

Dung lượng kênh rời rạc

Tốc độ phát, khả năng phát của nguồn rời rạc, độ dư thừa của nguồn

Ví dụ

Một máy điện báo dùng mã Bôđô đều 5 dấu, cơ số 2, tốc độ phát là 75 [baud].
Tính khả năng phát tối đa của máy.

Định nghĩa (Độ dư thừa của nguồn rời rạc)

Với một nguồn rời rạc X , một phép xử lý thông tin đạt được $H(X)$, khi đó độ dư thừa của nguồn được định nghĩa là:

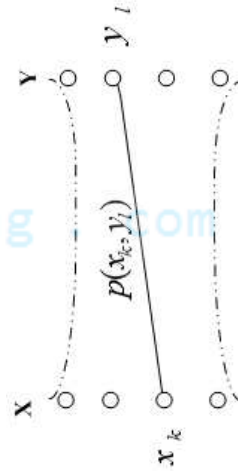
$$D = \frac{H(X)_{\max} - H(X)}{H(X)_{\max}} = 1 - \frac{H(X)}{H(X)_{\max}} = 1 - \mu$$

- $\mu = \frac{H(X)}{H(X)_{\max}}$: là tỷ số nén tin.
- D đặc trưng cho hiệu suất, khả năng chống nhiễu và mật độ của tin
 - ▶ D lớn \Rightarrow hiệu suất thấp, khả năng chống nhiễu cao.



Dung lượng kênh rời rạc

Đặc trưng của kênh rời rạc



Một kênh rời rạc hoàn toàn có thể đặc trưng bởi 3 tham số:

- Trường tin lối vào X (input), trường tin lối ra Y (output).
- Xác suất chuyển tin lối vào x_k thành tin lối ra y_l : $p(y_l|x_k)$.
- Tốc độ truyền tin của kênh v_k hay thời gian trung bình để truyền một dấu tin $T_k = \frac{1}{v_k}$.



Dung lượng kênh

Lý thuyết thông tin

Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông
Khoa Kỹ thuật Điện tử I
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

10/08/2011



Dung lượng kênh rời rạc

Tốc độ phát, khả năng phát của nguồn rời rạc

Định nghĩa (Tốc độ phát của nguồn rời rạc)

Tốc độ phát của một nguồn rời rạc được định nghĩa $v_n = \frac{1}{T_n}$

- T_n : độ rộng trung bình của mỗi xung phát.
- v_n : số xung phát trong một đơn vị thời gian, v_n : đơn vị [baud]

Định nghĩa (Khả năng phát của nguồn rời rạc)

Một nguồn rời rạc X có tốc độ phát $v_n = \frac{1}{T_n}$, khi đó khả năng phát của nguồn được xác định:

$$H'(X) = v_n H(X) = \frac{H(X)}{T_n}$$

- $H'(X)$: lượng thông tin trung bình do nguồn phát ra trong một đơn vị thời gian, Đơn vị [bit/s]
- $H'(X)_{\max} = v_n \log(N) = \log(N)/T_n$



Dung lượng kênh rời rạc

Lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian

Định nghĩa

Một kênh rời rạc có lượng tin truyền qua $I(X; Y)$ với tốc độ truyền tin v_k thì lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian là:

$$I'(X; Y) = v_k I(X; Y) = \frac{I(X; Y)}{T_k}$$

- $T_k > T_n$: kênh giãn tin
- $T_k = T_n$: kênh thông thường
- $T_k < T_n$: kênh nén tin



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

7 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Định nghĩa (Khả năng thông qua của kênh rời rạc)

Khả năng thông qua của kênh rời rạc là giá trị cực đại của lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian lấy theo mọi khả năng có thể.

$$\begin{aligned} C' &= \max_{p(X)} I'(X; Y) = \max_X I'(X; Y) = v_k \max_X I(X; Y) [\text{bit/s}] \\ &= v_k C \end{aligned}$$

- $C = \max_X I(X; Y)$: khả năng thông qua của kênh đối với mỗi dấu.
 - ▶ C : đơn vị [bit/lần truyền]
 - ▶ C : thường được sử dụng.

Tính chất:

- $C' \geq 0$, $C' = 0$ khi và chỉ khi X và Y hoàn toàn độc lập \Rightarrow kênh bị đứt
- $C' \leq v_k \log(N)$ (N là độ lớn của nguồn X)
- $C' \leq v_k \log(M)$ (M là độ lớn của nguồn Y)



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

8 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Đặc trưng của kênh rời rạc – Một số khái niệm

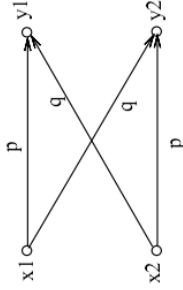
Định nghĩa (Kênh đồng nhất)

Xét một kênh rời rạc có xác suất chuyển $p(y_i|x_k)$.

- Nếu $p(y_i|x_k)$ không phụ thuộc vào thời gian t thì kênh được gọi là kênh đồng nhất; ngược lại gọi là kênh không đồng nhất.

Định nghĩa (Kênh đối xứng)

Xét một kênh rời rạc có xác suất chuyển $p(y_i|x_k)$. Nếu $p(y_i|x_k) = p = \text{const } \forall k, i$, $k \neq l$ và $p(y_i|x_k) = q = \text{const } \forall k = l$ thì kênh được gọi là đối xứng.



Hình: Mô hình kênh nhị phân đối xứng (BSC)

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

5 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Đặc trưng của kênh rời rạc – Một số khái niệm (cont.)

Định nghĩa (Kênh không có nhớ)

Nếu $p(y_i|x_k)$ không phụ thuộc vào các tin (kí hiệu) phát/nhận trước đó thì kênh được gọi là kênh không có nhớ (memoryless):

$$p(y_i|x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, y_{i-1}, \dots, y_1) = p(y_i|x_k)$$

- Nếu y_k tương ứng với tin phát $x_k \Rightarrow$

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n p(y_k | x_k)$$

Biểu diễn kênh:

- Giảm đồ chuyển trên đó nhận các đường chuyển là các $p(y_i|x_k)$
- Các ma trận xác suất chuyển $\mathbf{P} = [p_{kl}]$ với $p_{kl} = p(y_l|x_k)$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \dots & p(y_M|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \dots & p(y_M|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1|x_N) & p(y_2|x_N) & \dots & p(y_M|x_N) \end{bmatrix}$$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

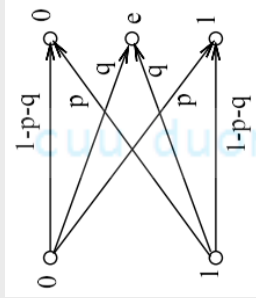
6 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Bài toán 5: Tìm dung lượng kênh rời rạc (3)

Ví dụ (Kênh nhị phân đối xứng có xóa - Binary erasure channel)

Cho kênh nhị phân rời rạc đối xứng không nhớ có xóa như hình vẽ. Mỗi khi thu được kí hiệu e nó sẽ xóa. Tính khả năng thông qua của kênh.



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

11 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Định lý mã hóa thứ 2 của Shannon cho nguồn rời rạc

Định lý

Nếu khả năng phát $H'(X)$ của một nguồn rời rạc X nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh ($H'(X) \leq C$) thì tồn tại một phép mã hóa và giải mã sao cho việc truyền tin qua kênh có xác suất lỗi nhỏ tùy ý khi độ dài từ mã đủ lớn. Ngược lại thì không tồn tại một phép mã hóa nào như vậy.

Định lý

Nếu tốc độ dữ liệu cần truyền R truyền qua kênh có dung lượng C thỏa mãn $R \leq C$ thì tồn tại một phép mã hóa và giải mã sao cho việc truyền tin qua kênh có xác suất lỗi nhỏ tùy ý khi độ dài từ mã đủ lớn. Ngược lại thì không tồn tại một phép mã hóa nào như vậy.

- Nhận xét: Định lý chỉ ra tính tồn tại, không chỉ ra cách xây dựng



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

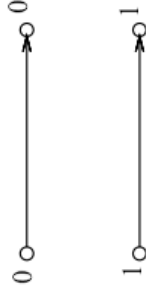
12 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Bài toán 5: Tìm dung lượng kênh rời rạc (1)

Ví dụ (Dung lượng kênh nhị phân không có nhớ, không nhiễu - Kênh nhị phân lý tưởng)

Cho kênh nhị phân rời rạc không có nhớ như hình vẽ dưới đây. Giả sử kênh không có nhiễu, tức là tín hiệu phát thu được ở phía thu không có sai (không có lỗi). Xác suất phát tín hiệu 0 là p . Tính khả năng thông qua của kênh.



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

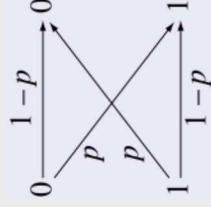
9 / 25

Dung lượng kênh rời rạc

Bài toán 5: Tìm dung lượng kênh rời rạc (2)

Ví dụ (Kênh nhị phân không nhớ đối xứng - BSC)

Xét kênh nhị phân rời rạc không nhớ đối xứng như hình vẽ. Tính dung lượng kênh.



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

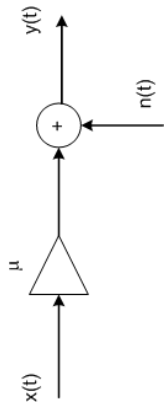
Dung lượng kênh

10/08/2011

10 / 25

Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

Lượng thông tin tương hỗ qua kênh AWGN



- $y(t) = \mu x(t) + n(t)$
- Giả sử: $\mu = 1$, $n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, $x(t)$ và $y(t)$ cũng có phân bố chuẩn
- $I(X; Y) = h(Y) - h(Y|X)$
- $h(Y) = \log \sqrt{2\pi e P_Y}$ trong đó $P_Y = \mu^2 P_X + P_n$
- $h(Y|X) = -\int \int f(x, y) \log(f(y|x)) dx dy$
 - ▶ $Pr\{y \in dy|x\} = Pr\{n \in dn\} \rightarrow f(y|x) dy = f(n) dn \rightarrow$
 - ▶ $f(y|x) = f(n) \frac{dn}{dy} = f(n) \frac{1}{\mu} = f(n)$
 - ▶ $\Rightarrow h(Y|X) = \log \sqrt{2\pi e P_n}$
- $\Rightarrow I(X; Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_X}{P_n} \right)$



Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

Định nghĩa (Dung lượng của kênh liên tục)

Khả năng thông qua của kênh liên tục, còn gọi là dung lượng kênh liên tục, là giá trị cực đại của lượng thông tin truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian lấy theo mọi khả năng có thể của phân bố nguồn phát trong đó kể đến giới hạn công suất phát.

$$C' = v_k \max_{f(x): E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y) = v_k \max_{X: E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y)$$

$$C = \max_{f(x): E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y) = \max_{X: E\{x^2(t)\} \leq P} I(X; Y)$$

- $v_k = \frac{1}{\Delta t}$ với Δt là thời gian rời rạc hóa.

Định lý (Dung lượng của kênh Gause nhiễu cộng)

Kênh AWGN với giới hạn công suất phát P và công suất nhiễu N có dung lượng:

$$C' = \frac{v_k}{2} \log \left(1 + \frac{\mu^2 P}{P_n} \right) \quad C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\mu^2 P}{P_n} \right)$$

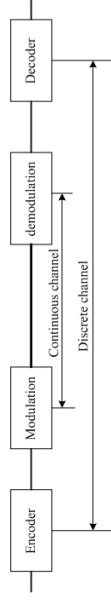
Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

Đặc trưng của kênh Gause nhiễu cộng

Tham số đặc trưng của kênh liên tục:

- Trường dấu lỗi vào (input) và trường dấu lỗi ra (output).
- Hàm chuyển, hàm mật độ phân bố xác suất để thu được $y(t)$ khi đã phát $x(t)$: $f(y(t)|x(t))$
- Tốc độ truyền của kênh v_k

Kênh rời rạc chứa kênh liên tục:



Định lý

Khả năng thông qua của kênh liên tục không nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh rời rạc chứa nó.

$$C_{\text{liên tục}} \geq C_{\text{rời rạc chứa liên tục}}$$

Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

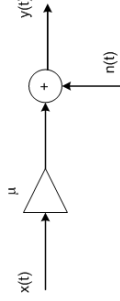
Mô hình của kênh Gause nhiễu cộng

Định nghĩa (Kênh Gause)

Kênh Gause không đổi là một kênh liên tục có tập tin lỗi vào và tập tin lỗi ra liên hệ với nhau theo công thức:

$$y(t) = \mu x(t) + n(t)$$

trong đó: $\mu = \text{const}$; $n(t)$ là nhiễu cộng còn gọi là nhiễu trắng có phân bố chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



- $x(t) \sim X$, $y(t) \sim Y$, và $n(t) \sim N$: $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$
- $x(t)$ và $n(t)$ độc lập nhau.
- $\rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ hay tương đương $P_y = P_x + P_n$



Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

Kênh có băng tần hạn chế - Khảo sát ảnh hưởng của băng tần

- Nếu $W \uparrow$, thì $C' \uparrow$.
 - **Chú ý:** $W \uparrow \rightarrow P_n = WN_0 \uparrow \rightarrow SNR \downarrow$
- $W \rightarrow \infty$, $C \rightarrow C'_\infty = \frac{\mu^2 P_x}{N_0} \log_2 e < \infty$.
 - Thông tin vũ trụ thường với băng tần rất rộng.
- $0 \leq C' \leq C'_\infty$
 - **Chú ý:** Tập âm nhiệt luôn tồn tại.

Định lý (Định lý Shannon 2 cho kênh liên tục)

Các nguồn tin rời rạc có thể mã hóa và truyền theo kênh liên tục với xác suất sai bé tùy ý khi giải mã các tín hiệu nhận được nếu khả năng phát của nguồn nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh. Ngược lại, không thể thực hiện được phép mã hóa và giải mã với số bé tùy ý.

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

Biên soạn: Phạm Văn Sư (PTIT)

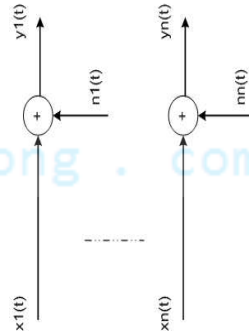
Dung lượng kênh

10/08/2011

19 / 25

Dung lượng của hệ gồm các kênh AWGN song song

Mô hình, bài toán, điều kiện



- n kênh độc lập.
- $x_i(t) \sim X_i$, $y_i(t) \sim Y_i$, $n_i(t) \sim N_i$; trong đó $x_i(t)$ và $n_i(t)$ độc lập.
- $N_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.
- Tổng công suất phát bị giới hạn: $\sum E[X_i^2] \leq P$

Bài toán

Tìm cách phân bổ tổng công suất phát giữa các kênh sao cho hệ đạt được dung lượng cực đại.

Biên soạn: Phạm Văn Sư (PTIT)

Dung lượng kênh

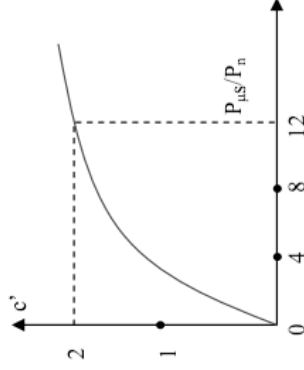
10/08/2011

20 / 25

Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

Một số nhận xét

- $\mu^2 P/P_n = S/N$ gọi là tỷ số công suất trung bình của tín hiệu trên tạp âm (SNR)
- $S/N \rightarrow 0 \Rightarrow C' \rightarrow 0$: S/N rất bé thì có thể coi như kênh bị đứt.
- Để tăng C' thì cần tăng S/N , tuy nhiên việc tăng này bị giới hạn do C' rơi vào tình trạng bão hòa.



Biên soạn: Phạm Văn Sư (PTIT)

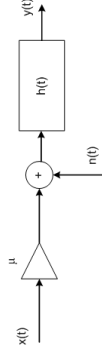
Dung lượng kênh

10/08/2011

17 / 25

Dung lượng kênh Gause nhiễu cộng

Kênh có băng tần hạn chế



- $y(t) = (\mu x(t) + n(t)) * h(t)$
- Kênh AWGN với mật độ phổ công suất nhiễu hai phía $N_0/2$ [W/Hz].
- $h(t)$: đáp ứng xung của một mạch lọc thông dải lý tưởng có băng tần W [Hz]. \rightarrow Tốc độ lấy mẫu $\geq \frac{1}{2W}$

Định lý (Dung lượng của kênh AWGN băng tần hữu hạn)

Dung lượng của kênh AWGN với băng tần hữu hạn W và giới hạn công suất phát P_x có nhiễu với mật độ phổ công suất hai phía $N_0/2$ được xác định:

$$C' = W \log \left(1 + \frac{\mu^2 P_x}{N_0 W} \right) [\text{bps}]$$

Biên soạn: Phạm Văn Sư (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

18 / 25

Dung lượng của hệ gồm các kênh AWGN song song

Thuật toán Water-filling

Thuật toán

Công suất phát của kênh thứ k được xác định bằng $P_k = (\nu - P_{n_k})^+$ trong đó ν được chọn sao cho $\sum_k (\nu - P_{n_k})^+ = P$.

- $(x)^+$ là một hàm được xác định bởi:

$$(x)^+ = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

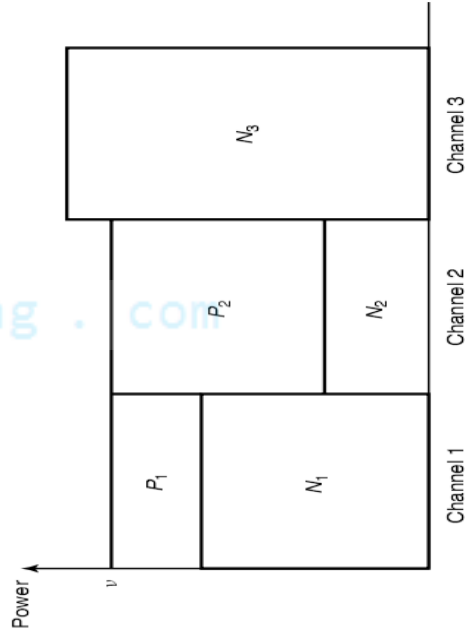
Dung lượng kênh

10/08/2011

23 / 25

Dung lượng của hệ gồm các kênh AWGN song song

Thuật toán Water-filling - Minh họa



Hình: Minh họa thuật toán Water-filling cho hệ 3 kênh AWGN song song

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

24 / 25

Dung lượng của hệ gồm các kênh AWGN song song

Lượng tin tương hỗ, định nghĩa

Định lý

Hệ thống gồm n kênh AWGN độc lập với các đầu vào X_1, X_2, \dots, X_n , các đầu ra Y_1, Y_2, \dots, Y_n , với các tác động nhiễu độc lập N_1, N_2, \dots, N_n sẽ có lượng tin tương hỗ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq \sum_k \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_{x_k}}{P_{n_k}} \right)$$

Định nghĩa (Dung lượng của kênh MIMO)

Dung lượng của kênh gồm n đầu vào và n đầu ra được xác định bởi công thức:

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \dots, x_n); \sum E[X_i^2] \leq P} I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

21 / 25

Dung lượng của hệ gồm các kênh AWGN song song

Định lý

Hệ thống gồm n kênh AWGN độc lập song song có dung lượng bằng tổng dung lượng các kênh thành phần khi và chỉ khi đầu vào có phân bố chuẩn thỏa mã các điều kiện:

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{bmatrix} P_{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{x_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{x_n} \end{bmatrix} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{x_i} = P$$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Dung lượng kênh

10/08/2011

22 / 25

Kết thúc phần dung lượng kênh



Dung lượng kênh

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

10/08/2011

25 / 25

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com