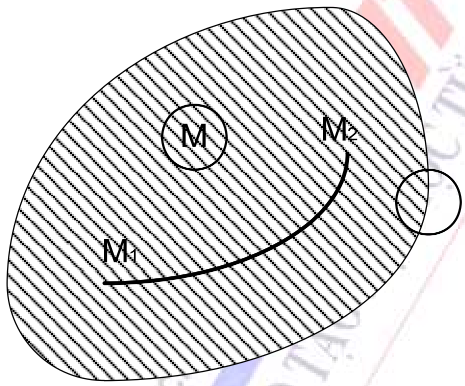
$$d(A,C)\le d(A,B)+d(B,C)$$

* Cho $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ và $\varepsilon>0$. Tập $\Omega_\varepsilon(M_0)=\{M\in\mathbb{R}^n: d(M,M_0)<\varepsilon\}$ gọi là ε - lân cận hoặc lân cận bán kính ε của M_0 hoặc hình cầu mở tâm M_0 bán kính ε (H.3.1a).

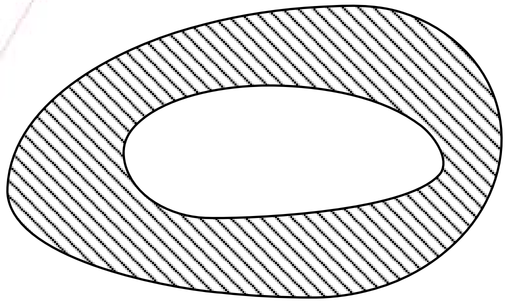
* Cho $E\subset\mathbb{R}^n$. Điểm $M\in E$ gọi là điểm trong của E nếu có $\Omega_\varepsilon(M)\subset E(\exists\varepsilon>0)$. Điểm $N\in\mathbb{R}^n$ gọi là điểm biên của E nếu bất kỳ $\Omega_\varepsilon(M)$ đều chứa những điểm thuộc E và điểm không thuộc $E(\forall\varepsilon>0)$. Tập E gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong, gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó. Tập các điểm biên của E kí hiệu ∂E. Bao đóng của E hay tập E đóng ký hiệu $\overline{E}$ và có $\overline{E}=E\bigcup\partial E$ (H.3.1a).

* Tập E gọi là bị chặn hay giới nội nếu như tồn tại số N sao cho $E\subset\Omega_N(0)$.

* Tập E gọi là liên thông nếu mỗi cặp điểm M_1, M_2 trong E đều được nối với nhau bởi một đường cong liên tục nào đó nằm trọn trong E. Tập liên thông E gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (một đường cong kín trong $\mathbb{R}^2$; một mặt cong kín trong $\mathbb{R}^3$) (H.3.1a). Tập liên thông E gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi từ hai mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một (H.3.1b).



H.3.1a



H.3.1b

Ví dụ 1: Xét các tập sau trong $\mathbb{R}^2$.

$$A=\{(x,y):x^2+y^2<4\}$$

$$B=\{(1,2),(-1,0),(0,0)\} \text{ và } \mathbb{R}^2$$

Giải:

$\partial A=\{(x,y):x^2+y^2=4\}$ - đường tròn tâm O bán kính 2, $\overline{A}=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$ - hình tròn kể cả biên.

A, $\mathbb{R}^2$ là các tập liên thông, B không liên thông (gồm 3 điểm rời rạc).

A, B là các tập giới nội, $\mathbb{R}^2$ không giới nội (cả mặt phẳng 0xy).

3.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến số

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Gọi ánh xạ:

$$f : D \to \mathbb{R}$$

Hay là $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ là một hàm số của n biến số xác định trên D. D gọi là miền xác định của hàm số f; $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến số độc lập, còn u gọi là biến số phụ thuộc.

3.1.3. Miền xác định của hàm nhiều biến số

Người ta quy ước: Nếu cho hàm số u = f(M) mà không nói gì về miền xác định D của nó thì phải hiểu rằng miền xác định D của hàm số là tập hợp các điểm M sao cho biểu thức f(M) có nghĩa.

Miền xác định của hàm số thường là tập liên thông. Sau đây là một số ví dụ về miền xác định của hàm số 2 biến số, 3 biến số.

Ví dụ 2: Tìm miền xác định của các hàm số sau và mô tả hình học các miền đó:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, b) $z = \ln(x + y)$, c) $u = \dfrac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Giải:

a. Miền xác định là tập $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 \leq 1$. Đó là hình tròn đóng tâm O bán kính bằng 1 (H.3.2a). Hình tròn đóng này có thể mô tả bởi hệ bất phương trình:

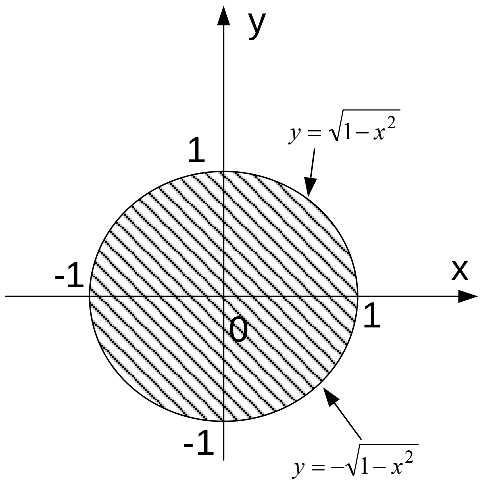
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

b. Miền xác định là tập $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thoả mãn x + y > 0 hay y > -x. Đó là nửa mặt phẳng có biên là đường y = -x (H.3.2b). Nửa mặt phẳng này được mô tả bởi hệ bất phương trình:

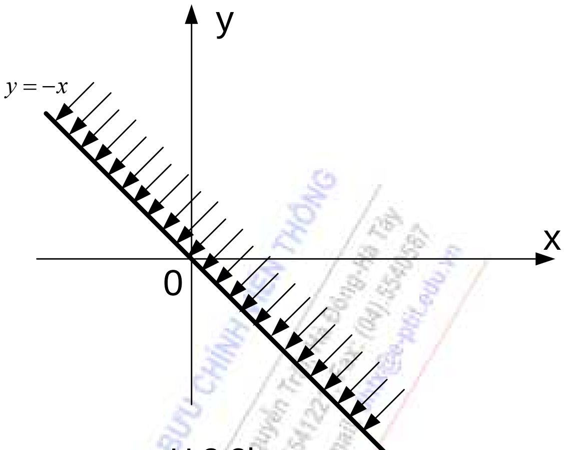
$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -x < y < +\infty \end{cases}$$

c. Miền xác định là tập $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Đó là hình cầu mở tâm O bán kính bằng 3 (H.3.2c). Hình cầu mở này mô tả bởi hệ bất phương trình:

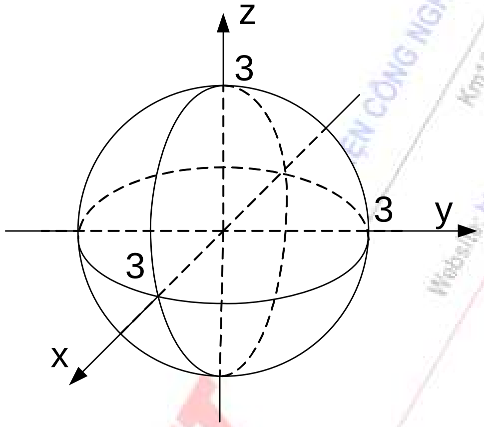
$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \\ -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \end{cases}$$



H.3.2a



H.3.2b



H.3.2c

3.1.4. Ý nghĩa hình học của hàm hai biến số

Cho hàm 2 biến z = f(x,y) với $(x,y)\in D$. Tập các điểm $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ với z = f(x,y) gọi là đồ thị của hàm số đã cho. Như thế đồ thị của hàm 2 biến thường là một mặt cong trong không gian 3 chiều Oxyz. Đồ thị của hàm số mô tả một cách trực quan hàm số thể hiện được ý nghĩa hình học của hàm số. Dưới đây ta xét các mặt cong đặc biệt và đơn giản, thông dụng trong toán học và ứng dụng.

A. Mặt phẳng:

Mặt phẳng là đồ thị của hàm hai biến tuyến tính, nói cách khác phương trình mặt phẳng có dạng: Ax + By + Cz + D = 0 trong đó $A^2+B^2+C^2>0$. Chẳng hạn $C\neq 0$ có $z=-\dfrac{1}{C}(D+Ax+By)$, hàm số này xác định trên $\mathbb{R}^2$.

B. Ellipsoid

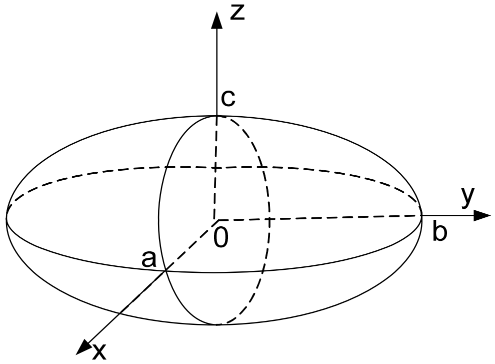
Ellipsoid là mặt cong, phương trình chính tắc của nó có dạng (H.3.3)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

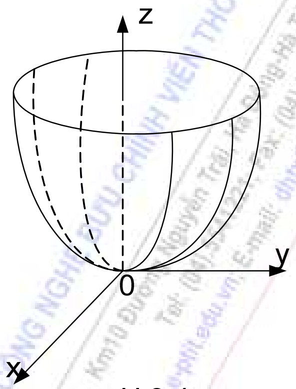
Đây là hàm hai biến cho dưới dạng không tường minh (dạng ẩn). Hàm số là đa trị. Chẳng hạn coi z là biến phụ thuộc vào x và y thì miền xác định là hình ellipse có các bán trục a và b:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

Khi a = b = c = R ta có mặt cầu tâm gốc toạ độ và bán kính là R: $x^2+y^2+z^2=R^2$



H.3.3



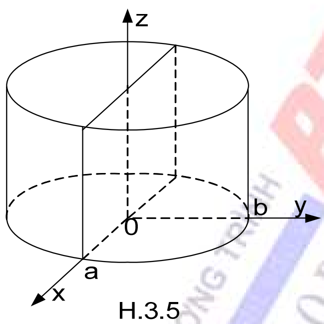
H.3.4

C. Paraboloid elliptic

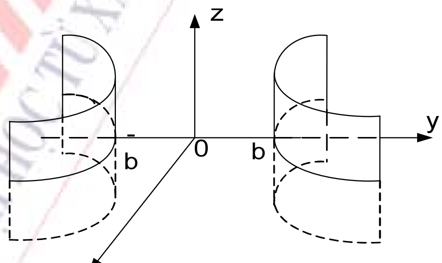
Phương trình chính tắc của paraboloid elliptic có dạng (H.3.4): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

Miền xác định của hàm số trên là $\mathbb{R}^2$. Khi a = b tức là phương trình có dạng: $x^2+y^2=a^2z$

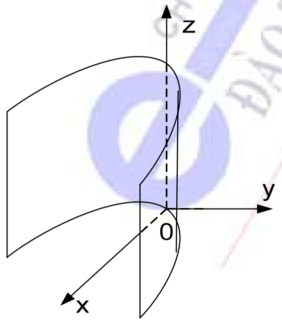
Gọi đó là paraboloid tròn xoay.



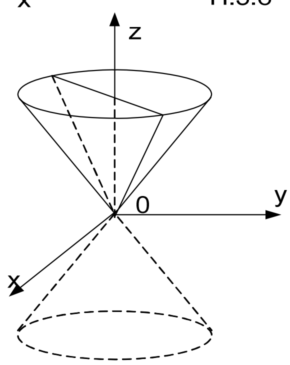
H.3.5



H.3.6



H.3.7



H.3.8

D. Mặt trụ bậc 2

* Mặt trụ elliptic (H.3.5) có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

* Mặt trụ hyperbolic (H.3.6) có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

* Mặt trụ parabolic (H.3.7) có phương trình chính tắc:

$$y^2=2px$$

E. Mặt nón bậc 2

Phương trình chính tắc của mặt nón có dạng (H.3.8)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

3.1.5. Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Khái niệm giới hạn của hàm số nhiều biến số cũng được đưa về khái niệm giới hạn của hàm một biến số. Ở đây một biến số đóng vai trò là khoảng cách $d(M_0, M)$ giữa hai điểm M_0 và M trong không gian $\mathbb{R}^n$. Để đơn giản trong cách viết chúng ta xét trong không gian 2 chiều $\mathbb{R}^2$.

* Nói rằng dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ dần đến điểm $M_0(x_0, y_0)$; kí hiệu $M_n \to M_0$ khi $n\to\infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_0,M_n)=0 \text{ hay là } \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0\end{cases}$$

* Cho hàm z = f(x,y) xác định ở lân cận $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ điểm M_0. Ta nói rằng hàm f(M) có giới hạn là l khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0, y_0)$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận dần đến M_0 ta đều có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=l$

Thường kí hiệu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=l$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l$

Sử dụng ngôn ngữ "ε,δ" có thể định nghĩa như sau: Hàm số f(M) có giới hạn l khi $M\to M_0$ nếu $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0: 0<d(M_0,M)<\delta \Rightarrow |f(M)-l|<\varepsilon$

Chú ý: 1. Tất cả các khái niệm giới hạn vô hạn hoặc các định lí về giới hạn: tổng, tích, thương, giới hạn thứ tự, nguyên lí kẹp đều giống như hàm số một biến số.

2. Từ định nghĩa ta nhận thấy: Giới hạn l của hàm số $f(x,y)$ khi $M\to M_0$ không phụ thuộc đường đi của M tiến đến M_0, vì thế nếu chỉ ra hai đường đi của M tiến đến M_0 mà $f(M)$ tiến đến hai giá trị khác nhau thì hàm số không có giới hạn tại M_0.

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Giải:

a. Ta có $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\le|y|,\quad d(M,O)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon$ khi $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \quad \Rightarrow|y|<\delta \quad \Rightarrow\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\le|y|<\delta=\varepsilon$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

b. Cho $M(x,y)\to O(0,0)$ theo đường y = Cx, C = const (hằng số) thì $\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{Cx^2}{(1+C^2)x^2}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{C}{1+C^2}$ chứng tỏ dãy giá trị hàm có giới hạn khác nhau phụ thuộc vào C.

Theo chú ý 2, suy ra hàm không có giới hạn.

c. $\left|\dfrac{\mathrm{xy}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}-0\right|\le\dfrac{|\mathrm{x}|}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}.|\mathrm{y}|\le|\mathrm{y}|$. Tương tự a. suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

3.1.6. Sự liên tục của hàm số nhiều biến số

A. Định nghĩa

* Hàm số f(M) xác định trên miền D và $M_0\in D$. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$.

* Hàm số f(M) xác định trên miền D. Nói rằng hàm số liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm $M\in D$.

* Hàm số f(M) liên tục trên miền đóng $\overline{D}$ nếu nó liên tục trên miền D và liên tục tại mọi điểm $N\in\partial D$ theo nghĩa $\lim\limits_{M\to N}f(M)=f(N), M\in D$.

* Nếu đặt $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ gọi là số gia toàn phần của hàm số tại (x_0,y_0) thì hàm số f(x,y) liên tục tại (x_0, y_0) nếu như $\Delta f(x_0,y_0)\to0$ khi $\Delta x\to0$ và $\Delta y\to0$.

B. Tính chất

Hoàn toàn tương tự như hàm một biến số ta có tính chất quan trọng sau đây:

Định lý 3.1: *Nếu f(x,y) liên tục trong miền đóng $\overline{D}$ giới nội thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trong miền $\overline{D}$ tức là: $\exists M_1\in\overline{D},M_2\in\overline{D}$ để có bất đẳng thức kép:*

$$f(M_1)\le f(M)\le f(M_2),\quad \forall M\in\overline{D}$$

3.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

3.2.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số u = f(x,y) xác định trong miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Cố định y = y_0 trong hàm số đã cho sẽ nhận được hàm số một biến số u = f(x, y_0). Nếu hàm số này có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của f(x, y) đối với x tại $M_0(x_0, y_0)$ và kí hiệu như sau:

$$u'_x(x_0,y_0) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ hay } f'_x(x_0,y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Đặt $\Delta_x f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$ gọi đó là số gia riêng của hàm f(x, y) theo biến x tại (x_0, y_0) và ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số đối với y tại $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu:

$$u'_y(x_0,y_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Chú ý: Có thể chuyển toàn bộ các phép tính đạo hàm của hàm một biến số: cộng, trừ, nhân, chia, … sang phép tính đạo hàm riêng.

Ví dụ 4: Tính đạo hàm riêng sau:

a. $u = x^3y,\quad u'_x(1,2),\quad u'_y(1,1)$.

b. $u = x^y\ (x>0),\quad u'_x(x,y),\quad u'_y(x,y)$.

c. $u = x^2 z\,arctg\dfrac{y}{z},\quad u'_x(x,y,z),\quad u'_y(x,y,z),\quad u'_z(x,y,z)$.

Giải:

a. $u'_x(x,y) = 3x^2y \Rightarrow u'_x(1,2) = 6$,

$u'_y(x,y) = x^3 \Rightarrow u'_y(1,1) = 1$.

b. $u'_x = yx^{y-1},\quad u'_y = x^y\ln x$

c. $u'_x(x,y,z) = 2xz\,arctg\dfrac{y}{z}$,

$$u'_y(x,y,z) = x^2z\frac{1}{z}\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{z^2}} = \frac{x^2z^2}{y^2+z^2},$$

$$u'_z(x,y,z) = x^2 arctg\frac{y}{z} - x^2z\frac{y}{z^2}\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{z^2}} = x^2\Big(arctg\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\Big).$$

3.2.2. Vi phân toàn phần

A. Định nghĩa

* Cho hàm số u = f(x, y) xác định trong miền D chứa (x_0, y_0). Nếu số gia toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0) ứng với số gia $\Delta x, \Delta y$ của các đối số có dạng:

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y \qquad (3.1)$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc vào (x_0, y_0), còn α, β dần đến 0 khi $M \to M_0$ tức là khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ thì nói rằng hàm số f(x, y) khả vi tại M_0, còn biểu thức $A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại M_0 và kí hiệu là $df(x_0, y_0)$, hay $du(x_0, y_0)$. Như vậy $df(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y$

* Hàm số u = f(x, y) được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền D.

B. Điều kiện cần của hàm số khả vi

Định lý 3.2: *Nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì liên tục tại đó.*

Từ (3.1) suy ra $\Delta f(x_0, y_0) \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Định lý 3.3: *Nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì hàm có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và* $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$.

Chứng minh:

Từ (3.1) suy ra:

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha, \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B + \beta$$

Vậy $\quad f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B$ chứng tỏ

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \qquad (3.2)$$

C. Điều kiện đủ của hàm số khả vi

Định lý 3.4: *Nếu hàm số u = f(x, y) có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì f(x, y) khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$.*

Chứng minh:

Ta có $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$= \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\right] + \left[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right]$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange) cho hàm một biến số $f(x, y_0 + \Delta y)$ tại lân cận x_0 và $f(x_0, y)$ ở lân cận y_0 sẽ nhận được:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y$$

Trong đó $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$

Cũng theo giả thiết $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) nên:

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)$$

Trong đó $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Từ đó nhận được:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

chứng tỏ hàm số khả vi tại (x_0, y_0).

Nếu xét các hàm số h(x, y) = x và g(x, y) = y trong $\mathbb{R}^2$ thì rõ ràng:

dh(x, y) = dx = 1.Δx

dg(x, y) = dy = 1.Δy

Vậy vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) tại (x_0, y_0) có thể viết dưới dạng:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy \qquad (3.2)'$$

D. Ý nghĩa của vi phân toàn phần

Nếu hàm số f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì rõ ràng:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Vì rằng $\left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Suy ra $df(x_0, y_0)$ khác số gia toàn phần $\Delta f(x_0, y_0)$ một vô cùng bé có bậc cao hơn vô cùng bé $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Vậy với $|\Delta x|, |\Delta y|$ khá bé sẽ nhận được:

$$\Delta f \approx df.$$

Từ đó nhận được $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$ (3.3)

Công thức (3.3) thường được sử dụng để tính gần đúng giá trị của hàm số.

Chú ý: Tính khả vi của tổng, tích, thương hai hàm cũng giống như hàm một biến số.

Ví dụ 5: Thực hiện phép tính vi phân các hàm số:

a. Cho f(x,y) = x cos xy, tính $df\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ với Δx = 0,01 , Δy = 0,02.

b. Cho f(x,y) = xy^2, $(x-y)e^{xy^2}$. Tính df(x,y).

Giải:

a. $f'_x(x,y) = \cos xy - xy\sin xy$, $f'_x\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$f'_y(x,y) = -x^2\sin xy$, $f'_y\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$df\left(1,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).0,01-\frac{\sqrt{2}}{2}.0,02=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right).0,01.$$

b. $f'_x(x,y)=e^{xy^2}+y^2(x-y)e^{xy^2}$,

$$f'_y(x,y)=-e^{xy^2}+2yx(x-y)e^{xy^2},$$

$$df(x,y)=e^{xy^2}\left\{\left[1+y^2(x-y)\right]dx+\left[2xy(x-y)-1\right]dy\right\}.$$

Ví dụ 6:

a. Tính gần đúng $arctg\dfrac{1,05}{0,97}$.

b. Một hình trụ bằng kim loại có chiều cao h = 20 cm và bán kính đáy r = 4 cm. Khi nóng lên h và r nở thêm các đoạn $\Delta h=\Delta r=0,1$ cm. Hãy tính gần đúng thể tích hình trụ khi nóng lên.

Giải:

a. Ta viết $arctg\dfrac{1,05}{0,97}=arctg\dfrac{1+0,05}{1-0,03}$. Xét hàm số $f(x,y)=arctg\dfrac{x}{y}$

Rõ ràng $arctg\dfrac{1,05}{0,97}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, trong đó $x_0=y_0=1$, $\Delta x=0,05$ và $\Delta y=-0,03$.

Áp dụng công thức xấp xỉ (3.3) ta có:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)=f(1,1)+f'_x(1,1).0,05+f'_y(1,1).(-0,03)$$

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{y}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\frac{y}{y^2+x^2},\quad f'_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=-\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx arctg\frac{1}{1}+\frac{1}{2}.0,05+\frac{1}{2}.0,03=\frac{\pi}{4}+0,04=0,785+0,04=0,825.$$

b. Ta có $V=\pi r^2h, V'_r=2\pi rh, V'_h=\pi r^2$

Áp dụng công thức (1.3):

$$V(r+\Delta r,h+\Delta h)\approx\pi r^2h+2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h\approx\pi.4^2.20+2\pi.4.20.0,1+\pi.4^2.0,1\approx\pi.337,6\ cm^3$$

Chứng tỏ sai số tuyệt đối không quá $0,3\pi\ cm^3$ và sai số tương đối không quá $\dfrac{0,3\pi}{337\pi}\approx\dfrac{1}{100}$.

3.2.3. Đạo hàm riêng cấp cao

Đạo hàm riêng cấp hai của một hàm là đạo hàm riêng các đạo hàm riêng cấp một của nó. Hàm hai biến f(x,y) có 4 đạo hàm riêng cấp hai sau đây:

$$f''_{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad f''_{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có các định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao hơn của hàm nhiều biến hơn.

Ví dụ 7: Tính các đạo hàm riêng $f^{(3)}_{x^2 y}, f^{(3)}_{xyx}, f^{(3)}_{xyz}$ biết $f(x,y,z) = e^{x-2y+4z}$.

Giải:

$$f'_x = e^{x-2y+4z}, f''_{x^2} = e^{x-2y+4z}, f^{(3)}_{x^2 y} = -2e^{x-2y+4z}$$

$$f''_{xy} = -2e^{x-2y+4z}, f^{(3)}_{xyx} = -2e^{x-2y+4z}, f^{(3)}_{xyz} = -8e^{x-2y+4z}$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên có $f^{(3)}_{x^2 y} = f^{(3)}_{xyx}$.

Định lý 3.5(Schwarz): *Nếu f(x,y) có các đạo hàm riêng hỗn hợp f''_{xy} và f''_{yx} trong lân cận $\Omega_\delta(M_0)$ và liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau tại M_0:* $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$.

Chứng minh: Lấy t, s đủ bé. Lập các hàm số sau đây trong lân cận M_0:

$$g(x, y) = f(x + t, y) - f(x, y)$$

$$h(x, y) = f(x, y + s) - f(x, y)$$

Rõ ràng $g(x_0, y_0 + s) - g(x_0, y_0) = h(x_0 + t, y_0) - h(x_0, y_0)$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $g(x_0, y)$ tại y_0 nhận được:

$$g(x_0, y_0 + s) - g(x_0, y_0) = s.g'_y(x_0, y_0 + \theta_1 s)$$

$$= s\left[f'_y(x_0 + t, y_0 + \theta_1 s) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 s\right]$$

Tiếp tục áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f'_y(x, y_0 + \theta_1 s)$ tại x_0 nhận được:

$$g(x_0, y_0 + s) - g(x_0, y_0) = stf''_{yx}(x_0 + \theta_2 t, y_0 + \theta_1 s)$$

Hoàn toàn tương tự cũng có:

$$h(x_0 + t, y_0) - h(x_0, y_0) = stf''_{xy}(x_0 + \gamma_1 t, y_0 + \gamma_2 s)$$

Cho $t, s \to 0$, do tính liên tục nhận được $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Chú ý: Định lý trên cũng mở rộng cho các đạo hàm cấp cao hơn và hàm nhiều biến hơn.

3.2.4. Vi phân cấp cao

Ta nhận thấy $df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$ cũng là một hàm số của x, y nên có thể xét vi phân của nó. Nếu df(x,y) khả vi thì vi phân của nó gọi là vi phân cấp hai của f(x, y), kí hiệu $d^2 f(x,y) = d(df(x,y))$ và nói rằng f(x, y) khả vi đến cấp 2 tại (x, y).

Tổng quát vi phân cấp n, nếu có sẽ kí hiệu: $d^n f(x,y) = d(d^{n-1} f(x,y))$

Công thức vi phân cấp 2 như sau:

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Giả sử các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục, theo định lý Schwarz ta có:

$$d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \qquad (3.4)$$

Người ta dùng kí hiệu luỹ thừa tượng trưng để viết gọn như sau:

$$df(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)f(x,y)$$

Tổng quát có $d^n f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$ (3.5)

3.2.5. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho $D\subset\mathbb{R}^n$ và các ánh xạ $\varphi: D\to\mathbb{R}^m$

$$f:\varphi(D)\to\mathbb{R}$$

hay $u=u(y_1,y_2,...,y_m)$ với $\begin{cases} y_1=y_1(x_1,x_2,...,x_n)\\ y_2=y_2(x_1,x_2,...,x_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_m=y_m(x_1,x_2,...,x_n)\end{cases}$

Ánh xạ tích $f\circ\varphi: D\to\mathbb{R}$ cụ thể là $u=f(\varphi(M)), M\in D, \varphi(M)\subset\mathbb{R}^m$ gọi là hàm số hợp.

Để cho đơn giản, sau đây ta xét n = 2, m = 2, khi đó hàm hợp $f\circ\varphi$ xác định trên miền phẳng D

Định lý 3.6 : *Cho u = f(x,y) với x = x(s, t); y = y(s, t) thoả mãn:*
Các biến trung gian x(s, t), y(s, t) có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (a, b),
f(x, y) khả vi tại điểm (x_0, y_0) = (x(a, b), y(a, b)).
Khi đó hàm hợp u = u(s, t) có đạo hàm riêng cấp 1 tại (a, b) tính theo công thức:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (3.6)$$

Công thức (3.6) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận Jacobi của x, y đối với t, s; còn định thức của ma trận này gọi là định thức Jacobi của x, y đối với t, s hay Jacobian của x, y đối với t, s và ký hiệu:

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

Ví dụ 8: Tính các đạo hàm riêng

$u = e^x \ln y, \quad x = st, \quad y = s^2 - t^2.$

Giải:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^x \ln y.\, t + e^x.\frac{1}{y}.2s = e^{st}\left[t\ln(s^2 - t^2) + \frac{2s}{s^2 - t^2}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^x \ln y.s + e^x.\frac{1}{y}.(-2t) = e^{st}\left[s\ln(s^2 - t^2) - \frac{2t}{s^2 - t^2}\right].$$

Ví dụ 9: Cho $u = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh $\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0$.

Giải:

Nhận xét: hàm số $u = \frac{1}{r}$ đối xứng với x, y, z. Do đó ta chỉ cần tính u''_{x^2}, sau đó thay x bởi y và z.

$$u'_x = u'.r'_x = -\frac{1}{r^2}.\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$u''_{x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3x.\frac{1}{r^4}.\frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

Suy ra $\Delta u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$.

Chú ý: Nếu u = f(x, y), y = y(x) khi đó u là hàm số hợp của một biến x. Do vậy người ta đưa ra khái niệm đạo hàm toàn phần và công thức tính sẽ là: $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.y'$.

3.2.6. Vi phân của hàm hợp

Xét hàm hợp u = f(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t).

Nếu hàm hợp có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$ liên tục thì nó khả vi và ta có:

$$du = \frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

Bây giờ ta biểu diễn du qua biến trung gian x, y theo công thức (3.6) có:

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \end{aligned}$$

Như vậy dạng của công thức vi phân cấp 1 không đổi dù x, y là các biến độc lập hay là hàm của các biến s, t. Tính chất này gọi là tính chất bất biến dạng của vi phân cấp 1.

Chú ý: Cũng như hàm một biến số, vi phân cấp cao không có tính bất biến dạng.

3.2.7. Đạo hàm của hàm số ẩn

A. Hàm ẩn một biến

Cho một hệ thức giữa hai biến, x, y dạng: F(x, y) = 0 (3.8)

trong đó F(x, y) là hàm hai biến xác định trong miền mở D chứa (x_0, y_0) và $F(x_0, y_0) = 0$. Giả sử rằng $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\exists\, y(x)$ sao cho $(x, y(x)) \in D$ và F(x, y(x)) = 0. Hàm số y = y(x) gọi là hàm ẩn của x xác định bởi phương trình (3.8).

Định lý 3.7: *Nếu F(x, y) thoả mãn các điều kiện:*

F liên tục trong lân cận $\Omega_\delta(M_0)$ và $F(M_0) = 0$.

Các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ liên tục và $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ trong lân cận $\Omega_\delta(M_0)$ thì phương trình (3.8) xác định một hàm ẩn y(x) khả vi liên tục trong khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ và ta có:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (3.9)$$

Chú ý: Để nhận được công thức (3.9) chúng ta chỉ việc lấy vi phân 2 vế của (3.8) trong đó có y = y(x) và áp dụng tính bất biến của dạng vi phân cấp 1.

Thật vậy dF(x, y) = 0 hay $F'_x dx + F'_y dy = 0$ hay $F'_x + F'_y.y' = 0$. Từ đó suy ra (3.9).

Ví dụ 10: Tính $y'(1)$ biết $xy - e^x \sin y = \pi$

Giải:

Lấy đạo hàm toàn phần (hay vi phân) và coi y là hàm của x hai vế của phương trình đã cho có:

$$y + xy' - e^x \sin y - e^x \cos y.y' = 0$$

Thay $x = 1$ vào phương trình hàm ẩn, nhận được: $y(1) - \pi = e\sin y(1)$. Dùng phương pháp đồ thị giải phương trình này, nhận được nghiệm $y(1) = \pi$.

Vậy $\quad \pi + y'(1) - e\sin\pi - e\cos\pi.y'(1) = 0$

$$y'(1) = -\frac{\pi}{1+e}.$$

Ví dụ 11: Tính y', y'' biết $x - y + arctgy = 0$

Giải:

Lấy đạo hàm toàn phần hai vế coi y = y(x)

$$1 - y' + \frac{y'}{1+y^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2} \quad \Rightarrow y^2y' = 1 + y^2$$

Lấy đạo hàm tiếp ta có $2yy'^2 + y^2y'' = 2yy' \Rightarrow y'' = \dfrac{2y'(1-y')}{y} \quad \Rightarrow y'' = -\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$.

B. Hàm ẩn hai biến

Định lý 3.8: *Cho phương trình hàm ẩn F(x, y, z) = 0 và F(x, y, z) thoả mãn các điều kiện:*

F(x, y, z) liên tục trong hình cầu mở $\Omega_\delta(M_0)$ *và* $F(M_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

Các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z *liên tục và* $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *trong hình cầu* $\Omega_\delta(M_0)$

Khi đó phương trình hàm ẩn xác định một hàm ẩn z = z (x, y) có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $\Omega_\varepsilon(x_0, y_0)$ *đồng thời:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{3.10}$$

Tương tự như định lý 3.7. ta không chứng minh định lý này.

Cũng như trong trường hợp hàm ẩn một biến, để tính các đạo hàm riêng cũng như vi phân của hàm ẩn ta lấy vi phân toàn phần hai vế của phương trình hàm ẩn sau đó đi tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, dz$

Ví dụ 12: Cho xyz = x + y + z. Coi z là hàm số ẩn, hãy tính z'_x, z'_y, dz.

Giải:

Lấy vi phân toàn phần phương trình hàm ẩn sẽ có:

d(xyz) = d(x + y + z)

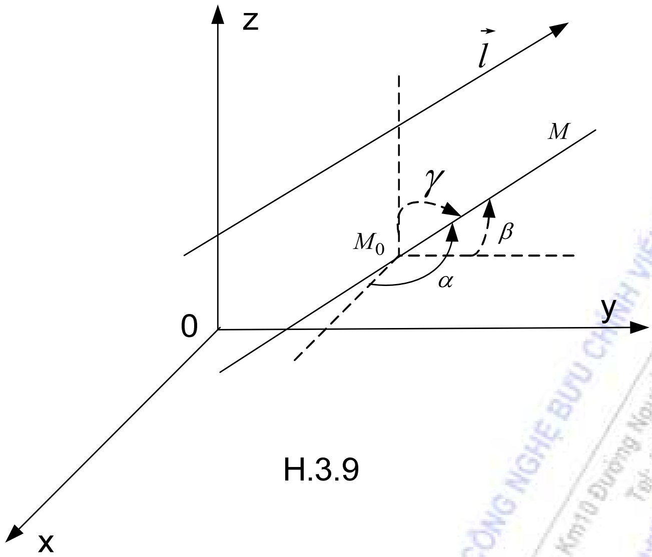
yz dx + zx dy + xy dz = dx + dy + dz

(xy – 1) dz = (1- yz) dz + (1-zx) dy

$$dz = -\frac{1}{xy-1}\left[(yz-1)dx + (zx-1)dy\right]$$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{yz-1}{yx-1}, \quad z'_y = -\frac{xz-1}{xy-1}.$$

3.2.8. Đạo hàm theo hướng. Građiên (Gradient)



H.3.9

A. Định nghĩa:

Cho u(x, y, z) xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, một hướng được đặc trưng bởi véc tơ $\vec{\ell}$ có véc tơ đơn vị $\vec{\ell}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{\vec{\ell}}{\left|\vec{\ell}\right|}$, như vậy:

$\alpha = (\mathrm{Ox}, \vec{\ell}), \beta = (Oy, \vec{\ell}), \gamma = (Oz, \vec{\ell})$. Người ta gọi $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các côsin chỉ phương của $\vec{\ell}$. Rõ ràng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (H.3.9)

Lấy $M \in D$ sao cho $\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{\ell_0}$, lập tỉ số $\dfrac{\Delta u}{\rho} = \dfrac{u(M) - u(M_0)}{\rho}$

Nếu tỉ số trên có giới hạn hữu hạn khi $\rho \to 0$ thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm của hàm u(M) theo hướng $\vec{\ell}$ tại M_0 và kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0)$ tức là:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0)$$

Chú ý:

1. Cũng giống như ý nghĩa của đạo hàm, có thể coi rằng đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ biểu thị tốc độ biến thiên của hàm u(M) theo hướng $\vec{\ell}$.

2. Nếu $\vec{\ell}$ có hướng của trục Ox thì $\overrightarrow{\ell_0}(1,0,0)$. Giả sử $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì $M(x_0 + \rho, y_0, z_0)$ khi đó:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell_0}}(M_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(x_0 + \rho, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$$

Chứng tỏ các đạo hàm riêng u'_x, u'_y, u'_z là đạo hàm của hàm u theo hướng của các trục Ox, Oy, Oz.

B. Công thức tính

Định lý 3.9: *Nếu hàm số u(x, y, z) khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $\vec{\ell}$ bất kỳ có các côsin chỉ phương* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *thì:*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma \tag{3.11}$$

Chứng minh:

Theo ý nghĩa của hàm khả vi ta có:

$$\Delta u = u(M) - u(M_0) = u'_x(M_0)\Delta x + u'_y(M_0)\Delta y + u'_z(M_0)\Delta z + o(\rho)$$

trong đó $o(\rho)$ là VCB bậc cao hơn ρ khi $\rho \to 0$.

Mặt khác $\Delta x = \rho\cos\alpha, \Delta y = \rho\cos\beta, \Delta z = \rho\cos\gamma$ suy ra:

$$\frac{\Delta u}{\rho} = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma + \frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $\rho \to 0$ sẽ có (3.11)

C. Građiên

Cho u(x, y, z) có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D \subset \mathbb{R}^3$.

Gọi véc tơ $(u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$ là građiên của hàm u(x, y, z) tại M_0 và kí hiệu là grad $u(M_0)$.

$$grad\ u(M_0) = (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$$
$$= u'_x(M_0)\vec{i} + u'_y(M_0)\vec{j} + u'_z(M_0)\vec{k} \tag{3.12}$$

trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz.

D. Liên hệ giữa građiên và đạo hàm theo hướng.

Định lý 3.10: *Nếu u(M) khả vi tại M_0 thì tại đó có:*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = ch_{\vec{\ell}}\ gradu = \vec{\ell}_0 .gradu . \tag{3.13}$$

Chứng minh:

Ta có $\overrightarrow{\ell_0} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$ nên (3.11) có thể viết như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = grad\ u(M_0).\overrightarrow{\ell_0} = \left|\overrightarrow{\ell_0}\right|\left|grad\ u(M_0)\right|\cos\theta$$

trong đó θ là góc giữa hai véc tơ $\vec{\ell}$ và grad u(M_0), mà $\left|\overrightarrow{\ell_0}\right| = 1$,

$\left|grad\ u(M_0)\right|\cos\theta = ch_{\vec{\ell}}\ grad\ u(M_0)$. Vậy nhận được công thức (3.13)

Chú ý: Từ (3.13) suy ra $\max\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0)\right| = \left|grad\ u(M_0)\right|$ khi $\left|\cos\theta\right| = 1$, tức là $\vec{\ell}$ cùng phương với grad u(M_0) chứng tỏ grad u(M_0) cho ta biết phương theo nó tốc độ biến thiên của u tại M_0 có giá trị tuyệt đối cực đại.

Ví dụ 13: Cho $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, M_0(1, 2, -3), $\vec{\ell}$(2, 1, -2).

Tính grad u(M_0) và $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0)$.

Giải:

$$u'_x = 3x^2 + 3yz, u'_y = 3y^2 + 3zx, u'_z = 3z^2 + 3xy$$

Vậy grad u(1, 2, -3) = (3 – 18, 12 – 9, 27 + 6) = (-15, 3, 33) = 3(-5, 1, 11)

$$\vec{\ell}(2, 1, -2) \Rightarrow \overrightarrow{\ell_0} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(1,2,-3) = 3\left(-5.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} - 11.\frac{2}{3}\right) = -31$$

3.3. CỰC TRỊ

3.3.1. Cực trị tự do

A. Định nghĩa và điều kiện cần của cực trị

Điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gọi là điểm cực đại (địa phương) của hàm f(M) nếu có lân cận đủ bé của M_0 để trong lân cận đó (trừ M_0) xảy ra bất đẳng thức f(M) < f(M_0)

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu (địa phương) của hàm số f(M).

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong các trường hợp trên gọi chung là điểm cực trị.

Tương tự như định lý Fermat đối với hàm một biến số, ta có điều kiện cần của cực trị dưới đây.

Định lý 3.11. *Nếu f(x, y) đạt cực trị tại M_0 và có các đạo hàm riêng tại đó thì các đạo hàm riêng bằng 0.*

Chứng minh: Giả sử f(x, y) đạt cực trị tại (x_0, y_0). Theo định nghĩa suy ra hàm một biến f(x,y_0) đạt cực trị tại x_0, f(x_0, y) đạt cực trị tại y_0. Theo định lý Fermat ta có:

$$\left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

$$\left.\frac{df(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Chú ý: Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng không gọi là điểm dừng của hàm số. Như vậy điểm dừng chưa chắc là điểm cực trị. Chẳng hạn u = xy có điểm dừng là (0 0) nhưng trong bất kỳ lân cận nào của gốc toạ độ (0, 0) đều có các điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) để $f(x_1, y_1) > f(0,0)$ và $f(x_2, y_2) < f(0,0)$ (lấy $x_1 > 0, y_1 > 0, x_2 < 0, y_2 > 0$).

B. Điều kiện đủ của cực trị

Trong thực tế thường gặp hàm hai biến f(x, y) và để tìm cực trị của nó, người ta thường sử dụng định lí sau đây, coi như là điều kiện đủ để hàm đạt cực trị. Ta không chứng minh định lý này.

Định lý 3.12. *Giả sử f(x, y) có đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại lân cận điểm dừng (x_0, y_0) và gọi:*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \text{ và } \Delta = B^2 - AC \tag{3.14}$$

Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận gì được về (x_0, y_0)

Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Cụ thể đạt cực đại nếu A < 0, đạt cực tiểu nếu A > 0.

Ví dụ 14: Xét cực trị của hàm số

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Giải:

Nhận xét: Hàm số z khả vi mọi cấp trên $\mathbb{R}^2$, ta có thể áp dụng định lý 3.12.

* Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ 2x^3 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Nhận được ba điểm dừng:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases},\quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

*

$$A = z''_{x^2} = 12x^2 - 2,\ B = -2,\ C = 12y^2 - 2$$

$$\Delta = 4 - 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1)$$

$$\Delta(0,0) = 0$$

Nhận thấy z(0,0) = 0.

Với x = y = $\frac{1}{n}$ thì $z\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0$ với n > 1

Với x = $\frac{1}{n}$, y = -$\frac{1}{n}$ thì $z\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0$.

Như vậy trong bất kỳ lân cận nào của gốc toạ độ ta luôn tìm được các điểm (tìm được n) để hàm đổi dấu, chứng tỏ hàm không đạt cực trị tại (0, 0)

Δ (1, 1) = Δ (-1, -1) = -96 < 0 và A (1, 1) = A(-1, -1) = 10 > 0.

Vậy hàm đạt cực tiểu tại (1,1) và (-1, -1)

Giá trị cực tiểu là z (1,1) = z(-1, -1) = -2.

3.3.2. Cực trị có điều kiện

A. Định nghĩa và điều kiện cần

Điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gọi là điểm cực đại của hàm số f(x, y) với ràng buộc (hoặc có điều kiện) $\varphi(x, y) = 0$ nếu thoả mãn $\varphi(M_0) = 0$ đồng thời tồn tại lân cận đủ bé của M_0 trên đường cong ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$, trong lân cận đó có bất đẳng thức f(M) < f(M_0)

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu của hàm số với ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$

Để đơn giản bài toán tìm cực trị của hàm hai biến với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ được kí hiệu như sau:

$$\begin{cases} ext f(x, y) \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (3.15)$$

Trong đó ext là viết tắt của từ extremum nghĩa là cực trị.

Định lý 3.13. *Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số f(x,y) với điều kiện (3.15) và thoả mãn:*

Các hàm f(x, y) và $\varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ của đường cong ràng buộc (3.15)

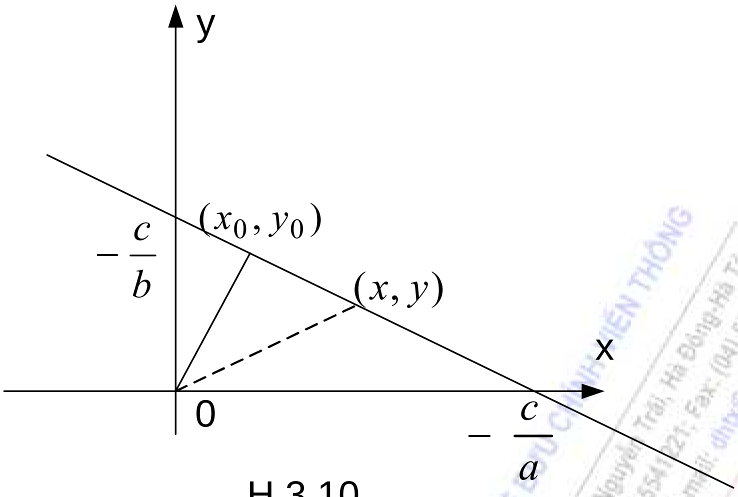
$M_0(x_0, y_0)$ không phải là điểm dừng của hàm $\varphi(x, y)$. Khi đó tồn tại số thực λ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \qquad (3.16)$$

Chú ý: Hàm số $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ được gọi là hàm Lagrange và λ được gọi là nhân tử Lagrange. Như vậy với điều kiện cho phép ta sẽ đi tìm điểm dừng (x_0, y_0, λ_0) của hàm Lagrange (do điều kiện tiên quyết $\varphi(x_0, y_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0)$=0), tiếp theo xem xét một số các điều kiện của bài toán (3.15) để có kết luận chính xác xem điểm (x_0, y_0) có phải là điểm cực trị có điều kiện hay không.

Ví dụ 15: Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với ràng buộc ax + by + c = 0, $c \neq 0$, $a^2 + b^2 > 0$.

Giải: Về hình học, đây là bài toán tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ gốc toạ độ đến các điểm trên đường thẳng (H.3.10). Vậy bài toán có duy nhất cực tiểu đó là chân đường vuông góc hạ từ O tới đường thẳng.



H.3.10

Lập hàm Lagrange: $L = x^2 + y^2 + \lambda(ax + by + c)$

Tìm điểm dừng của L: $\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda a = 0 \\ L'_y = 2y + \lambda b = 0 \\ L'_\lambda = ax + by + c = 0 \end{cases}$

Thay $x = -\dfrac{\lambda a}{2}$, $y = -\dfrac{\lambda b}{2}$ vào phương trình cuối nhận được:

$$-\frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2) = -c, \ \lambda = \frac{2c}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, \ y = -\frac{bc}{a^2 + b^2}$$

Điểm dừng duy nhất $M_0 \left(-\dfrac{ac}{a^2 + b^2}, -\dfrac{bc}{a^2 + b^2} \right)$ là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu bằng

$\dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$.

B. Điều kiện đủ

Định lý 3.14. *Giả sử f(x, y) và* $\varphi(x, y)$ *có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục ở lân cận* (x_0, y_0) *và* (x_0, y_0, λ) *là điểm dừng của hàm Lagrange, khi đó:*

* *Nếu* $d^2L(x_0, y_0, \lambda) = L''_{x^2}(x_0, y_0, \lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda)dxdy + L''_{y^2}(x_0, y_0, \lambda)dy^2$

xác định dấu đối với dx, dy trong miền thoả mãn ràng buộc:

$$d\varphi(x_0, y_0) = \varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$$

thì f(x,y) đạt cực trị có ràng buộc tại (x_0, y_0)*. Đạt cực đại nếu* $d^2L(x_0, y_0, \lambda) > 0$ *và đạt cực tiểu nếu* $d^2L(x_0, y_0, \lambda) < 0$.

* *Nếu* $d^2L(x_0, y_0, \lambda)$ *không xác định dấu trong miền nói trên thì hàm không đạt cực trị ràng buộc tại* (x_0, y_0).

Ví dụ 16: Giải bài toán $\begin{cases} ext(x+y+z) \\ xyz = 1 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases}$

Giải:

* Hàm Lagrange: L(x,y,z,λ) = x + y + z + λ(xyz - 1)

* Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} L'_x = 1+\lambda yz = 0 \\ L'_y = 1+\lambda zx = 0 \\ L'_z = 1+\lambda xy = 0 \\ L'_\lambda = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình thứ nhất với x và để ý đến phương trình thứ tư sẽ nhận được $\lambda = -1$ và x = y = z = 1

* Xét dấu của $d^2L(1,1,1,-1)$ với dx, dy, dz thoả mãn $d(xyz)\big|_{x=y=z=1} = 0$ và $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$

Ta có

$$L''_{x^2} = 0 = L''_{y^2} = L''_{z^2},\ L''_{xy} = -z,\ L''_{yz} = -x,\ L''_{zx} = -y$$

Suy ra $d^2L(1,1,1,-1) = -2(dxdy + dydz + dzdx)$

Mặt khác $d(xyz)\big|_{(1,1,1)} = (yzdx + zxdy + xydz)\big|_{(1,1,1)} = dx + dy + dz = 0$

Suy ra dz = - dx – dy

$d^2L(1,1,1,-1) = -2(dxdy - (dx+dy)^2) = (dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0$ khi $dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu có ràng buộc tại (1,1,1) và min (x + y + z) = 3

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG III.

• Giới hạn : $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x_n, y_n) = l$, $d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

nếu $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < d(M_0, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$

• Sự liên tục của hàm số: Hàm số f(M) xác định trên miền D và $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$

• Đạo hàm riêng: Đặt $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ gọi đó là số gia riêng của hàm f(x, y) theo biến x tại (x_0, y_0) và ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x},\ f'_x(x_0, y_0),$$

Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số đối với y tại $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu:

$$u'_y(x_0,y_0)\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,,\ f'_y(x_0,y_0)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Có thể chuyển toàn bộ các phép tính đạo hàm của hàm một biến số: cộng, trừ, nhân, chia,… sang phép tính đạo hàm riêng.

- Vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) tại (x_0, y_0) và công thức tính gần đúng :

$$df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

$$\Delta f\approx df \quad \text{hay} \quad f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)$$

- Đạo hàm riêng cấp cao

$$f''_{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad f''_{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

- Công thức Schwarz : $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$.
- Vi phân cấp cao

$$d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Người ta dùng kí hiệu luỹ thừa tượng trưng để viết gọn như sau:

$$d^nf(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

- Đạo hàm của hàm số hợp

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

- Đạo hàm của hàm ẩn $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$

- Đạo hàm theo hướng. Nếu hàm số u(x, y, z) khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $\vec{\ell}$ bất kỳ có các côsin chỉ phương $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

- Građiên: $grad\ u(M_0)=(u'_x(M_0),u'_y(M_0),u'_z(M_0))$

$$=u'_x(M_0)\vec{i}+u'_y(M_0)\vec{j}+u'_z(M_0)\vec{k}$$

trong đó $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz.

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}=ch_{\vec{\ell}}\ gradu$$

- Cực trị: Giải hệ $\begin{cases} f_x^{/}(x_0,y_0)=0 \\ f_y^{/}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\ \text{Gọi}\ \Delta=B^2-AC$$

Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận gì được về (x_0, y_0)

Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Cụ thể: đạt cực đại nếu A < 0, đạt cực tiểu nếu A > 0

- Cực trị có điều kiện. Phương pháp nhân tử Lagrange

Tìm (x_0,y_0,λ) thoả mãn hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x(x\ ,y\ )+\lambda\varphi'_x(x\ ,y\ )=0 \\ f'_y(x\ ,y\ )+\lambda\varphi'_y(x\ ,y\ )=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1. Miền liên thông D là miền có biên chỉ là một đường cong kín.

Đúng ☐ Sai ☐

3.2. Nếu tồn tại $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ thì tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x\ ,y)$ và chúng bằng nhau.

Đúng ☐ Sai ☐

3.3. Hàm số f(x,y) có đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) thì khả vi tại đó.

Đúng ☐ Sai ☐

3.4. Hàm số f(x,y) khả vi tại (x_0,y_0) thì liên tục tại đó .

Đúng ☐ Sai ☐

3.5. Hàm số f(x,y) khả vi tại (x_0,y_0) thì có các đạo hàm riêng tại đó .

Đúng ☐ Sai ☐

3.6. Tồn tại $f_{xy}^{//}(x_0,y_0), f_{yx}^{//}(x_0,y_0)$ thì $f_{xy}^{//}(x_0,y_0)=f_{yx}^{//}(x_0,y_0)$

Đúng ☐ Sai ☐

3.7. Nếu f(x,y) có đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai và $x=x(t), y=y(t)$ khả vi đến cấp hai

$$d^2 f=f_{x^2}^{//}dx^2+2f_{xy}^{//}dx.dy+f_{y^2}^{//}dy^2$$

Đúng ☐ Sai ☐

3.8. Hàm số f(x,y) đạt cực trị và khả vi tại (x_0,y_0) thì các đạo hàm riêng triệt tiêu tại đó.

Đúng ☐ Sai ☐

3.9. Các đạo hàm riêng triệt tiêu tại (x_0,y_0) thì hàm số đạt cực trị tại đó

Đúng ☐ Sai ☐

3.10. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0, y_0) \in D$ thì đạt cực trị tại đó

Đúng ☐ Sai ☐

3.11. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a. $z = \ln xy$, b. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

c. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$, d. $z = \dfrac{1}{y - x^2}$.

3.12. Tính đạo hàm riêng các hàm số sau:

a. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, b. $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$,

c. $z = x^{y^3}, x > 0$, d. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3.13. Chứng minh các hệ thức sau đây với các điều kiện tương ứng

a. $xz'_x + yz'_y = 2$, với $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

b. $yz'_x + xz'_y = 0$, với $z = f(x^2 - y^2)$,f(t) khả vi.

3.14. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau:

a. $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b. $z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \dfrac{x}{y}$.

3.15. Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a. $z = \ln tg\dfrac{y}{x}$.

b. $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

3.16. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình tương ứng

a. $x^3y - y^3x = a^2, a = \text{const}$, tính y'.

b. $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}, a = \text{const}$, tính y'.

c. $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

d. $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, tính z'_x, z'_y.

3.17. Chứng minh các hệ thức sau đây, với các điều kiện tương ứng

a. $z''_{x^2} z''_{y^2} = (z''_{xy})^2$, với $z = xf(\dfrac{x}{y})$, f(t) khả vi liên tục đến cấp hai.

b. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, với $u=\ln\dfrac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2}$.

c.. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, với $u=\ln r^2, r=\sqrt{x^2+y^2}$.

d. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, với $u=\dfrac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.18. Cho $u=xy^2z^3$, $M_0(1,2,-1), M_1(0,4,-3)$. Tính $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial \overrightarrow{M_0M_1}}$.

3.19. Cho $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, $\vec{r}=(x,y,z)$,. Tính $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{r}}$, $\vec{r}$ gọi là véc tơ bán kính.

Khi nào $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{r}}=|gradu|$

3.20. Cho $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.Tính $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{l}}$?

Khi nào $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{l}}=0$.

3.21. Tìm cực trị của các hàm số

a. $z=e^x(x+y)(x-y+4)$.

b. $z=x^3+y^3-3xy$.

c. $z=(2ax-x^2)(2by-y^2),\ ab\neq 0$.

d. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

e. $z=x^3+y^3-x-y$.

f. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

g. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, với x > 0, y > 0 .

h. $z=x^3+y^3-x^2y$.

3.22. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng $x + 2y + 3z = 3$.

3.23. Cho ellipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, tìm các điểm trên đó có khoảng cách gần nhất đến đường thẳng $3x - 4y = 0$.

CHƯƠNG IV: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Phép tính tích phân là phép tính cơ bản thứ hai của toán cao cấp. Đây là phép tính ngược của phép tính vi phân. Chính vì thế để tính tích phân nhanh chóng, chính xác cần thông thạo phép tính đạo hàm của hàm số. Cần nắm vững các nội dung sau đây:

1. Định nghĩa tích phân xác định, ý nghĩa của nó. Điều kiện tồn tại tích phân xác định.
2. Định nghĩa nguyên hàm, tích phân bất định và phân biệt với tích phân xác định.
3. Công thức Niutơn- Lépnit, điều kiện áp dụng.
4. Phương pháp tính tích phân: dựa vào bảng nguyên hàm các hàm số sơ cấp, tính chất của tích phân và hai phương pháp cơ bản (đổi biến số và tích phân từng phần).
5. Các bài toán ứng dụng tích phân xác định.
6. Tích phân suy rộng. Ý nghĩa và ứng dụng của nó.

NỘI DUNG

4.1. KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1.1. Định nghĩa tích phân xác định

Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$

1. Ta gọi một họ hữu hạn các điểm (x_i) , $i=\overline{0,n}$ sao cho

$$a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$$

là một phân hoạch (hay một cách chia) đoạn $[a,b]$ và gọi $\lambda=\underset{0\le i\le n-1}{Max}\,\Delta x_i$, trong đó $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{0,n-1}$ là bước của phân hoạch đã chọn. Tập phân hoạch kí hiệu là $(\wp_n)$

2. Ta gọi một cách chọn ứng với phân hoạch là một cách lấy n điểm ξ_i , sao cho $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}], i=\overline{0,n-1}$

3. Ta gọi số thực $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ là tổng Riơman (Riemann) của hàm f ứng với một phân hoạch và một cách chọn. Rõ ràng với $f\in R^{[a,b]}$ sẽ có dãy tổng Riemann σ. Kí hiệu là (σ_n).

4. Nếu $\lambda\to 0$ mà $\sigma_n\to I$ hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a,b] và cách chọn các điểm ξ_i ứng với cách chia đó) thì I gọi là tích phân xác định của f trên $[a,b]$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Nếu tồn tại I thì nói rằng f khả tích trên $[a,b]$

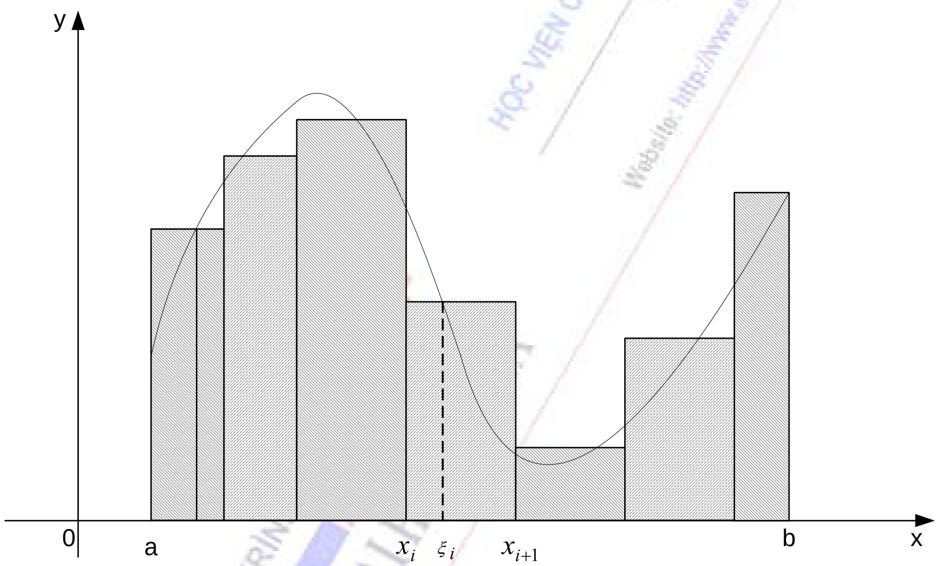
Như vậy
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (4.1)$$

Trong kí hiệu trên: $\int$ là dấu lấy tích phân, $\int_a^b$ là lấy tích phân từ a đến b, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân, x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân, dx là vi phân của biến lấy tích phân.

Chú ý:

- Chúng ta sẽ nhận được ý nghĩa hình học của tích phân xác định như sau: Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$ thì tổng Riemann chính là tổng diện tích các hình chữ nhật có kích thước tương ứng Δx_i và $f(\xi_i)$, $i = \overline{0, n-1}$. Đó là diện tích của hình thang gần đúng diện tích của hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, đường cong C_f của hàm số, các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Như vậy $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích của hình thang cong đã mô tả ở trên, kí hiệu là hình thang $\lfloor a, b, C_f \rfloor$.

Xem hình 4.1.



H.4.1

- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. Bởi vì tích phân ở vế phải cũng chính là giới hạn của dãy tổng Riemann $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, vì cả hai đều thực hiện phân hoạch $[a,b]$ với cùng một hàm số f. Như vậy tích phân xác định không phụ thuộc vào biến lấy tích phân

- Người ta định nghĩa $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (4.2)

Đặc biệt $\int_a^a f(x)dx = 0$ (4.3)

4.1.2. Điều kiện tồn tại tích phân xác định

A. Điều kiện cần

Định lí 4.1: *Nếu f khả tích trên [a, b] thì f bị chặn trên [a, b]*

Chứng minh: Lý luận phản chứng:

Giả sử f không bị chặn trên, khi đó lập được dãy con của (σ_n) dần đến $+\infty$ bằng cách lấy các điểm ξ_i trong lân cận không bị chặn trên của f. Chứng tỏ không tồn tại giới hạn hữu hạn của σ_n. Vậy f bị chặn trên, tương tự f cũng bị chặn dưới. Tức là tồn tại $m, M \in \mathbb{R}$ sao cho $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$

B. Điều kiện đủ

Định lí 4.2: *Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] thì khả tích trên đoạn đó*

Định lí 4.3: *Nếu $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên [a, b] thì khả tích trên đoạn đó.*

Hệ quả: *Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a, b] thì khả tích trên đoạn đó.*

Dưới đây ta đưa ra các định lí và sẽ không chứng minh, về một lớp hàm khả tích, lớp hàm này chứa tất cả các lớp hàm đã xét ở trên

Định lí 4.4: *Nếu $f(x)$ bị chặn trên [a, b] và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn thì $f(x)$ khả tích trên [a, b]*

Định lí 4.5: *Nếu $f(x)$ khả tích trên [a, b] thì $|f(x)|, k.f(x)$ $(k = const)$ cũng khả tích trên [a, b].*

Định lí 4.6: *Nếu f, g khả tích trên [a, b] thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng khả tích trên [a, b]*

Định lí 4.7: *Nếu f khả tích trên [a,b] thì khả tích trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Ngược lại nếu [a, b] được tách ra thành một số đoạn và trên mỗi đoạn đó hàm khả tích thì f khả tích trên[a, b].*

4.1.3. Các tính chất của tích phân xác định

Cho f, g khả tích trên [a, b] và a < b, λ là hằng số.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a,b)$

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. Nếu $f(x) \ge 0$ trên [a, b] thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

5. Nếu $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6. Nếu $f \ge 0$ trên [a,b], f liên tục tại $x_0 \in [a,b]$ và $f(x_0) > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$

Thật vậy $\exists \Omega_\delta(x_0)$ để $f(x) \ge \frac{1}{2} f(x_0), \forall x \in \Omega_\delta(x_0)$

Xét $e(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0) & x \in \Omega_\delta(x_0) \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \Omega_\delta(x_0) \end{cases}$

Suy ra $f(x) \ge e(x), \forall x \in [a,b]$. Theo 5.

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b e(x)dx = \frac{1}{2} f(x_0).2\delta > 0$$

7. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

8. Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le M$. Đặt $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Gọi μ là giá trị trung bình của f trên [a, b], khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

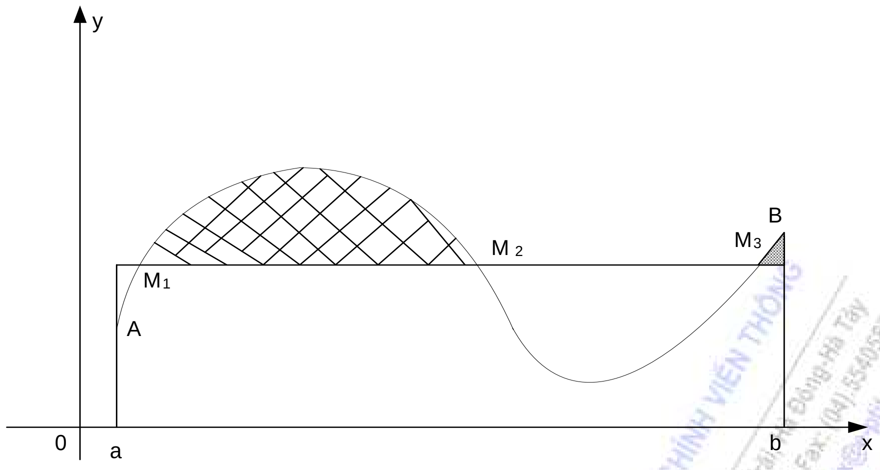
Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] theo định lí 1.19 của mục 1.4.3 sẽ tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho

$\mu = f(c)$. Do đó: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Giá trị $c \in [a,b]$ có thể biểu diễn $c = a + \theta(b-a), 0 < \theta < 1$. Vậy công thức trên có thể viết dưới dạng

: $$\int_a^b f(x)dx = f\left(a + \theta(b-a)\right)(b-a), 0 < \theta < 1$$

Như vậy trên đường cong C_f đồ thị của hàm $f(x) \ge 0$ trên [a, b] bao giờ cũng tìm được điểm $M(c, f(c))$ để hình chữ nhật có kích thước b-a và $f(c)$ có diện tích bằng diện tích của hình thang cong $[a, b, C_f]$. Xem hình 4.2



H.4.2

4.1.4. Công thức Niutơn-Lépnít (Newton-Leibnitz).

A. Hàm tích phân của cận trên

Cho $f(x)$ khả tích trên [a, b]. Lấy x_0 cố định, $x_0 \in [a,b]$. Cho $x \in [a,b]$ khi đó theo định lí 6 thì hàm $f(x)$ khả tích trên $[x_0, x]$ với x tuỳ ý trong [a, b]. Hàm số

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (4.4)$$

gọi là hàm tích phân của cận trên hay tích phân của hàm $f(x)$ theo cận trên

Định lí 4.8: *Nếu $f(x)$ khả tích trên [a, b] thì $\phi(x)$ là hàm liên tục trên [a, b]*

Chứng minh: Lấy $x \in (a,b)$ và $h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $x + h \in [a.b]$ xét số gia hàm số tại x:

$$\Delta\phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)dt = \mu h$$

trong đó $\underset{[a,b]}{Inf}\, f \le \underset{[x,x+h]}{Inf}\, f \le \mu \le \underset{[x,x+h]}{Sup}\, f \le \underset{[a,b]}{Sup}\, f$ (Theo tính chất 8.)

Từ đó $\Delta\phi(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, vậy $\phi(x)$ liên tục tại $x \in (a,b)$

Chú ý: Cũng tương tự như trên ta sẽ chứng minh $\phi(x)$ liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Định lí 4.9: *Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] thì $\phi(x)$ khả vi trên [a, b] và có*

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]\,. \qquad (4.5)$$

Chứng minh:

Lấy $x \in (a,b)$ ta có $\dfrac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \mu = f(x + \theta h), 0 < \theta < 1$, với h khá bé

Vì $f(x)$ liên tục tại x nên khi $h \to 0$ thì $f(x+\theta h)$ dần đến $f(x)$. Theo định nghĩa của đạo hàm, giới hạn đó chính là $\phi'(x)$

Vậy $\qquad \phi'(x) = f(x)$

Tương tự, ta chứng minh được các đạo hàm một phía: $\phi_p'(a) = f(a)$, $\phi_t'(b) = f(b)$

Hệ quả:

Nếu $\alpha(x),\beta(x)$ *khả vi trên* X, $f(x)$ *liên tục trên* X *và* $\left[\alpha(x),\beta(x)\right]\subset X\ \ \forall x\in X$ *thì*

$$G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \text{ khả vi trên } X \text{ và } G'(x)=f\big(\beta(x)\big)\beta'(x)-f\big(\alpha(x)\big)\alpha'(x) \quad (4.6)$$

B. Nguyên hàm của hàm số và tích phân bất định

Định nghĩa: Cho $f,F:X\to\mathbb{R}$. Gọi F là một nguyên hàm của f trên X nếu F khả vi trên X và thoả mãn: $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in X$.

Định lí 4.10: *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên* X *thì sẽ có nguyên hàm trên* X *và nếu* $F(x)$ *là một nguyên hàm thì tập hợp các nguyên hàm của* f *là* $\{F(x)+C\ ,\ C\in\mathbb{R}\}$

Chứng minh: Theo định lí 4.9, rõ ràng tồn tại nguyên hàm của $f(x)$ là

$$\phi(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt \Rightarrow \phi(x) \text{ có đạo hàm cấp 1 liên tục}$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của f trên X thì $F(x)+C$, $\forall C\in\mathbb{R}$ cũng là nguyên hàm của f vì

$$\big(F(x)+C\big)'=F'(x)=f(x)\ \ ,\ \ \forall x\in X.$$

Ngược lại nếu ϕ là một nguyên hàm nào đó của f trên X thì $F(x)-\phi(x)$ khả vi trên X, ngoài ra

$$\big(F(x)-\phi(x)\big)'=f(x)-f(x)=0 \text{ trên } X$$

$$\Rightarrow F(x)-\phi(x)=const \Rightarrow \phi(x)=F(x)+C \text{ trong đó } C\in\mathbb{R}.$$

Tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$ trên X gọi là tích phân bất định của $f(x)$,

Kí hiệu $\int f(x)dx$. Vậy

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad (4.7)$$

Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X.

C. Công thức Newton-Leibnitz.

Định lí 4.11: *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên [a, b] có một nguyên hàm là* $F(x)$ *trên [a, b] thì*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \quad (4.8)$$

Đại lượng $F(b)-F(a)$ *được kí hiệu* $F(x)\Big|_a^b$ *gọi là biến phân từ* a *đến* b *của* $F(x)$.

Chứng minh: Theo định lí trên, tồn tại $C\in\mathbb{R}$ sao cho

$$F(x)=\phi(x)+C, \text{ trong đó } \phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$F(b) = \phi(b) + C = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(x)dx + C$$

$$F(a) = \phi(a) + C = C$$

Vậy $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Chú ý: Công thức Newton-Leibnitz cho cách tính tích phân của các hàm liên tục bằng cách tìm một nguyên hàm của hàm số đó rồi tính biến phân của nó từ a đến b.

4.2. HAI PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.2.1. Phép đổi biến

Định lý 4.12: *Nếu* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, *$\varphi$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$.*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f liên tục trên [a, b]

khi đó:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx \tag{4.9}$$

Chứng minh: Theo giả thiết f liên tục, suy ra tồn tại nguyên hàm của nó F(x) có đạo hàm liên tục Theo công thức Newton - Leibnitz nhận được:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

Theo định lý về hàm hợp ta có $F(\varphi(t))$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và

$\{F(\varphi(t))\}' = F'_\varphi.\varphi'(t) = f(\varphi).\varphi'(t)$ .Chứng tỏ $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi).\varphi'(t)$.

Vậy tích phân vế trái là $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Chứng tỏ phép biến đổi tích phân $x = \varphi(t)$ đã được chứng minh.

Định lý 4.13: *Nếu* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *với φ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f liên tục trên [a, b]

với $t = \varphi(x)$ mà $f(x)dx = g(t)dt, g$ liên tục trên $[\varphi(a), \varphi(b)]$, khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt \tag{4.10}$$

Định lý ở đây được chứng minh tương tự như định lý 1, ở đây đã thực hiện phép đổi biến tích phân $t = \varphi(x)$.

Chú ý: Khi thực hiện phép đổi biến, nhận được tích phân có cận mới. Tuỳ theo các hàm dưới dấu tích phân mà chọn một trong hai cách đổi biến.

4.2.2. Phép tích phân từng phần

Định lý 4.14: ***Nếu*** *$u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$* ***và*** *u,v có đạo hàm liên tục trên [a, b] thì:*

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx \qquad (4.11)$$

Chứng minh: Nếu u,v có đạo hàm liên tục, dễ dàng nhận được công thức sau:

$$\int u'.vdx = u.v - \int u.v'dx$$

Thật vậy $(u.v)' = u'.v + u.v' \quad \Rightarrow \quad u.v = \int u'vdx + \int u.v'dx$

Suy ra $\int_a^b u'vdx = u.v\Big|_a^b - \int_a^b u.v'dx$

Ví dụ 1: Chứng minh các công thức dưới đây:

a. Cho f liên tục trên [0, a] thì $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

b. Cho f liên tục trên [0, 1] thì: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

c. Cho f liên tục trên [-a, a] thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn} \end{cases}$$

d. Cho f liên tục trên $(-\infty,+\infty)$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Giải:

a. Đổi biến x = a – t

b. Đổi biến x = $\frac{\pi}{2} - t$ và đổi biến x = $\pi - t$

c. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

Đổi biến x = - t, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$

$f(x)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in [0,a]$. Do đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

$f(x)$ là hàm số chẵn $\Leftrightarrow f(x) = f(-x), \quad \forall x \in [0,a]$. Do đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

d. $$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{a}^{a+T} f(x)dx$$

Đổi biến x = t + T và nhớ rằng $f(x+T) = f(x)$ sẽ có:

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t+T)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(x)dx$$

suy ra $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

a. $$I_1 = \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

b. $$I_2 = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Giải:

a. Đổi biến $x = a\sin t$, $x \in [0,a] \Rightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |a| \cos t \, a \cos t \, dt = a|a|\frac{\pi}{4}$$

b. Đổi biến $t = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [1,0]$

$$I_2 = -\int_{1}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 3: (Tích phân Wallis)

Tính $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$

Giải:

a. Đặt $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x dx \Rightarrow du = (n-1)\cos^{n-2} x \sin x \, dx$, $v = \sin x$

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x (1-\cos^2 x)dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}, \quad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}.\frac{2m-3}{2(m-2)}...\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \frac{m}{2m+1}.\frac{2(m-2)}{2m-1}...\frac{2}{3}.1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

.

4.3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta đã biết rằng $\int f(x)dx = F(x) + C$ trên X Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X và C là hằng số tuỳ ý.

4.3.1. Bảng các nguyên hàm thông dụng

A. Tính chất cơ bản của tích phân bất định.

Trước hết thấy ngay rằng các tính chất sau đây của tích phân bất định là hiển nhiên.

Cho f, g có nguyên hàm, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int \lambda.f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

4. Nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì $f\left(u(x)\right)u'(x)$ có một nguyên hàm là $F\left(u(x)\right)$ khi u có đạo hàm liên tục, tức là

$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + C$, đặc biệt $\int df(x) = f(x) + C$

B. Bảng các nguyên hàm

Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $F(x)$	Tập xác định X
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$a^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}^*, 0 < a \neq 1$	$\dfrac{1}{\alpha \ln a} a^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
tgx	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\cot gx$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	tgx	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot g^2 x$	$-\cot gx$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}, a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1 - x^2}$	$\dfrac{1}{2} \ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \in R^*$	$\arcsin \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}\setminus\{-a, a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - 1}\right\rvert$	$\mathbb{R}\setminus[-1, 1]$

4.3.2. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định

A. Phương pháp tích phân từng phần

Cho u, v có dạo hàm liên tục trên X khi đó

$$\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{trên } X \tag{4.12}$$

Chú ý:

• Phương pháp này thường áp dụng tính các tích phân các hàm số có dạng sau đây: $P(x)\ln^k x$, $P(x)e^{\alpha x}$, $P(x)\sin\alpha x$, $P(x)\cos\alpha x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)arctgx$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, trong đó: $k\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, P(x) là đa thức.

• Để tính $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định.

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx = Q(x)e^{\alpha x} + C$$

Trong đó $\deg P(x) = \deg Q(x)$

• Trong quá trình tính toán có thể phải lặp lại một số hữu hạn lần phương pháp tích phân từng phần.

B. Phương pháp đổi biến số

Đặt $x=\varphi(t)$, với φ đơn điệu và φ có đạo hàm liên tục trên Y khi đó

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad (4.13)$$

Đặt $t=\psi(x)$ khi đó $f(x)dx = g(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=\psi(x)} \qquad (4.14)$$

Chú ý:

Đổi biến số để tính nguyên hàm theo biến mới dễ dàng hơn. Trong kết quả phải trở về biến lấy tích phân bất định ban đầu. Điều này khác hẳn khi tính tích phân xác định.

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a. $I_1 = \int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

b. $I_2 = \int \dfrac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Giải:

a. Đặt $x=t^2$, $t>0$, $dx=2tdt$

$$I_1 = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int\frac{dt}{1+t^2} = 2arctg\sqrt{x}+C$$

b. Đặt $x=t^3$, $dx = 3t^2dt$

$$I_2 = \int\frac{\sin t}{t^2}.3t^2dt = 3\int\sin tdt = -3\cos\sqrt[3]{x}+C$$

Ví dụ 5: Tính: $I = \int \dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x+1}$, $dx = 2tdt$

$$I = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = \int\left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{\sqrt{x+1}+x+2} - \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C$$

Ví dụ 6: Tính: $I = \int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$

Giải:

Đặt $\sqrt{2x+1} = t$, $dx = tdt$

$$I = \int 3^t tdt = \frac{t.3^t}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^t dt = \frac{t.3^t}{\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}3^t + C$$

$$= \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{(\ln 3)^2}\left(\sqrt{2x+1}.\ln 3 - 1\right) + C$$

4.3.3. Cách tính tích phân bất định của các hàm số hữu tỉ

Nhận xét:

- Nếu hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = x^{n-1}\frac{P(x^n)}{Q(x^n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, bằng cách đổi biến $t = x^n$ sẽ nhận được:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{n}\int\frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

Như vậy ta đã hạ thấp bậc của các đa thức có mặt trong hàm f

- Mọi hàm hữu tỉ (đôi khi gọi là phân thức hữu tỉ) không thực sự đều phân tích thành tổng của một đa thức với một phân thức hữu tỉ thực sự.
- Sử dụng định lí 2 trong mục 2.1.2 và tính chất của tích phân bất định, thấy rằng quá trình tích phân các hàm hữu tỉ là quá trình tích phân các phân thức tối giản.

Dưới đây ta trình bày phương pháp tích phân các phân thức tối giản thực sự.

A. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ nhất

$$I = \int\frac{dx}{(x-a)^n} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Nếu $n = 1$ thì $\int\frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$, với $C = const$ khi xét $x < a$ hoặc $x > a$

Nếu $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ thì $\int\frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}.\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$

B. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ hai

$$I = \int\frac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^n}dx \quad , \quad \lambda,\mu,a,b,c \in \mathbb{R} \text{ và } b^2 - 4ac < 0, n \in \mathbb{N}^*$$

- Nếu $\lambda = 0$

$$I=\mu\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Biến đổi $ax^2+bx+c=-\frac{\Delta}{4a}\left\{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right\}, \Delta=b^2-4ac$

Thực hiện đổi biến $t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ Suy ra $I=\mu\left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^n\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$

Dẫn đến tính $J_n(t)=\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ bằng phương pháp truy toán.

Trước hết $J_1(t)=\int\frac{dt}{1+t^2}=arctgt+C$

Tích phân từng phần sẽ có

$$J_n(t)=\frac{t}{(1+t^2)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$J_n=\frac{t}{(1+t^2)^n}+2n(J_n-J_{n+1})$$

$$2nJ_{n+1}=(2n-1)J_n+\frac{t}{(1+t^2)^n}$$

Chú ý:

Có thể tính J_n bằng phép đổi biến $\theta=arctgt\Rightarrow dt=(1+tg^2\theta)d\theta$

$$J_n=\int\frac{d\theta}{(1+tg^2\theta)^{n-1}}=\int\cos^{2(n-1)}\theta\, d\theta$$

Tuyến tính hoá $\cos^{2(n-1)}\theta$ (phần B mục 1.2.3) rồi tính nguyên hàm, sau đó trở về biến t.

- Nếu $\lambda\neq 0$.

$$I=\frac{\lambda}{2a}\int\frac{2ax+\frac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$=\frac{\lambda}{2a}\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx+\frac{\lambda}{2a}\left(\frac{2a\mu}{\lambda}-b\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Tích phân thứ nhất tính được nhờ phép đổi biến $u=ax^2+bx+c$

$$\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\int\frac{du}{u^n}=\frac{1}{1-n}\ \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+C$$

Tích phân thứ hai tính theo J_n đã trình bày ở trên.

Ví dụ 7 Tính $I=\int\frac{dx}{x^3+1}$ và $J=\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$

Giải:

Phân tích $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}.\frac{x-2}{x^2-x+1}$

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}I_1$$

Trong đó $I_1 = \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

Cuối cùng $I = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

Bằng phép tích phân từng phần sẽ có

$$I = \frac{x}{x^3+1} + 3\int \frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx = \frac{x}{x^3+1} + 3(I-J)$$

Suy ra $J(x) = \frac{1}{3}\left(2I + \frac{x}{x^3+1}\right)$

$$= \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{3(x^3+1)} + C$$

4.3.4. Tính nguyên hàm các phân thức hữu tỉ đối với một số hàm thông dụng

A. Hàm hữu tỉ đối với sin và côsin

1. Trường hợp tổng quát.

Xét $\int R(\sin x, \cos x)dx$ trong đó R là ''phân thức hữu tỉ hai biến''

Thực hiện phép đổi biến: $t = tg\frac{x}{2}$. Khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Khi đó đưa về dạng $\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$

Tuy nhiên bậc của $P(t)$ và $Q(t)$ thường là cao, làm cho quá trình tính toán rất nặng nhọc. Sau đây ta xét một số trường hợp đặc biệt, với cách đổi biến thích hợp sẽ tính toán dễ dàng hơn.

2. Trường hợp đặc biệt thứ nhất.

- Nếu $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ thì đổi biến $t = tgx$ hoặc $t = \cot gx$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$ thì đổi biến $t = \sin x$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$ thì đổi biến $t = \cos x$

3. Trường hợp đặc biệt thứ hai.

Khi $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x.\cos^n x \quad , \quad m, n \in \mathbb{Z}$

- Nếu m lẻ thì đổi biến $t = \cos x$
- Nếu n lẻ thì đổi biến $t = \sin x$

- Nếu m,n chẵn và không cùng dương thì đổi biến $t = tgx$
- Nếu m,n chẵn và cùng dương thì tuyến tính hoá sau đó tính nguyên hàm.

B. Hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Xét $I = \int f(e^{\alpha x})dx$, trong đó $f(x)$ là hàm hữu tỉ. Thực hiện phép đổi biến

$t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$, Khi đó

$$I = \frac{1}{\alpha}\int \frac{f(t)}{t}dt$$

Đó là tích phân của hàm hữu tỉ đã xem xét trong phần 4.3.3

Ví dụ 8: Tính $I = \int \frac{dx}{a + \cos x}$, $a > 1$

Giải:

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$ thì $I = \int \frac{2dt}{(a+1)+(a-1)t^2} \Rightarrow I = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} arctg\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}tg\frac{x}{2}\right) + C$

Ví dụ 9: Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 5}$

Giải:

Đổi biến $t = tg\frac{x}{2}$, $I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4.\frac{2t}{1+t^2} + 3.\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2}$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C$$

Ví dụ 10: Tính các tích phân sau.

a. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$, b. $I_2 = \int \sin^3 x\cos^2 xdx$,

c. $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$, d. $I_4 = \int \sin^2 x\cos^4 xdx$.

Giải:

a. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$, đặt $t = \sin x$, $dt = \cos xdx$

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 x\cos xdx}{\sin^4 x} = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

b. $I_2 = \int \sin^3 x\cos^2 xdx$, đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin xdx$

$$I_2 = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int (1-t^2)t^2 dt = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

c. $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$, đặt $t = tgx$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2(1+t^2)dt = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

d. $I_4 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x \ = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 3x + C$$

Ví dụ 11: Tính tích phân bất định sau

$$\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2} \ , \ \alpha \in R^*$$

Giải:

Đặt $t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x} dx$

$$\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{t(1+t)^2} = \frac{1}{\alpha}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

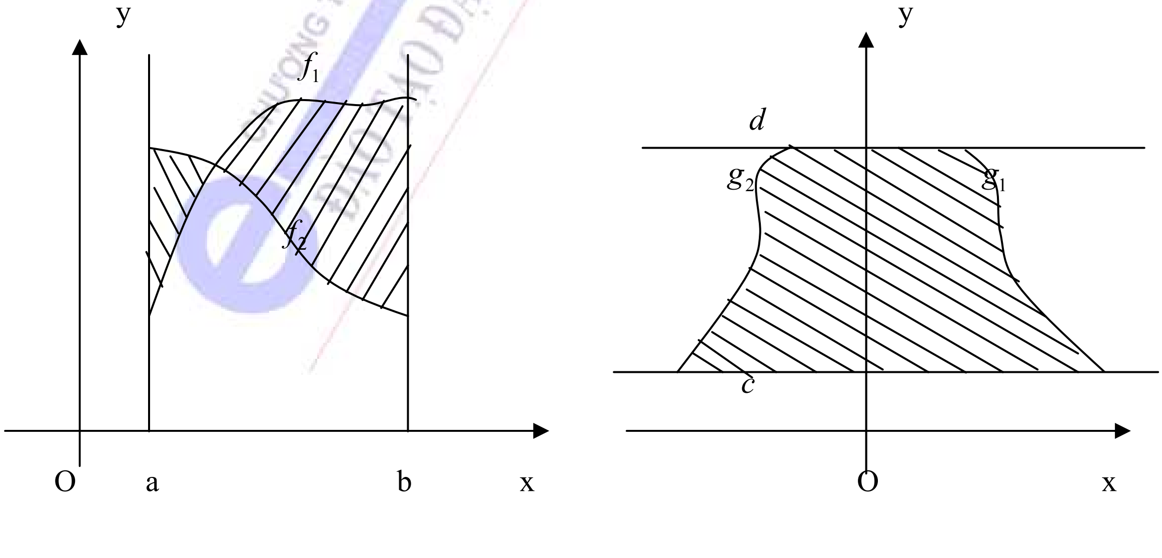
$$= \frac{1}{\alpha}\left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \right) + C \quad = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha x - \ln(1+e^{\alpha x}) + \frac{1}{1+e^{\alpha x}} \right) + C$$

4.4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chú ý: Trong mục này khi xem xét một hình phẳng hay một vật thể, chúng ta cần để ý đến tính chất đối xứng của hình để đơn giản quá trình tính toán hoặc để chọn một hệ qui chiếu thích hợp để giải quyết bài toán được dễ dàng hơn.

4.4.1. Tính diện tích hình phẳng

A. Miền phẳng giới hạn bởi các đường cong trong toạ độ Đềcác(Descartes)



H.4.3

Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ trong đó f_1, f_2 liên tục từng khúc trên [a, b]. Gọi diện tích của miền phẳng D là S. Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, nhận được công thức tính S như sau:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx \qquad (4.15)$$

Tương tự, nếu D giới hạn bởi các đường:

$y = c$, $y = d$, $(c < d)$, $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ trong đó g_1, g_2 liên tục từng khúc trên [c, d] thì

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy \qquad (4.16)$$

B. Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Khi đó $$S = \int_\alpha^\beta |y(t).x'(t)| dt \qquad (4.17)$$

Ví dụ 10: Tính diện tích của hình elíp có các bán trục a,b.

Giải: Hình êlíp giới hạn bởi êlíp có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

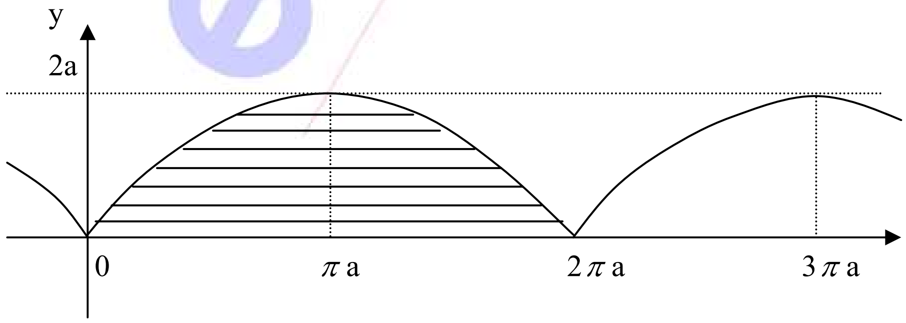
Do tính chất đối xứng của êlíp qua các trục toạ độ và do phương trình tham số của êlíp có dạng: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

nên ta có: $S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t.dt = \pi ab$

Ví dụ 11: Hãy tính diện tích của hình giới hạn bởi trục hoành và một nhịp của đường Cycloid cho bởi phương trình tham số:

$x = a(t - \sin t)$

$y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$. (Xem hình 4.4)



H.4.4

Giải: $S = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt = 3a^2\pi$

4.4.2. Tính độ dài đường cong phẳng

A. Phương trình cho trong hệ toạ độ Descartes vuông góc

Giả sử đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình

$$y = f(x) \quad , \quad A\left(a, f(a)\right) \quad , \quad B\left(b, f(b)\right)$$

Trong đó f có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$, $\quad (a<b)$

Nếu gọi l là độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ thì l được tính theo công thức

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx \tag{4.18}$$

B. Phương trình cho trong dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t_0 \le t \le t_1 . \qquad \varphi,\psi \text{ có đạo hàm liên tục trên } [t_0, t_1]$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \tag{4.19}$$

Ví dụ 12: Hãy tính độ dài của một nhịp Cycloid cho trong ví dụ 11.

Giải:

$$x'(t) = a(1-\cos t) \quad , \quad y' = a\sin t$$

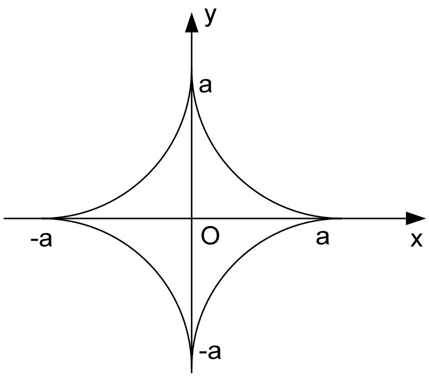
$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}dt$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0} = 8a$$

Ví dụ 13: Hãy tính độ dài của Astroid, phương trình tham số có dạng.

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \quad a>0, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

hoặc trong hệ toạ độ Descartes có dạng $\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Xem hình 4.5)



H.4.5

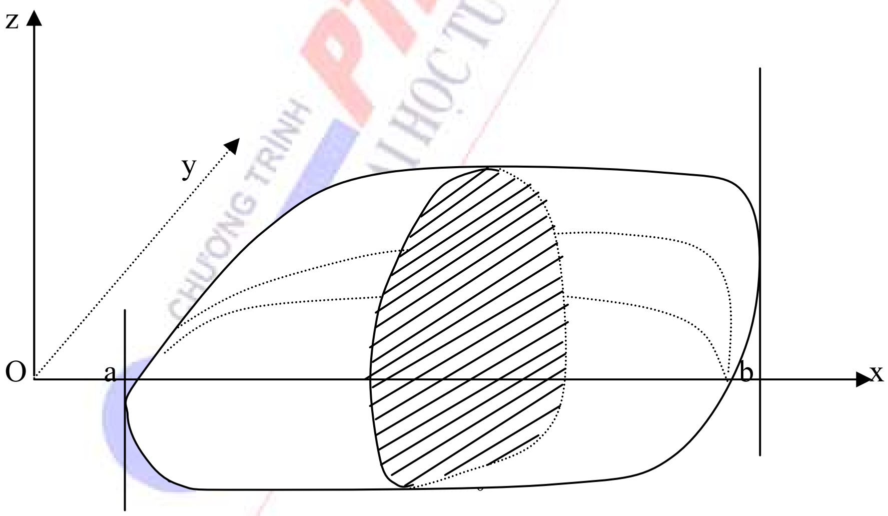
Giải:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t \quad , \quad y' = 3a\sin^2 t\cos t . \qquad l = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

4.4.3. Tính thể tích vật thể

A. Công thức tổng quát

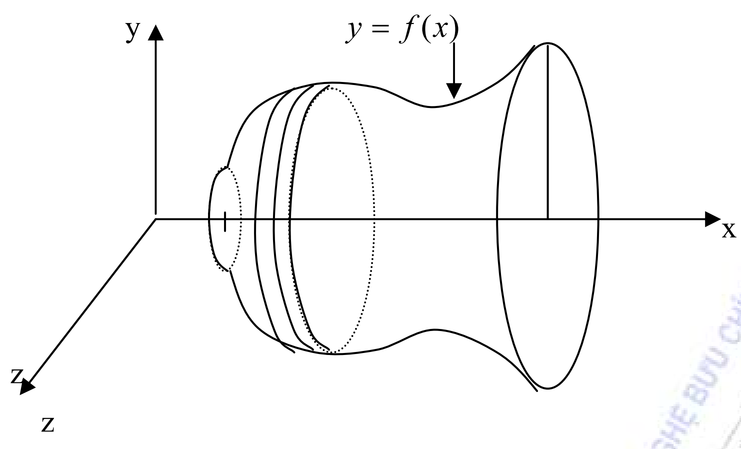
Giả sử vật thể (V) nằm giữa hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng này có phương trình là $x = a$ và $x = b$, $a < b$. Các thiết diện của vật thể (V) vuông góc với trục Ox nằm trên mặt phẳng có phương trình $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$ có diện tích tương ứng $S(x_0)$. (Xem hình 4.6). Khi đó thể tích của vật thể (V), kí hiệu là V, tính theo công thức



H.4.6

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{4.20}$$

B. Công thức tính cho vật thể tròn xoay



H.4.7

Vật thể (V) tròn xoay là vật thể được tạo thành do một hình thang cong giới hạn bởi các đường: $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ quay xung quanh trục Ox (xem hình 4.8). Cụ thể hơn, phần không gian bị chiếm chỗ do hình thang cong quay xung quanh trục Ox gọi là vật thể tròn xoay.

Như vậy các thiết diện vuông góc với trục Ox là các hình tròn. Diện tích của thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$ sẽ là $\pi . f^2(x_0)$. Từ đó nhận được công thức tính:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \tag{4.20}$$

Ví dụ 14: Hãy tính thể tích của êlipxôít với các bán trục a, b, c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Giải:

Thiết diện của elipxôit vuông góc với trục Ox là một hình elíp. Thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$, $x_0 \in [-a, a]$ được giới hạn bởi elip có các bán trục $b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$ phương trình là

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x_0^2}{a^2} \\ x = x_0 \end{cases}$$

Theo ví dụ 1, diện tích thiết diện biểu diễn dưới dạng

$$S(x_0) = \pi bc\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

Vậy $V = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(a-\frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right) = \frac{4}{3}\pi abc$

Ví dụ 15: Tính thể tích vật thể do một nhịp Cycloid quay xung quanh trục Ox tạo ra. Biết Cycloid cho bởi phương trình tham số là.

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

Giải:

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$= \pi a^3\left\{2\pi - 3\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 3t + 3\cos t dt)\right\} = 5\pi^2 a^3$$

4.5. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

4.5.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

A. Định nghĩa

1. Cho $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, khả tích trên $[a,A]$, $\forall A>a$.

Tích phân suy rộng của f với cận $+\infty$ được kí hiệu là: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ về số $I\in\mathbb{R}$ nếu

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I \quad \text{kí hiệu} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = I$$

Nếu I không tồn tại hoặc $I=\infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

2. Cho $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, khả tích trên $[B,a]$, $\forall B<a$

Tích phân suy rộng của f với cận $-\infty$, kí hiệu là $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ hội tụ về số $J\in\mathbb{R}$ nếu

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx = J = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Nếu J không tồn tại hoặc $J = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[A, B], \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$. Tích phân suy rộng của f với các cận vô hạn được kí hiệu là: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ, $\forall a \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp này kí hiệu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \ , \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Rõ ràng nếu f liên tục trên tập xác định của nó, và có nguyên hàm $F(x)$ thì có thể dùng kí hiệu Newton-Leibnitz như sau:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} F(A) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - \lim_{B \to -\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} F(A) - \lim_{B \to -\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Ví dụ 16: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, c. $\int_{a}^{+\infty} \sin x dx$, $a \in \mathbb{R}$, d. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Giải:

a. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{0}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} arctgx - arctg0 = \frac{\pi}{2}$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ.

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} arctgx - \lim_{x \to -\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Vậy tích phân suy rộng trên hội tụ.

c. $\int_{a}^{+\infty} \sin x dx = -\cos x\Big|_{a}^{+\infty} = \cos a - \lim_{x \to +\infty} \cos x$

Không tồn tại giới hạn của $\cos x$ khi $x \to \infty$, vậy tích phân suy rộng đã cho phân kỳ.

d. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\ln x\Big|_1^{+\infty} & \text{nếu } \alpha=1\\ \frac{1}{1-\alpha}.\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty} & \text{nếu } \alpha\neq 1\end{cases}$

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}=\begin{cases}0 & \text{nếu } \alpha>1\\ \infty & \text{nếu } \alpha<1\end{cases}$

Vậy tích phân hội tụ với $\alpha>1$, khi đó $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$, và phân kỳ với $\alpha\le 1$ Chú ý: Tương tự như ý nghĩa hình học của tích phân xác định, ở đây ta thấy:

Nếu tích phân suy rộng hội tụ và $f(x)\ge 0$ thì một miền vô hạn có diện tích hữu hạn, tính được nhờ vào tích phân suy rộng với cận vô hạn

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng

Sau đây ta xét trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^{\infty}f(x)dx$ với $f(x)\ge 0$.

Các trường hợp tích phân suy rộng khác với $f(x)$ giữ nguyên dấu, chúng ta có thể suy diễn tương tự để nhận được các kết quả tương ứng.

Đặt $\phi(A)=\int_a^A f(x)dx$

Vì $f(x)\ge 0$ trên $[a,+\infty)$, chứng tỏ $\phi(A)$ đơn điệu tăng trên $[a,+\infty)$. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu (Xem mục 1.2.2) suy ra:

Định lí 4.15: *Cho hàm số $f(x)\ge 0$ và khả tích trên $[a,A]$, $\forall A>a$ để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là tồn tại $L\in R$ sao cho $\phi(A)\le L$, $\forall A$*

Định lí 4.16:(Tiêu chuẩn so sánh) *Cho các hàm số $f(x),g(x)$ khả tích trên $[a,A]$, $\forall A>a$ và $0\le f(x)\le g(x)$, $\forall x\ge b>a$ khi đó*

Nếu $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ phân kỳ

Chứng minh:

Ta có thể biểu diễn $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty}f(x)dx$

Như vậy sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ là đồng thời với sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int_b^{+\infty}f(x)dx$

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_b^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, theo định lí 4.15 suy ra $\int_b^{A} g(x)dx \le L$, $\forall A$.

Theo tính chất của tích phân xác định sẽ có $\int_b^A f(x)dx \le \int_b^A g(x)dx \le L$, $\forall$A

Chứng tỏ $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Nếu $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_b^{A} f(x)dx$ không bị chặn

Tức là $\forall M > 0\ \exists A_0 \in (b,+\infty)$ sao cho $\int_b^{A_0} f(x)dx > M \Rightarrow \int_b^{A_0} g(x)dx \ge \int_b^{A_0} f(x)dx > M$

Chứng tỏ $\int_b^{A} g(x)dx$ không bị chặn theo định lí 4.15 suy ra $\int_b^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Định lí 4.17: *Cho các hàm số $f(x), g(x)$ không âm và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$. Khi đó:*

1. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in \mathbb{R}_+^*$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

2. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

3. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Chứng minh:

1. $\varepsilon > 0$, $\exists b > 0$, $\forall x > b \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$

Vì $g(x) \ge 0 \Rightarrow (l-\varepsilon)g(x) < f(x) < (l+\varepsilon)g(x)$

Lấy ε sao cho $l - \varepsilon = c > 0$. Theo định lí 4.16: Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} (l-\varepsilon)g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} (l+\varepsilon)g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2. Lấy $\varepsilon = 1$, $\exists b > 0$, $\forall x > b \Rightarrow 0 \le f(x) \le \varepsilon g(x) = g(x)$

Theo định lí 4.16 chứng tỏ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

3. $\forall M > 0$, $\exists b > 0$, $\forall x > b \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} > M$, Lấy $M = 1$ thì $f(x) > g(x)$, Theo định lí 2 suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Hệ quả 1: *Giả sử với x đủ lớn hàm số $f(x)$ có dạng:*

$$f(x) = \frac{h(x)}{x^k} \ , \ k > 0 \ , \ h(x) \geq 0 . \textit{ Khi đó}$$

Nếu $k > 1$ và $0 \leq h \leq c < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k \leq 1$ và $h(x) \geq c > 0$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Trong đó c là hằng số.

Hệ quả 2: *Nếu $f(x) \geq 0$ và là VCB cấp k so với VCB $\dfrac{1}{x}$ tại $+\infty$ ($f(x) \sim \dfrac{c}{x^k}, c \neq 0$) thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $k > 1$ và phân kỳ khi $k \leq 1$*

Hệ quả 1 được suy ra trực tiếp từ định lí 4.16 và ví dụ 16d.

Hệ quả 2 được suy ra trực tiếp từ định lí 4.17 và ví dụ 16d.

Ví dụ 17: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau

a. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$, b. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, c. $\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}dx$

Giải:

a. $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \sim x^{\frac{1}{2}} \right)$ theo hệ quả 2, tích phân suy rộng phân kỳ.

b. $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \dfrac{1}{x^2} \right)$, tích phân suy rộng hội tụ

c. $\left(\dfrac{e^{-x^2}}{x^2} : \dfrac{1}{x^2} \right) \underset{x \Rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, theo định lí 4.17, tích phân suy rộng hội tụ.

Dưới đây ta sẽ đưa ra định lí tổng quát về điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Định lí 4.18 *Để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists A_0 > a \;,\; \forall A > A_0 \;,\; \forall A' > A_0 \Rightarrow \left|\phi(A') - \phi(A)\right| < \varepsilon$$

Hay $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Dựa vào tính chất của tích phân xác định

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \le \int_A^{A'} \left|f(x)\right| dx$$

Ta nhận được hệ quả sau đây

Hệ quả 3: *Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

C. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng

1. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

2. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Định lí 4.19: *Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và hàm số $g(x)$ bị chặn trên $[a,+\infty)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.*

Chứng minh:

Giả sử $|f.g| \le M.|f|$,

Theo định lí 4.16 suy ra $\int_a^{+\infty} |f(x).g(x)|dx$ hội tụ, chứng tỏ $\int_a^{+\infty} f(x).g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 18: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng:

a. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R} \,,\, k \in \mathbb{R}^*$; b. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; c. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

Giải:

a. Nhận xét: $|\cos\alpha x| \le 1 \;,\; \forall x$; $\frac{1}{k^2+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ khi $x \to \infty$

Ta biểu diễn $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx$

Tích phân thứ nhất là tích phân xác đinh, hàm dưới dấu tích phân liên tục nên khả tích vậy hội tụ tuyệt đối. Tích phân thứ hai là suy rộng, theo định lí 4.19, hội tụ tuyệt đối. Vậy tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

b. Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}} = 0;$

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int_0^{a}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \int_a^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}, \quad a>0$$

Tích phân thứ nhất hội tụ (đó là tích phân xác định vì hàm dưới dấu tích phân khả tích).

Lấy $\lambda > 1$,có $\dfrac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} : \dfrac{1}{x^{\lambda}} = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\sqrt{e^{2x}-1}} \to 0$ khi $x\to\infty$.

Vì $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\lambda}}$ hội tụ, $a>0$ suy ra tích phân suy rộng đã cho hội tụ.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = 0$

Ta có $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int\limits_1^{a}\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx + \int\limits_a^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

Tích phân thứ nhất hội tụ (tồn tại) vì hàm dưới dấu tích phân khả tích trên $[1,a]$, $\forall a>1$

Lấy $1<\lambda<2$ nhận được $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} : \dfrac{1}{x^{\lambda}} = \dfrac{\ln x}{x^{2-\lambda}}.\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} \to 0$ khi $x\to\infty$.

Ta có $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\lambda}}$ hội tụ, $\forall a>0 \Rightarrow$ tích phân đã cho hội tụ.

4.5.2. Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm

A. Định nghĩa

1. Cho $f:(a,b)\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. Nói rằng $x_0\in(a,b)$ là cực điểm của f nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Hàm số có cực điểm tại a hoặc b nếu $f(a^+)=\infty$ hoặc $f(b^-)=\infty$

2. Cho $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f(b^-)=\infty$, khả tích trên $[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$ đủ bé. Tích phân suy rộng của f trên $[a,b]$, kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)dx$. Nói rằng tích phân suy rộng hội tụ về $I\in\mathbb{R}$ nếu

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I$, kí hiệu $I=\int\limits_a^b f(x)dx$

Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn (không có I hoặc $I=\infty$) thì nói rằng tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a^+)=\infty$ khả tích trên $[a+\varepsilon,b]$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ về J nếu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = J \quad \text{(hữu hạn).}$$

Nếu không tồn tại J thì nói rằng tích phân suy rộng phân kỳ.

4. Cho $f:[a,b]\setminus\{x_o\}\to\mathbb{R}$, $x_o\in(a,b)$ là cực điểm của f

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_a^{x_0} f(x)dx$ và $\int_{x_0}^b f(x)dx$ cùng hội tụ, khi đó kí hiệu:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

Chú ý: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ trừ ra các cực điểm của nó và có nguyên hàm là $F(x)$, ta có thể dùng công thức Newton- Leibnitz và viết

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)-F(a) \ \text{ hoặc } \int_a^b f(x)dx = F(b)-\lim_{\varepsilon\to 0}(a+\varepsilon)$$

Ví dụ 19: Xét sự tồn tại của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là ± 1

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{a}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{a}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ \forall a\in(-1,1)$$

$$= \arcsin\ a - \lim_{x\to -1}\arcsin\ x + \lim_{x\to 1}\arcsin\ x - \arcsin\ a = \pi$$

b. Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là a

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \ln(x-a)\Big|_a^b & \text{với } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}.\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\Big|_a^b & \text{với } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Vì $\lim_{x\to a^+}\ln(x-a) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha<1 \\ \infty & \text{nếu } \alpha>1 \end{cases}$

Suy ra tích phân đã cho hội tụ với $\alpha<1$ và phân kỳ với $\alpha\ge 1$.

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng

Chúng ta giới hạn trường hợp $f(x)$ giữ nguyên dấu trên (a,b). Giả sử $f(x) \geq 0$ trên $[a,b)$ và $f(b^-) = \infty$

Đặt $\phi(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Rõ ràng $\phi(\varepsilon)$ là hàm số giảm ở lân cận bên phải của điểm 0. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu, chúng ta nhận được định lí sau đây:

Định lí 4.20: *Để tich phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là $\phi(\varepsilon)$ bị chặn ở lân cận bên phải điểm $\varepsilon = 0$, tức là $\phi(\varepsilon) \leq L$, $\forall \varepsilon > 0$*

Các định lí so sánh ở mục 4.5.1 hoàn toàn đúng cho các trường hợp tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm. Các hệ quả tương tự với hệ quả 1,2 sẽ là:

Hệ quả 1': *Giả sử với x đủ gần b và $(x < b)$ hàm số $f(x)$ có dạng*

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^k} \quad , \quad k > 0 \quad , \quad g(x) \geq 0 \text{ khi đó:}$$

Nếu $k < 1$ và $0 \leq g(x) \leq c < \infty$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k \geq 1$ và $g(x) \geq c > 0$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ trong đó c là hằng số

Hệ quả 2': *Nếu $f(x) \geq 0$ và là VCL cấp k so với VCL $\frac{1}{b-x}$ tại b ($f(x) \sim \frac{c}{(b-x)^k}, c \neq 0$)*

thì

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ hội tụ khi } k < 1 \text{ và phân kỳ khi } k \geq 1.$$

Ví dụ 20: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, |k| < 1$; b. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$; c. $\int\limits_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

d. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$ e. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có một cực điểm $x = 1$, là VCL cấp $\frac{1}{2}$ so với VCL $\frac{1}{1-x}$ tại $x = 1$. Vậy tích phân suy rộng hội tụ.

b. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, vậy hàm $\frac{1}{\ln x}$ có cực điểm tại $x = 1$

$\left(\frac{1}{\ln x}:\frac{1}{x-1}\right)\underset{x\to 1}{\rightarrow} 1$, theo hệ quả 2', tích phân suy rộng phân kỳ.

c. $\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}$, $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\theta$ là cực điểm

Nhận xét $\cos\varphi-\cos\theta=-2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}=2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}:\frac{1}{\sqrt{\theta-\varphi}}=\sqrt{\frac{\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}}\underset{\varphi\to\theta}{\rightarrow}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}$$

Vậy tích phân hội tụ.

d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$, $x=0$ là cực điểm.

$$e^x-e^{-x}=2x+o(x^2)\Rightarrow\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}\sim\sqrt[3]{2}.x^{\frac{2}{3}} \text{ khi } x\to 0$$

Theo hệ quả 2', tích phân suy rộng hội tụ.

e. $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$

Xét $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$, Nếu $p\ge 1$ ta nhận được tích phân thông thường.

Nếu $p<1$, nhận được tích phân suy rộng, hàm dưới dấu tích phân có cực điểm tại $x = 0$

Nhận thấy $\left(x^{p-1}e^{-x}:\frac{1}{x^{1-p}}\right)=e^{-x}\underset{x\to 0}{\rightarrow}1$, theo hệ quả 2', tích phân suy rộng hội tụ khi

$1-p<1$ hay $p>0$

Xét $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$. Nhận thấy $\left(x^{p-1}e^{-x}:\frac{1}{x^2}\right)=x^{p+1}e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\rightarrow}0$, $\forall p$

Vậy tích phân suy rộng hội tụ khi $p>0$. Tích phân suy rộng này phụ thuộc tham số p

và được gọi là hàm Gama, người ta kí hiệu : $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$,

Chú ý:

- Tích phân suy rộng có các tính chất tương tự như tích phân xác định
- Để tính tích phân suy rộng (trường hợp tích phân suy rộng hội tụ), người ta cũng thường sử dụng hai phương pháp cơ bản: Đổi biến số và tích phân từng phần.

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG IV

- **Định nghĩa tích phân xác định**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt\,,\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

- **Điều kiện tồn tại tích phân xác định**

A. Điều kiện cần

Nếu f khả tích trên [a, b] thì f bị chặn trên [a, b]

B. Điều kiện đủ

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] thì khả tích trên đoạn đó

Nếu $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên [a, b] thì khả tích trên đoạn đó.

Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a, b] thì khả tích trên đoạn đó.

Nếu $f(x)$ bị chặn trên [a, b] và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn thì $f(x)$ khả tích trên [a, b]

- **Các phép tính**

Nếu $f(x)$ khả tích trên [a, b] thì $|f(x)|, k.f(x)$ $(k = const)$ cũng khả tích trên [a, b].

Nếu f, g khả tích trên [a, b] thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng khả tích trên [a, b]

Nếu f khả tích trên [a,b] thì khả tích trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Ngược lại nếu [a, b] được tách ra thành một số đoạn và trên mỗi đoạn đó hàm khả tích thì f khả tích trên[a, b].

- **Các tính chất của tích phân xác định**

Cho f, g khả tích trên [a, b] và a < b, λ là hằng số.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a, b)$

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4 Nếu $f(x) \ge 0$ trên [a, b] thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

5. Nếu $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6. Nếu $f \ge 0$ trên [a,b], f liên tục tại $x_0 \in [a, b]$ và $f(x_0) > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$

7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

8. Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. Đặt $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Gọi μ là giá trị trung bình của f trên [a, b], khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] thì $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

- **Công thức Niutơn-Lépnít (Newton-Leibnitz).**

A. Hàm tích phân của cận trên

$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ gọi là hàm tích phân của cận trên hay tích phân của hàm $f(x)$ theo cận trên

Nếu $f(x)$ khả tích trên [a, b] thì $\phi(x)$ là hàm liên tục trên [a, b]

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] thì $\phi(x)$ khả vi trên [a, b] và có

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b] .$$

Nếu $\alpha(x), \beta(x)$ khả vi trên X, $f(x)$ liên tục trên X và $[\alpha(x),\beta(x)] \subset X \ \ \forall x \in X$ thì

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \text{ khả vi trên } X \text{ và } G'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \quad (4.6)$$

B. Nguyên hàm của hàm số và tích phân bất định

Nếu $f(x)$ liên tục trên X thì sẽ có nguyên hàm trên X và nếu $F(x)$ là một nguyên hàm thì tập hợp các nguyên hàm của f là $\{F(x)+C,\ C \in \mathbb{R}\}$

C. Công thức Newton-Leibnitz.

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b] có một nguyên hàm là $F(x)$ trên [a, b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Đại lượng $F(b)-F(a)$ được kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ gọi là biến phân từ a đến b của $F(x)$.

- **Hai phương pháp cơ bản tính tích phân xác định**

A. Phép đổi biến

1. Nếu $\varphi:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, φ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$ và $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$.

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f liên tục trên [a, b]

khi đó:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

2. Nếu $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *với* φ *đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên* $[\alpha,\beta]$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *,* f *liên tục trên [a, b]*

với $t=\varphi(x)$ *mà* $f(x)dx = g(t)dt, g$ *liên tục trên* $[\varphi(a),\varphi(b)]$. *Khi đó:*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

B. Phép tích phân từng phần

Nếu $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ *và* u,v *có đạo hàm liên tục trên [a, b] thì:*

$$\int_{a}^{b} u'(x).v(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_{a}^{b} u(x).v'(x)dx$$

- **Bảng các nguyên hàm thông dụng**
- **Tính chất cơ bản của tích phân bất định.**

Cho f, g có nguyên hàm, $\lambda\in\mathbb{R}$

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$
2. $\int\big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int \lambda.f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$
4. Nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì $f\big(u(x)\big)u'(x)$ có một nguyên hàm là $F\big(u(x)\big)$ khi u có đạo hàm liên tục, tức là

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f\big(u(x)\big)u'(x)dx = F\big(u(x)\big)+C$$

- **Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định**

A. Phương pháp tích phân từng phần

Cho u, v có dạo hàm liên tục trên X khi đó

$$\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{trên } X$$

B. Phương pháp đổi biến số

Đặt $x=\varphi(t)$, với φ đơn điệu và φ có đạo hàm liên tục trên Y khi đó

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Đặt $t=\psi(x)$ khi đó $f(x)dx = g(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=\psi(x)}$$

- **Tích phân phân thức hữu tỉ thực sự**

A. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ nhất

$$I=\int\frac{dx}{(x-a)^n}\quad,\ a\in\mathbb{R}$$

Nếu $n=1$ thì $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$

Nếu $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ thì $\int\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}.\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$

B. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ hai

$$J_n(t)=\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}\text{ (bằng phương pháp truy toán)}$$

Trước hết $J_1(t)=\int\frac{dt}{1+t^2}=arctgt+C$

Tích phân từng phần sẽ có

$$J_n(t)=\frac{t}{(1+t^2)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$J_n=\frac{t}{(1+t^2)^n}+2n(J_n-J_{n+1})$$

$$2nJ_{n+1}=(2n-1)J_n+\frac{t}{(1+t^2)^n}$$

- **Tích phân của hàm hữu tỉ đối với sin và côsin**

A. Trường hợp tổng quát.

Xét $\int R(\sin x,\cos x)dx$ trong đó R là ''phân thức hữu tỉ hai biến''

Thực hiện phép đổi biến: $t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Khi đó tích phân được đưa về dạng $\int\frac{P(t)}{Q(t)}dt$

B. Trường hợp đặc biệt thứ nhất.

1. Nếu $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$ thì đổi biến $t=tgx$ hoặc $t=\cot gx$
2. Nếu $R(\sin x,\cos x)=-R(\sin x,-\cos x)$ thì đổi biến $t=\sin x$
3. Nếu $R(\sin x,\cos x)=-R(-\sin x,\cos x)$ thì đổi biến $t=\cos x$

C. Trường hợp đặc biệt thứ hai.

Khi $R(\sin x,\cos x)=\sin^m x.\cos^n x$, $m,n\in\mathbb{Z}$

1. Nếu m lẻ thì đổi biến $t=\cos x$
2. Nếu n lẻ thì đổi biến $t=\sin x$
3. Nếu m,n chẵn và không cùng dương thì đổi biến $t=tgx$
4. Nếu m,n chẵn và cùng dương thì tuyến tính hoá sau đó tính nguyên hàm.

- **Tích phân hàm hữu tỉ đối với** $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Xét $I = \int f(e^{\alpha x})dx$, trong đó $f(x)$ là hàm hữu tỉ. Thực hiện phép đổi biến

$t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$, khi đó $I = \dfrac{1}{\alpha}\int \dfrac{f(t)}{t}dt$

- **Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định**

A. Tính diện tích hình phẳng

1. Miền phẳng giới hạn bởi các đường cong trong toạ độ Đềcác(Descartes)

Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ trong đó f_1, f_2 liên tục từng khúc trên

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$

2. Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_0 \le t \le t_1$$

Khi đó $\quad S = \displaystyle\int_\alpha^\beta |y(t).x'(t)|dt$

B. Tính độ dài đường cong phẳng

1. Phương trình cho trong hệ toạ độ Descartes vuông góc

Giả sử đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình

$$y = f(x), \quad A\,(a, f(a)), \quad B(b, f(b))$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

2. Phương trình cho trong dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

C. Tính thể tích vật thể

1. Công thức tổng quát

Giả sử vật thể (V) nằm giữa hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng này có phương trình là $x = a$ và $x = b$, $a < b$. Các thiết diện của vật thể (V) vuông góc với trục Ox nằm trên mặt phẳng có phương trình $x = x_0$, $x_0 \in [a,b]$ có diện tích tương ứng $S(x_0)$. Khi đó thể tích của vật thể (V), kí hiệu là V, tính theo công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

2. Công thức tính cho vật thể tròn xoay

Vật thể (V) tròn xoay là vật thể được tạo thành do một hình thang cong giới hạn bởi các đường: $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ quay xung quanh trục Ox Cụ thể hơn, phần không gian bị chiếm chỗ do hình thang cong quay xung quanh trục Ox gọi là vật thể tròn xoay.

Như vậy các thiết diện vuông góc với trục Ox là các hình tròn. Diện tích của thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$ sẽ là $\pi.f^2(x_0)$. Từ đó nhận được công thức tính:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

- **Tích phân suy rộng với cận vô hạn**

A. Định nghĩa

1. Cho $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, khả tích trên $[a,A]$, $\forall A > a$.

Tích phân suy rộng của f với cận $+\infty$ được kí hiệu là: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ về số $I \in \mathbb{R}$ nếu

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I \quad \text{kí hiệu} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = I$$

Nếu I không tồn tại hoặc $I = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

2. Cho $f:(-\infty,a] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, khả tích trên $[B,a]$, $\forall B < a$

Tích phân suy rộng của f với cận $-\infty$, kí hiệu là $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ về số $J \in \mathbb{R}$ nếu

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx = J = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

Nếu J không tồn tại hoặc $J = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[A,B]$, $\forall A,B \in \mathbb{R}$. Tích phân suy rộng của f với các cận vô hạn, kí hiệu là: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ, $\forall a \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp này kí hiệu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \ , \ \forall a \in \mathbb{R}$$

B. Điều kiện hội tụ

Xét $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ với $f(x) \geq 0$.

1. Cho các hàm số $f(x), g(x)$ không âm và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$. Khi đó:

a. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in \mathbb{R}_+^*$ thì các tích phân suy rộng $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

b. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

c. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

2 .Giả sử với x đủ lớn hàm số $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \frac{h(x)}{x^k} \ , \ k > 0 \ , \ h(x) \geq 0. \text{ Khi đó:}$$

Nếu $k > 1$ và $0 \leq h \leq c < +\infty$ thì $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k \leq 1$ và $h(x) \geq c > 0$ thì $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ, trong đó c là hằng số.

3.Giả sử $f(x) \geq 0$ và là VCB cấp k so với VCB $\frac{1}{x}$ tại $+\infty$ thì $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $k > 1$ và phân kỳ khi $k \leq 1$

4. Nếu $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

C. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng

1. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối nếu tích phân $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

2. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và hàm số $g(x)$ bị chặn trong $[a,+\infty)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

- **Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm**

A. Định nghĩa

1. Cho $f:(a,b)\setminus\{x_o\}\to\mathbb{R}$. Nói rằng $x_0\in(a,b)$ là cực điểm của f nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Hàm số có cực điểm tại a hoặc b nếu $f(a^+)=\infty$ hoặc $f(b^-)=\infty$

2. Cho $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f(b^-)=\infty$, khả tích trên $[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$ đủ bé. ích phân suy rộng của f trên $[a,b]$, kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$. Nói rằng tích phân suy rộng hội tụ về $I\in\mathbb{R}$ nếu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I \text{, kí hiệu } I=\int_a^b f(x)dx$$

Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn (không có I hoặc $I=\infty$) thì nói rằng tích phân suy rộng phân kì

3. Cho $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a^+)=\infty$ khả tích trên $[a+\varepsilon,b]$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ về J nếu $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = J$ (hữu hạn).

Nếu không tồn tại J nói rằng tích phân suy rộng phân kỳ.

4. Cho $f:[a,b]\setminus\{x_o\}\to\mathbb{R}$, $x_o\in(a,b)$ là cực điểm của f

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_a^{x_0} f(x)dx$ và $\int_{x_0}^b f(x)dx$ cùng hội tụ, Khi đó kí hiệu:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^b f(x)dx$$

B. Điều kiện hội tụ

1. Giả sử với x đủ gần b và $(x<b)$ hàm số $f(x)$ có dạng

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^k} \quad , \quad k>0 \quad , \quad g(x)\ge 0 \ \textit{khi đó:}$$

Nếu $k < 1$ *và* $0 \le g(x) \le c < \infty$ *thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

Nếu $k \ge 1$ *và* $g(x) \ge c > 0$ *thì* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ trong đó* c *là hằng số*

2. Nếu $f(x) \ge 0$ *và là VCL cấp* k *so với VCL* $\dfrac{1}{b-x}$ *tại* b *thì*

$\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ khi* $k < 1$ *và phân kỳ khi* $k \ge 1$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1. Tích phân bất định không phụ thuôc vào biến lấy tích phân?

Đúng ☐ Sai ☐

4.2. Tích phân xác định không phụ thuôc vào biến lấy tích phân?

Đúng ☐ Sai ☐

4.3. Hàm số liên tục là điều kiện cần của hàm số khả tích?

Đúng ☐ Sai ☐

4.4. Hàm số liên tục là điều kiện đủ của hàm số khả tích?

Đúng ☐ Sai ☐

4.5. Tích phân bất định biểu diễn họ các nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân?

Đúng ☐ Sai ☐

4.6. Cận trên của tích phân xác định phải lớn hơn cận dưới của nó?

Đúng ☐ Sai ☐

4.7. Hàm số khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì trị tuyệt đối của nó cũng khả tích trên đoạn đó?

Đúng ☐ Sai ☐

4.8. Tích phân suy rộng của $f(x)$ hội tụ thì tích phân suy rộng của $|f(x)|$ cũng hội tụ?

Đúng ☐ Sai ☐

4.9. Tổng, tích hai hàm số khả tích trên đoạn $[a,b]$ là hàm số cũng khả tích trên đoạn đó?

Đúng ☐ Sai ☐

4.10. Hàm số khả tích trên đoạn $[a,b]$ đủ để áp dụng công thức Newton- Leibnitz tính tích phân? Đúng ☐ Sai ☐

4.11. Dùng tích phân xác định có thể tính được diện tích của hình phẳng, độ dài đường cong phẳng, thể tích của vật thể?

Đúng ☐ Sai ☐

4.12. Ứng dụng phép so sánh các VCB (VCL) để xét sự hội tụ của tích phân suy rộng?

Đúng ☐ Sai ☐

4.13. Dùng tích phân suy rộng có thể tính được diện tích của hình phẳng không bị chặn?

Đúng ☐ Sai ☐

4.14. Tích phân xác định của hàm số dương là một số dương?

Đúng ☐ Sai ☐

4.15. Biến đổi về các tích phân đơn giản để tính các tích phân sau:

a. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$, b. $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$,

c. $\int a^{\alpha x}.b^{\beta x}dx$, d. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}$.

4.16. Biến đổi về các tích phân đơn giản để tính các tích phân sau:

a. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-1}}$, b. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$,

c. $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x-1}}dx$, d. $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$.

4.17. Dùng phương pháp đổi biến để tính các tích phân sau:

a. $\int x\sqrt{2-5x}dx$, b. $\int x^5(1+2x^2)^{10}dx$,

c. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, d. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4.18. Dùng phương pháp đổi biến để tính các tích phân sau:

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, b. $\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$,

c. $\int \frac{xdx}{(x^2+2)\sqrt{3x^2+5}}$, d. $\int \frac{6^x}{9^x-4^x}dx$.

4.19. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân:

a. $\int arctg\sqrt{x}dx$, b. $\int (\arcsin x)^2dx$, c. $\int xshxdx$,

d. $\int (\ln x)^2dx$, e. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$, f. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

4.20. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân

a. $\int \cos(\ln x)dx$, b. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$, c. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$,

d. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx$, e. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$, f. $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$.

4.21. Tích phân các hàm lượng giác:

a. $\int \frac{dx}{\cos x.\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, b. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin 2x}dx$,

c. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}$, d. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tgx}}$.

4.22. Sử dụng công thức Newton-Leibniz tính các tích phân sau:

a. $\int_{-3}^{2}\left|\frac{x}{x+4}\right|dx$, b. $\int_{0}^{2}|1-x|dx$,

c. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, $(a,b\neq 0)$, d. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.23. Tính các tích phân sau bằng phép đổi biến:

a. $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1+2\cos^2 x}$, b. $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$, c. $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

d. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}}$, e. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$, f. $\int_{0}^{a}\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

4.24. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần:

a. $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(\ln x)dx$, b. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$,

c. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$, d. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

4.25. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong trong hệ toạ độ Descartes vuông góc

a. $y=2x-x^2$ và $x+y=0$, b. $y=2^x$, $y=2$ và $x=0$,

c. $y^2=x^2(a^2-x^2)$, $a>0$, d. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ và $x=2a$, $a>0$.

4.26. Tính độ dài đường cong cho bởi phương trình.

a. $y=\ln\cos x$, $0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$, b. $\begin{cases} x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t, \quad c^2=a^2-b^2 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$.

4.27. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo ra khi quay các miền phẳng giới hạn bởi các đường sau đây xung quanh trục tương ứng.

a. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $0 \le x \le a$ quanh trục Ox.

b. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ quanh trục Oy.

c. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $0 < a \le b$ quanh trục Ox.

d. $y = x^2$, $y = 4$ quanh đường $x = 2$.

4.28. Tính các tích phân suy rộng sau

a. $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$,

b. $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$,

c. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

d. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

4.29. Xét sự hội tụ hay phân kì của các tích phân sau

a. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$,

b. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$,

c. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$,

CHƯƠNG V: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

MỤC ĐÍCH,YÊU CẦU

Cũng như phép tính đạo hàm và vi phân, phương trình vi phân (PTVP) có tầm quan trọng rất lớn và có ứng dụng rộng rãi trong mọi lĩnh vực khoa học kỹ thuật và kinh tế. Cụ thể là nhiều bài toán kinh tế, kỹ thuật điện tử, y học,... đều dẫn đến phương trình vi phân. Trong toán học, phương trình vi phân là một chuyên ngành rất phát triển. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về phương trình vi phân thường (gọi vắn tắt là phương trình vi phân). Để học tốt chương này, yêu cầu người học phải nhận dạng đúng từng loại phương trình vi phân, qua đó mới có thể tích phân được (tìm được nghiệm), bởi vì không có một phương pháp chung nào để giải phương trình vi phân. Giải PTVP là một quá trình tính tích phân, vì thế yêu cầu người học phải thông thạo phép tính tích phân và vi phân, đó là nội dung cốt lõi của toán học cao cấp.

Một PTVP là một phương trình có dạng $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

hay $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}) = 0$ trong đó x là biến số độc lập, còn $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của hàm số phải tìm, (trong PTVP nhất thiết phải có mặt ít nhất đạo hàm cấp *k* nào đó của hàm phải tìm). Cấp cao nhất của đạo hàm của hàm số *y* phải tìm có mặt trong PTVP được gọi là cấp của PTVP, chẳng hạn:

$$y' + x = 0 \text{ (PTVP cấp 1)}$$

$$y'' + (y')^2 = 0 \text{ (PTVP cấp 2)}$$

Hàm số $y = y(x)$ là một nghiệm của PTVP nếu như nó thoả mãn phương trình tức là thay nó vào phương trình sẽ nhận được đồng nhất thức. Chẳng hạn với phương trình $y' = x$ ta có nghiệm $y = \frac{x^2}{2}$, thậm chí $y = \frac{x^2}{2} + C$ trong đó *C* là hằng số tuỳ ý.

Giải hay tích phân một PTVP là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học, mỗi nghiệm của PTVP là một đường cong (đồ thị của nghiệm), vì thế người ta gọi đường cong đó là đường cong tích phân của PTVP.

PTVP được gọi là tuyến tính cấp *n* nếu hàm số *F* là bậc nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$, tức là phương trình có dạng:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

trong đó $a_1(x), ..., a_n(x), f(x)$ là các hàm số cho trước.

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì người ta gọi là phương trình tuyến tính cấp *n* thuần nhất.

Nếu $f(x) \neq 0$ thì người ta gọi là phương trình tuyến tính cấp *n* không thuần nhất.

Trong chương này cần nắm vững các nội dung chính sau đây:

1. Các phương trình vi phân cấp một thường gặp.

Cần phân biệt được từng dạng phương trình vi phân và phương pháp tích phân tương ứng với từng dạng.

2. Các tính chất của PTVP tuyến tính cấp hai.

Từ các tính chất về nghiệm của PTVP tuyến tính có thể tích phân được khi đã biết một nghiệm của PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng, hoặc hai nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho, đặc biệt là khai thác nguyên lí chồng chất nghiệm.

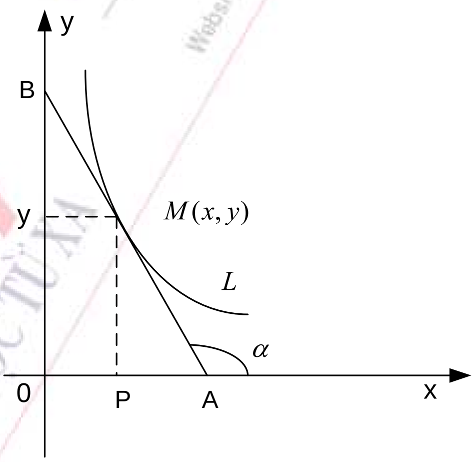
3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng số.

Bên cạnh phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, cần nhận biết dạng hàm đặc biệt ở vế phải để tích phân PTVP bằng phương pháp hệ số bất định.Vận dụng, có thể giải PTVP tuyến tính có hệ số hằng số cấp n.

NỘI DUNG

5.1. Phương trình vi phân cấp 1

Trước hết ta xét một bài toán hình học dẫn đến PTVP. Hãy tìm phương trình đường cong L $(y = y(x))$ có tính chất: mỗi đoạn của tiếp tuyến với đường cong C nằm giữa hai trục toạ độ đều bị tiếp điểm chia thành hai phần bằng nhau.



H.5.1

Giả sử $M(x,y) \in L$, khi đó hệ số góc tiếp tuyến với đường cong tại M là:

$$y'(x) = tg\alpha = -\frac{y}{PA} \text{ (xem H.5.1)}$$

Do M là trung điểm của AB nên $OP = PA = x$, suy ra $y' = -\frac{y}{x}$.

Như vậy hàm số phải tìm thoả mãn PTVP cấp 1. Sau này chúng ta sẽ có cách giải phương trình trên, nhưng trước hết ta có thể thử lại rằng hàm số $y = \frac{C}{x}$ thoả mãn phương trình với C là hằng số tuỳ ý. Tóm lại, họ các đường hyperbol có tính chất đã đặt ra.

5.1.1. Các khái niệm cơ bản

Dạng tổng quát của PTVP cấp 1:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hay } \quad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{5.1}$$

Nếu từ (5.1) giải ra được *y'* thì ta có PTVP cấp 1 đã giải ra đối với đạo hàm:

$$y' = f(x, y) \tag{5.2}$$

A. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy-Peano

Cho phương trình (5.2): $y' = f(x, y)$ và $(x_0, y_0) \in D$ (5.3)

Định lý 5.1. *Nếu f(x,y) liên tục trên miền D trong mặt phẳng Oxy thì tồn tại nghiệm:* $y = y(x)$ *trong lân cận* x_0 *thoả mãn* $y_0 = y(x_0)$. *Ngoài ra nếu* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *cũng liên tục trên miền D thì nghiệm tìm được là duy nhất.*

Bài toán tìm nghiệm của PTVP thoả mãn điều kiện (5.3) gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện (5.3) gọi là điều kiện ban đầu.

B. Nghiệm tổng quát, tích phân tổng quát

Ta gọi nghiệm tổng quát của PTVP cấp 1 là hàm số

$$y = \varphi(x, C) \tag{5.4}$$

trong đó *C* là hằng số tuỳ ý, thoả mãn các điều kiện sau:

a. Thoả mãn PTVP với mọi hằng số *C*.

b. Có thể tìm một giá trị $C = C_0$ sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện ban đầu $y_0 = y(x_0) = \varphi(x_0, C_0)$ với (x_0, y_0) thoả mãn định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

Nghiệm tổng quát cho dưới dạng ẩn:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{5.5}$$

Hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của PTVP cấp 1. Về mặt hình học, nghiệm tổng quát hay tích phân tổng quát xác định một họ đường cong trong mặt phẳng không cắt nhau gọi là các đường cong tích phân của PTVP cấp 1.

C. Nghiệm riêng, tích phân riêng

Hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ gọi là một nghiệm riêng của PTVP, tức là được suy ra từ nghiệm tổng quát (5.4) với hằng số *C* xác định $C = C_0$. Tương tự ta có một tích phân riêng của PTVP

$$\Phi(x, \varphi, C_0) = 0$$

Chú ý: PTVP còn có các nghiệm khác nữa, không thể nhận được từ nghiệm tổng quát, được gọi là nghiệm kỳ dị.

5.1.2. Các PTVP cấp một thường gặp

A. Phương trình với biến số phân li

a. Định nghĩa: Phương trình với biến số phân li (phương trình tách biến) là PTVP có dạng:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \qquad (5.6)$$

Chẳng hạn: $\dfrac{x^2dx}{1+x^2} + \dfrac{ydy}{1+y^2} = 0$ là phương trình với biến số phân li.

b. Phương pháp tích phân

Phương trình (5.6) có dạng:

$$f_1(x)dx = -f_2(y)dy = -f_2(y)y'(x)dx$$

Lấy tích phân hai vế ta có :

$$\int f_1(x)dx = -\int f_2(y)y'dx + C = -\int f_2(y)dy + C$$

Vậy $\displaystyle\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C \qquad (5.7)$

Đó là tích phân tổng quát của (5.6)

Chú ý : Phương trình dạng : $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ có thể đưa về dạng tách biến. Thật vậy, nếu $M_2(x) \neq 0$ và $N_1(y) \neq 0$ thì chia hai vế của phương trình cho $M_2(x).N_1(y)$ sẽ được :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Đó là phương trình với biến số phân li.

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$ hoặc $N_1(y) = 0$ tại $y = b$ thì bằng cách thay trực tiếp nhận được $x = a$ hoặc $y = b$ là nghiệm.

Ví dụ 1 : Tìm tích phân tổng quát của phương trình :

$$x^3(y+1)dx + (x^4 - 1)(y-2)dy = 0$$

Giải : Với $y + 1 \neq 0$ và $x^4 - 1 \neq 0$ ta có :

$$\frac{x^3}{x^4-1}dx + \frac{y-2}{y+1}dy = 0$$

Tích phân tổng quát là :

$$\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1}dx + \int\left(1 - \frac{3}{y+1}\right)dy = C$$

$$\frac{1}{4}\ln|x^4 - 1| + y - 3\ln|y+1| = C$$

Ngoài ra $y + 1 = 0$ hay $y = -1$ và $x^4 - 1 = 0$ hay $x = \pm 1$ đều là các nghiệm.

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$y' = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$
$$y(0) = 0$$

Giải : $y' = \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$

$\cos y \neq 0$ tức $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

Ta có :

$$\frac{dy}{\cos y} = 2\cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{\cos y} = 2\int \cos x dx + C$$

$$\ln\left|tg(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})\right| = 2\sin x + C$$

Từ điều kiện ban đầu suy ra : $\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right| = C, \Rightarrow C = 0$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy đã cho là $\ln\left|tg(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})\right| = 2\sin x$.

B.Phương trình đẳng cấp cấp một

a. Định nghĩa : Phương trình đẳng cấp cấp một là PTVP có dạng

$$y' = f(\frac{y}{x}), \text{hay } y' = f(t), \quad \text{với } t = \frac{y}{x}. \qquad (5.8)$$

b. Phương pháp tích phân

Coi $t = \frac{y}{x}$ là hàm của x, $t' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{t}{x}$

Thay vào phương trình sẽ có :

$t + xt' = f(t)$ hay $xt' = f(t) - t$

* Nếu $f(t) - t \neq 0$ ta có phương trình dạng (5.6)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$$

* Nếu $f(t) - t = 0$ tức là $f(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$. Vậy ta có phương trình tách biến dạng (5.6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

* Nếu $f(t) - t = 0$ tại $t = t_0$ hay $y = t_0.x$ thì bằng cách thử trực tiếp ta có nghiệm $y = t_0 x$

Ví dụ 3 : Giải phương trình

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

Giải : Chia hai vế cho x^2 ta được :

$$2\frac{y}{x} - y' - (\frac{y}{x})^2 + 1 = 0$$

Đặt $t = \frac{y}{x}, y = tx \Rightarrow y' = t + xt'$ vào phương trình sẽ nhận được :

$$2tt'x + t^2 + 1 = 0$$
$$\frac{2tdt}{1+t^2} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{2tdt}{1+t^2} = -\int \frac{dx}{x} + C_1$$

$$\ln(1+t^2) = -\ln|x| + C_1$$

Hay : $\quad 1 + t^2 = \frac{C}{x}$

Trở về biến cũ ta có : $1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{C}{x}$

Hay $\quad \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$

Đó là các đường tròn có tâm nằm trên trục Ox

Ví dụ 4 : Tích phân phương trình :

$$(\mathrm{y} - \mathrm{x} - 1)\mathrm{dx} = (\mathrm{x} + \mathrm{y} + 3)\mathrm{dy}$$

Giải :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x - 1}{x + y + 3}$$

Đây chưa phải là dạng (5.8), tuy nhiên thực hiện phép đổi biến :

$$\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$$

có thể đưa được về dạng (5.8). Thật vậy $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ và chọn (x_0, y_0) sao cho :

$$\begin{cases} v + y_0 - u - x_0 - 1 = v - u \\ u + x_0 + v + y_0 + 3 = u + v \end{cases}$$

Hay $\quad \begin{cases} \mathrm{x}_0 - \mathrm{y}_0 + 1 = 0 \\ \mathrm{x}_0 + \mathrm{y}_0 + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{x}_0 = -2 \\ \mathrm{y}_0 = -1 \end{cases}$

Khi đó $\quad \frac{dv}{du} = \frac{v-u}{v+u} = \frac{\frac{v}{u} - 1}{\frac{v}{u} + 1} = f(\frac{v}{u})$

Đặt $t = \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{dv}{du} = t + ut'$

$$u\frac{dt}{du}+t=\frac{t-1}{t+1}$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{t-1}{t+1}-t=\frac{-t^2-1}{t+1}$$

$$\frac{(t+1)dt}{t^2+1}=-\frac{du}{u},\int\frac{(t+1)dt}{t^2+1}=-\int\frac{du}{u}+C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+arctgt=-\ln|u|+C_1$$

$$arctgt=\ln\frac{C}{\sqrt{t^2+1}.u}$$

Trở về biến cũ sẽ có tích phân tổng quát :

$$arctg\frac{y+1}{x+2}=\ln\frac{C}{(x+2)\sqrt{1+\frac{y+1}{x+2}}}$$

C. Phương trình tuyến tính cấp 1

a. Định nghĩa : PTVP có dạng sau đây được gọi là PTVP tuyến tính cấp 1 :

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{5.9}$$

với $p(x),q(x)$ liên tục trên *(a,b)*

Nếu $q(x)\neq 0$ trên *(a,b)* thì gọi là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

Nếu $q(x)\equiv 0$ trên *(a,b)* thì gọi nó là PTVP tuyến tính thuần nhất.

b. Phương pháp tích phân

Cho phương trình không thuần nhất (5.9). Gọi phương trình vi phân sau đây là PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng với (5.9) :

$$y'+p(x).y=0 \tag{5.10}$$

Trước hết, nhận thấy (5.10) là PTVP với biến số phân li. Nghiệm tổng quát của nó có dạng :

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+C_1$$

$$y=Ce^{-\int p(x)dx} \tag{5.11}$$

Bây giờ ta tìm nghiệm tổng quát của (5.9) bằng phương pháp coi hằng số *C* trong (5.11) là hàm số và gọi đó là phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Cụ thể thay

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5.12}$$

vào (5.9) ta có :

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \qquad (5.13)$$

Như vậy tồn tại hàm số *C(x)* phụ thuộc vào một hằng số cộng C_1 tuỳ ý để (5.12) là nghiệm của PTVP (5.9). Chứng tỏ nghiệm tổng quát của (5.9) có dạng :

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (5.14)$$

Nếu trong (5.13) lấy $\mathrm{C} = 0$ ta được một nghiệm riêng của (5.9). Do đó cũng có thể nói rằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange là phương pháp tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng. Dạng nghiệm (5.14) có thể mô tả tổng quát sau đây :

$$y = \overline{y} + y^* \qquad (5.15)$$

trong đó $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất tương ứng và y^* là một nghiệm riêng của chính phương trình không thuần nhất.

Dạng (5.15) đúng cho PTVP tuyến tính có cấp bất kỳ nói riêng và đúng cho các hệ tuyến tính nói chung.

Ví dụ 5 : Tích phân phương trình :

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

Giải : Đặt vào công thức (5.14) trong đó $p(x) = -\frac{1}{x}, q(x) = x$, ta có :

$$y = Ce^{\int \frac{dx}{x}} + e^{\int \frac{dx}{x}}\int xe^{-\int \frac{dx}{x}}dx$$

Xét với $x > 0$:

$$y = Ce^{\ln x} + e^{\ln x}\int x.e^{-\ln x}dx = Cx + x\int dx = Cx + x^2$$

Xét với $x < 0$

$$\mathrm{y} = \mathrm{Ce}^{\ln|\mathrm{x}|} + \mathrm{e}^{\ln|\mathrm{x}|}\int \mathrm{x.e}^{-\ln|\mathrm{x}|}\mathrm{dx} = \mathrm{C}|\mathrm{x}| + |\mathrm{x}|\int \mathrm{x}.\frac{1}{|\mathrm{x}|}\mathrm{dx}$$

$$= -\mathrm{Cx} - \mathrm{x}\int(-1)\mathrm{dx} = -\mathrm{Cx} + \mathrm{x}^2.$$

Vì *C* tuỳ ý nên $\forall x \neq 0$, nghiệm tổng quát có thể viết dưới dạng :

$$\mathrm{y} = \mathrm{Cx} + \mathrm{x}^2.$$

D. Phương trình Bernoulli

Đây là PTVP không tuyến tính (phi tuyến) tuy nhiên có thể đưa về dạng PTVP tuyến tính bằng cách thay đổi biến số thích hợp.

a. Định nghĩa : PTVP có dạng $y'+p(x)y = y^{\alpha}q(x)$ (5.16)

trong đó $\alpha \in R$ và $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, các hàm $p(x), q(x)$ cho trước, liên tục trên *(a,b)*

b. Phương pháp tích phân

Chia hai vế của (5.16) cho y^{α} ta sẽ có:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x)$$

Đặt $u(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$, do đó $u' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$. (5.17)

Thay vào phương trình trên sẽ nhận được PTVP tuyến tính cấp 1 đối với hàm $u(x)$:

$$u'+(1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x) \quad (5.18)$$

Sau khi tích phân phương trình (5.18), ta trở về biến cũ theo (5.17).

Ví dụ 6: Tích phân phương trình:

$$y'+y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$$

Giải: Chia hai vế cho $\sqrt{y}$ sẽ có:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = e^{\frac{x}{2}}$$

Đặt $u = \sqrt{y}, u' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$ phương trình được đưa về dạng:

$$u'+\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$u = Ce^{-\int\frac{1}{2}dx} + e^{-\int\frac{1}{2}dx}\int\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}e^{\int\frac{1}{2}dx}dx$$

$$\sqrt{y} = Ce^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}\int e^{x}dx$$

$$\sqrt{y} = Ce^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$y = C^2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{x} + C$$

E. Phương trinh vi phân toàn phần

a. Định nghĩa: Phương trình vi phân dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (5.19)$$

trong đó $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in D \quad (5.20)$$

gọi là một PTVP toàn phần.

Điều kiện (5.20) chứng tỏ vế trái của phương trình (5.19) là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó.

b. Phương pháp tích phân

Điều kiện (5.20) chứng tỏ tồn tại hàm $u(x,y)$ để $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ theo công thức (3.24) thì :

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Như vậy tích phân tổng quát có dạng : $u(x,y) = C$ (5.21)

Ví dụ 7 : Giải PTVP

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$$

Giải : Đặt $P = x^3 + 3x\ y^2, Q = 3x^2y + y^3$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy, \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y)$$

Vậy phương trình đã cho là PTVP toàn phần.

$$u(x,y) = \int_0^x (x^3 + 3xy^2)dx + \int_0^y y^3 dy$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$$

Tích phân tổng quát : $u(x,y) = C$

Hay $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C.$

c. Thừa số tích phân

Trong một số trường hợp điều kiện (5.20) không thoả mãn. Khi đó PTVP (5.19) chưa phải là PTVP toàn phần. Nếu tồn tại hàm số $\alpha(x,y)$ để phương trình :

$$\alpha P dx + \alpha Q dy = 0 \qquad (5.19)'$$

là PTVP toàn phần, tức là thoả mãn điều kiện :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha P), \forall (x,y) \in D \qquad (5.22)$$

thì hàm số $\alpha(x,y)$ gọi là thừa số tích phân của PTVP.

Người ta chứng minh được rằng nghiệm của PTVP $(5.19)'$ cũng là nghiệm của PTVP (5.19). Vì vậy để giải PTVP (5.19) không thoả mãn điều kiện (5.20) người ta có thể tìm một thừa số tích phân $\alpha(x,y)$ và đi tích phân PTVP toàn phần.

Ví dụ 8 : Cho phương trình :

$$2\sin y^2 dx + xy\cos y^2 dy = 0$$

Chứng tỏ rằng $\alpha(x,y)=x^3$ là thừa số tích phân của phương trình và giải phương trình đó.

Giải : Nhân hai vế của phương trình với x^3 ta được :

$$2x^3\sin y^2dx + x^4y\cos y^2dy = 0$$

Đặt

$$P=2x^3\sin y^2, Q=x^4y\cos y^2, \frac{\partial Q}{\partial x}=4x^3y\cos y^2, \frac{\partial P}{\partial y}=4x^3y\cos y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y)$$

Chứng tỏ $\alpha(x,y)=x^3$ là thừa số tích phân. Theo công thức (3.24.Chương 3), tích phân tổng quát của PTVP là

u(x,y)= C, trong đó $u=\int_0^x 2x^3\sin y^2dx=\frac{1}{2}x^4\sin y^2$

Vậy : $x^4\sin y^2 = C$.

Trong một số trường hợp đặc biệt ta có thể kết luận về sự tồn tại thừa số tích phân phụ thuộc vào một biến x hoặc y. Thật vậy giả sử $\alpha=\alpha(x)$ là thừa số tích phân của PTVP không toàn phần (5.19). Khi đó $\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(x).Q(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x).P(x,y)\right]$

tức là $$\alpha\frac{\partial P}{\partial y}=\alpha' Q+\alpha\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Chia hai vế cho αQ và biến đổi ta được :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dx}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Chứng tỏ $-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ chỉ là hàm của x và tích phân sẽ có :

$$\frac{d\alpha}{\alpha}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\alpha(x)=e^{-\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx} \tag{5.23}$$

Tương tự nếu $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ chỉ là hàm của y thì sẽ tồn tại thừa số tích phân là hàm của một biến y và công thức tìm:

$$\alpha(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \tag{5.24}$$

Ví dụ 9. Tích phân PTVP :

$$(x^2+y^2)dx+(2xy+xy^2+\frac{x^3}{3})dy=0$$

Giải.

Đặt $P = x^2 + y^2, Q = 2xy + xy^2 + \frac{x^3}{3}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + y^2 + x^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{1}{P} = 1$ Suy ra một thừa số tích phân là $\alpha(y) = e^{\int dy} = e^y$

Nhân hai vế của phương trình trên với e^y sẽ có :

$$e^y(x^2 + y^2)dx + e^y(2xy + xy^2 + \frac{x^3}{3})dy = 0$$

Vế trái là vi phân toàn phần của hàm số :

$$u(x,y) = \int_0^x e^y(x^2 + y^2)dx + \int_0^y 0dy$$

$$u(x,y) = e^y\left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right)$$

Vậy tích phân tổng quát của PTVP là :

$$e^y x\left(\frac{x^2}{3} + y^2\right) = C \quad \text{(C là hằng số tuỳ ý).}$$

5.2. TỔNG QUAN VỀ SỐ PHỨC

Chúng ta đã biết rằng trong trường số thực $\mathbb{R}$ không thể phân tích thành thừa số tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ khi $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.Tuy nhiên sẽ rất tiện lợi nếu có thể thừa số hoá tam thức này thành dạng $a(x-\alpha)(x-\beta)$ trong đó $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$.Nhằm mục đích này thêm vào $\mathbb{R}$ một phần tử mới, kí hiệu là i (gọi là đơn vị ảo) kết hợp với các cặp số thực $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ để tạo ra các số phức.

5.2.1.Định nghĩa và các dạng số phức

A. Định nghĩa:

Cho $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, một số biểu diễn dưới dạng z = x + iy, trong đó $i^2 = -1$ gọi là một số phức. Tập các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Gọi x là phần thực của z, kí hiệu Rez = x

y là phần ảo của z, kí hiệu là Imz = y

Gọi môđun của z, kí hiệu là $|z|$, xác định bởi một số thực không âm

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \geq 0$$

Gọi Acgumen của z , kí hiệu Argz xác định bởi một số thực

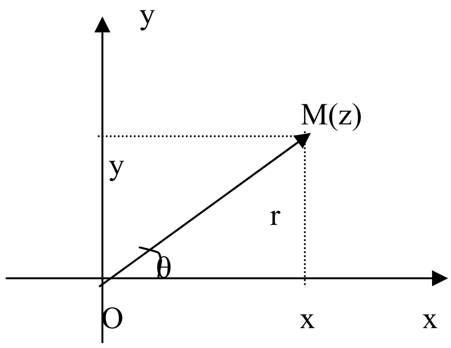
$$\text{Argz} = \text{Arg}\varphi \in \mathbb{R} \text{ và xác định từ điều kiện } cos\varphi = \frac{x}{|z|} \text{ và } \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \text{ với } z \neq 0$$

Như vậy Acgumen của z sai khác nhau $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và Arg0 là không xác định.

Vậy số phức z có các dạng viết:

1. z = x + iy gọi là dạng chính tắc hay dạng đại số của số phức z .
2. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

B. Biểu diễn hình học của các số phức



H.5.2

Xét mặt phẳng Oxy với hệ toạ độ trực chuẩn (xem H.5.2)

Ánh xạ $\varphi: \mathbb{C} \to Oxy$ đặt mỗi số phức z = x + iy ứng với điểm M có toạ độ (x,y) trên mặt phẳng Oxy. Vậy φ là song ánh. Gọi mặt phẳng Oxy là mặt phẳng phức.

$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi(z)$ gọi là ảnh của z trên Oxy

$\forall M \in Oxy, \varphi^{-1}(M)$ gọi là toạ vị của M, đó là số phức $z \in \mathbb{C}$. Ngoài ra $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là véctơ biểu diễn số phức z. Như vậy $|\overrightarrow{OM}| = |z|$ và $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ = Argz

Trên mặt phẳng phức Oxy nhận thấy:

Trục Ox biểu diễn các số thực $z = x \in \mathbb{R}$, trục này gọi là trục thực, còn trục Oy biểu diễn các số phức z = iy, y$\in\mathbb{R}$ gọi là các số ảo thuần tuý, người ta gọi trục Oy là trục ảo.

5.2.2.Các phép toán trên tập $\mathbb{C}$

A.Phép so sánh bằng nhau

$$\forall\left(x, y, x^{'}, y^{'}\right) \in \mathbb{R}^4, \qquad x + iy = x^{'} + iy^{'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^{'} \\ y = y^{'} \end{cases}$$

B. Phép lấy liên hợp

Cho $z = x + iy \in \mathbb{C}$, liên hợp của z, kí hiệu là $\overline{z}$ cho bởi $z = x - iy$

C. Phép lấy số phức đối

Cho z = x + iy$\in \mathbb{C}$, số phức đối của z, kí hiệu là –z (đọc là trừ z) được xác định:

-z = -x - iy

D. Phép cộng

Cho z = x + iy, z’= x’+ iy’, tổng của z và z’, kí hiệu là z + z’ xác định như sau:

z + z’ = (x + x’) + i(y + y’)

E. Phép nhân

Cho z = x + iy và z’= x’+ iy’, tích của z và z’, kí hiệu là z.z’ xác định như sau:

z.z’ = (xx’- yy’) + i(xy’+ x’y)

F. Phép trừ và phép chia

Là các phép tính ngược của phép cộng và phép nhân

$$z - z' = z + (-z')$$

$$\frac{z}{z'} = z'' \Leftrightarrow z = z'.z'', \text{ khi } z \neq 0$$

Từ các phép toán trên, nhận được các tính chất dưới đây:

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z.$

2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

3. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z.z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \quad \overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i},$$

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{z_i}$$

4. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

5. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$$\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}, i\mathbb{R} = \{iy, y \in \mathbb{R}\}$$

6. $\forall z \in \mathbb{C} \quad z.\overline{z} = |z|^2$

G. Phép luỹ thừa, công thức Moavrờ (Moivre)

Cho $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Gọi z^k là luỹ thừa bậc k của z. Bằng qui nạp , dễ chứng minh được

$$z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \tag{5.25}$$

Gọi (5.25) là công thức Moivre.

H. Phép khai căn bậc n của $z \in \mathbb{C}^*$.

Cho $n \in \mathbb{N}^*, z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Gọi $\varsigma \in \mathbb{C}^*$ là căn bậc n của z, kí hiệu $\sqrt[n]{z}$, xác định như

sau: $\varsigma^n = z$

Nếu gọi $\rho = |\varsigma|$ và Φ = Argς thì $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\Phi = \varphi + 2k\pi \end{cases}$ hay là $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ và Φ=$\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$

với $k = 0,1,2,...,n-1$.

Vậy số z có đúng n căn bậc n, đó là các số phức có dạng:

$$\varsigma = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,...,n-1 \quad (5.26)$$

Chú ý:

- Trong lý thuyết chuỗi $[2]$, sau khi đã có các khai triển của các hàm số sơ cấp, người ta sẽ nhận được dạng luỹ thừa của số phức z:

$$z = re^{i\theta}$$

Khi đó công thức (5.25) sẽ là : $z^k = r^k e^{ik\theta}$, $\quad k \in \mathbb{Z} \quad$ (5.25)'

Còn công thức (5.26) sẽ là : $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*, k = 0,1,2,...,n-1 \quad$ (5.26)'

- Căn bậc n của 1.

Vì z = 1 có $|z|$ = 1 = r, Argz = 0. Vậy căn bậc n của 1 là n số phức dạng:

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

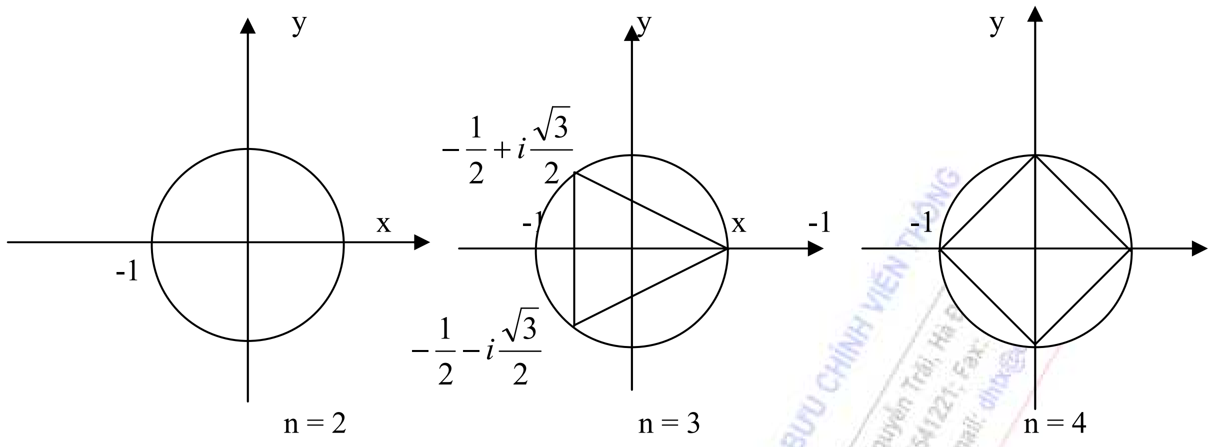
Vì $e^{\pm 2\pi i} = 1$ nên các số phức ω_k có những tính chất sau:

a. $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \qquad \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$. .

b. $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \qquad \omega_k = \omega_1^k$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^k = \dfrac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = 0,$

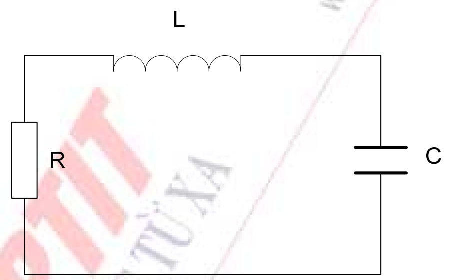
d. Các số phức ω_k biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn lượng giác và một trong các đỉnh là điểm có toạ vị bằng 1. Đa giác này nhận Ox làm trục đối xứng, chẳng hạn với n = 2, n = 3, n = 4, biểu diễn hình học các số ω_k cho trên hình 5.3



H.5.3

5.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

Trước hết, ta xét một bài toán dẫn đến PTVP tuyến tính cấp hai. Xét mạch RLC (hình 5.4).



H.5.2

Gọi u(t) là tổng điện áp trên các phần tử của mạch, vậy u(t) = 0. i(t) là cường độ dòng điện trong mạch. Trong kỹ thuật điện tử đã biết hiệu điện thế trên điện trở là Ri(t), trên cuộn tự cảm là $L\frac{di}{dt}$ và trên tụ là $\frac{1}{C}\left(\int_0^t idt+q_0\right)$ trong đó q_0 là điện lượng ban đầu trên tụ. Vậy ta có mối liên hệ sau đây:

$$0=u(t)=Ri(t)+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt+q_0\right)$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta sẽ có :

$$u'(t)=Ri'+Li''+\frac{i}{C}$$

Vậy nhận được phương trình tuyến tính cấp 2 đối với hàm số i :

$$\mathrm{L}i''+\mathrm{R}i'+\frac{i}{\mathrm{C}}=0$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình có dạng :

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{5.27}$$

trong đó $a_1(x), a_2(x), f(x)$ liên tục trên (a,b).

Nếu $f(x) \neq 0$ thì (5.27) gọi là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì (5.27) gọi là PTVP tuyến tính thuần nhất.

Người ta đã chứng minh rằng với các giả thiết trên, PTVP (5.27) luôn tồn tại nghiệm và nghiệm của bài toán Cauchy sau đây là duy nhất.

Tìm nghiệm của PTVP (5.27) thoả mãn:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{5.28}$$

trong đó (x_0, y_0, y'_0) cho trước. Các điều kiện (5.28) gọi là các điều kiện ban đầu. Bài toán trên gọi là bài toán Cauchy

Người ta gọi PTVP (giữ nguyên vế trái của (5.27)) (5.28)

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

là PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng với PTVP tuyến tính không thuần nhất (5.27).

Mọi hệ tuyến tính đều có tính chất chung nên tương tự như PTVP cấp một, nghiệm của PTVP (5.27) có quan hệ với nghiệm của PTVP (5.29). Vì thế trước hết ta xét PTVP (5.29).

5.3.1 Tính chất nghiệm của PTVP tuyến tính thuần nhất.

Xét PTVP tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{5.30}$$

Định lý 5.2. *Nếu y_1 và y_2 là nghiệm của PTVP (5.30) thì y_1+y_2 và Cy_1 (hoặc Cy_2) với C là hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của (5.30).*

Chứng minh : Thật vậy thay $y = y_1 + y_2$, $y = Cy_1$ vào PTVP (5.30) sẽ nhận thấy chúng thoả mãn PTVP đó :

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_2(x)(y_1 + y_2)$$
$$= \left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] + \left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right] \equiv 0$$

$$(Cy_1)'' + a_1(x)(Cy_1)' + a_2(x)Cy_1 = C\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] \equiv 0$$

Trước hết ta xét khái niệm hai hàm phụ tuyến tính, độc lập tuyến tính. Các khái niệm này cũng tương tự như các khái niệm của véc tơ trong không gian đã học trong toán cao cấp A_2.

Các hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ liên tục trên (a, b) gọi là phụ thuộc tuyến tính trong (a,b) nếu tồn tại 2 hằng số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho :

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0, \forall x \in (a,b) \tag{5.31}$$

Ngược lại, tức là (5.31) chỉ xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ thì nói rằng $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ là độc lập tuyến tính trên (a, b). Dễ dàng chỉ ra rằng : Hai hàm số độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tỷ số của chúng không phải là hằng số. Hai hàm số phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỉ lệ với nhau

Chẳng hạn : $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = x^2$

$\varphi_4(x) = \sin x, \varphi_5(x) = \cos x, \varphi_6(x) = e^x, \varphi_7(x) = e^{2x}$ là độc lập tuyến tính từng đôi trên khoảng (a, b) bất kỳ.

Định lý 5.3. *Nếu các hàm* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *phụ thuộc tuyến tính trên (a ,b) thì :*

$$W[\varphi_1,\varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

Gọi $$W[\varphi_1,\varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}. \qquad (5.32)$$

là định thức Wronski của hai hàm φ_1, φ_2

Chứng minh :

Tồn tại α_1, α_2 không đồng thời bằng không để $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0$

Giả sử $\alpha_2 \neq 0$, vậy $\varphi_2(x) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1(x)$ suy ra :

$$W[\varphi_1,\varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1(x) \\ \varphi_1' & -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1'(x) \end{vmatrix} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 \\ \varphi_1' & \varphi_1' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Định lý 5.4. *Nếu các nghiệm y_1, y_2 của PTVP tuyến tính thuần nhất (5.30) là độc lập tuyến tính trên (a b)* thì $$W[y_1, y_2] \neq 0, \forall x \in (a,b) \qquad (5.33)$$

Chứng minh :

Gỉa sử ngược lại $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = 0$ với $a < x_0 < b$. Xét hệ phương trình đại số với các ẩn C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm không tầm thường C_1, C_2 (giả sử $C_2 \neq 0$) vì định thức của hệ bằng không.

Mặt khác hàm số $\tilde{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của (5.28) (theo định lý 5,2).

Theo trên thì $\tilde{y}(x_0) = 0, \tilde{y}'(x_0) = 0$. Từ tính duy nhất nghiệm suy ra $\tilde{y} = 0$ trên (a, b) tức là :

$$C_1y_1 + C_2y_2 \equiv 0, \forall x \in (a,b)$$

Mà $C_2 \neq 0$ chứng tỏ y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính, mâu thuẫn với giả thiết.

Định lý 5.5. *Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (5.30) thì nghiệm tổng quát của PTVP (5.30) có dạng :* $$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad (5.34)$$

trong đó C_1, C_2 *là các hằng số tuỳ ý*

Chứng minh :

Trước hết ta thấy (5.34) là nghiệm của (5.30) (theo định lý 5.2) và phụ thuộc vào 2 hằng số C_1, C_2 tuỳ ý.

Ngoài ra với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$ thì sẽ tìm được C_1, C_2 duy nhất. Thật vậy hệ phương trình :

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases} \text{ có } \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Suy ra nghiệm (C_1, C_2) tồn tại duy nhất.

Định lý 5.6 *Nếu biết* $y_1 \neq 0$ *là nghiệm của (5.30) thì có thể tìm được nghiệm* y_2 *của (5.30) độc lập tuyến tính với* y_1 *dạng :*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx \tag{5.35}$$

Chú ý : Trong tích phân trên hằng số cộng của tích phân bất định luôn lấy bằng 0.

Chứng minh :

Trước hết ta có thể tìm nghiệm y_2 trong dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

Đặt vào (5.30) sẽ nhận được PTVP đối với hàm u(x)

$$y''_1 u + 2y'_1 u' + y_1 u'' + a_1(x)\left[y'_1 u + y_1 u'\right] + a_2 y_1 u = 0$$

$$u(y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + y_1 \left\{ u'' + \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x) \right] u' \right\} = 0$$

Chọn u khác hằng số thoả mãn phương trình :

$$u'' + \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x) \right] u' = 0$$

Đặt $v = u'$ có $v' + \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x) \right] v = 0$

Đây là PTVP tuyến tính cấp 1, do đó :

$$v = Ce^{-\int \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x) \right] dx}$$

$$= Ce^{-2\int \frac{y'}{y_1} dx} . e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$= Ce^{-2\ln y_1} . e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$= C\frac{1}{y_1^2} . e^{-\int a_1(x)dx}$$

Lấy $C = 1$ do đó có thể chọn u là :

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)}.e^{-\int a_1(x)dx} dx$$

Vì $u'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} \neq 0$ nên u(x) không phải là hằng số, chứng tỏ y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

Ví dụ 10 : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình :

$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

Giải : Tìm y_2 độc lập tuyến tính với y_1 trong dạng (5.35)

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2.e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\sin^2 x} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2.e^{-2\ln x}}{\sin^2 x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x}(-\cot gx) = -\frac{\cos x}{x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát :

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right).$$

Ví dụ 11 : Giải phương trình

$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$

Giải : Trước hết tìm α

Đặt $y_1 = x^\alpha$ vào phương trình sẽ có :

$$x^2(\ln x - 1)\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} - \alpha x^\alpha + x^\alpha = 0, \forall x \in (a,b)$$

$$\alpha(\ln x - 1)(\alpha - 1) - \alpha + 1 = 0, \forall x \in (a,b)$$

suy ra $\begin{cases} \alpha(\alpha - 1) = 0 \\ -\alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow y_1 = x$

Tìm y_2 trong dạng (5.33)

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{xdx}{x^2(\ln x - 1)}}}{x^2} dx$$

$$= x \int \frac{e^{\int \frac{d\ln x}{\ln x - 1}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx$$

$$= x \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = x\left[-\frac{1}{x}(\ln x - 1) + \int \frac{dx}{x^2}\right] = -\ln x$$

Nghiệm tổng quát $y = C_1 x + C_2 \ln x$

Chú ý : Để biết được một nghiệm không tầm thường của PTVP tuyến tính thuần nhất là rất khó khăn. Vì thế trong quá trình tích phân ta phải xem xét dạng phương trình để suy đoán được nghiệm hoặc tìm nghiệm theo sự gợi ý của bài toán.

5.3.2 Tính chất nghiệm của PTVP tuyến tính không thuần nhất

Xét PTVP (5.27) và PTVP thuần nhất tương ứng(5.29).

Định lý 5.7. *Nghiệm tổng quát của PTVP (5.27) bằng tổng nghiệm tổng quát của PTVP (5.29) cộng với một nghiệm riêng bất kỳ của chính phương trình (5.27)*

$$y = \overline{y} + y^* \qquad (5.36)$$

Ở đây người ta dùng ký hiệu :

$\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP (5.29)

y^* là nghiệm riêng của PTVP (5.27)

Chứng minh : Thay $y = \overline{y} + y^*$ vào (5.27) ta có:

$$\overline{y}'' + y^{*''} + a_1(x)(\overline{y}' + y^{*'}) + a_2(x)(\overline{y} + y^*) = f(x)$$
$$\overline{\mathbf{y}}'' + a_1(x)\overline{y}' + a_2(x)\overline{y} + y^{*''} + a_1(x)y^{*'} + a_2(x)y = f(x)$$
$$0 + f(x) = f(x)$$

Chứng tỏ $y = \overline{y} + y^*$ là nghiệm của (5.27). Nó phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý C_1, C_2(có trong biểu thức của $\overline{y}$) và với điều kiện đầu thì C_1, C_2 sẽ tìm được duy nhất như đã chứng minh ở định lý 5.5

Định lý 5.8 (Nguyên lý chồng chất nghiệm): *Nếu* y_1^*, y_2^* *lần lượt là các nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất*

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f_1(x)$$
$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^* + y_2^*$ *là nghiệm riêng của phương trình (5.27) với vế phải*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Chứng minh định lý này cũng tương tự như trên bằng cách thay $y^* = y_1^* + y_2^*$ vào PTVP (5.27) sẽ nhận được đồng nhất thức.

Ý nghĩa của nguyên lý là ở chỗ: vế phải *f(x)* có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm số, ứng với mỗi hàm số, nghiệm riêng thành phần có thể tìm được dễ dàng hơn và như vậy nghiệm riêng y^* sẽ tìm được.

Định lý 5.9: *Nếu biết hai nghiệm riêng của PTVP (5.25)* y_1^*, y_2^* *thì hàm số* $y = y_1^* - y_2^*$ *là nghiệm của PTVP (5.29).*

Chứng minh định lý này bằng cách thay $y = y_1^* - y_2^*$ vào phương trình (5.29) và để ý đến y_1^*, y_2^* là các nghiệm riêng của (5.27) sẽ nhận được đồng nhất thức.

Định lý 5.10: *Nếu biết hai nghiệm riêng y_1, y_2 độc lập tuyến tính của (5.29) thì một nghiệm riêng của (5.27) có thể tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nghiệm đó có dạng:*

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{5.37}$$

trong đó:
$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{5.38}$$

Chứng minh: Giả sử biết hai nghiệm độc lập tuyến tính của PTVP (5.29) là y_1, y_2. Khi đó nghiệm tổng quát của (5.29) là:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

Nội dung của phương pháp biến thiên hằng số Lagrange là:

Coi $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm riêng của (5.27), với sự tồn tại của $C_1(x), C_2(x)$.

Thật vậy $y^{*'} = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'$

Trước hết đặt điều kiện:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \text{ khi đó } y^{*'} = C_1y_1' + C_2y_2' \quad \textbf{(*)}$$

Bây giờ thay y^* vào (5.27) sẽ nhận được:

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Để y^* là nghiệm thì phải có:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \quad \textbf{(**)}$$

Các điều kiện (*) và (**) bây giờ là:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Hệ phương trình này hoàn toàn tìm được C_1', C_2' do $W[y_1, y_2] \neq 0$. Từ đó sẽ có $C_1(x), C_2(x)$.

Ví dụ 12: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = \frac{1}{x^2+1}.$$

Giải: Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=0$$

Dễ nhận thấy phương trình thuần nhất này có một nghiệm là $y_1=1$

Nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính tìm theo công thức (5.35) sẽ là:

$$y_2=\int e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}=arctgx$$

Nghiệm riêng của PTVP đã cho tìm trong dạng:

$$y^*=C_1(x)+C_2(x)arctgx$$

trong đó:

$$\begin{cases} C_1'+C_2'arctgx=0 \\ C_1'.0+C_2'.\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Giải hệ này sẽ có:

$$C_2'=1\Rightarrow C_2=x$$

$$C_1'=-arctgx\Rightarrow C_1=-\int arctgxdx=-x.arctgx+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1+C_2arctgx$$

5.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi

5.4.1. Khái niệm về số phức

5.4.2. Các dạng nghiệm của phương trình thuần nhất

Cho phương trình:

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \tag{5.39}$$

trong đó a_1,a_2 là các hằng số thực.

Tìm nghiệm riêng của (5.39) dưới dạng

$$y=e^{kx},\ k=\text{const}$$

Vậy k thỏa mãn điều kiện:

$$y'=k.e^{kx}, y''=k^2e^{kx}, e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0\Leftrightarrow k^2+a_1k+a_2=0 \tag{5.40}$$

Phương trình (5.40) gọi là phương trình đặc trưng của (5.39). Thông qua phương trình này, chúng ta có thể biết được dạng nghiệm của chính (5.39).

* Nếu (5.40) cho 2 nghiệm thực khác nhau k_1, k_2 thì có 2 nghiệm riêng của (5.39) là $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$. Chúng độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x}$ không phải là hằng số. Vậy nghiệm tổng quát của (5.39) sẽ là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{5.41}$$

* Nếu (5.40) cho 2 nghiệm thực trùng nhau thì (5.39) có 1 nghiệm riêng, $y_1 = e^{kx}$. Nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 tìm được theo công thức 5.35

$$y_2 = uy_1 \text{ và } e^{kx}u'' + e^{kx}(a_1 + 2k)u' = 0$$

vì *k* là nghiệm kép của (5.40) do đó $a_1 + 2k = 0$. Suy ra:

$$u'' = 0, u = Ax + B \text{, lấy } u = x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (5.39) :

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx} \tag{5.42}$$

* Nếu (5.40) cho 2 nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì hai nghiệm riêng dưới dạng phức sẽ là:

$$y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Do a_1, a_2 là các số thực, vậy các phần thực và phần ảo của y_1, y_2 cũng là nghiệm của (5.39).

Chúng ta lấy 2 nghiệm là $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$. Chúng độc lập tuyến tính. Vậy nghiệm tổng quát của (5.39) trong trường hợp này có dạng:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \tag{5.43}$$

Ví dụ 13: $y'' + 5y' + 6y = 0$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó: $k^2 + 5k + 6 = 0$ cho nghiệm $k_1 = -3, k_2 = -2$. Vậy :

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Ví dụ 14: $y'' - 2y' + y = 0$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm $k_1 = k_2 = 1$. Vậy

$$y = e^x(C_1 + C_2 x)$$

Ví dụ 15: Tìm nghiệm của bài toán Côsi:

$$y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = y'(0) = 1$$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó:

$$k^2 + 2k + 2 = 0, k = -1 \pm i$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$
$$y' = e^{-x}\left((C_2 - C_1)\cos x - (C_2 + C_1)\sin x\right)$$
$$y(0) = 1 = C_1$$
$$y'(0) = 1 = C_2 - C_1 \Rightarrow C_2 = 2$$
$$y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x).$$

5.4.3. Phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Cho phương trình :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (5.44)$$

trong đó a_1, a_2 là các hằng số thực.

Nhờ vào phương pháp biến thiên hằng số Lagrange và các dạng nghiệm của phương trình thuần nhất ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của (5.44) với *f(x)* là hàm liên tục bất kỳ.

Ví dụ 16: Tích phân PTVP $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Giải: PTVP thuần nhất tương ứng:

$$y'' - y = 0$$

Phương trình đặc trưng của nó:

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

Nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất tương ứng:

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

Bây giờ tìm nghiệm riêng của PTVP đã cho bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange:

$$y^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^x$$

trong đó $\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' e^x = 0 \\ -C_1' e^{-x} + C_2' e^x = \dfrac{e^x}{1 + e^x} \end{cases}$

Suy ra:

$$C_2' = \frac{1}{2}\frac{1}{e^x + 1}, C_1' = -\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{1 + e^x}$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

Đặt $e^x + 1 = t$, $dx = \dfrac{dt}{t - 1}$,

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t} = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + \frac{1}{2}x$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t}dt$$

$$= -\frac{e^x + 1}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^x + 1)$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = \frac{e^{-x}}{2}\left[\ln(e^x + 1) - e^x + C_1\right] + \frac{e^x}{2}\left[x - \ln(e^x + 1) + C_2\right]$$

Dưới đây chúng ta xét các dạng đặc biệt của *f(x)* ứng với nó, nghiệm riêng của (5.44) tìm được mà không cần phải dùng đến phép tính tích phân.

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)$

trong đó $\alpha, A_1 \in R, (i = \overline{0,n}), A_n \neq 0$

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (5.44) :

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (5.45)$$

thì một nghiệm riêng của (5.44) tìm dưới dạng:

$y^* = e^{\alpha x}Q_n(n) = e^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0)$ với *n+1* hệ số B_i chưa biết. Thay y^* vào (5.42) thì:

$$Q_n'' + (2\alpha + a_1)Q_n' + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q_n = P_n$$

Đồng nhất các hệ số của lũy thừa cùng bậc của *x* ta sẽ có hệ *(n+1)* phương trình tuyến tính với với *(n+1)* ẩn số B_i ($i = \overline{0,n}$). Phương pháp tìm các hệ số của Q_n như trên gọi là phương pháp hệ số bất định với hệ hàm số $1, x, x^2, ..., x^n, ...$

Nếu α là nghiệm đơn của (5.43), nghiệm riêng tìm dưới dạng:

$$y^* = xe^{\alpha x}Q_n(x) = xe^{\alpha x}(B_n x^n + ... + B_0)$$

Nếu α là nghiệm kép của (5.43) thì:

$$y^* = x^2 e^{\alpha x}Q_n(x) = x^2 e^{\alpha x}(B_n x^n + ... + B_0)$$

Ví dụ 17: Tìm một nghiệm riêng của PTVP: $y'' + 2y' + y = x (= e^{0.x}P_1(x))$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng:

$k^2 + 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép *k = -1*

$$y^* = B_1 x + B_0,\ y^{*'} = B_1,\ y^{*''} = 0$$

$2B_1 + B_1x + B_0 = x$

$\begin{cases} B_1 = 1 \\ 2B_1 + B_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_0 = -2B_1 = -2$

$y^* = x - 2$.

Ví dụ 18: Tìm một nghiệm riêng của PTVP: $y'' + 2y' - 3y = e^x x (= e^{1.x} P_1(x))$

Giải: Phương trình đặc trưng của PTVP thuần nhất:

$k^2 + 2k - 3 = 0$ có nghiệm *k = 1, k = -3*

$y^* = x.e^x (B_1x + B_0) = e^x (B_1x^2 + B_0x)$

$y^{*'} = e^x (B_1x^2 + (B_0 + 2B_1)x + B_0)$

$y^{*''} = e^x (B_1x^2 + (B_0 + 4B_1)x + 2B_0 + 2B_1)$

Thay vào phương trình sẽ có:

$8B_1x + 2B_1 + 4B_0 = x$

$\begin{cases} 8B_1 = 1 \\ 2B_1 + 4B_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{1}{8} \\ B_0 = -\frac{1}{2}B_1 = -\frac{1}{16} \end{cases}$

$y^* = x.e^x \frac{1}{8}(x - \frac{1}{2}).$

Ví dụ 19: Tìm nghiệm của bài toán Côsi:

$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x+1), y(0) = y'(0) = 1$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng $k^2 - 4k + 4 = 0$ cho nghiệm $k_1 = k_2 = 2$.

Trước hết tìm một nghiệm riêng:

$y^* = x^2 e^{2x}(B_1x + B_0) = e^{2x}(B_1x^3 + B_0x^2)$

$y^{*'} = e^{2x}\left[2B_1x^3 + (2B_0 + 3B_1)x^2 + 2B_0x\right]$

$y^{*''} = e^{2x}\left(4B_1x^3 + (4B_0 + 12B_1)x^2 + (8B_0 + 6B_1)x + 2B_0\right)$

$6B_1x + 2B_0 = x + 1$

$\begin{cases} 6B_1 = 1 \\ 2B_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow B_1 = \frac{1}{6}, B_0 = \frac{1}{2}$

Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}x^2e^{2x}(x+3)$$
$$y' = e^{2x}(2C_1 + C_2 + C_2x) + \frac{1}{6}e^{2x}(2x^3 + 9x^2 + 6x)$$
$$y(0) = C_1 = 1$$
$$y'(0) = 2C_1 + C_2 = 1$$
$$C_1 = 1, C_2 = -1$$
$$y = e^{2x}(1-x) + \frac{1}{6}x^2e^{2x}(x+3).$$

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_n(x), Q_n(x)$ là các đa thức bậc *n,m* cho trước với các hệ số thực.

Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của (5.43) thì một nghiệm riêng của (5.42) được tìm dưới dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $R_l(x), S_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(n,m)$ có các hệ số được tìm bằng phương pháp hệ số bất định với các hệ hàm: $1, x, x^2, ..., \sin\beta x, \cos\beta x$

Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của (5.43) thì tìm nghiệm trong dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}x\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

Ví dụ 20: Tìm nghiệm tổng quát: $y'' + y' = x\cos x$

Giải: Phương trình đặc trưng tương ứng $k^2 + k = 0$ cho nghiệm $k = 0, k = -1$

Nhận thấy $\pm i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy

$$y^* = (A_1x + A_0)\cos x + (B_1x + B_0)\sin x$$
$$y^{*'} = (B_1x + A_1 + B_0)\cos x + (-A_1x + B_1 - A_0)\sin x$$
$$y^{*''} = (-A_1x + 2B_1 - A_0)\cos x + (-B_1x - 2A_1 - B_0)\sin x$$

Vậy $\left((B_1 - A_1)x + A_1 + 2B_1 + B_0 - A_0\right)\cos x + \left(-(A_1 + B_1)x + B_1 - 2A_1 - A_0 - B_0\right)\sin x = x\cos x$

$$B_1 - A_1 = 1, A_1 + 2B_1 + B_0 - A_0 = 0$$
$$B_1 + A_1 = 0, -2A_1 + B_1 - B_0 - A_0 = 0$$
$$B_1 = \frac{1}{2}, A_1 = -\frac{1}{2}, A_0 = 1, B_0 = \frac{1}{2}$$

Nghiệm tổng quát: $y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}(x-2)\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x$

Ví dụ 21: Tìm một nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(1 + \sin x)$$

Giải: Dựa vào nguyên lý chồng chất nghiệm, ta tìm các nghiệm riêng của các phương trình sau:

$$y''+2y'+2y = e^{-x}\sin x$$
$$y''+2y'+2y = e^{-x}$$

Phương trình đặc trưng tương ứng $k^2 + 2k + 2 = 0$ cho nghiệm $k = -1 \pm i$

$$y_1^* = xe^{-x}(A_0\cos x + B_0\sin x)$$
$$y_1^{*'} = e^{-x}\big((B_0x - A_0x + A_0)\cos x + (B_0 - B_0x - A_0x)\sin x\big)$$
$$y_1^{*''} = e^{-x}\big((2B_0 - 2A_0 - 2B_0x)\cos x + (-2B_0 - 2A_0 + 2A_0x)\sin x\big)$$
$$2B_0\cos x - 2A_0\sin x = \sin x$$
$$B_0 = 0, A_0 = -\frac{1}{2}, y_1^* = -\frac{xe^{-x}}{2}\cos x$$
$$y_2^* = C_0e^{-x}, y_2^{*'} = -C_0e^{-x}, y_2^{*''} = C_0e^{-x}$$
$$C_0 = 1, y_2^* = e^{-x}$$

Nghiệm riêng $y^* = y_1^* + y_2^* = e^{-x}(1 - \frac{x}{2}\cos x)$

Các phương pháp trình bày trên cũng được áp dụng cho phương trình vi phân tuyến tính cấp cao có hệ số hằng số, chẳng hạn xét bài toán Côsi sau:

Ví dụ 22: Giải PTVP:

$$y'''-2y''+2y'-y = x^2, y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = -1$$

Giải: Phương trình đặc trưng của PTVP thuần nhất tương ứng:

$$k^3 - 2k^2 + 2k - 1 = 0$$
$$(k-1)(k^2 - k + 1) = 0, k_1 = 1, k_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$\overline{y} = C_1e^x + e^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ C_1, C_2, C_3 là các hằng số tùy ý.

Một nghiệm riêng tìm dưới dạng:

$$y^* = A_2x^2 + A_1x + A_0$$
$$y^{*'} = 2A_2x + A_1$$
$$y^{*''} = 2A_2$$
$$y^{*'''} = 0, \quad -A_2x^2 + (4A_2 - A_1)x + 2A_1 - A_0 - 4A_2 = x^2$$
$$A_2 = -1$$
$$4A_2 - A_1 = 0 \quad A_1 = -4$$
$$2A_1 - A_0 - 4A_2 = 0, \quad A_0 = -4$$

Nghiệm tổng quát :

$$y = C_1e^x + e^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^2 - 4x - 4$$

$$y' = C_1e^x + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left((C_2 + C_3\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 - C_2\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 2x - 4$$

$$y'' = C_1e^x + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left((C_3\sqrt{3} - C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - (C_2\sqrt{3} + C_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 2$$

Từ điều kiện ban đầu có: $\begin{cases} C_1 + C_2 - 4 = 0 \\ C_1 + \frac{1}{2}(C_2 + C_3\sqrt{3}) - 4 = -1 \\ C_1 + \frac{1}{2}(C_3\sqrt{3} - C_2) - 2 = -1 \end{cases}$

$$C_1 = C_2 = 2, C_3 = 0$$

Vậy nghiệm của bài toán Côsi là: $y = 2e^x + 2e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

TÓM TÁT NỘI DUNG CHƯƠNG V.

- Phương trình có biến số phân ly. Dạng phương trình: $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$

  Tích phân tổng quát: $\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C$

- Phương trình đẳng cấp cấp một. Dạng phương trình: $y' = f(\frac{y}{x})$, hay $y' = f(t), t = \frac{y}{x}$

  Phương pháp tích phân: Coi t là hàm số của x, thay vào phương trình sẻ đưa về dạng có biến số phân ly $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$

- Phương trình tuyến tính cấp một. Dạng phương trình: $y' + p(x)y = q(x)$

  Nghiệm tổng quát:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

- Phương trình Bernoulli. Dạng phương trình: $y' + p(x)y = y^{\alpha}q(x)$

  Phương pháp tích phân: Đặt $u(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$,

  Thay vào phương trình trên sẽ nhận được PTVP tuyến tính cấp 1 đối với hàm $u(x)$:

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$

- Phương trình vi phân toàn phần. Dạng phương trình: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

  trong đó $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall(x,y) \in D$

Tích phân tổng quát: $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$

hoặc: $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (*)$$

Tính chất nghiệm:

1. Nếu y_1 và y_2 là nghiệm của PTVP(*) thì y_1+y_2 và Cy_1 (hoặc Cy_2) với C là hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của(*)

2. Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (*) thì nghiệm tổng quát nó có dạng : $y = C_1y_1 + C_2y_2$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý

3. Nếu biết $y_1 \neq 0$ là nghiệm của (*) thì có thể tìm được nghiệm y_2 của nó độc lập tuyến tính với y_1 dạng :

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx$$

Chú ý : Trong tích phân trên hằng số cộng của tích phân bất định luôn lấy bằng 0

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (**)$$

Tính chất nghiệm :

1. Nghiệm tổng quát của PTVP (**) bằng tổng nghiệm tổng quát của PTVP (*) cộng với một nghiệm riêng bất kỳ của chính phương trình (**)

$$y = \overline{y} + y^*$$

Ở đây người ta dùng ký hiệu :

$\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP (*)

y^* là nghiệm riêng của PTVP (**)

2. (Nguyên lý chồng chất nghiệm): Nếu y_1^*, y_2^* lần lượt là các nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$$
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^* + y_2^*$ là nghiệm riêng của phương trình (**) với vế phải $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

3. Nếu biết hai nghiệm riêng y_1, y_2 độc lập tuyến tính của (*) thì một nghiệm riêng của (**) có thể tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nghiệm đó có dạng:

$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

trong đó: $\begin{cases} C_1^/ y_1 + C_2^/ y_2 = 0 \\ C_1^/ y_1^/ + C_2^/ y_2^/ = f(x) \end{cases}$

4. Nếu biết hai nghiệm riêng của PTVP (**) y_1^*, y_2^* thì hàm số $y = y_1^* - y_2^*$ là nghiệm của PTVP (*)

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số không đổi

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, (1) a_1, a_2 là các hằng số thực

$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ (2) gọi là phương trình đặc trưng của (1)

Dạng nghiệm tổng quát:

Nếu (2) cho 2 nghiệm thực khác nhau k_1, k_2 thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Nếu (2) cho 2 nghiệm thực trùng nhau thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$

Nếu (2) cho 2 nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất có hệ số không đổi

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, (3) a_1, a_2 là các hằng số thực

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0)$

trong đó $\alpha, A_1 \in R, (i = \overline{0, n}), A_n \neq 0$

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (3) thì một nghiệm riêng của (3) tìm dưới dạng

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(n) = e^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \ldots + B_0)$$

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

trong đó $\alpha, \beta \in R, P_n(x), Q_n(x)$ là các đa thức bậc *n,m* cho trước với các hệ số thực.

Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của (2) thì một nghiệm riêng của (3) được tìm dưới dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $R_l(x), S_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(n, m)$ có các hệ số được tìm bằng phương pháp hệ số bất định với các hệ hàm: $1, x, x^2, \ldots, \sin\beta x, \cos\beta x$

Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của (2) thì tìm nghiệm riêng trong dạng:

$$y^* = e^{\alpha x} x\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1. Nghiệm tổng quát của PTVP cấp n phụ thuộc vào n hằng số tuỳ ý.

Đúng ☐ Sai ☐

5.2. Nghiệm của bài toán Cauchy luôn duy nhất nghiệm

Đúng ☐ Sai ☐

5.3. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange áp dụng chỉ cho PTVP tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐

5.4. Phương trình Bernoulli là PTVP tuyến tính

Đúng ☐ Sai ☐

5.5. PTVP toàn phần là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Đúng ☐ Sai ☐

5.6. PTVP tuyến tính thuần nhất luôn luôn có nghiệm

Đúng ☐ Sai ☐

5.7. Biết 2 nghiệm y_1 và y_2 của PTVP tuyến tính thuần nhất thì biết được nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Đún☐☐ Sai ☐

5.8. Biết 2 nghiệm của PTVP tuyến tính không thuần nhất thì có thể biết được nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Đúng ☐ Sai ☐

5.9. Giải PTVP tuyến tính có hệ số hằng số không cần dùng đến phép tính tích phân

Đúng ☐ Sai ☐

5.10. PTVP tuyến tính có tính chất chồng chất nghiệm.

Đúng ☐ Sai ☐

5.11. Giải các phương trình:

a. $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

b. $y' = x^2 e^x$

c. $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$

d. $\dfrac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

e. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

f. $y' = \cos(x-y)$

5.12. Giải các bài toán Cauchy:

a. $\dfrac{dx}{x(y-1)}+\dfrac{dy}{y(x+z)}=0,\ y(1)=1$

b. $(1+e^{2x})y^2dy=e^x dx,\ y(0)=0$

c. $\sin xdy-y\ln ydx=0,\ y(0)=1$

d. $(x^2+1)y'=y^2+4,\ y(1)=2$

5.13. Giải các phương trình:

a. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$, b. $xyy'+x^2-2y^2=0$,

c. , $x\cos\dfrac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\dfrac{y}{x}(xdy-ydx)$, d. $(y-x)dx+(y+x)dy=0$.

5.14. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

a. $x(1+x^2)y'-(x^2-1)y+2x=0$

b. $y'+2xy=xe^{-x^2}$

c. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

d. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$

5.15. Giải các bài toán Cauchy:

a. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ y(0)=\dfrac{1}{2}$

b. $(1+x^2)y'+xy=1,\ y(0)=0$

5.16. Chứng minh hàm số $y=x\int_1^x e^{t^2}dt$ là một nghiệm của phương trình $xy'-y=x^2e^{x^2}$. Hãy tìm nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện y(1)=1

5.17. Giải các phương trình:

a. $y'+xy=x^3y^3$

b. $\dfrac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1$

c. $(y\ln x-2)ydx=xdy$

d. $ydx+(x+x^2y)dy=0$

5.18. Giải các phương trình vi phân toàn phần:

a. $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right]dx+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$

b. $\dfrac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2}=0$

c. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0$

d. $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy=0$

5.19. Giải các phương trình sau đây bằng cách tìm thừa số tích phân α

a. $(2y+xy)dx+2xdy=0, \alpha(x)$

b. $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0, \alpha(x)$

c. $y(1+xy)dx-xdy=0, \alpha(y)$

d. $xdy+ydx-xy^2\ln xdx=0, \alpha(xy)$

5.20. Giải các phương trình vi phân sau:

a. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y_1=x^\alpha, \alpha\in R$

b. $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y_1=e^{\alpha x}, \alpha\in R$

c. $(x^2-1)y''-6y=0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng $y_1(x)$ có dạng đa thức.

d. $(2x-x^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng $y_1=1, y_2=x$

5.21. Giải các phương trình sau khi biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng.

a. $x^2y''-2xy'+2y=2x^3, y_1=x$

b. $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1, y_1=e^x$

c. $y''+\frac{1}{x^2\ln x}y=e^x\left(\frac{2}{x}+\ln x\right), y_1=\ln x$

5.22. Giải các phương trình:

a. $y''-y=\frac{e^x}{e^x+1}$

b. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

c. $y''+y=tgx$

d. $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$

5.23. Giải các phương trình:

a. $y''-7y'+6y=\sin x$

b. $y''-3y'=2-6x$

c. $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$

d. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

e. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$

f. $y'' + y = x^2 \cos^2 x$

5.24. Giải các bài toán Cauchy

a. $y'' - 2y' + 2y = 5\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

b. $y'' + y = \cos^3 x,\ y(0) = y'(0) = 0$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.16. $\pi;\dfrac{\pi}{2};0$

1.17. a . $\mathbb{R}$, b. $\mathbb{R}$, c. $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, d. $(-\infty;2]$

1.18. a. Hàm chẵn, b. Hàm không chẵn, không lẻ, c. Hàm chẵn, d. Hàm không chẵn, không lẻ.

1.19. a. Tuần hoàn, $T=\dfrac{2\pi}{3}$, b. Tuần hoàn, $T=\pi$,

c. Tuần hoàn, $T=\pi$, d. Không tuần hoàn.

1.20. a. $y=\dfrac{1}{2}(x-3)$, b. $y=-\sqrt{x+1}$, c. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, d. $y=2.10^x$.

1.21. a. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$; b. $\dfrac{n(n+1)}{2}$; c. $2\dfrac{1}{24}$; d. $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

1.22. a. 1; b. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1.23. a. $\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$; b. $\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$.

1.24. a. $\cos a$; b. $\dfrac{1}{4}$; c. 14 ; d. $-\dfrac{1}{12}$.

1.25. a. $\dfrac{1}{12}$; b. $\dfrac{1}{3}$

1.26. a. 0 ; b.1 ; c. e^{-2}; d. $e^{-\frac{1}{2}}$.

1.27. a. 1 ; b. 0 ; c. 1 ; d. $\ln x$.

1.28. a. e ; b. 1 ; c. $\dfrac{3}{2}$.

1.29. a. liên tục trên $\mathbb{R}$;

b. liên tục trên $\mathbb{R}$ với A = 4, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ với $A\neq 4$;

1.30. $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.16. a. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, b. $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$,

c. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, d. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x\neq 0$.

2.17. a. $y'=\dfrac{1}{\sin x}$ b. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, c. $y'=-\dfrac{1}{x^2}e^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\dfrac{2}{x}$,

d. $y'=\dfrac{4x}{1+x^4}$, e. $y'=-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, f. $y'=\dfrac{1}{x^2+1}$.

2.18.

a. $y'=\dfrac{2(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x-1}$, b. $y'=\dfrac{x-a}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$,

c. $y'=\dfrac{2}{x-ax^5}$, d. $y'=\dfrac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$.

2.19.

a. $y'=\dfrac{\sin 2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, b. $y'=\dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+tg\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$,

c. $y'=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$, d. $y'=\dfrac{1}{x\log_5 x.\log_3(\log_5 x)\ln 2.\ln 3.\ln 5}$.

2.20. a. $y'=x^{x^2+1}(2\ln x+1)$,

b. $y'=(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin nx}-\sin x\ln\sin x\right)$,

c. $y'=\dfrac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}.\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$,

d. $y' = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x \left(\dfrac{1}{x+1} + \ln\dfrac{x}{x+1}\right).$

e. $y' = (x^2+1)^{\sin x}\left[\dfrac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1)\right].$

f. $y' = \dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$

2.21.

a. $y' = y\dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

b. $y' = y(\ln 2 + \dfrac{2}{x} - 1 - \ln x)$

c. $y' = \dfrac{1}{e^x}x^{x+1}\ln x(\ln x - 1).$

d. $y' = \dfrac{1}{\ln^2\cos x}(\cot gx \ln\cos x + tgx\ln\sin x).$

2.22. a. $dy = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}.$ b. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,\ df(1) = \Delta x.$

e. $dy(1) = 0{,}3466.$

2.23. a. $y^{(n)} = \left[2^x + (-1)^n 2^{-x}\right]\ln^n 2,$ b. $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n},$

c. $y^{(n)} = \dfrac{n!(ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}},$ d. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}.$

2.24.

a. $y^{(20)} = (x^2-379)\sin x - 40x\cos x.$

b. $y^{(10)} = e^x\sum\limits_{n=0}^{10}(-1)^n C_{10}^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

c. $y^{(n)} = e^x\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right).$

d. $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^n\cos\left[(a-b)x + \dfrac{n\pi}{2}\right] - (a+b)^n\cos\left[(a+b)x + \dfrac{n\pi}{2}\right]\right\}.$

2.25. a. 0, b. ∞, c. 1, d. ∞, e. $\frac{1}{2}$, f. $\frac{\pi^2}{2}$.

2.26. a. $\frac{1}{2}$, b. 0, c. 0, d. $\frac{p-q}{2}$, e. $\frac{1}{12}$, f. -1.

2.27. a. 1, b. 1 c. e^3, d. $e^{\frac{1}{3}}$, e. e, f. $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$.

2.28. a. Tăng $[0,+\infty)$ không có cực trị.

b. Tăng $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, giảm $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, $x_{CĐ}=\frac{1}{e}$.

c. Giảm $(-\infty;-1]$, tăng $[1;+\infty)$.

d. Giảm $(-\infty;0),(0;1)$, tăng $[1;+\infty)$, $x_{CT}=1$.

e. Giảm $\left[\frac{3}{4}a;a\right]$, tăng $\left[0;\frac{3}{4}a\right]$, $x_{CĐ}=\frac{3}{4}a$.

2.29. a. $\min(0;0)$, $\max\left(2\sqrt[3]{\frac{2}{49}};\frac{6}{7}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$.

b. $\min(0;0)$, $\max(-1;1)$.

c. $\min\,(0;\sqrt[3]{4})$, $\min\,(2;\sqrt[3]{4})$, $\max\,(1;2)$.

d. $\min\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\max\left(1;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

e. $\max(1;1)$.

f. $\min\left[12\left(k\pm\frac{1}{5}\right)\pi;-5\cos\frac{\pi}{5}\right]$, $\min[6(2k+1)\pi;1]$,

$\max(12k\pi;5)$, $\max\left[12\left(k\pm\frac{2}{5}\right)\pi;5\cos\frac{2\pi}{5}\right]$.

2.30. a. $m=\frac{1}{3}$, $M=1$. b. $m=(a+b)^2$. c. $M=1$. d. $m=0$, $M=\frac{\pi}{4}$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.11.

a. $\{(x,y), x>0, y>0$ hoặc $x<0, y<0\}$

b. Vành tròn đóng giới hạn bởi 2 đường tròn tâm gốc tọa độ bán kính 1 và 3.

c. Miền mở nằm trong 2 đường $y = x$ và $y = -x$, nằm bên phải trục Oy

d. Toàn mặt phẳng trừ đường parabol $y = x^2$

3.12.

a. $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \dfrac{y}{x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}}$

b. $z'_x = y\cos\dfrac{x}{y}, z'_y = 2y\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}$

c. $z'_x = y^3 x^{y^3-1}, z'_y = x^{y^3}\ln x$

d. $z'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, z'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

3.14.

a. $z'_x = -e^{\cos^2 x - 2(x^2+y^2)}(\sin 2x + 4x), z'_y = -e^{\cos^2 x-2(x^2+y^2)}.4y$

b. $z'_x = \dfrac{2}{x}, z'_y = \dfrac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)}$

3.15.

a. $dz = \dfrac{2(xdy - ydx)}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}$

b. $dz = e^x[(x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx]$

3.16.

a. $y' = \dfrac{y(3x^2-y^2)}{x(3y^2-x^2)}$ b. $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$

c. $z'_x = z'_y = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$

d. $z'_x = -\dfrac{x^2-yz}{z^2-xy}, z'_y = -\dfrac{y^2-xz}{z^2-xy}$

3.18. $-\dfrac{28}{3}$

3.19. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{2u}{r}$ khi $a = b = c$

3.20. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = -\dfrac{\cos(\vec{\ell}, \vec{r})}{r^2}$ triệt tiêu khi $\vec{\ell} \perp \vec{r}$

3.21.

a. Điểm dừng: $(-2,2), (-4,2)$,

$$\Delta = z_{xy}^{//\,2} - z_{xx}^{//} z_{yy}^{//} = 4(2-y)e^{2x} + 2(x^2 - y^2 + 8x + 4y + 10)e^{2x}$$

$\Delta(-2,2) = 4e^{-4} > 0, \quad \Delta(-2,2) = -4e^{-8} < 0, z_{yy}^{//}(-4,2) = -2e^2 < 0,$

Vậy $z_{\max} = z(-4,2) = 4e^{-4}$

b. Điểm dừng: $(0,0), (1,1), \quad \Delta(x,y) = 9 - 36xy, \quad \Delta(0,0) = 9 > 0,$

$\Delta(1,1) = -27 < 0, \quad z_{xx}^{//}(1,1) = 6 > 0,$ vậy $z_{\min} = z(1,1) = -1$

c. Có 5 điểm dừng: $(0,0), (0,2b), (2a,0), (2a,2b), (a,b)$,

$$\Delta(x,y) = 16(a - x^2)(b-y)^2 - 4xy(2a-x)(2b-y),$$

$$\Delta(0,0) = \Delta(0,2b) = \Delta(2a,0) = \Delta(2a,2b) > 0, \Delta(a,b) = -4a^2b^2 < 0$$

$z_{xx}^{//}(a,b) = -2b^2 < 0,$ Vậy $z_{\max} = z(a,b) = a^2b^2$.

d. Điểm dừng: $(1,2), \quad \Delta(x,y) = 1 - 4(1 + \dfrac{2}{x^2})(1 + \dfrac{5}{y^2}), \quad \Delta(1,2) = -26 < 0$

$z_{xx}^{//}(1,2) = 6 > 0,$ vậy $z_{\min} = z(1,2) = 7 - 10\ln 2$

e. Tồn tại 4 điểm dừng: $(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}), \quad \Delta(x,y) = -36xy,$

$$\Delta(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})=12>0,\quad \Delta(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=12>0,$$

$$\Delta(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})=-12<0,\ \Delta(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=-12<0,\qquad z''_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})<0,$$

$$z''_{xx}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})>0,$$

Vậy $z_{\max}=z(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{4}{\sqrt{3}}$ $z_{\min}=z(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{4}{\sqrt{3}}.$

f. Tồn tại 3 điểm dừng: $(0,0),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),$

$$\Delta(x,y)=16-16(3x^2-1)(3y^2-1),$$

$$\Delta(-\sqrt{2},\sqrt{2})=\Delta(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-384<0,$$

$$z''_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2})=z''_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=20>0,\ z_{\min}=z(-\sqrt{2},\sqrt{2})=z(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-8.$$

Ngoài ra $z(0,0)=0, z(x,x)=2x^4>0, \forall x\neq 0, z(x,0)=x^4-2x^2<0,$ khi x đủ bé. Vậy hàm số không đạt cực trị tai (0,0)

g. Điểm dừng: (5,2). $\Delta(x,y)=1-\frac{4000}{x^3y^3}$, $\Delta(5,2)=-3<0$

$z''_{xx}(5,2)=\frac{4}{5}>0$, $z_{\min}=z(5,2)=30.$

h. Điểm dừng: (0,0), $\Delta(x,y)=4x^2-12y(3x-y)$, $\Delta(0,0)=0,$

Nhận xét: $z(0,0)=0, z(x,x)=x^3$, đổi dấu khi x đổi dấu, chứng tỏ hàm số không đạt cực trị.

3.22. *d = 1*

3.23. $x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}},\ y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.15.

a. $\dfrac{a^x}{\ln a}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$, b. $\dfrac{1}{3}x^3-x+arctgx+C$,

c. $\dfrac{a^{\alpha x}b^{\beta x}}{\alpha\ln a+\beta\ln b}+C$, d. $\dfrac{1}{3(b-a)}\left\{\sqrt{(x-a)^3}-\sqrt{(x-b)^3}\right\}+C$.

4.16. a. $\dfrac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-1}\right|+C$, b. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$,

c. $2\sqrt{x^3+2x-1}+C$, d. $tg(1+\ln x)+C$.

4.17 a. $-\dfrac{8+30x}{375}\sqrt{(2-5x)^2}+C$, (Đặt $\sqrt{2-5x}=t$)

b. $\dfrac{1}{16}\left\{\dfrac{1}{13}(1+2x^2)^{20}-\dfrac{1}{6}(1+2x^2)^{10}+\dfrac{1}{11}\right\}(1+2x^2)^{110}+C$, (Đặt $t=(1+2x^2)^{10}$)

c. $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C$, (Biến đổi $\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{|x|^2}}}$)

d. $-\arcsin\dfrac{1}{|x|}+C$.

4.18. a.. $2\arcsin\sqrt{x}+C$,

b. $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$, (Đặt $\ln(\ln x)=t$)

c. $arctg\sqrt{3x^2+5}+C$, (Đặt $t=\sqrt{3x^2+5}$)

d. $\dfrac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$.

4.19. a. $-\sqrt{x}+(1+x)arctg\sqrt{x}+C$,

b. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$,

c. $xchx-shx+C$, d. $x\left\{(\ln|x|-1)^2+1\right\}+C$,

e. $-x\cot gx+\ln|\sin x|+C$, f. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.

4.20. a. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$, b. $-\frac{\ln|x|+1}{x}+C$,

c. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot gx\right)+C$, d. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$.

e. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$, f. $xarctg\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$.

4.21. a. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t-1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2}+C$, Với $t=\sqrt[3]{\sin x}$

b. $\sqrt{tgx}+C$, Đặt $t=tgx$

c. $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2arctg\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C$, Đặt $t^2=\cos\frac{x}{2}$

d. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t^2)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C$. Đặt $t=\sqrt[3]{tgx}$

4.22. a. $5\ln 4-\ln 6-1$, b. 1, c. $\frac{\pi}{2|ab|}$, d. $\frac{\pi}{3}$.

4.23. a. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}$, b. $2-\frac{\pi}{2}$, c. $\frac{\pi^2}{4}$,

d. $\frac{\sqrt{3}}{24}$, e. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (Đặt $t=x-\frac{1}{x}$), f. $\frac{\pi}{4}$.

4.24. a. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$, b. $2(1-e^{-1})$,

c. $2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln tg\frac{5\pi}{12}\right)$, d. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

4.25. a. $\frac{9}{2}$, b. $2-\frac{1}{\ln 2}$, c. $\frac{4a^3}{3}$, d. $3\pi a^2$.

4.26. a. $\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$, b. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$, c. $2\pi^2 a$.

4.27. a. $\frac{3\pi}{7}ab^2$, b. $2\pi^2$, c. $2\pi^2 a^2 b$, d. $\frac{128}{3}\pi$.

4.28. a. $\ln\frac{1+\sqrt{1+a^4}}{a^2}$, b. $\frac{\pi}{2}-1$, c. $\frac{\pi}{4}$, d. 2.

4.29. a. Phân kì, b. Hội tụ, f. Hội tụ.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.11.

a. $y=2\left[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]+C$

b. $y=e^x(x^2-2x+2)+C$

c. $\frac{1}{2}\ln^2 y=\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$

d. $\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)=Cxy$

e. $2\sin x+\ln\left|tg\frac{y}{2}\right|=C$

f. $x+\cot g\frac{x-y}{2}=C$

5.12.

a. $x+y+2\ln x-\ln y=2$

b. $y^3=3arctge^x-\frac{3\pi}{4}$

c. Mọi nghiệm đều thỏa mãn

d. $y=\frac{2(x^2-1)+4x}{1-x^2+2x}$

5.13.

a. $1+2Cy-C^2x^2=0$

b. $y=\pm x\sqrt{1+C^2x^2}$

c. $xy\cos\dfrac{y}{x}=C$

d. $y^2+2xy-x^2=C^2$

5.14.

a. $y=Cx+(1+C)\dfrac{1}{x}$

b. $y=e^{-x^2}\left(C+\dfrac{x^2}{2}\right)$

c. $y=(1+x^2)(x+C)$

d. $y^2-2x=Cy^3$ (giải x theo y)

5.15.

a. $y=(x+1)^2\left(\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}\right)$

b. $y=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

5.17.

a. $y^2(x^2+1+Ce^{x^2})=1$

b. $\dfrac{1}{x}=Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2$ (giải x theo y)

c. $y(\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{4}+Cx^2)=1$

d. $x=\dfrac{1}{y\left(\ln|y|+C\right)}$ (giải x theo y)

5.18.

a. $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-\dfrac{xy}{x-y}=C$

b. $\ln|x+y|-\dfrac{x}{x+y}=C$

c. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$

d. $x^3(1+\ln y) - y^2 = C$

5.19.

a. $\alpha = e^{\frac{1}{2}x}, x^2y^2e^x = C$

b. $\alpha = e^x, ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C$

c. $\alpha = \frac{1}{y^2}, \frac{2x}{y} + x^2 = C$

d. $\alpha = \frac{1}{x^2y^2}, \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{xy} = C$

5.20.

a. $y = C_1x + C_2\ln|x|$

b. $y = C_1e^{-2x} + C_2\left[\frac{(2x+1)^2}{2} - 2x\right]$

c. $y = C_1(x^3 - x) + C_2\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3x(x^2-1)}{4}.\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]$

d. $y = C_1x^2 + C_2(x-1) + 1$

5.21.

a. $y = C_1x + C_2x^2 + x^3$

b. $y = C_1e^x + C_2x - (x^2+1)$

c. $y = \ln x\left(C_1 + C_2\int\frac{dx}{\ln^2 x} + e^x\right)$

5.22.

a. $y = \frac{e^x}{2}\left[x - \ln(e^x+1) + C_1\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[x - \ln(e^x+1) + C_2\right]$

b. $y = e^{-x}\left[C_1 + C_2x + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]$

c. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

d. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$

5.23.

a. $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5\sin x + 7\cos x}{74}$

b. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$

c. $y = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) + \frac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\sin x)$

d. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 2x^2 e^{-x}$

e. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{4x}$

f. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x^2 \cos 2x}{6} + \frac{4x\sin 2x}{9} + \frac{13\cos 2x}{27}$

5.24.

a. $y = \cos x + 2(e^x - 1)\sin x$

b. $y = \frac{1}{32}(\cos x - \cos 3x) + \frac{3x}{8}\sin x$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. M. FICHTENGÔN, Giáo trình phép tính vi tích phân, Tập 1,2,3. Nauka, Moskva,1969. (tiếng Nga)
2. G. M. FICHTENGÔN, Cơ sở giải tích toán học, Tập 1,2,3. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1977.
3. K. MAURIN, Analiza, *Czes'c'* 1. PWN, Warszawa, 1976.
4. R. A. ADAMS, Calculus-a complete, Addison,Wesley, New York,Don Mills, 1991.
5. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên), Toán học cao cấp ,Tập 1,2,3. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà nội, 1990.
6. JEAN-MARIE MONIER, Giáo trình toán, Tập 1,2,3,4. NXB Giáo dục, Hà nội, 1999 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris,1999)
7. LÊ ĐÌNH THUÝ (chủ biên), Toán cao cấp cho các nhà knh tế, Phần 2. NXB Thống kê, Hà nội,2004.

MỤC LỤC