

Định lý (Nhiều nhiệt trong các điện trở)

Mật độ phổ công suất của hiệu điện thế nhiều nhiệt trên hai đầu một điện trở R mở mạch ở điều kiện nhiệt độ tuyệt đối T được xác định bởi:

$$G_V(\omega) = 2kTR \quad [V^2s]$$

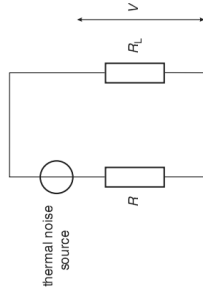
trong đó $k = 1.38 \times 10^{-23} [J/K]$ là hằng số Boltzmann

Định lý (Nhiều nhiệt tương đương)

Mật độ phổ công suất của dòng điện nhiều nhiệt khi ngắn mạch hai đầu một điện trở R ở điều kiện nhiệt độ tuyệt đối T được xác định:

$$G_I(\omega) = \frac{2kT}{R} \quad [A^2s]$$

Xét một mạng như hình vẽ. Tính mật độ phổ công suất của điện áp V trên R_L do nguồn nhiều nhiệt của R .



$$G_V(\omega) = 2kTR \times \frac{R_L^2}{(R+R_L)^2} [V^2s]$$

- Công suất điện tiêu thụ trên điện trở tải R_L : $P = \frac{V^2}{R_L} = \bar{I}^2 R_L$
- Mật độ phổ công suất điện tiêu tán trên điện trở tải:
 $G_P(\omega) = \frac{1}{R_L} G_V(\omega) = R_L G_I(\omega) = 2kTR \frac{R_L}{(R+R_L)^2} [Ws]$

- Mật độ phổ công suất điện tiêu tán trên điện trở tải đạt cực đại khi $R = R_L$

- ▶ $G_{P_{max}}(\omega) \triangleq G_S(\omega) = \frac{kT}{2} [Ws]$
- ▶ \Rightarrow Mật độ phổ công suất cực đại của nhiều nhiệt của một điện trở truyền đến tải ngoài là $\frac{kT}{2}$

- ★ Đây được gọi là mật độ phổ công suất khả dụng.
- ★ Mật độ phổ công suất này độc lập với giá trị của điện trở và chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ.

Nhiều là các yếu tố ảnh hưởng xấu đến việc truyền và thu nhận thông tin

- Nhiều xác định: dễ dàng loại bỏ hoặc hạn chế được ảnh hưởng xấu của nó với việc thu nhận thông tin.
- Nhiều ngẫu nhiên: rất khó loại bỏ hoặc hạn chế ảnh hưởng xấu của nó với việc thu nhận thông tin.
 - ▶ Mối quan tâm đặc biệt trong việc thiết kế, phân tích các bài toán kỹ thuật (điện tử, thông tin)

Phân loại nhiều:

- Theo bề rộng phổ: nhiều dải rộng (nhiều trắng), nhiều dải hẹp (nhiều màu)
- Theo quy luật biến thiên: nhiều rời rạc, nhiều liên tục.
- Theo phương thức tác động: nhiều cộng, nhiều nhân.
- Theo cách thức phát xạ: nhiều thụ động, nhiều tích cực.
- Theo nguồn phát sinh: nhiều công nghiệp, nhiều vũ trụ,...

Mô hình toán học biểu diễn tác động của nhiều cộng

$$y(t) = \alpha x(t) + n(t)$$

Thể hiện của một quá trình nhiều WSS $N(t)$ được gọi là nhiều trắng nếu PSD của $N(t)$ có giá trị là hằng số trên toàn trục tần số. Nói cách khác:

$$G_N(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

trong đó N_0 là một hằng số thực dương.

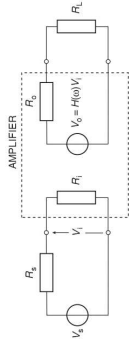
- \Rightarrow Hàm tự tương quan của nhiều trắng: $R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
- Khi phổ công suất của nhiều không thỏa mãn các điều kiện trên, nhiều được gọi là nhiều màu.

Nhiều

Nhiều hệ thống - Nhiều trong các bộ khuếch đại

- Các bộ khuếch đại gây ra nhiễu đáng kể trong hệ thống do tồn tại trong nó các phần tử gây nhiễu thụ động (các phần tử thụ động không lý tưởng) và các phần tử gây nhiễu tích cực (các phần tử tích cực).
- Các tín hiệu vào của bộ khuếch đại đã bị nhiễu.
- \Rightarrow Cần thiết phân tích ảnh hưởng của nhiễu

CuuDuongThanCong.com



- Mô hình khối khuếch đại lý tưởng (noise-free)
- Để đơn giản, giả sử các thành phần trở kháng trong khối khuếch đại là thực (giá trị thực)
- Khối khuếch đại có trở kháng vào R_i , trở kháng ra R_o và hàm truyền đạt $H(\omega)$

Nhiều

Nhiều hệ thống - Nhiều trong các bộ khuếch đại (cont.)

- Giả sử nguồn có trở kháng R_s và phát sinh điện áp hở mạch là một đại lượng ngẫu nhiên dùng theo nghĩa rộng V_s với mật độ phổ $G_s(\omega)$
 - ▶ Đại lượng ngẫu nhiên này có thể là nhiễu, hoặc tín hiệu, hoặc là kết hợp (theo luật cộng) của nhiễu và tín hiệu.
 - ▶ \Rightarrow Mật độ phổ công suất khả dụng của nguồn: $G_{s,a}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{4R_s}$
 - ▶ \Rightarrow Mật độ phổ công suất khả dụng tại đầu ra của bộ khuếch đại:

$$G_{o,a}(\omega) = \frac{G_o(\omega)}{4R_o} = \frac{|H(\omega)|^2 G_i(\omega)}{4R_o} = \frac{|H(\omega)|^2}{4R_o} \left(\frac{R_i}{R_s + R_i} \right)^2 G_s(\omega)$$

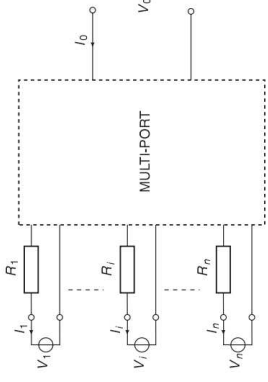
- ▶ \Rightarrow Hệ số khuếch đại khả dụng của bộ khuếch đại:

$$K_a(\omega) \triangleq \frac{G_{o,a}(\omega)}{G_{s,a}(\omega)} = \frac{G_o(\omega)R_s}{G_s(\omega)R_o} = |H(\omega)|^2 \left(\frac{R_i}{R_s + R_i} \right)^2 \frac{R_s}{R_o}$$

- ★ Nếu trở kháng vào và ra phối hợp tốt (match) \Rightarrow Công suất được truyền tải tốt nhất \Rightarrow Hệ số khuếch đại thực sẽ bằng hệ số khuếch đại khả dụng.

Nhiều

Nhiều nhiệt trong mạng thụ động (cont.)



Định lý

Nếu trong một mạng thụ động bao gồm một số điện trở, tụ điện, cuộn cảm, và biến áp lý tưởng ở cùng một điều kiện nhiệt độ, thì mật độ phổ công suất điện áp tại đầu ra hở mạch của mạng này được xác định bởi:

$$G_V(\omega) = 2kT\Re\{Z_0\} \quad [V^2/s]$$

trong đó Z_0 là trở kháng của mạng tại đầu ra hở mạch.

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTTT)

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiều

01/08/2011

50 / 80

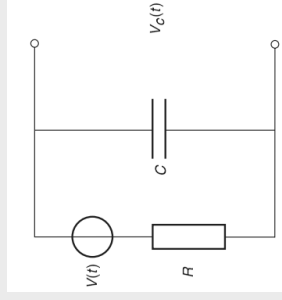
Nhiều

Nhiều nhiệt trong mạng thụ động (cont.)

- $\Rightarrow G_I(\omega) = 2kT\Re\{Y_o\} \quad [A^2/s]$ trong đó $Y_o \triangleq \frac{1}{Z_o}$

Ví dụ

Tính toán mật độ phổ điện áp trên tụ điện của mạch cho trong hình vẽ bên.



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTTT)

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiều

01/08/2011

53 / 80

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiều

01/08/2011

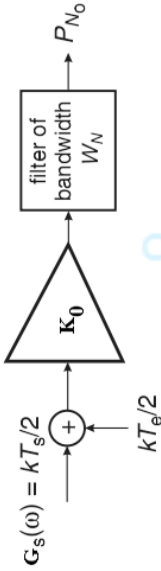
51 / 80

Nhiều

Nhiều hệ thống - Nhiều trong các bộ khuếch đại (cont.)

CuuDuongThanCong.com

- Nhiều của bộ khuếch đại có thể chuyển về đầu vào với mô hình:



- $\frac{W_N}{2\pi}$: dải thông tạp âm tương đương [Hz]
- ⇒ Chúng ta có thể so sánh được với nguồn tạp âm đầu vào một cách trực tiếp.



Nhiều

Nhiều hệ thống - Hệ số nhiễu (noise figure)

Hệ số nhiễu (noise figure) của một hệ thống (thiết bị) được định nghĩa là tỷ số của tổng mật độ phổ công suất nhiễu khả dụng tại đầu ra và mật độ phổ công suất nhiễu khả dụng tại đầu ra chỉ do riêng nguồn gây ra.

$$F = \frac{T_s + T_e}{T_s} = 1 + \frac{T_e}{T_s}$$

- Mỗi hệ thống (thiết bị) có nhiệt độ nhiễu tương đương khác nhau.
 - Phụ thuộc vào mức nhiễu mà hệ thống (thiết bị) sinh ra.
- Hệ số nhiễu mà các nhà sản xuất công bố với thiết bị được đánh giá ở điều kiện nhiệt độ tiêu chuẩn (nhiệt độ phòng):

$$F_s = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad \text{với } T_0 = 290^\circ K$$

- Một thiết bị chất lượng thấp (gây nhiễu lớn) sẽ có nhiệt độ nhiễu tương đương rất lớn hơn nhiệt độ phòng ($T_e \gg T_0$) ⇒ $F_s \gg 1$
- Nhiệt độ nhiễu tương đương lớn không có nghĩa nhiệt độ vật lý lớn.



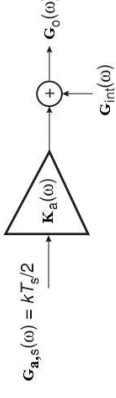
Nhiều

Nhiều hệ thống - Nhiều trong các bộ khuếch đại (cont.)

- Giả sử nguồn vào sinh ra nhiễu trắng với nhiệt độ nhiễu tương đương T_s .
 - ⇒ Mật độ phổ công suất điện khả dụng của nguồn: $G_{p,s,a}(\omega) = \frac{kT_s}{2}$
 - ⇒ Mật độ phổ công suất điện khả dụng tại đầu ra (giả thiết bộ khuếch đại lý tưởng không nhiễu):

$$G_{p,o}(\omega) = K_a(\omega) G_{p,s,a}(\omega) = K_a(\omega) \frac{kT_s}{2}$$

- Giả sử nhiễu sinh ra bởi bản thân bộ khuếch đại có mật độ phổ công suất tại đầu ra: $G_{int}(\omega)$
 - $G_{int}(\omega)$ độc lập với nhiễu sinh ra bởi nguồn V_s
- ⇒ Mật độ phổ công suất khả dụng tại đầu ra: $G_{p,o}(\omega) = K_a(\omega) \frac{kT_s}{2} + G_{int}(\omega)$



Nhiều

Nhiều hệ thống - Nhiều trong các bộ khuếch đại (cont.)

- Tổng công suất khả dụng tại đầu ra:

$$P_{N_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{p,o}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{kT_s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{int}(\omega) d\omega$$

- Biểu diễn dưới dạng dải thông tạp âm tương đương:

$$\frac{1}{\pi} K_0 W_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\omega) d\omega$$

- $K_0 = K_a(\omega_0)$: giá trị cực đại của $K_a(\omega)$
- Định nghĩa tạp âm nhiệt hiệu dụng của bộ khuếch đại:

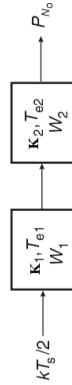
$$T_e \triangleq \frac{1}{K_0 k W_N} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\omega) d\omega$$

- ⇒ Tổng công suất nhiễu tại đầu ra:

$$P_{N_0} = K_0 k T_s \frac{W_N}{2\pi} + K_0 k T_e \frac{W_N}{2\pi} = K_0 k (T_s + T_e) \frac{W_N}{2\pi}$$



- Xét các hệ thống mắc liên tiếp (cascade connection), trong đó các tầng được phối hợp trở kháng tốt.
- Đảm bảo truyền tải công suất tốt nhất từ tầng này đến tầng khác.
- Phối hợp trở kháng (matching): trở kháng vào của tầng sau là liên hợp phức của trở kháng ra của tầng trước.



- Các tầng khuếch đại có các tham số như trong hình vẽ
 - Hệ số khuếch đại K_1, K_2 ; nhiệt độ nhiễu tương đương T_{e1}, T_{e2} ; dải thông tập âm tương đương W_1, W_2
 - Giả sử $W_2 \leq W_1$: đảm bảo toàn bộ hệ thống gây ra nhiễu tại đầu ra với cùng dải thông. $\Rightarrow W_N = W_2$



- Hệ số khuếch đại toàn bộ hệ thống: $K = K_1 K_2$
- Tổng nhiễu tại đầu ra gồm 3 thành phần:
 - Nhiều từ nguồn được khuếch đại bởi toàn bộ hệ thống: $KkT_s \frac{W_N}{2\pi}$.
 - Nhiều do tầng 1 sinh ra được khuếch đại bởi tầng 2: $K_2 K_1 kT_{e1} \frac{W_N}{2\pi}$
 - Nhiều do tầng 2 sinh ra: $K_2 kT_{e2} \frac{W_N}{2\pi}$



$$P_{N_0} = (KkT_s + K_2 K_1 kT_{e1} + K_2 kT_{e2}) \frac{W_N}{2\pi} = Kk(T_s + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{K_1}) \frac{W_N}{2\pi}$$

- \Rightarrow Nhiệt độ nhiễu hệ thống: $T_{sys} \triangleq T_s + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{K_1}$
- \Rightarrow Nhiệt độ nhiễu hiệu dụng của hai tầng mắc liên tiếp: $T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{K_1}$
- Hệ số nhiễu của hai tầng mắc liên tiếp: $F_s = 1 + \frac{T_{e1}}{T_0} + \frac{T_{e2}}{K_1 T_0} = F_{s1} + \frac{F_{s2}}{K_1}$



- Giả sử công suất tín hiệu khả dụng của nguồn là P_s , khi đó SNR tại đầu vào:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{P_s}{kT_s \frac{W_N}{2\pi}}$$
 - Công suất nhiễu đầu vào chỉ tính với dải thông tập âm tương đương. \Rightarrow Cho phép so sánh các công suất nhiễu đầu vào và ra trên cơ sở cùng băng tần.
 - Công suất tín hiệu khả dụng tại đầu ra: $P_{s,o} = K_0 P_s$
 - SNR tại đầu ra:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{K_0 P_s}{P_{N_0}} = \frac{K_0 P_s}{K_0 k(T_s + T_e) \frac{W_N}{2\pi}}$$

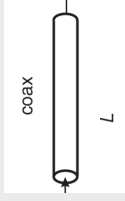
$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_s}{(1 + \frac{T_e}{T_s}) kT_s \frac{W_N}{2\pi}} = \frac{1}{1 + \frac{T_e}{T_s}} \left(\frac{S}{N}\right)_s$$
 - \Rightarrow SNR luôn luôn bị làm suy giảm do hệ thống (bộ khuếch đại)



- Nếu $T_e < T_s \Rightarrow$ SNR khó có thể giảm nhỏ hơn \Rightarrow hệ thống (bộ khuếch đại) làm việc như thể khối lý tưởng (không gây nhiễu)
- \Rightarrow

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_s}{\left(\frac{S}{N}\right)_o} = 1 + \frac{T_e}{T_s} = F$$

Xem xét tính toán hệ số nhiễu của một mạng 4 cực thụ động (2-port network) chẳng hạn như một đoạn cáp hoặc bộ suy giảm (attenuator) có hệ số tổn hao L ở điều kiện nhiệt độ T_a .



Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Tổng quan

CuuDuongThanCong.com

- Từ những hiểu biết về quá trình đầu vào và các yêu cầu của hệ thống \Rightarrow Thiết kế máy thu tối ưu
 - ▶ Thực hiện việc thu tối ưu các tín hiệu thông tin bị nhiễu.
 - ▶ Các quá trình đầu vào bao gồm 2 phần: phần mang thông tin (còn gọi là tín hiệu) và phần nhiễu
- Khi thực hiện thiết kế máy thu tối ưu, cần quan tâm đến:
 - ▶ Mô tả đầy đủ của quá trình nhiễu đầu vào và tín hiệu mang tin tức.
 - ★ PSD, WSS? nhiễu cộng?...
 - ▶ Các điều kiện giới hạn bởi hệ thống.
 - ★ Tuyến tính, LTI? ..
 - ▶ Các tiêu chuẩn tối ưu.
 - ★ $\min\{P_e\}$? $\max\{SNR\}$?...



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu 01/08/2011 64 / 80

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Tổng quan

https://fb.com/huutientu

Xét trường hợp truyền tín hiệu xác định qua kênh bị tác động nhiễu cộng trong một hệ thống truyền thông số: trong các khoảng thời gian T liên tiếp, một xung $p(t)$ với hình dạng xác định hoặc được truyền đi hoặc không phụ thuộc vào tín hiệu dữ liệu thông tin A_n lấy ngẫu nhiên trong tập $\{0, 1\}$. Nói cách khác, tín hiệu dữ liệu được truyền đi có dạng:

$$Z(t) = \sum_n A_n p(t - nT)$$

- Xung $p(t)$ được truyền đi khi dữ liệu là bit 1 ($A_n = 1$)
- Xung $p(t)$ không được truyền đi khi dữ liệu là bit 0 ($A_n = 0$)
- Giả sử nhiễu dừng (có thể do nguồn nhiễu trên kênh hoặc ở phần trước máy thu)



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu 01/08/2011 65 / 80

Nhiễu

Nhiễu trong các hệ thống mắc liên tiếp (cont.)

Một cách tổng quát:

- Nhiệt độ nhiễu hiệu dụng:
$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{K_1} + \frac{T_{e3}}{K_1 K_2} + \dots$$
- Hệ số nhiễu:
$$F_s = 1 + \frac{T_{e1}}{T_0} + \frac{T_{e2}}{K_1 T_0} + \frac{T_{e3}}{K_1 K_2 T_0} + \dots = F_{s1} + \frac{F_{s2} - 1}{K_1} + \frac{F_{s3} - 1}{K_1 K_2} + \dots$$
- \Rightarrow Trong hệ thống gồm nhiễu tăng mắc liên tiếp, tăng đầu tiên đóng vai trò quan trọng trong việc đảm bảo chất lượng hệ thống.
 - ▶ Nhiễu từ tăng đầu tiên đóng góp phần lớn vào nhiễu đầu ra của hệ thống.
- Nếu tăng đầu tiên là mạng 4 cực thụ động có tổn hao L_1 :
$$F_s = L_1 + L_1(F_{s2} - 1) + L_1 \frac{F_{s3} - 1}{K_2} + \dots$$
- ▶ \Rightarrow SNR bị làm suy giảm nghiêm trọng



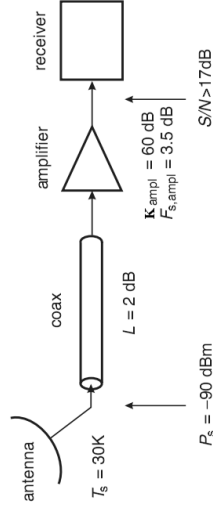
Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu 01/08/2011 62 / 80

Nhiễu

Nhiễu trong các hệ thống mắc liên tiếp: Ví dụ minh họa

Ví dụ

Xét một hệ thống máy thu vệ tinh như hình vẽ. Antenna được nối với máy thu bởi một đoạn cáp đồng trục và một bộ khuếch đại. Các tham số cho kèm trong hình vẽ trong đó nhiễu từ antenna được xác định bởi nhiệt độ nhiễu hiệu dụng $T_s = 30^\circ K$. Mức tín hiệu vào sau antenna là $P_s = -90dBm$ với băng tần 1MHz. Cáp nối làm việc ở nhiệt độ phòng. Toàn bộ hệ thống được giả thiết phối hợp trở kháng tốt. Để có thể thực hiện việc liên lạc, SNR tại máy thu (receiver) phải ở mức tối thiểu là 17dB. Kiểm tra xem hệ thống với các tham số đã cho có thể liên lạc được hay không?



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu 01/08/2011 63 / 80

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Xác suất lỗi

- Giả sử quá trình thông tin kéo dài với chuỗi bit đủ lớn: xác suất tiên nghiệm (prior probability) của việc phát bit 0 là p_0 , xác suất tiên nghiệm của việc phát bit 1 là p_1 .
 - Giả sử máy thu cũng có các thông tin về các xác suất tiên nghiệm này.
- Xác suất bit lỗi:

$$\begin{aligned} p_e &= p_0 P[\hat{A}_n = 1|H_0] + p_1 P[\hat{A}_n = 0|H_1] \\ &= p_0 P[\hat{A}_n = 1|A_n = 0] + p_1 P[\hat{A}_n = 0|A_n = 1] \end{aligned}$$

- Xác suất bit lỗi được tối giản nếu máy thu chọn các giả thiết với xác suất có điều kiện cao nhất, với điều kiện cho trước quá trình $R(t)$.
- Các xác suất có điều kiện phụ thuộc vào xung $p(t)$, đặc trưng thống kê của nhiễu $N(t)$, và cách thức mà máy thu xử lý tín hiệu nhận được $R(t)$



Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Luật tổng quát

- Giả sử máy thu thực hiện việc chuyển tín hiệu nhận được $R(t)$ thành véc-tơ \mathbf{r} gồm K thành phần là các biến ngẫu nhiên: $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_K)$
- Máy thu sẽ chọn giả thiết H_1 nếu: $P[H_1|\mathbf{r}] \geq P[H_0|\mathbf{r}]$

Quyết định khôi phục (phát hiện, tách - detection) của máy thu dựa trên tỉ số tương đồng (likelihood ratio):

$$\Lambda(\mathbf{r}) \triangleq \frac{f_r(\mathbf{r}|H_1)}{f_r(\mathbf{r}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \Lambda_0 \triangleq \frac{p_0}{p_1}$$

- Giả thiết H_1 được chọn nếu $\Lambda(\mathbf{r}) > \Lambda_0$
- Giả thiết H_0 được chọn nếu $\Lambda(\mathbf{r}) < \Lambda_0$
- $\Rightarrow \Lambda_0$ được gọi là mức ngưỡng quyết định



Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Tổng quan (cont.)

Trong mỗi khoảng thời gian T , máy thu sẽ xác định liệu là dữ liệu 1 hay 0 đã được truyền đến. Trong mỗi khoảng thời gian khôi phục tín hiệu có hai tình huống (còn gọi là hai giả thiết) xung khắc có thể:

$$\begin{aligned} H_0: R(t) &= N(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ H_1: R(t) &= p(t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

- H_0 : giả thiết tương ứng với trường hợp phát đi bit 0 ($A_n = 0$)
- H_0 : giả thiết tương ứng với trường hợp phát đi bit 1 ($A_n = 1$)
- \Rightarrow Tín hiệu thu được gồm có xung $p(t)$ với hình dạng xác định và quá trình nhiễu cộng $N(t)$.



Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Lỗi thu

Máy thu ước lượng A_n trong khoảng $(0, T)$: \hat{A}_n . Nếu máy thu quyết định theo giả thiết H_0 nó quyết định bit phát là 0, nếu máy thu quyết định theo giả thiết H_1 , nó quyết định bit đã phát là 1.

- Bit dữ liệu khôi phục $\hat{A}_n \in \{0, 1\}$

Máy thu quyết định theo giả thiết H_1 , tức là khôi phục bit $\hat{A}_n = 1$, trong khi $A_n = 0$ đã được phát đi. Xác suất có điều kiện của sự kiện gây lỗi thu này:

$$P[\hat{A}_n = 1|H_0] = P[\hat{A}_n = 1|A_n = 0]$$

Máy thu quyết định theo giả thiết H_0 , tức là khôi phục bit $\hat{A}_n = 0$, trong khi $A_n = 1$ đã được phát đi. Xác suất có điều kiện của sự kiện gây lỗi thu này:

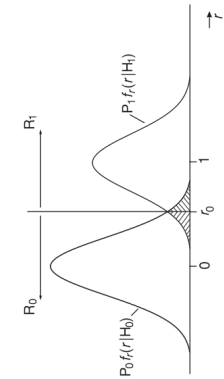
$$P[\hat{A}_n = 0|H_1] = P[\hat{A}_n = 0|A_n = 1]$$

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Q-function

CuuDuongThanCong.com

- Xác suất bất lỗi: $p_e = p_0 \int_{r_0}^{\infty} f_r(r|H_0)dr + p_1 \int_{-\infty}^{r_0} f_r(r|H_1)dr$
 - r_0 : biên quyết định.
- $\Rightarrow \frac{dp_e}{dr_0} = -p_0 f_r(r|H_0) + p_1 f_r(r|H_1) = 0$
 - \equiv luật tổng quát



- $p_e(0) = \int_{r_0}^{\infty} f_r(r|H_0)dr = Q(x)$
- $p_e(1) = \int_{-\infty}^{r_0} f_r(r|H_1)dr = Q(x)$
- $Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) 01/08/2011 72 / 80 C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu Gausse trắng cộng

- Tín hiệu nhận được $R(t)$ được chuyển thành véc-tơ \mathbf{r} trong không gian tín hiệu $\{\Phi_k(t)\}$
 - $r_k = \int_0^T R(t)\Phi_k(t)dt$, $p_k = \int_0^T p(t)\Phi_k(t)dt$, $n_k = \int_0^T N(t)\Phi_k(t)dt$, với $k = \overline{1, K}$
 - $\Rightarrow r_k = p_k + n_k$ với $k = \overline{1, K}$ hay $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{n}$
 - \mathbf{p} : véc-tơ tín hiệu xác định, \mathbf{n} : véc-tơ các R.V. Gausse với các thành phần trực giao và có cùng phương sai $\frac{N_0}{2}$
- Các hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện:

$$f_r(\mathbf{r}|H_0) = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^K}} e^{-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K r_k^2} \quad \text{và} \quad f_r(\mathbf{r}|H_1) = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^K}} e^{-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K (r_k - p_k)^2}$$

• \Rightarrow

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K (r_k - p_k)^2 + \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K r_k^2 \right] = \exp \left(\frac{2}{N_0} \sum_{k=1}^K p_k r_k - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^K p_k^2 \right)$$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) 01/08/2011 73 / 80 C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Biên khôi phục tín hiệu

Trong quá trình quyết định, máy thu phân chia không gian véc-tơ mở rộng (spanned) từ \mathbf{r} thành hai vùng quyết định (decision region) R_0 và R_1

- Trong vùng quyết định R_0 : $\Lambda(\mathbf{r}) < \Lambda_0 \Rightarrow$ véc-tơ \mathbf{r} quan sát được trong vùng này khiến máy thu quyết định bit thông tin 0 đã được phát.
- Trong vùng quyết định R_1 : $\Lambda(\mathbf{r}) \geq \Lambda_0 \Rightarrow$ véc-tơ \mathbf{r} quan sát được trong vùng này khiến máy thu quyết định bit thông tin 1 đã được phát.

- Biên giữa các vùng quyết định R_0 và R_1 được xác định bởi Λ_0
- \Rightarrow Nhiệm vụ của máy thu là chuyển tín hiệu nhận được thành một véc-tơ ngẫu nhiên \mathbf{r} và quyết định xem nó thuộc vùng nào trong các vùng quyết định.



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) 01/08/2011 70 / 80 C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu: Ví dụ minh họa

Ví dụ

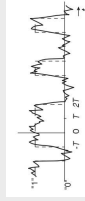
Một hệ thống truyền thông số có các xác suất tiên nghiệm $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, và có các hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện biết trước:

$$f_r(r|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} \quad \text{và} \quad f_r(r|H_1) = \frac{1}{2} e^{-|r|}$$

Xác định các vùng quyết định của máy thu

Ví dụ

Giả sử tín hiệu $Z(t) = \sum_n A_n p(t - nT)$ được truyền đi trong một hệ thống truyền thông số chịu tác động của nhiễu Gausse trắng $N(t)$ với PSD $\frac{N_0}{2}$. Tín hiệu thu có dạng như hình vẽ. Xác định biên quyết định để xác suất bất lỗi tối thiểu



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT) 01/08/2011 71 / 80 C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

<https://fb.com/tailieudientucntt>

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Matched filter: Tổng quan

Mục tiêu cho việc thiết kế một bộ lọc LTI tại máy thu để SNR đạt cực đại với tín hiệu xác định bị tác động bởi nhiễu.

- Nhiều không nhất thiết phải là nhiễu Gausse hoặc nhiễu trắng, chỉ cần là một quá trình WSS.
- pdf của nhiễu có thể có dạng bất kỳ, miễn là thỏa mãn các điều kiện đối với hàm pdf.

- Giả sử rằng tín hiệu xác định $x(t)$ tồn tại biến đổi Fourier, đáp ứng tần số của bộ lọc $H(\omega)$.

- \Rightarrow Tín hiệu ra sau bộ lọc thu được bằng cách lấy mẫu tại thời điểm t_0 :

$$y(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0} d\omega$$

- Công suất nhiễu tại đầu ra:

$$P_{N_0} = E[N_0^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_N(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$$

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Matched filter: Tổng quan (cont.)

- SNR tại đầu ra:

$$\frac{S}{N} \triangleq \frac{|y(t_0)|^2}{P_{N_0}} = \frac{|\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0} d\omega|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_N(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega}$$

- Sử dụng bất đẳng thức Schwarz:

$$|\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(\omega)d\omega|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A(\omega) = CB^*(\omega)$, với C là một hằng số thực.

\Rightarrow

$$\frac{S}{N} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{G_N(\omega)} d\omega$$

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

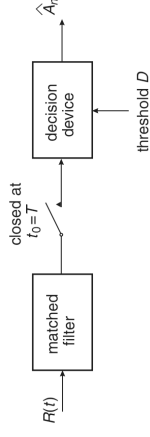
Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu Gausse trắng cộng (cont.)

• \Rightarrow

$$\Lambda(r) = \exp\left(\frac{2}{N_0} \sum_{k=1}^K p_k r_k - \frac{1}{N_0} E_p\right)$$

- Thành phần phụ thuộc vào tín hiệu phát đi $\sum_{k=1}^K p_k r_k$ có thể xác định được thông qua quá trình xử lý dữ liệu tại máy thu.
- $\sum_{k=1}^K p_k r_k = \int_0^T p(t)R(t)dt$

Tín hiệu nhận được $R(t)$ được lọc bởi bộ lọc tuyến tính bất biến với đáp ứng xung của bộ lọc $p(T-t)$. Tín hiệu ra của bộ lọc được lấy mẫu tại khoảng thời gian cuối của chu kỳ T . Mẫu này được so sánh với mức ngưỡng.

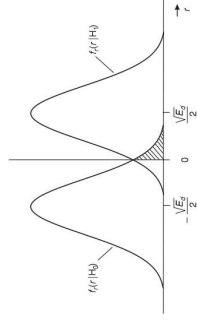


Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Khôi phục tín hiệu nhị phân bị nhiễu Gausse trắng cộng: Ngưỡng quyết định

- Mức ngưỡng D được xác định: $\Lambda_0 = \exp\left(\frac{2D-E_p}{N_0}\right)$
 - Nếu $p_0 = p_1 = 1/2 \Rightarrow D = E_p/2$
 - Giả thiết H_0 được chọn nếu mẫu ra $< D$; giả thiết H_1 được chọn nếu mẫu ra $\geq D$
- Bộ lọc với đáp ứng xung $h(t) = p(T-t)$ được gọi là bộ lọc tương thích (matched filter)

Xét một hệ thống thông tin số, máy thu thực hiện việc khôi phục các tín hiệu nhị phân độc lập $p_0(t)$ và $p_1(t)$ bị tác động nhiễu trắng. Hàm mật độ phân bố xác suất của chúng được xác định như hình vẽ. Tính xác suất bit lỗi, giả sử xác suất phát đi các bit 0 và 1 là như nhau.



01/08/2011 76 / 80

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTTT)



01/08/2011 74 / 80

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTTT)



01/08/2011 77 / 80

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTTT)



01/08/2011 75 / 80

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTTT)

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Matched filter: Đáp ứng xung của matched filter

Bộ lọc tương thích (matched filter) có đáp ứng tần số

$$H_{opt}(\omega) = \frac{X^*(\omega)}{G_N(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$

trong đó $X(\omega)$ là biến đổi Fourier của tín hiệu vào $x(t)$, $G_N(\omega)$ là hàm PSD của nhiễu cộng và t_0 là thời điểm lấy mẫu.

Bộ lọc tương thích (matched filter) cho tín hiệu vào $x(t)$ bị tác động bởi nhiễu trắng cộng có hàm đáp ứng xung

$$h_{opt}(t) = x(t_0 - t)$$

trong đó t_0 là thời điểm lấy mẫu.

01/08/2011 80 / 80

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

01/08/2011 78 / 80

Khôi phục tín hiệu và máy thu tối ưu

Matched filter: Đáp ứng xung của matched filter (cont.)

SNR tại đầu ra của bộ lọc tương thích (matched filter) tại thời điểm lấy mẫu được xác định bởi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\max} \triangleq \frac{|y(t_0)|^2}{P_{N_0}} = \frac{2E_x}{N_0}$$

trong đó E_x là năng lượng của phần tín hiệu nhận được và $N_0/2$ là PSD của nhiễu trắng cộng.

Ví dụ

Xét hệ thống thông tin với tín hiệu được mô tả bởi:

$$x(t) = \begin{cases} at & 0 < t \leq T \\ 0 & \text{các khoảng còn lại} \end{cases}$$

Hệ thống bị can nhiễu bởi nhiễu trắng cộng. Xây dựng bộ lọc tương thích và xác định giá trị cực đại SNR đạt được tại máy thu. Giả sử chọn thời điểm lấy mẫu $t_0 = 2T$