

NGUYỄN QUỐC TRUNG



Xử lý tín hiệu và lọc số

TẬP II



* G T 1 4 8 2 9 5 *

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

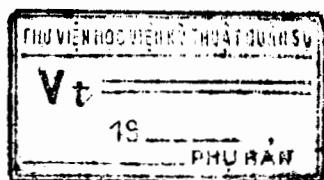


NGUYỄN QUỐC TRUNG

XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỘC SỐ

TẬP 2

(Tái bản, có sửa chữa và bổ xung)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2003

Chịu trách nhiệm xuất bản

PGS. TS TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập

ĐẶNG ĐÌNH THẠCH
NGUYỄN THỊ NGỌC KHUÊ

Sửa bản in

QUANG NGỌC

Trình bày bìa

HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HUNG ĐẠO HÀ NỘI

In 800 quyển khổ 19 x 27 cm tại Nhà in Đại học Quốc Gia Hà Nội

Giấy phép xuất bản số 111 – 240.2

In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2003

LỜI GIỚI THIỆU

Cuộc cách mạng khoa học và công nghệ đang diễn ra một cách sôi động chưa từng thấy như hiện nay trên toàn thế giới thúc đẩy loài người nhanh chóng bước sang một kỷ nguyên mới. Đó là kỷ nguyên của nền văn minh dựa trên cơ sở công nghiệp trí tuệ. Mở đầu cho cuộc cách mạng khoa học và công nghệ lần này có thể được đánh dấu bằng sự ra đời và phát triển ồ ạt của máy tính cũng như các phương tiện xử lý thông tin khác, đặc biệt là các hệ thống xử lý song song với tốc độ ngày càng cao. Cùng với sự phát triển nhanh chóng các công cụ xử lý tín hiệu số cũng như các nhu cầu ứng dụng các công cụ này vào mọi lĩnh vực hoạt động của xã hội loài người đòi hỏi sự phát triển đồng bộ các phương pháp xử lý số tín hiệu hiện đại. Đặc biệt các phương pháp xử lý số này phải áp dụng có hiệu quả trong các lĩnh vực thông tin liên lạc, phát thanh truyền hình, tự động điều khiển và các ngành công nghệ khác.

Để giúp tìm hiểu một cách cơ bản vấn đề này. Chúng tôi xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách **"Xử lý tín hiệu và lọc số"** của tác giả TS. Nguyễn Quốc Trung. Cuốn sách đã được trình bày một cách hệ thống từ những kiến thức cơ bản về tín hiệu và các phương pháp tổng hợp phân tích các hệ thống rời rạc đến những phương pháp xử lý số tín hiệu dựa trên các công cụ toán học và vật lý hiện đại. Đặc biệt cuốn sách dành phần lớn cho việc phân tích và tổng hợp các bộ lọc số làm cơ sở cho việc ứng dụng trong các ngành công nghệ khác nhau.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách **"Xử lý tín hiệu và lọc số"** không những giúp ích tốt cho sinh viên các ngành công nghệ mà cũng là tài liệu tham khảo tốt cho NCS cũng như các chuyên gia đang hoạt động trong các lĩnh vực có liên quan.

GS. TS Nguyễn Xuân Quỳnh

Viện trưởng Viện Điện tử - Tin học và Tự động hoá.

LỜI NÓI ĐẦU

Ngay sau khi xuất bản cuốn "Vi điện tử số" tập 1, "Trung tâm nghiên cứu phát triển Điện tử - Tin học - Viễn thông" hợp tác giữa trường Đại học Bách khoa Hà Nội và Tổng công ty Điện tử - Tin học Việt Nam đã nhận được lời mời cùng xây dựng chương trình hiện đại hoá giáo trình và giáo cụ ngành Điện tử - Tin học - Viễn thông của Trung tâm Đào tạo Bưu chính Viễn thông I thuộc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông và khoa Thông tin Tin học trường Đại học dân lập Đông Đô. Chúng tôi đã tổ chức hội thảo khoa học về chương trình số hoá kỹ thuật Điện tử - Viễn thông. Trước hết trong lĩnh vực giảng dạy của trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông ... và khoa Thông tin Tin học trường Đại học Dân lập Đông Đô.

Dưới sự chỉ đạo của GS. TS Phan Anh, trong buổi Hội thảo chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của các giảng viên và các nhà khoa học giàu kinh nghiệm. Chúng tôi đã khẳng định việc hiện đại hoá trong lĩnh vực giảng dạy là cần thiết và rất cấp bách.

Trước hết cho ra mắt bạn đọc bộ sách "XỬ LÝ SỐ THÔNG TIN" nhằm phục vụ ngay cho công tác giảng dạy và nghiên cứu khoa học tại trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Tổng công ty Điện tử - Tin học Việt Nam, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, trường Đại học dân lập Đông Đô.

Đầu tiên chúng tôi cho xuất bản hai cuốn sách:

1. Vi điện tử số
2. Xử lý tín hiệu và lọc số.

Không phải nói nhiều, chúng ta đều biết rằng việc số hoá các thiết bị Điện tử - Viễn thông đã và đang được thực hiện rất mạnh mẽ ở trên toàn thế giới cũng như ở Việt Nam. Chính vì vậy mà xử lý tín hiệu và lọc số đã trở thành một ngành khoa học và kỹ thuật. Nó được phát triển rất nhanh chóng và được đánh giá bởi sự ra đời của các mạch vi điện tử cỡ lớn VLSI (Very - Large - Scale Intergration) là nền tảng cho sự phát triển đến chóng mặt của các phần cứng số (Digital hardware) chuyên dụng cũng như máy tính số (Digital Computer) với giá thành rẻ hơn, kích thước nhỏ hơn, tốc độ cao hơn.

Để tiếp cận với ngành khoa học hiện đại này chúng ta cần phải được trang bị những kiến thức cơ bản không thể thiếu được của xử lý tín hiệu và lọc số.

Giáo trình XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ này đã được dùng để giảng dạy nhiều năm học cho học sinh chính khoá, cao học, nghiên cứu sinh của các trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Học viện Viễn thông ORAN (Institute des Télécommunication d'ORAN), Đại học Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Bách khoa Đà Nẵng, Trung tâm đào tạo Bưu chính Viễn thông, Cục tác chiến Điện tử Bộ Quốc phòng, Đại học Dân lập Đông Đô.

Giáo trình XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ chia thành ba tập.

Tập 1 đề cập đến những vấn đề khái niệm cơ bản của xử lý tín hiệu bao gồm biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền biến số n , trong miền z , trong miền tần số liên tục ω , trong miền tần số rời rạc ω_k (hoặc miền k), ngoài ra chương 5 sẽ trình bày khá chi tiết về tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính.

Tập 2 gồm những vấn đề tổng hợp bộ lọc số IIR, cấu trúc và độ nhảy của các hệ thống số, biểu diễn hệ thống rời rạc trong không gian trạng thái và cấu trúc trạng thái, lọc số nhiều nhịp, biến đổi Fourier nhanh và cuối cùng là biến đổi Hilbert và hệ thống pha tối thiểu.

Tập 3 gồm những vấn đề về hiệu ứng lượng tử hoá trong xử lý tín hiệu và lọc số, các phương pháp đánh giá phổ, các bộ lọc số thích nghi, tiên đoán tuyến tính và xử lý đồng cấu (Homomorphic), biểu diễn trong miền tiểu ba (wavelet).

Tuy rằng giáo trình xử lý tín hiệu và lọc số này đã được giảng dạy nhiều năm nhưng cũng không thể tránh khỏi những sai sót, chúng tôi rất mong bạn đọc góp ý để lần tái bản tới được hoàn thiện hơn.

Địa chỉ liên hệ:

Cơ quan: Trung tâm nghiên cứu và phát triển Điện tử - Tin học - Viễn thông, trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

ĐHBK Hà Nội, 1 Đại Cồ Việt, C4/104.

Tel: 8681068, 8694529, 8693828; Fax: 8681068.

Nhà riêng: Phòng 109B, nhà A2, Trung Tự - Đống Đa - Hà Nội

Tel: 8528934, ĐD: 091231914.

Lời cuối tác giả xin chân thành cảm ơn những lời chỉ giáo quý giá của GS. TS Nguyễn Xuân Quỳnh (Viện trưởng Viện Điện tử, Tin học và Tự động hoá) và GS. TS Phan Anh (Giám đốc trung tâm nghiên cứu và phát triển ĐT - TH - VT) để cuốn sách được hoàn thành với chất lượng cao hơn.

Tác giả

Dr. Nguyễn Quốc Trung

Chương 6

TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN (BỘ LỌC SỐ IIR)

6.1. MỞ ĐẦU

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc số, tức là tìm ra các hệ số của bộ lọc số IIR sao cho thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc là δ_1 , δ_2 , ω_p , ω_s trong miền tần số liên tục ω đối với $|H(e^{j\omega})|$.

Các phương pháp tổng hợp bộ lọc loại này có thể chia ra làm hai loại chính:

- Loại thứ nhất là chuyển từ việc thiết kế các bộ lọc tương tự sang bộ lọc số, tức là chúng ta phải thiết kế các bộ lọc tương tự trước sau đó dùng các phương pháp chuyển đổi tương đương một cách gần đúng giữa miền tương tự và miền số để thu được bộ lọc số. Phương pháp thứ nhất này được sử dụng rộng rãi nhất.

- Loại thứ hai là các phương pháp tìm ra các thủ tục tối ưu hoá nhờ sự tham gia của máy tính điện tử. Các phương pháp này là tìm kiếm các cách tối thiểu hoá sai số của việc xấp xỉ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc cần thiết kế bằng một bộ lọc khác có thể thực hiện được các tiêu chuẩn gần đúng. Loại thứ hai này ít được dùng.

Trong chương này chúng ta sẽ đi sâu nghiên cứu các phương pháp loại thứ nhất vì nó đơn giản và độ chính xác là chấp nhận được.

6.2. CÁC TÍNH CHẤT TỔNG QUÁT CỦA BỘ LỌC

6.2.1. BỘ LỌC SỐ IIR THỰC HIỆN ĐƯỢC

Ở đây chúng ta sẽ nghiên cứu các bộ lọc số IIR thực hiện được về mặt vật lý, tức là các bộ lọc số là ổn định và nhân quả.

Tính nhân quả được đảm bảo nếu đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc thoả mãn điều kiện sau đây:

$$h(n) = 0 \quad \text{với } n < 0$$

Tính ổn định được đảm bảo bởi đáp ứng xung $h(n)$ thoả mãn điều kiện ổn định sau:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (6.2.1.1)$$

6.2.2. HÀM TRUYỀN ĐẠT

Hàm truyền đạt của một bộ lọc số IIR có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$a_0 = 1$$

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Tổng quát $H(z)$ là một hàm phức. Nếu các hệ số a_k và b_r là các số thực, thì ta có:

$$[H(z)]^* = \left[\frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \right]^* = \frac{\sum_{r=0}^M [b_r z^{-r}]^*}{\sum_{k=0}^N [a_k z^{-k}]^*}$$

Nhưng a_k và b_r là thực, ta có:

$$\begin{aligned} H^*(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r (z^{-r})^*}{\sum_{k=0}^N a_k (z^{-k})^*} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r (z^*)^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k (z^*)^{-k}} \\ &= H(z^*) \end{aligned}$$

Vậy nếu a_k và b_r là thực ta có quan hệ sau:

$$H^*(z) = H(z^*) \quad (6.2.2.1)$$

hoặc:

$$H(z) = H^*(z^*)$$

6.2.3. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA BỘ LỌC SỐ IIR

Ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

và

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\psi(\omega)}$$

Nếu a_k và b_r là thực ta có:

$$H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$$

Vậy:

$$\begin{aligned} [H(e^{j\omega}) | e^{j\varphi(\omega)}]^* &= |H(e^{j\omega})| e^{-j\varphi(\omega)} \\ &= H(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} &= \frac{e^{j\varphi(\omega)}}{e^{-j\varphi(\omega)}} \\ &= e^{j2\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

Lấy lôgarit cơ số e ta có:

$$\ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] = 2j\varphi(\omega)$$

Vậy:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] = F(e^{j\omega}) = \arctg \frac{I_m[H(e^{j\omega})]}{\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}}$$

6.2.4. THỜI GIAN TRUYỀN NHÓM

Thời gian truyền nhóm được định nghĩa như sau:

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (6.2.4.1)$$

Bây giờ ta tìm $\tau(\omega)$.

Ta biết rằng:

$$\varphi(\omega) = F(e^{j\omega})$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} &= \frac{dF(e^{j\omega})}{d(e^{j\omega})} \frac{d(e^{j\omega})}{d\omega} \\ &= j e^{j\omega} \frac{dF(e^{j\omega})}{d(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

thì

$$\tau(\omega) = -j e^{j\omega} \frac{dF(e^{j\omega})}{d(e^{j\omega})}$$

Thay $F(e^{j\omega})$ vào ta có:

$$\begin{aligned}\tau(\omega) &= -je^{j\omega} \frac{1}{2j} \frac{d}{d(e^{j\omega})} \left\{ \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} e^{j\omega} \left\{ \frac{d}{d(e^{j\omega})} \ln H(e^{j\omega}) - \frac{d}{d(e^{j\omega})} \ln H(e^{-j\omega}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} e^{j\omega} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} + \frac{1}{(e^{j\omega})^2} \frac{H'(e^{-j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right\}\end{aligned}$$

ở đây:

$$H'(e^{j\omega}) = \frac{d}{d(e^{j\omega})} [H(e^{j\omega})]$$

Vậy:

$$\tau(\omega) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + e^{j\omega} \frac{H'(e^{-j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right\}$$

Nếu a_k và b_r là các hệ số thực, theo (6.2.2.1) ta có thể viết:

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega}) &= [H(e^{j\omega})]^* \\ H'(e^{j\omega}) &= [H'(e^{j\omega})]^*\end{aligned}$$

Ở đây dấu $*$ là dấu liên hợp phức.

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned}\tau(\omega) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + e^{j\omega} \frac{[H'(e^{j\omega})]^*}{[H(e^{j\omega})]^*} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + (e^{j\omega})^* \frac{[H'(e^{j\omega})]^*}{[H(e^{j\omega})]^*} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + \left[\frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega} \right]^* \right\}\end{aligned}$$

Chúng ta biết rằng:

$$A + A^* = \text{Re}[A] + j\text{Im}[A] + \text{Re}[A] - j\text{Im}[A] = 2\text{Re}[A]$$

Vậy cuối cùng ta thu được công thức tính $\tau(\omega)$ như sau:

$$\tau(\omega) = -\text{Re} \left[e^{j\omega} \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \right] \quad (6.2.4.2)$$

$$H'(e^{j\omega}) = \frac{d}{d(e^{j\omega})} [H(e^{j\omega})]$$

Ví dụ 6.2.4.1

Hãy tính thời gian truyền nhóm của một bộ lọc số IIR nếu ta biết hàm truyền đạt $H(z)$ của nó có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}}$$

Giải

Đặt: $H(z) = \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 - z^{-2}}$

Vậy: $D(z) = 1 - z^{-2}$

$$H'(z) = \left[\frac{1}{D(z)} \right]' = - \frac{D'(z)}{D^2(z)}$$

$$H'(z) = \frac{dH(z)}{dz}$$

Thay giá trị của z trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta có:

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= - \operatorname{Re} \left[z \frac{H'(z)}{H(z)} \right] \Bigg|_{z=e^{j\omega}} \\ &= - \operatorname{Re} \left[z \left(- \frac{D'(z)}{D^2(z)} \cdot D(z) \right) \right] \Bigg|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{j\omega} \frac{D'(e^{j\omega})}{D^2(e^{j\omega})} \right] \end{aligned}$$

$$D'(e^{j\omega}) = 2z^{-3} \Big|_{z=e^{j\omega}} = 2e^{-j3\omega}$$

$$D'(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z^{-2}} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - e^{-j2\omega}}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \operatorname{Re} \left[e^{j\omega} \frac{2e^{-j3\omega}}{1 - e^{-j2\omega}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2e^{-j2\omega}}{1 - e^{-j2\omega}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{2}{e^{j2\omega} - 1} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{\cos 2\omega - 1 + j \sin 2\omega} \right] \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \left[2 \frac{\cos 2\omega - 1 - j \sin 2\omega}{(\cos 2\omega - 1)^2 + \sin^2 \omega} \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[2 \frac{\cos 2\omega - 1 - j \sin 2\omega}{2(1 - \cos 2\omega)} \right] = -1$$

6.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ IIR TỪ BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

6.3.1. MỞ ĐẦU

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp chuyển đổi hàm truyền đạt của một hệ thống tương tự $H_a(s)$ sang hàm truyền đạt của hệ thống số $H(z)$. Như vậy việc đầu tiên là chúng ta phải tổng hợp được hàm truyền đạt của hệ thống tương tự $H_a(s)$, việc này đã được nghiên cứu phát triển từ lâu và đã thu được các kết quả tốt đẹp, chúng ta sẽ trình bày kỹ ở phần sau.

Có bốn phương pháp chuyển đổi từ hệ thống tương tự sang hệ thống số như sau:

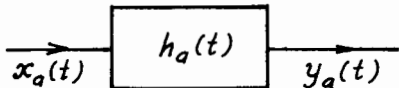
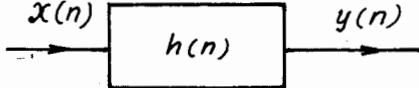
- phương pháp 1: phương pháp bất biến xung
- phương pháp 2: phương pháp biến đổi song tuyến
- phương pháp 3: phương pháp tương đương vi phân
- phương pháp 4: phương pháp biến đổi z tương ứng.

Để thấy rõ bản chất của các phương pháp này, chúng ta tiến hành so sánh hệ thống tương tự và hệ thống số.

6.3.2. SO SÁNH HỆ THỐNG TƯƠNG TỰ VÀ HỆ THỐNG SỐ

Bảng 6.3.2.1 sau đây sẽ giúp chúng ta ôn lại một vài đặc trưng chính của bộ lọc tương tự và bộ lọc số, từ đây chúng ta có thể rút ra được sự giống nhau và khác nhau giữa hai loại bộ lọc này.

Bảng 6.3.2.1

Miền tương tự	Miền số
Hệ thống	
<p>Tương tự</p> 	<p>Số</p> 

Hàm truyền đạt

$$H_a(s) = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$$

$$H_a(s) = A \frac{\prod_{r=1}^M (s - s_{or})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})}$$

$$H_a(s) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - s_{or} s^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - s_{pk} s^{-1})}$$

s_{or} : các điểm không của $H_a(s)$

s_{pk} : các điểm cực của $H_a(s)$

A : hệ số

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = B \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{or})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

$$H(z) = B \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_{or} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - z_{pk} z^{-1})}$$

z_{or} : các điểm không của $H(z)$

z_{pk} : các điểm cực của $H(z)$

B : hệ số

Tích chập

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) d\tau$$

$$= x_a(t) * h_a(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_a(\tau) x_a(t - \tau) d\tau$$

$$= h_a(t) * x_a(t)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n - m)$$

$$= x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n - m)$$

$$= h(n) * x(n)$$

Phương trình biểu diễn hệ thống

Vi phân

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M d_r \frac{d^r x_a(t)}{dt^r}$$

Sai phân

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n - k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n - r)$$

Biến đổi

Laplace

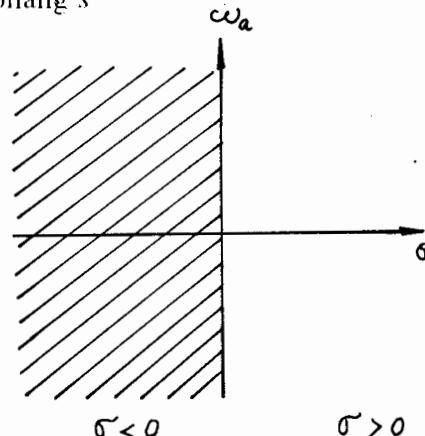
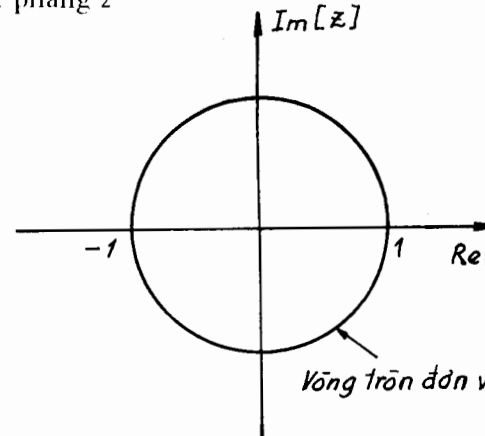
LT: Laplace Transform

Z

ZT: Z - Transform

$LT[h_a(t)] = H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)e^{-st} dt$ $s = \sigma + j\omega_a$ Fourier FT: Fourier transform $FT[h_a(t)] = H_a(\omega_a) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)e^{-j\omega_a t} dt$	$ZT[h(n)] = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ $z = re^{j\omega}$ Fourier FT: Fourier transform $FT[h(n)] = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$
--	--

Mặt phẳng

<p>Mặt phẳng s</p>  <p>$\sigma < 0$ $\sigma > 0$</p>	<p>Mặt phẳng z</p>  <p>Vòng tròn đơn vị</p>
--	---

Sự ổn định

Nếu tất cả các điểm cực của $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s thì hệ thống ổn định.	Nếu tất cả các điểm cực của $H(z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị thì hệ thống ổn định.
---	---

6.3.3. PHƯƠNG PHÁP 1: PHƯƠNG PHÁP BẤT BIẾN XUNG

Giống như tên của nó đã chỉ rõ, phương pháp này có bản chất như sau: đáp ứng xung của bộ lọc số $h(n)$ nhận được bằng cách lấy mẫu đáp ứng xung của bộ lọc tương tự $h_a(t)$, như vậy dạng của $h_a(t)$ và $h(n)$ là như nhau, chỉ khác ở chỗ $h_a(t)$ là liên tục, còn $h(n)$ là rời rạc.

Ôn lại quá trình lấy mẫu ta thấy rằng:

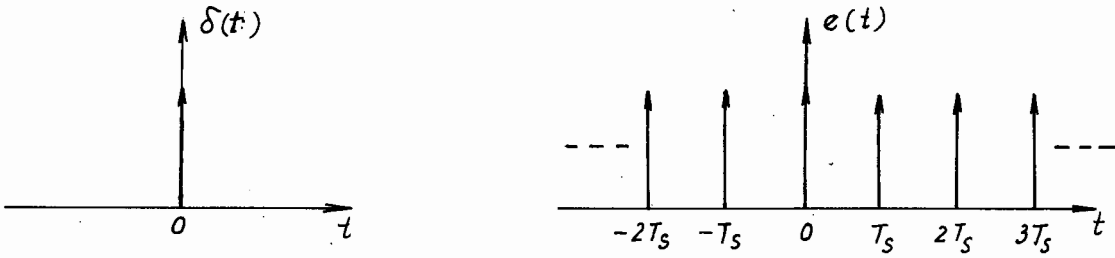
a) Trong miền thời gian

$$\begin{aligned}
 h(nT_s) &= h_a(t) \Big|_{t=nT_s} \\
 &= h_a(t) \cdot e(t)
 \end{aligned}
 \tag{6.3.3.1}$$

ở đây $e(t)$ là dãy tuần hoàn các xung Dirac có chu kỳ là T_s như sau:

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (6.3.3.2)$$

Hình 6.3.3.1 sẽ cho ta đồ thị của $\delta(t)$ và $e(t)$:



Hình 6.3.3.1.

Nhớ lại chương 1, sau khi chuẩn hoá $h(nT_s)$ bởi T_s ta sẽ thu được $h(n)$:

$$h(nT_s) \xrightarrow[\text{bởi } T_s]{\text{chuẩn hoá}} h(n)$$

b) Trong miền tần số

$$\text{FT}[h_a(t)] = H_a(\omega_a)$$

$$\text{FT}[e(t)] = E(\omega_a) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right)$$

$$\text{FT}[h(n)] = H(e^{j\omega})$$

ở đây FT là toán tử biến đổi Fourier.

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_a(\omega_a) * E(\omega_a) = H_a(\omega_a) * \left[\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \left[H_a(\omega_a) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H_a(\omega_a) * \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (6.3.3.3)$$

ở đây:

$$H_a\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) = H_a(\omega_a) * \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right)$$

T_s : chu kỳ lấy mẫu.

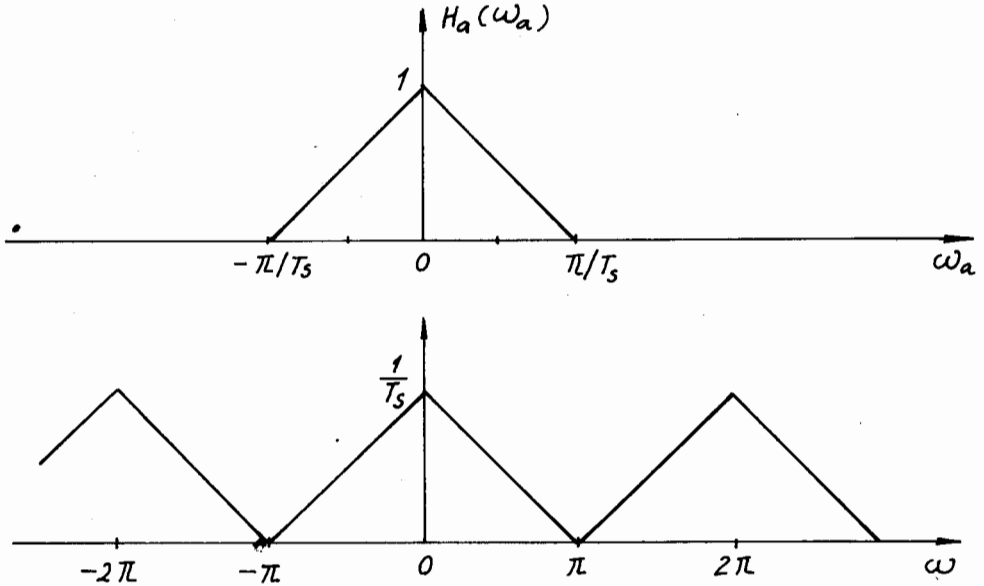
Nếu định lý lấy mẫu được thoả mãn, tức là:

$$H_a(\omega_a) = 0 \quad \text{với} \quad |\omega_a| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

điều này cho phép tránh được hiện tượng chồng phổ khi lấy mẫu, tức là:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} H_a(\omega_a) \quad \text{với} \quad |\omega_a| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

Hình 6.3.3.2 cho ta một ví dụ về việc lấy mẫu khi định lý lấy mẫu được thoả mãn.



Hình 6.3.3.2.

c) Mặt phẳng s và mặt phẳng z

Trong mặt phẳng s ta thấy rằng trục tung (trục tần số tương tự ω_a), do hạn chế của định lý lấy mẫu nên tín hiệu có bề rộng phổ hữu hạn chỉ tồn tại trong khoảng

$$\left[-\frac{\pi}{T_s}; \frac{\pi}{T_s} \right]$$

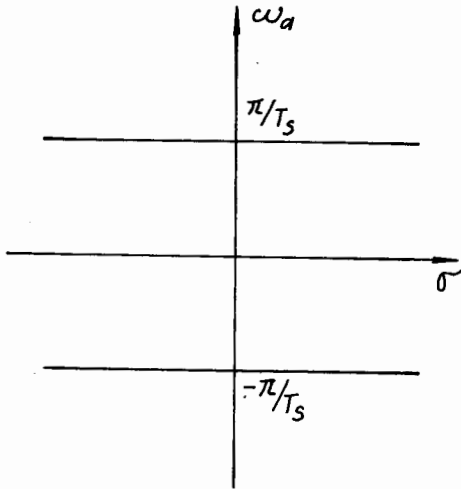
Từ đây chúng ta cũng có sự tương ứng giữa mặt phẳng s và mặt phẳng z , hình 6.3.3.3 sẽ minh hoạ điều này.

Chúng ta biết rằng hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc tương tự có thể được biểu diễn dưới dạng khai triển thành các phân thức tối giản như sau:

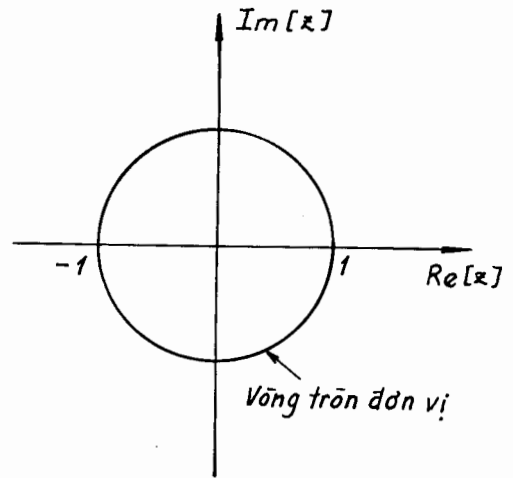
$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad (6.3.3.4)$$

ở đây: s_{pk} là các điểm cực đơn của $H_a(s)$

$$A_k = (s - s_{pk}) H_a(s) \Big|_{s=s_{pk}} \quad (6.3.3.5)$$



Mặt phẳng s



Mặt phẳng z

Hình 6.3.3.3.

Theo lý thuyết của biến đổi Laplace ta có:

$$\text{LT} [e^{s_{pk}t} u(t)] = \frac{1}{s - s_{pk}}$$

hoặc

$$\text{LT} [A_k e^{s_{pk}t} u(t)] = \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

Vậy:

$$\text{ILT} \left[\frac{A_k}{s - s_{pk}} \right] = A_k e^{s_{pk}t} u(t) \quad (6.3.3.6)$$

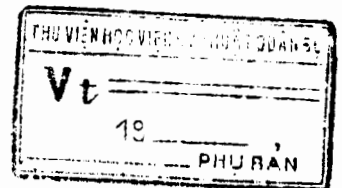
ở đây:

LT: biến đổi Laplace (Laplace Transform)

ILT: biến đổi Laplace ngược (Inverse Laplace Transform)

$u(t)$: hàm nhảy đơn vị tương tự

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Từ đây ta có:

$$\text{ILT} [H_a(s)] = h_a(t) = \text{ILT} \left[\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \right] = \sum_{k=1}^N \left\{ \text{ILT} \left[\frac{A_k}{s - s_{pk}} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} u(t) \quad (6.3.3.7)$$

Lấy mẫu $h_a(t)$ sẽ cho ta:

$$h(nT_s) = h_a(t) \Big|_{t=nT_s} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} u(t) \Big|_{t=nT_s} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) \quad (6.3.3.8)$$

Bây giờ chúng ta hãy tìm biến đổi z của $h(nT_s)$:

$$\begin{aligned} \text{ZT}[h(nT_s)] &= \text{ZT} \left[\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) \right] = H(z) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) \right] z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) z^{-n} \end{aligned}$$

nhưng $u(nT_s) = \begin{cases} 0 & \text{với } n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$, vậy ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_k e^{s_{pk}nT_s} z^{-n} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} A_k \left(e^{s_{pk}nT_s} z^{-1} \right)^n \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{s_{pk}nT_s} z^{-1} \right)^n \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính chuỗi, ta có:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T_s} z^{-1}} \quad (6.3.3.9)$$

ở đây:

s_{pk} - các cực đơn của $H_a(s)$;

T_s - chu kỳ lấy mẫu;

A_k - hệ số tính theo công thức (6.3.3.5).

Công thức (6.3.3.9) chính là nội dung của phương pháp bất biến xung. Dưới đây chúng ta xét sự ổn định tương ứng giữa $H_a(s)$ và $H(z)$.

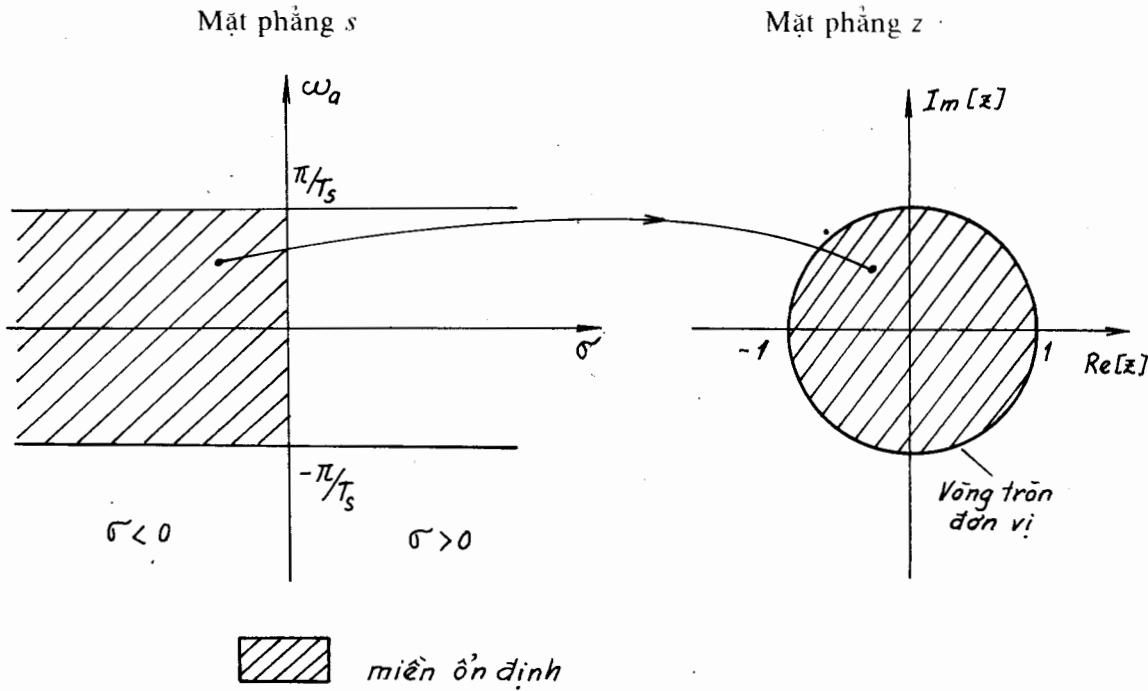
d) Độ ổn định

Từ công thức (6.3.3.9) ta có thể thấy rằng nếu $z = e^{s_{pk}T_s}$ thì $H(z) \rightarrow \infty$, vậy rõ ràng là $z_{pk} = e^{s_{pk}T_s}$ chính là điểm cực của $H(z)$, mà s_{pk} là điểm cực của $H_a(s)$. Như thế có thể nói rằng các điểm cực $s_{pk} = \sigma_{pk} + j\omega_{ak}$ của $H_a(s)$ được biến đổi một cách trực tiếp thành các điểm cực $z_{pk} = e^{s_{pk}T_s}$ của $H(z)$, thay s_{pk} vào z_{pk} ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 z_{pk} &= e^{(\sigma_k + j\omega_{ak})T_s} \\
 &= e^{\sigma_k T_s} \cdot e^{j\omega_{ak} T_s} = r_k \cdot e^{j\omega_k} \\
 \Rightarrow r_k &= e^{\sigma_k T_s} \\
 \omega_k &= \omega_{ak} T_s
 \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ổn định của $H_a(s)$ và $H(z)$ ta thấy rằng nếu $\sigma_k < 0$ tức là các điểm cực s_{pk} tương ứng sẽ nằm ở bên trái mặt phẳng s , dẫn đến $|z_{pk}| = r_k = e^{\sigma_k T_s} < 1$ tức là các điểm cực z_{pk} tương ứng sẽ nằm trong vòng tròn đơn vị. Như vậy điều kiện ổn định vẫn được đảm bảo khi ta chuyển $H_a(s)$ thành $H(z)$ theo phương pháp bất biến xung.

Hình 6.3.3.4 sẽ minh họa sự tương ứng giữa hai miền ổn định trong mặt phẳng s và mặt phẳng z .



Hình 6.3.3.4.

Ví dụ 6.3.3.1

Cho hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{4}{(s+3)(s+5)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp bất biến xung.
- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số.

Giải

- $H_a(s)$ có hai điểm cực: $s_{p1} = -3$; $s_{p2} = -5$, vậy:

$$H_a(s) = \frac{A_1}{s - s_{p1}} + \frac{A_2}{s - s_{p2}}$$

Tìm A_k theo công thức (6.3.3.5):

$$A_1 = (s + 3) \frac{4}{(s + 3)(s + 5)} \Big|_{s=-3} = 2$$

$$A_2 = (s + 5) \frac{4}{(s + 3)(s + 5)} \Big|_{s=-5} = -2$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{2}{s + 3} + \frac{-2}{s + 5}$$

Áp dụng công thức (6.3.3.9) ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-3T_s} z^{-1}} + \frac{-2}{1 - e^{-5T_s} z^{-1}}$$

- Để vẽ được sơ đồ thực hiện bộ lọc số, chúng ta chuyển $H(z)$ về dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

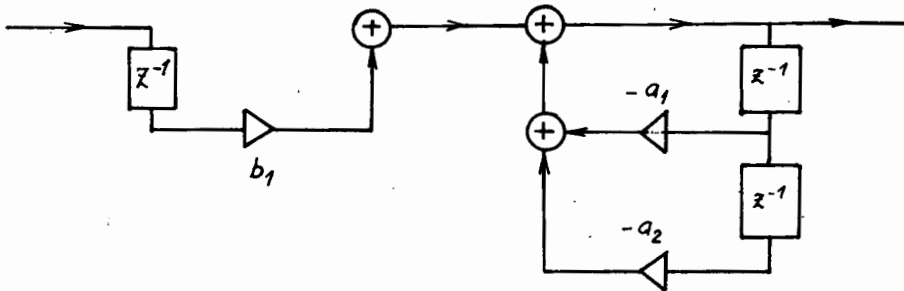
hoặc viết phương trình sai phân dưới dạng sau:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$$

Sau khi biến đổi ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{2(e^{-5T_s} - e^{-3T_s})z^{-1}}{1 - (e^{-3T_s} + e^{-5T_s})z^{-1} + e^{-8T_s}z^{-2}}$$

Sơ đồ thực hiện bộ lọc cho trên hình 6.3.3.5.



$$b_1 = 2(e^{-5T_s} - e^{-3T_s}); a_1 = -(e^{-3T_s} + e^{-5T_s}); a_2 = e^{-8T_s}$$

Hình 6.3.3.5.

6.3.4. PHƯƠNG PHÁP 2: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI SONG TUYẾN

a) Định nghĩa biến đổi

Giả sử $y_a(t)$ là một tín hiệu tương tự, vậy đạo hàm bậc nhất của $y_a(t)$ là:

$$y'_a(t) = \frac{dy_a(t)}{dt}$$

và ta có thể viết $y_a(t)$ dưới dạng tích phân của $y'_a(t)$:

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(\tau) d\tau + y_a(t_0)$$

Nếu $t = nT_s$ và $t_0 = (n-1)T_s$ thì ta thu được:

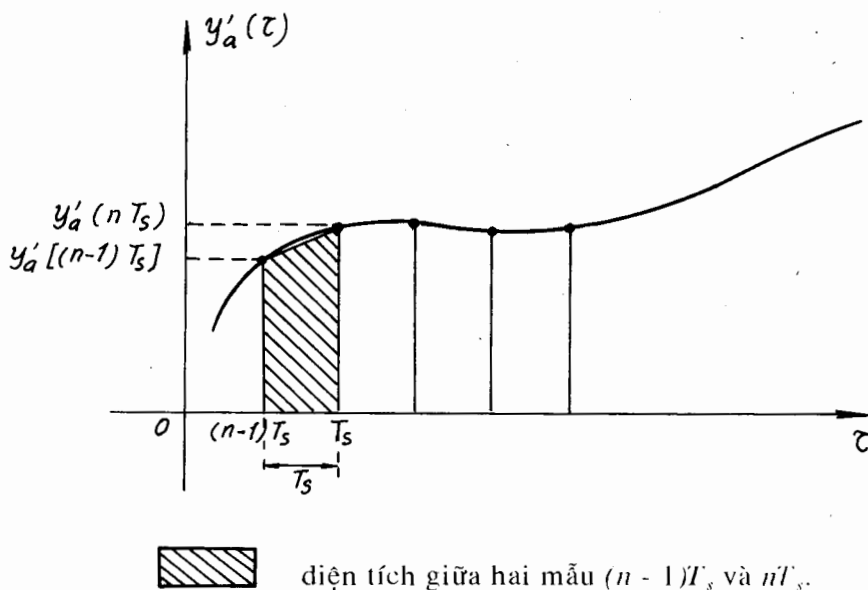
$$y_a(nT_s) = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} y'_a(\tau) d\tau + y_a[(n-1)T_s]$$

Vậy:

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} y'_a(\tau) d\tau = y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s]$$

Bây giờ chúng ta tiến hành tính tích phân trên nhờ quy tắc hình thang.

Quy tắc này được sử dụng rộng rãi trong trường hợp tích phân không thể tính được bằng giải tích. Nội dung của quy tắc này như sau: tính tổng tích diện tích của các hình thang nhận được bằng phép nội suy tuyến tính giữa các mẫu của tín hiệu rời rạc. Hình 6.3.4.1 sẽ minh họa cách tính này.



Hình 6.3.4.1.

Theo hình 6.3.4.1, diện tích giữa hai mẫu được tính như sau:

$$T_s \cdot \frac{y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s]}{2}$$

Diện tích này chính là giá trị gần đúng của tích phân:

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} y'_a(\tau) d\tau = T_s \cdot \frac{y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s]}{2}$$

Vậy ta có:

$$y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s] = T_s \cdot \frac{y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s]}{2} \quad (6.3.4.1)$$

Giả sử ta có ví dụ bộ lọc tương tự được xác định bằng phương trình vi phân sau đây:

$$y'_a(t) + c_0 y_a(t) = x_a(t) \quad (6.3.4.2)$$

Trong trường hợp tổng quát một hệ thống tương tự được xác định bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M d_r \frac{d^r x_a(t)}{dt^r}$$

thì hàm truyền đạt $H_a(s)$ có dạng:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$$

Vậy trong trường hợp này:

$$c_0 = c_0 \neq 0; c_1 = 1, c_2 = c_3 = \dots = c_N = 0$$

$$d_0 = 1; d_1 = d_2 = \dots = d_M = 0$$

Ta có:

$$H_a(s) = \frac{1}{c_0 + c_1 s} = \frac{1}{s + c_0}$$

Nếu đặt $t = nT_s$ thì phương trình (6.3.4.2) trở thành:

$$y'_a(nT_s) + c_0 y_a(nT_s) = x_a(nT_s) \quad (6.3.4.3)$$

thì:

$$y'_a(nT_s) = -c_0 y_a(nT_s) + x_a(nT_s)$$

và tại điểm $(n-1)T_s$ ta có:

$$y'_a[(n-1)T_s] = -c_0 y_a[(n-1)T_s] + x_a[(n-1)T_s]$$

dẫn đến:

$$y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s] = -c_0\{y_a(nT_s) + y_a[(n-1)T_s]\} + \{x_a(nT_s) + x_a[(n-1)T_s]\}$$

Thay vào phương trình (6.3.4.1):

$$y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s] = \frac{T_s}{2} \cdot [-c_0\{y_a(nT_s) + y_a[(n-1)T_s]\} + \{x_a(nT_s) + x_a[(n-1)T_s]\}]$$

Sau khi chuẩn hoá bởi T_s ta có thể viết:

$$y(n) - y(n-1) = \frac{T_s}{2} \cdot \{-c_0[y(n) + y(n-1)] + [x(n) + x(n-1)]\} \quad (6.3.4.4)$$

Lấy biến đổi z hai vế của phương trình (6.3.4.4) ở trên ta có:

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T_s}{2} \{-c_0Y(z)(1 + z^{-1}) + X(z)(1 + z^{-1})\}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) + \frac{T_s}{2}c_0Y(z)(1 + z^{-1}) = \frac{T_s}{2}X(z)(1 + z^{-1})$$

Vậy:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0}$$

So sánh với biểu thức của $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{1}{s + c_0}$$

Ta có thể viết quan hệ giữa $H(z)$ và $H_a(s)$ như sau:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Tức là chúng ta có thể nhận được hàm truyền đạt của bộ lọc số từ bộ lọc tương tự nếu ta có biến đổi sau đây:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (6.3.4.5)$$

Biến đổi này được gọi là biến đổi song tuyến.

b) Ảnh của trục ảo

Từ quan hệ giữa z và s trong biểu thức (6.3.4.5) ta rút ra:

$$z = \frac{\frac{2}{T_s} + s}{\frac{2}{T_s} - s} \quad (6.3.4.6)$$

Trục ảo của mặt phẳng s ứng với $\sigma = 0$ tức là:

$$s = j\omega_a$$

vậy:

$$z = \frac{\frac{2}{T_s} + j\omega_a}{\frac{2}{T_s} - j\omega_a} = \frac{1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a}{1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a}$$

Biểu thức trên chính là thương số của hai số liên hợp phức, vậy:

$$\left| 1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| = \left| 1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right)^2}$$

$$\arg \left[1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right] = \arctg \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right)$$

$$\arg \left[1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right] = \arctg \left(-\frac{T_s}{2}\omega_a \right) = -\arctg \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right)$$

Dẫn đến:

$$z = \frac{\left| 1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| e^{j\arg \left[1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right]}}{\left| 1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| e^{j\arg \left[1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right]}}$$

$$z = e^{j2\arctg \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right)} \quad (6.3.4.7)$$

Biểu thức (6.3.4.7) ở trên chính là ảnh z của trục ảo.

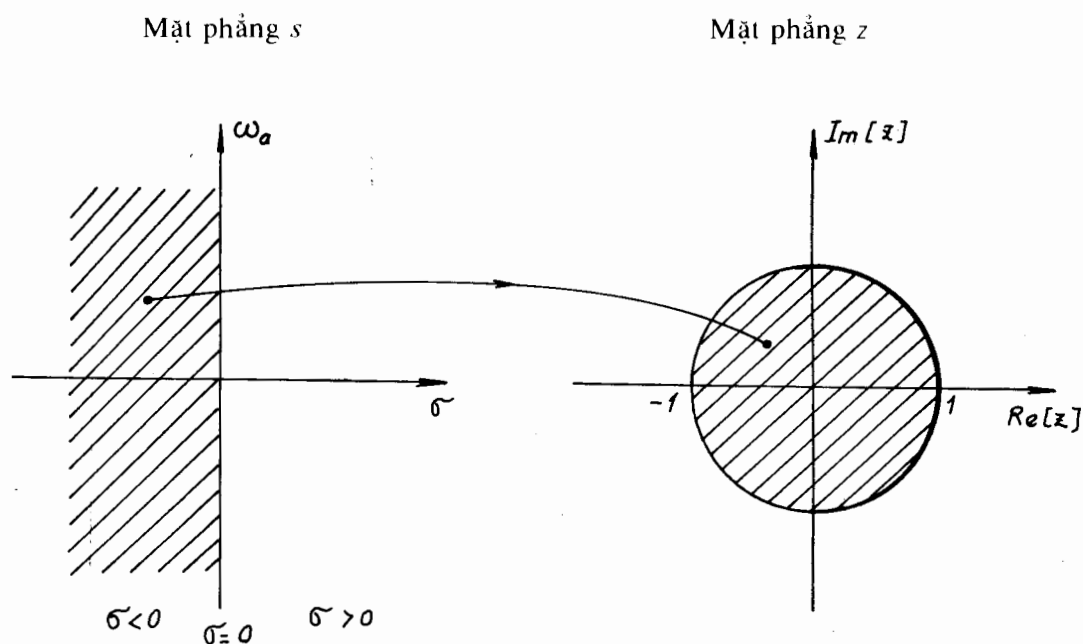
c) Sự ổn định

Theo biểu thức (6.3.4.7) ta thấy rằng $|z| = 1$. Vậy quan hệ này chứng tỏ rằng khi các giá trị của s nằm trên trục ảo sẽ tương ứng với giá trị của z trên vòng tròn đơn vị.

Thế thì nếu phần thực của s (σ) là âm sẽ dẫn đến môđul của z nhỏ hơn đơn vị. Như thế, nửa mặt phẳng bên trái của mặt phẳng s được ánh xạ vào trong vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z qua phép biến đổi song tuyến.

Từ đây ta có thể nói rằng phép biến đổi song tuyến thoả mãn điều kiện chuyển một bộ lọc tương tự ổn định sang một bộ lọc số ổn định.

Hình 6.3.4.2 sẽ minh hoạ phép ánh xạ nói trên.



Hình 6.3.4.2.

d) Sự tương ứng tần số

Phép biến đổi song tuyến đã dẫn đến một quan hệ phi tuyến đối với sự tương ứng tần số giữa mặt phẳng s và mặt phẳng z .

Từ biểu thức (6.3.4.7) ta thấy rằng:

$$z = e^{j2\omega \operatorname{tg}\left(\frac{T_s}{2}\omega_a\right)} = e^{j\omega}$$

Vậy:

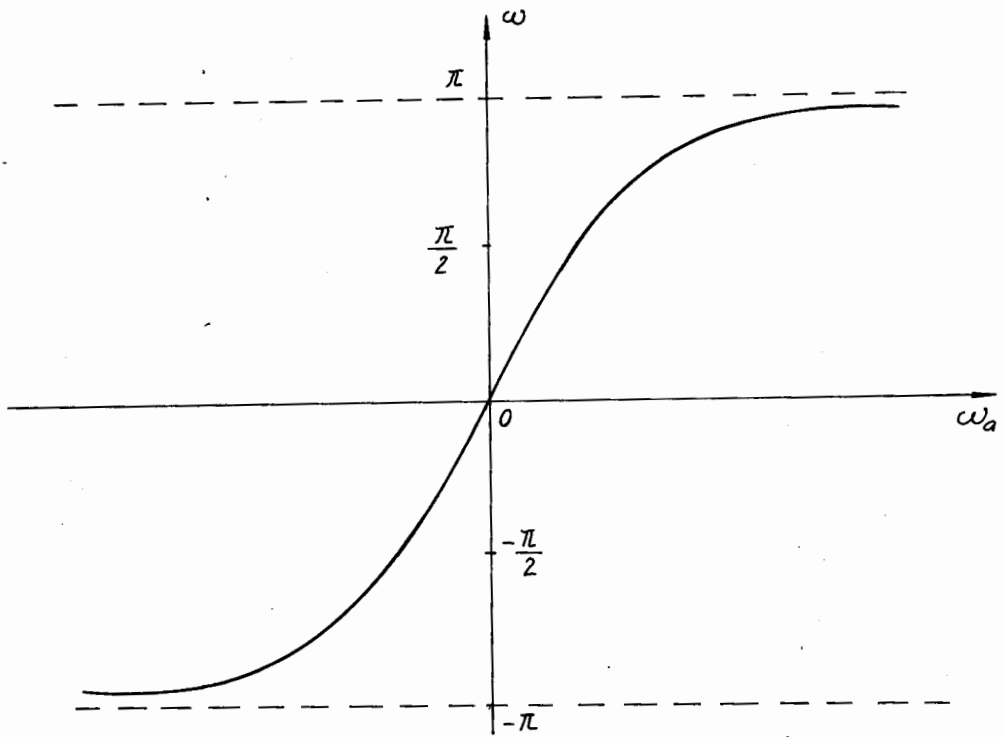
$$\omega = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{T_s}{2}\omega_a\right) \quad (6.3.4.8)$$

hoặc:

$$\omega_a = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (6.3.4.9)$$

Các quan hệ trên giữa các tần số ω và tần số ω_a là các quan hệ phi tuyến.

Hình 6.3.4.3 sẽ minh hoạ quan hệ phi tuyến (6.3.4.8).

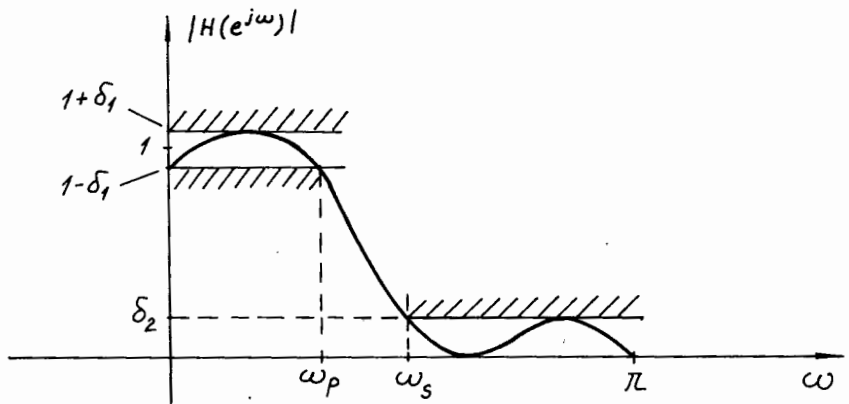


Hình 6.3.4.3.

Ví dụ 6.3.4.1

Chúng ta cần tổng hợp một bộ lọc số IIR có đáp ứng tần số cho trên hình 6.3.4.4 sau đây nhờ phương pháp biến đổi song tuyến.

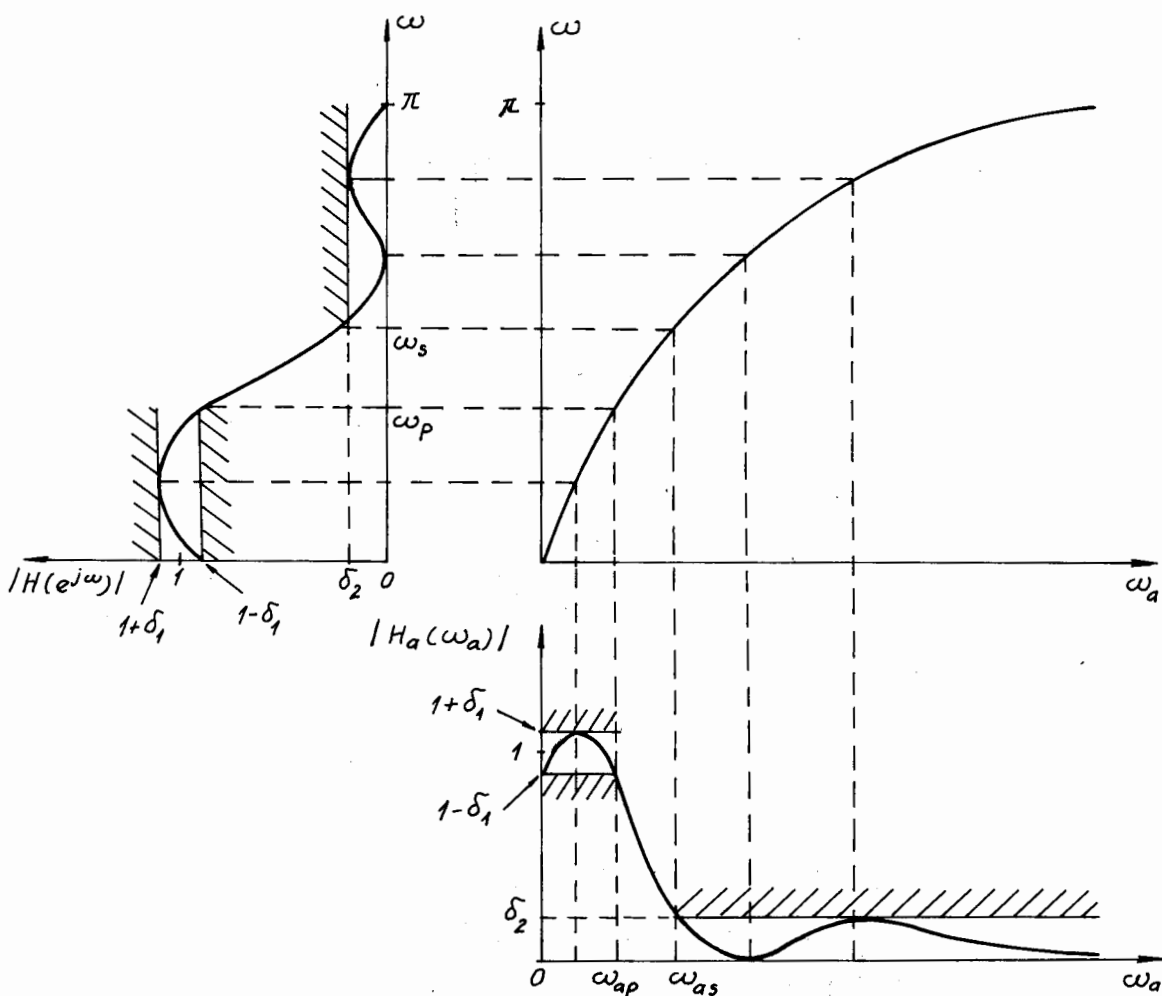
Hãy tìm đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng.



Hình 6.3.4.4.

Giải

Xét quan hệ giữa ω và ω_a trong biểu thức (6.3.4.8), cách tìm đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng được giải thích trên hình 6.3.4.5.



Hình 6.3.4.5.

Ví dụ 6.3.4.2

Cho hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{4}{(s-3)(s-5)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp biến đổi song tuyến
- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc

Giải

Áp dụng biểu thức (6.3.4.5) ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{4}{\left(\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - 3 \right) \left(\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - 5 \right)}$$

$$= \frac{4T_s^2(1+z^{-1})^2}{[2(1-z^{-1})-3T_s(1+z^{-1})][2(1-z^{-1})-5T_s(1+z^{-1})]}$$

$$= \frac{4T_s^2 + 8T_s^2 z^{-1} + 4T_s^2 z^{-2}}{(2-3T_s)(2-5T_s) - [(2+3T_s)(2-5T_s) + (2-3T_s)(2+5T_s)]z^{-1} - (2+3T_s)(2+5T_s)z^{-2}}$$

Đặt: $A = (2-3T_s)(2-5T_s)$

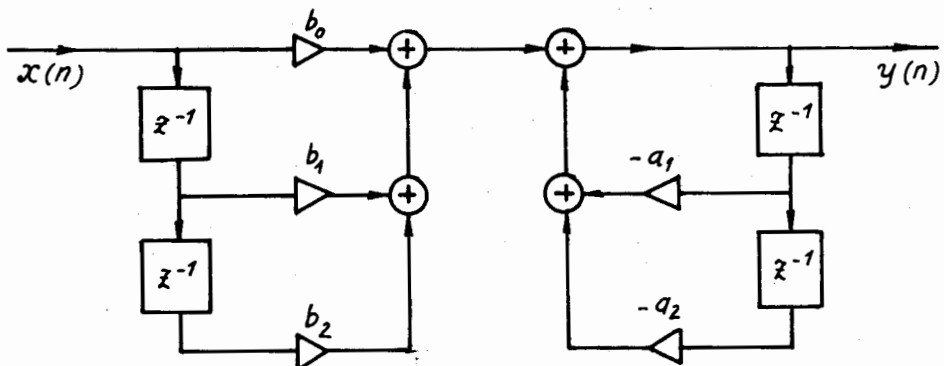
$$H(z) = \frac{\frac{4T_s^2}{A} + \frac{8T_s^2}{A}z^{-1} + \frac{4T_s^2}{A}z^{-2}}{1 - \frac{(2+3T_s)(2-5T_s) + (2-3T_s)(2+5T_s)}{A}z^{-1} - \frac{(2+3T_s)(2+5T_s)}{A}z^{-2}}$$

Đặt: $b_0 = \frac{4T_s^2}{A}; b_1 = \frac{8T_s^2}{A}; b_2 = \frac{4T_s^2}{A}; a_0 = 1$

$$a_1 = - \frac{(2+3T_s)(2-5T_s) + (2-3T_s)(2+5T_s)}{A}$$

$$a_2 = - \frac{(2+3T_s)(2+5T_s)}{A}$$

Sơ đồ của bộ lọc được cho trên hình 6.3.4.6.

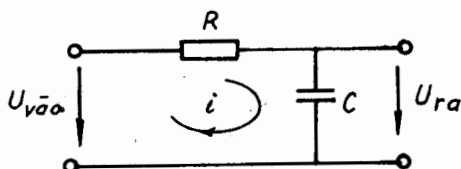


Hình 6.3.4.6.

Ví dụ 6.3.4.8

Cho mạch điện tương tự như trên hình 6.3.4.7 sau đây:

Hình 6.3.4.7.



Mạch điện trên hình 6.3.4.8 là mạch điều khiển bằng điện áp.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Trước tiên phải tính hàm truyền đạt điện áp $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{U_{ra}}{U_{vào}} = \frac{1}{RCs+1}$$

Áp dụng biểu thức 6.3.4.5 ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{RC \left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + 1} = \frac{T_s(1+z^{-1})}{2RC(1-z^{-1}) + T_s(1+z^{-1})} \\ &= \frac{T_s + T_s z^{-1}}{(2RC + T_s) + (T_s - 2RC)z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{T_s}{2RC + T_s} + \frac{T_s}{2RC + T_s} z^{-1}}{1 + \frac{T_s - 2RC}{2RC + T_s} z^{-1}} \end{aligned}$$

Đặt: $b_0 = \frac{T_s}{2RC + T_s} = b_1$

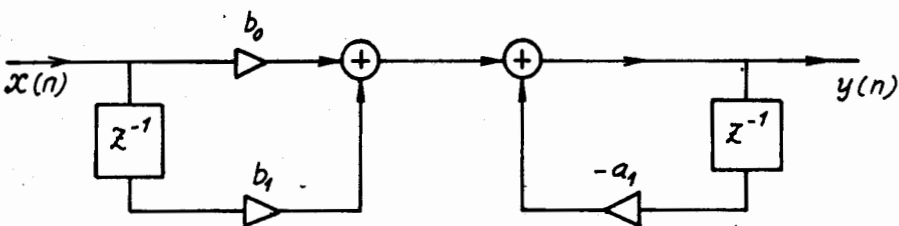
$$a_0 = 1; a_1 = \frac{T_s - 2RC}{2RC + T_s}$$

Ta có:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1] + (-a_1)y(n-1)$$

Từ đây ta có sơ đồ mạch số cho trên hình 6.3.4.8:



Hình 6.3.4.8.

6.3.5. PHƯƠNG PHÁP 3: PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG ĐƯƠNG VI PHÂN

a) Xác định sự tương đương

Chúng ta biết rằng một bộ lọc tương tự (hoặc một hệ thống tuyến tính bất biến nói chung) được đặc trưng bởi một phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng, còn một bộ lọc số IIR được đặc trưng bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Chính vì vậy chúng ta có thể thiết lập một sự tương ứng giữa vi phân và sai phân.

Sau đây chúng ta tiến hành xét chi tiết từ định nghĩa của vi phân và sai phân.

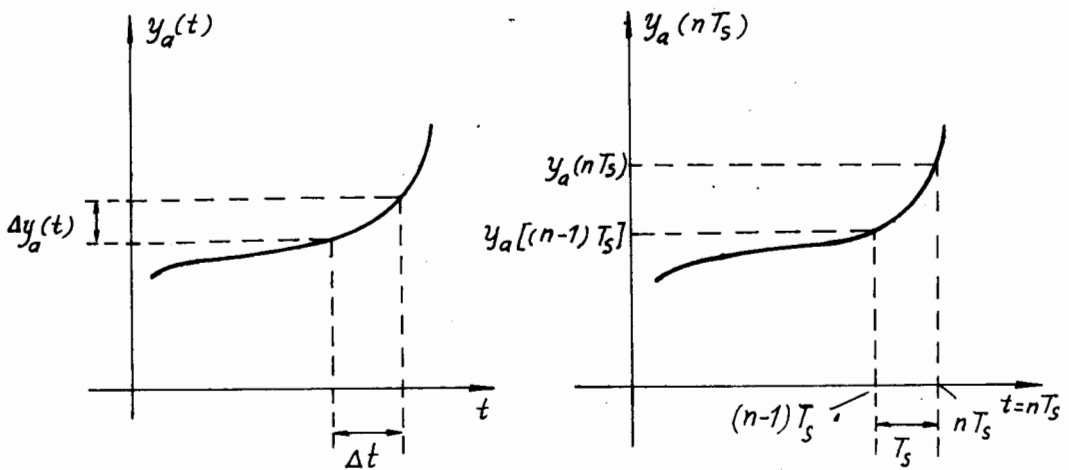
Đối với đạo hàm bậc nhất ta có:

$$\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt^{(1)}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y_a(t)}{\Delta t} \quad (6.3.5.1)$$

Nhưng ta cũng có:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow T_s} \frac{\Delta y_a(t)}{\Delta t} = \frac{y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s]}{T_s} \quad (6.3.5.2)$$

Hình 6.3.5.1 sẽ minh hoạ bản chất của biểu thức (6.3.5.1) và (6.3.5.2).



Hình 6.3.5.1.

• Để phân biệt rõ trường hợp tương tự và số ta ký hiệu hiện tại như sau:

$$y_a(nT_s) \rightarrow y(n)$$

$$y_a[(n-1)T_s] \rightarrow y(n-1)$$

Vậy chúng ta có thể thiết lập sự tương ứng trong hai trường hợp số và tương tự như trên bảng 6.3.5.1.

Phát triển đối với đạo hàm bậc k chúng ta cũng thiết lập được sự tương ứng cho trên bảng 6.3.5.2.

Bảng 6.3.5.1.

Tương tự	Số
$\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt}$	$\frac{y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s]}{T_s}$
$\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt} = D_a^{(1)}[y_a(t)]$	$\frac{y(n) - y(n-1)}{T_s} = D^{(1)}[y(n)]$
$LT\left[\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt}\right] = LT\{D_a^{(1)}[y_a(t)]\}$	$ZT\left[\frac{y(n) - y(n-1)}{T_s}\right] = ZT\{D^{(1)}[y(n)]\}$
$s.Y_a(s) = LT[D_a^{(1)}].Y_a(s)$	$\frac{1-z^{-1}}{T_s}.Y(z) = ZT[D^{(1)}].Y(z)$
$s = LT[D_a^{(1)}] = D_a^{(1)}(s)$	$\frac{1-z^{-1}}{T_s} = ZT[D^{(1)}] = D^{(1)}(z)$
$D_a^{(1)}$: toán tử đạo hàm	$D^{(1)}$: toán tử số vi sai

Bảng 6.3.5.2

Tương tự	Số
$D_a^{(k)}[y_a(t)] = D_a^{(1)}\{D_a^{(k-1)}[y_a(t)]\}$	$D^{(k)}[y(n)] = D^{(1)}\{D^{(k-1)}[y(n)]\}$
$s^k.Y_a(s) = LT\{D_a^{(k)}[y_a(t)]\}$	$\left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^k.Y(z) = ZT\{D^k[y(n)]\}$
$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M d_r \frac{dx_a(t)}{dt^r}$	$\sum_{k=0}^N c_k D^k[y(n)] = \sum_{r=0}^M d_r D^r[x(n)]$
$\sum_{k=0}^N c_k D_a^k[y_a(t)] = \sum_{r=0}^M d_r D_a^r[x_a(t)]$	$ZT\left\{\sum_{k=0}^N c_k D^k[y(n)]\right\} = ZT\left\{\sum_{r=0}^M d_r D^r[x(n)]\right\}$
$T\left\{\sum_{k=0}^N c_k D_a^k[y_a(t)]\right\} = LT\left\{\sum_{r=0}^M d_r D_a^r[x_a(t)]\right\}$	$\sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^k.Y(z) = \sum_{r=0}^M d_r \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^r.X(z)$
$\sum_{k=0}^N c_k s^k Y_a(s) = \sum_{r=0}^M d_r s^r X_a(s)$	$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M d_r \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^r}{\sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^k}$
$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$	

Từ bảng 6.3.5.1 và 6.3.5.2 ta có thể rút ra kết luận một cách rõ ràng rằng hàm truyền đạt của bộ lọc số IIR có thể nhận được trực tiếp từ hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự bằng cách đổi biến số theo công thức sau đây:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T_s} \quad (6.3.5.3)$$

Chúng ta cũng nhận thấy rằng quan hệ (6.3.5.3) ở trên chính là ánh xạ của mặt phẳng s vào mặt phẳng z .

b) Ánh của trục ảo

Bây giờ chúng ta tìm z theo hàm của s :

$$z = \frac{1}{1-sT_s} \quad (6.3.5.4)$$

mà $s = \sigma + j\omega_a$, vậy $s = j\omega_a$ ($\sigma = 0$) sẽ tương ứng với trục ảo, thay vào (6.3.5.4) ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1-j\omega_a T_s} = \frac{1+j\omega_a T_s}{1+\omega_a^2 T_s^2} \\ &= \frac{1}{1+\omega_a^2 T_s^2} + j \frac{\omega_a T_s}{1+\omega_a^2 T_s^2} \\ &= Re[z] + jIm[z] \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{Re^2[z] + Im^2[z]} = \sqrt{\frac{1}{1+\omega_a^2 T_s^2}} \\ arg[z] &= arctg \frac{Im[z]}{Re[z]} = arctg(\omega_a T_s) \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$Re[z] = \frac{1}{1+\omega_a^2 T_s^2} = |z|^2$$

mà $|z|^2 = Re^2[z] + Im^2[z]$

Thế thì:

$$Re^2[z] + Im^2[z] - Re[z] = 0$$

Chú ý rằng:

ω_a^2 luôn luôn dương,

T_s^2 luôn luôn dương,

dẫn đến $Re[z]$ luôn luôn dương.

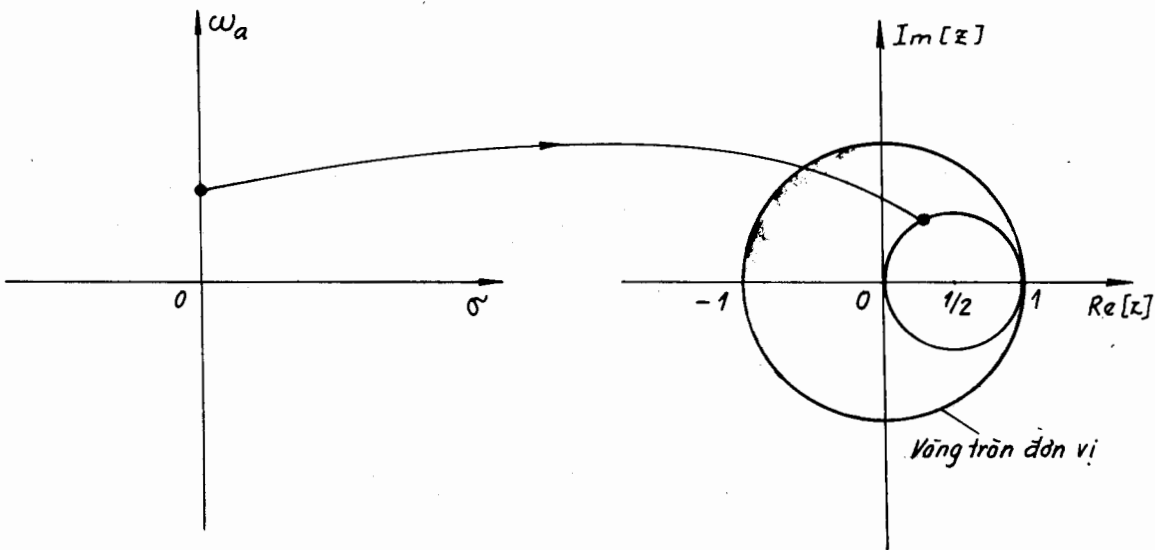
Biến đổi tiếp ta có:

$$Re^2[z] - Re[z] + \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (Im)^2[z] = 0$$

$$\left(Re[z] - \frac{1}{2}\right)^2 + (Im)^2[z] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (6.3.5.5)$$

Rõ ràng là phương trình (6.3.5.5) là phương trình của một đường tròn có bán kính bằng $\frac{1}{2}$, tâm nằm ở điểm thực $\frac{1}{2}$ trong mặt phẳng z . Đường tròn này chính là ảnh của trục ảo ($s = j\omega_a$) trong mặt phẳng z . Như vậy ảnh của trục ảo ($s = j\omega_a$) không phải là vòng tròn đơn vị $|z| = 1$ như trong trường hợp của phương pháp biến đổi song tuyến.

Hình 6.3.5.2 sẽ minh họa trục ảo trong mặt phẳng s ($s = j\omega_a$) và ảnh của nó trong mặt phẳng z .



Hình 6.3.5.2.

c) Độ ổn định

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm điều kiện ổn định đối với phương pháp tương đương vì phân này.

Theo biểu thức 6.3.5.4 ta có:

$$z = \frac{1}{1 - sT_s}$$

thay $s = \sigma + j\omega_a$, vào ta có:

$$z = \frac{1}{1 - \sigma T_s - j\omega_a T_s}$$

$$\Rightarrow z = \text{Re}[z] + j\text{Im}[z]$$

$$\text{Re}[z] = \frac{1 - \sigma T_s}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}$$

$$\text{Im}[z] = \frac{\omega_a T_s}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}}$$

Nếu bộ lọc tương tự là ổn định thì $\sigma < 0$ (các điểm cực $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s), dẫn đến $\sigma T_s < 0$ và $(1 - \sigma T_s)^2 > 1$ vậy thì với bất kỳ giá trị nào của $(\omega_a T_s)^2$ ta luôn luôn có:

$$(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2 > 1$$

dẫn đến:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}} < 1$$

Từ đây ta có thể nói rằng nếu các điểm cực của $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s thì ánh xạ của nó vào mặt phẳng z sẽ nằm bên trong vòng tròn đơn vị. Như vậy từ một bộ lọc tương tự ổn định sẽ biến đổi thành một bộ lọc số ổn định tương ứng bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bây giờ chúng ta xét chi tiết hơn nữa bên trái mặt phẳng s sẽ ánh xạ vào đâu trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z .

Ta có thể viết:

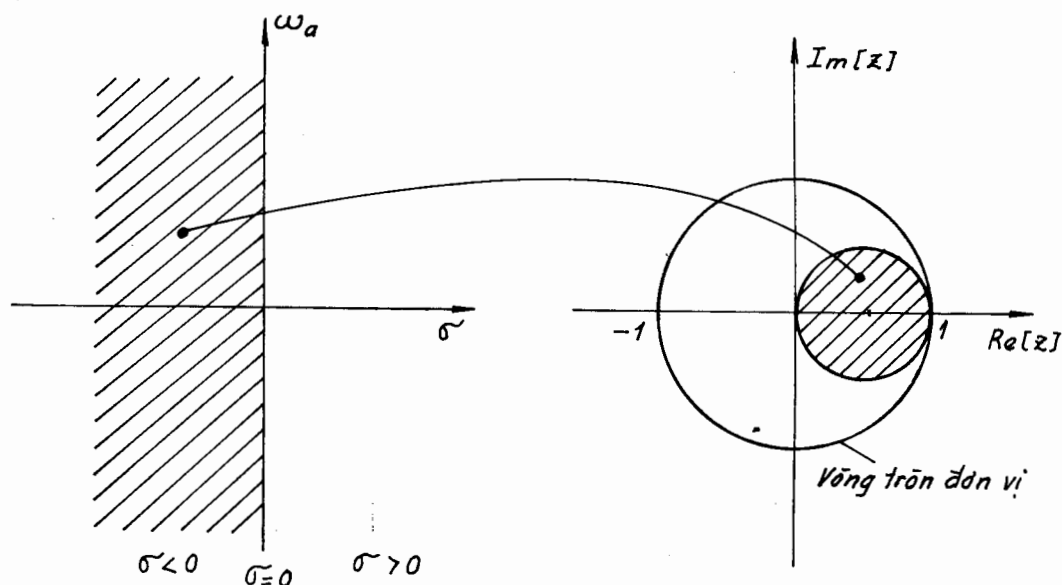
$$|z|_{\sigma < 0} = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}}; \quad |z|_{\sigma < 0} < 1$$

$$|z|_{\sigma = 0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_a T_s)^2}}; \quad |z|_{\sigma = 0} < 1$$

nhưng $\sigma T_s < 0$ nếu bộ lọc tương tự là ổn định.

Vậy: $|z|_{\sigma = 0} > |z|_{\sigma < 0}$ bởi vì $(1 - \sigma T_s)^2 > 1$.

Vậy ta có thể nói rằng nửa bên trái mặt phẳng s được ánh xạ vào bên trong vòng tròn bán kính $\frac{1}{2}$, tâm nằm ở điểm thực $z = \frac{1}{2}$ trong mặt phẳng z . Sự tương ứng này được minh hoạ trên hình 6.3.5.3.



Hình 6.3.5.3.

Ví dụ 6.3.5.1

Giả sử có một bộ lọc tương tự, hàm truyền đạt của nó có dạng sau đây:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp tương đương vi sai.

- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc.

Giải

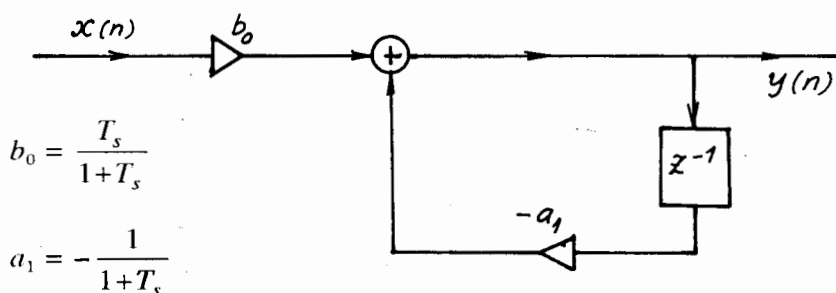
Áp dụng biểu thức (6.3.5.3) ta có $H(z)$ như sau:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T_s}} \\ &= \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T_s} + 1} = \frac{T_s}{(1+T_s) - z^{-1}} = \frac{T_s z}{(1+T_s)z - 1} \end{aligned}$$

Vậy:

$$H(z) \text{ có một điểm cực tại } \frac{1}{1+T_s}.$$

Sơ đồ của bộ lọc IIR này có dạng như trên hình vẽ 6.3.5.4.



Hình 6.3.5.4.

6.3.6. PHƯƠNG PHÁP 4: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI Z THÍCH ỨNG

Phương pháp này được sao chụp lại nội dung của phương pháp 1 (phương pháp bất biến xung), tức là chuyển đổi trực tiếp các điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H_a(s)$ trong mặt phẳng s thành các điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt của bộ lọc số $H(z)$ trong mặt phẳng z .

Giả sử rằng hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự có dạng sau đây:

$$H_a(s) = C \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (s - s_{or})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})} \quad (6.3.6.1)$$

ở đây:

s_{or} là các điểm không của bộ lọc tương tự,

s_{pk} là các điểm cực của bộ lọc tương tự.

Thì chúng ta thu được hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số dưới dạng sau đây:

$$H(z) = C \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (1 - e^{s_{or}T_s} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{s_{pk}T_s} z^{-1})} \quad (6.3.6.2)$$

ở đây T_s là chu kỳ lấy mẫu.

Theo (6.3.6.1) và (6.3.6.2) ta thấy rằng mỗi phân tử $(s - a)$ trong $H_a(s)$ được ánh xạ thành phân tử $(1 - e^{s_{pk}T_s} z^{-1})$. Đó là nội dung của phương pháp biến đổi z thích ứng.

Qua phương pháp này ta thấy rằng việc ánh xạ các điểm cực giống như trong phương pháp bất biến xung. Còn sự khác nhau giữa phương pháp biến đổi z thích ứng và phương pháp bất biến xung là việc ánh xạ các điểm không.

Để đảm bảo đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự không bị biến dạng thì chu kỳ lấy mẫu T_s phải được chọn sao cho có thể nhận được vị trí các điểm cực và điểm không tương đương trong mặt phẳng z . Sự sai lệch này có thể được giảm đi khi ta chọn chu kỳ lấy mẫu T_s đủ nhỏ.

Ví dụ 6.3.6.1

Cho hàm truyền đạt của một hệ thống tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống số tương ứng bằng phương pháp biến đổi z thích ứng.

- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống số này.

Giải

Áp dụng biểu thức (6.3.6.2) ta có biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1-z^{-1})(1-e^{-1T_s}z^{-1})}{(1-e^{-2T_s}z^{-1})(1-e^{-3T_s}z^{-1})} \\ &= \frac{1-e^{-T_s}z^{-1}-z^{-1}+e^{-T_s}z^{-2}}{1-e^{-3T_s}z^{-1}-e^{-2T_s}z^{-1}+e^{-5T_s}z^{-2}} \\ &= \frac{1-(e^{-T_s}+1)z^{-1}+e^{-T_s}z^{-2}}{1-(e^{-3T_s}+e^{-2T_s})z^{-1}+e^{-5T_s}z^{-2}} \end{aligned}$$

Đặt:

$$b_0 = 1 \quad a_1 = -e^{-3T_s} + e^{-2T_s}$$

$$b_1 = -e^{-T_s} + 1 \quad a_2 = -e^{-5T_s}$$

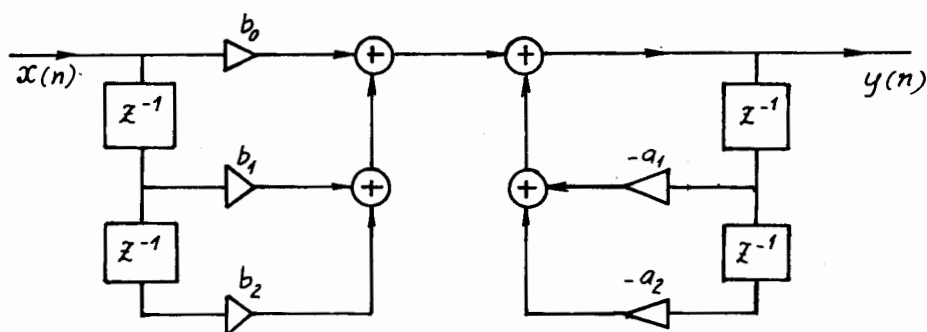
$$b_2 = e^{-T_s}$$

Vậy ta có:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + (-a_1)y(n-1) + (-a_2)y(n-2)$$

Từ đây có thể vẽ được sơ đồ hệ thống số IIR như trên hình 6.3.6.1.



Hình 6.3.6.1.

6.4. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

6.4.1. TỔNG QUAN VỀ CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

Chúng ta biết rằng một bộ lọc tương tự được xác định bởi hàm truyền đạt của chúng như sau:

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)}$$

6.4.2. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ BUTTERWORTH

a) Định nghĩa

Bộ lọc tương tự Butterworth có đặc điểm là ở gốc tọa độ ($\omega_a = 0$) độ bằng phẳng đạt cực đại, tức là:

$$L(\omega_a^2) = B_0 + B_1 \omega_a^2 + B_2 \omega_a^4 + \dots + B_n \omega_a^{2n} \quad (6.4.2.1)$$

và:

$$\lim_{\omega_a^2 \rightarrow 0} L(\omega_a^2) = 1$$

Bây giờ chúng ta xác định biểu thức của $L(\omega_a^2)$ theo nghĩa độ bằng phẳng cực đại tại $\omega_a = 0$.

Cơ sở toán học như sau:

Chúng ta biết rằng chuỗi Taylor của hàm $L(x + x_0)$ như sau:

$$L(x + x_0) = L(x_0) + \frac{x}{1!} L'(x_0) + \frac{x^2}{2!} L''(x_0) + \dots + \frac{x^k}{k!} L^{(k)}(x_0) + \dots + \frac{x^n}{n!} L^{(n)}(x_0)$$

ở đây:

$$L'(x_0) = \left. \frac{dL(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad \text{và} \quad L^k(x_0) = \left. \frac{d^k L(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0}$$

Nếu $x_0 = 0$ chúng ta có chuỗi Maclaurin:

$$L(x) = L(0) + \frac{x}{1!} L'(0) + \frac{x^2}{2!} L''(0) + \dots + \frac{x^k}{k!} L^k(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} L^n(0)$$

Có khả năng là tại điểm $x_0 = 0$, chúng ta có thể có:

$$L(0) = 1$$

$$\text{và} \quad L^k(0) = 0 \quad \text{với} \quad k \leq n-1$$

So sánh $L(\omega_a^2)$ và $L(x)$ ta có:

$$x \equiv \omega_a^2$$

$$B_0 = L(0); B_1 = \frac{L'(0)}{1!}; \dots; B_n = \frac{L^n(0)}{n!}$$

$$\text{Nếu} \quad L(0) = 1$$

$$\text{và} \quad L^k(0) = 0 \quad \text{với} \quad k \leq n-1$$

$$\text{thì: } B_0 = 1 \text{ và } B_1 = B_2 = \dots = B_{n-1} = 0.$$

Từ đây ta có:

$$L(\omega_a^2) = 1 + B_n \omega_a^{2n}$$

Thường chúng ta chuẩn hoá theo tần số cắt ω_{ac} , lúc đó chúng ta có:

$$L(1) = 2 \text{ tại tần số cắt chuẩn hoá } (\omega_{ac} = 1)$$

như vậy thì:

$$B_n = 1$$

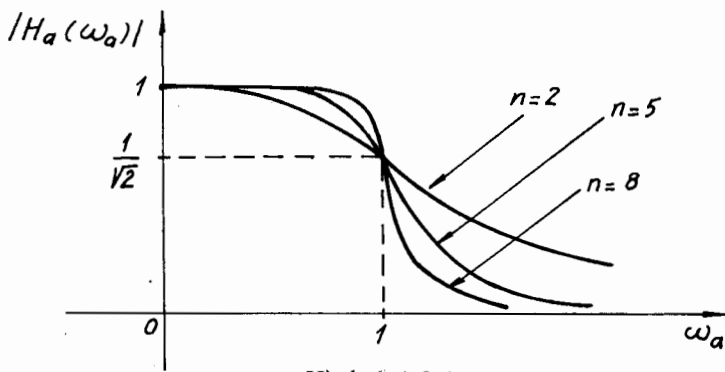
$$\text{và} \quad L(\omega_a^2) = 1 + \omega_a^{2n} = \frac{1}{|H_a(\omega_a)|^2}$$

Từ đây chúng ta có được đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp Butterworth chuẩn hoá như sau:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_a^{2n}}} \quad (6.4.2.2)$$

ở đây n gọi là bậc của bộ lọc.

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ cho trên hình 6.4.2.1.



Hình 6.4.2.1.

Nhận xét

- Bậc của bộ lọc n càng tăng thì bộ lọc càng gần với bộ lọc lý tưởng.
- Đáp ứng biên độ luôn bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ở tần số cắt với mọi giá trị của n .

b) Vị trí của các điểm cực

Chúng ta biết rằng với $s = j\omega_a$ thì $\omega_a = \frac{s}{j}$; như thế $\omega_a^2 = -s^2$, vậy ta có thể viết:

$$L(-s^2) = 1 + (-s^2)^n = \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)}$$

Tức là:

$$L(\omega_a^2) = L(-s^2) \Big|_{s=j\omega_a}$$

Từ đây ta có:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad (6.4.2.4)$$

Biểu diễn $H_a(s).H_a(-s)$ dưới dạng các điểm cực ta có:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{A}{\prod_{k=1}^{2n} (s - s_{pk})} \quad (6.4.2.5)$$

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm các điểm cực s_{pk} của hàm $H_a(s).H_a(-s)$:

Từ biểu thức (6.4.2.4) ta có:

$$1 + (-s_{pk}^2)^n = 0$$

$$1 + (-1)^n s_{pk}^{2n} = 0$$

Vậy:

$$n \text{ chẵn ta có: } 1 + s_{pk}^{2n} = 0 \Rightarrow s_{pk}^{2n} = -1 = e^{j(2k-1)\pi}$$

$$n \text{ lẻ ta có: } 1 - s_{pk}^{2n} = 0 \Rightarrow s_{pk}^{2n} = 1 = e^{j2(k-1)\pi}$$

Cuối cùng ta có các nghiệm với n chẵn và lẻ như sau:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ chẵn: } s_{pk} = e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n \\ n \text{ lẻ: } s_{pk} = e^{j\frac{(k-1)\pi}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n \end{array} \right\} \quad (6.4.2.6)$$

Ví dụ 6.4.2.1

Hãy xác định vị trí các điểm cực trên mặt phẳng s ứng với bậc của bộ lọc $n = 3$ và $n = 4$.

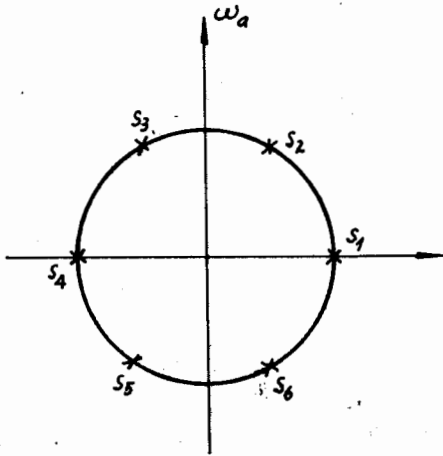
Giải

Theo các biểu thức (6.4.2.6) ta thấy rằng:

$$|s_{pk}| = 1$$

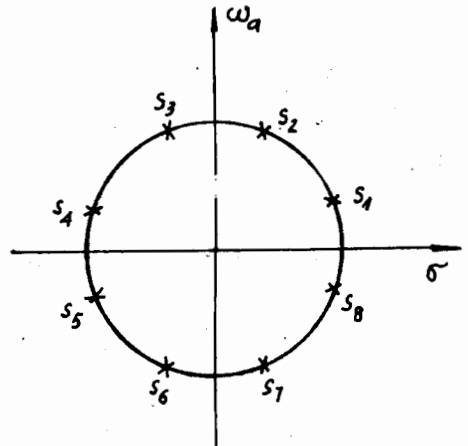
Vậy các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ sẽ nằm trên một vòng tròn trong mặt phẳng s . Vòng tròn này được gọi là vòng tròn Butterworth.

Phân bố vị trí các điểm cực trên vòng tròn Butterworth được cho trên hình 6.4.2.2.



s_{p3}, s_{p4}, s_{p5} là các điểm cực của $H_a(s)$

s_{p6}, s_{p1}, s_{p2} là các điểm cực của $H_a(-s)$



$s_{p3}, s_{p4}, s_{p5}, s_{p6}$ là các điểm cực của $H_a(s)$

$s_{p7}, s_{p8}, s_{p1}, s_{p2}$ là các điểm cực của $H_a(-s)$

Hình 6.4.2.2

Để đảm bảo hệ thống là ổn định thì các điểm cực của $H_a(s)$ phải nằm bên trái trục ảo. Vậy trong các điểm cực của $H_a(s)$, $H_a(-s)$ chúng ta chọn ra các điểm cực nằm bên trái trục ảo (xem hình 6.4.2.2) để làm các điểm cực của $H_a(s)$ đối với bộ lọc ổn định. Tức là các điểm cực của hàm truyền đạt của bộ lọc ổn định phải nằm bên trái trục ảo trong mặt phẳng s .

Vì thế chúng ta có thể viết:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} \quad (6.4.2.7)$$

ở đây:

+ Theo tần số chuẩn hoá $\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}$

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 1: \text{hằng số} \\ s_{pk} &= e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2.8a)$$

+ Theo tần số không chuẩn hoá

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \omega_{ac}^2 \\ s_{pk} &= \omega_{ac} e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2.8b)$$

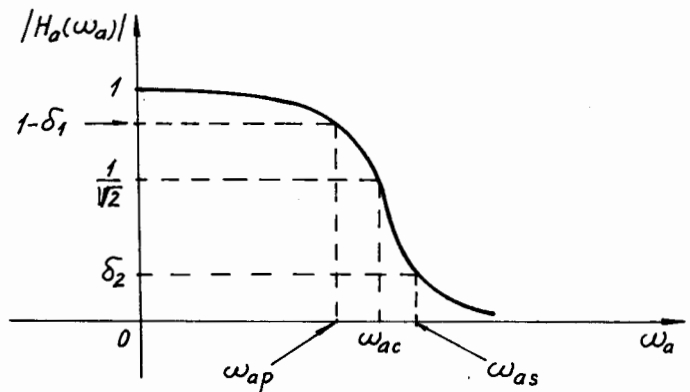
Nhận xét:

- ở tần số chuẩn hoá, các điểm cực s_{pk} sẽ nằm trên vòng tròn có bán kính $r = 1$ (tức là $|s_{pk}| = 1$).
- ở tần số không chuẩn hoá, các điểm cực s_{pk} sẽ nằm trên vòng tròn có bán kính $r = \omega_{ac}$ (ω_{ac} là tần số cắt không chuẩn hoá).

c) Tính toán bậc của bộ lọc

Chúng ta có thể tính toán bậc của bộ lọc sao cho bộ lọc thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho.

Dựa vào hình 6.4.2.3 chúng ta thiết lập trình tự tính toán bậc n của



Hình 6.4.2.3.

bộ lọc.

Theo hình 6.4.2.3 ta thấy rằng ở dải thông thì:

$$|H_a(\omega_a)| \geq 1 - \delta_1$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n}} &\geq (1 - \delta_1)^2 \\ \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\leq \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} \\ \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\leq \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \\ \Rightarrow \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\leq \lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right] \\ 2n \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right) &\leq \lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

Vậy ở dải thông ta có quan hệ sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)} \quad (6.4.2.9)$$

Tương tự theo hình 6.4.2.3 ở dải chặn ta có:

$$|H_a(\omega_a)| \leq \delta_2$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2n}} &\leq \delta_2^2 \\ \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\geq \frac{1}{\delta_2^2} \\ \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\geq \frac{1}{\delta_2^2} - 1 \end{aligned}$$

$$2n \lg \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right) \geq \lg \left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right]$$

Vậy ở dải chắn ta có quan hệ sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)} \quad (6.4.2.10)$$

Kết hợp hai quan hệ (6.4.2.9) và (6.4.2.10) ta rút ra được biểu thức tính bậc n của bộ lọc Butterworth như sau:

$$n \geq \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \omega_{as} - \lg \omega_{ap}} \quad (6.4.2.11)$$

Chú ý rằng n chỉ lấy giá trị nguyên.

Ví dụ 6.4.2.2

Hãy tìm hàm truyền đạt $H_a(s)$ và vị trí các điểm cực của $H_a(s)$ đối với bộ lọc tương tự Butterworth chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$), biết rằng bộ lọc tương tự này có bậc $n = 2$.

Giải

Ở đây $n = 2$; n là số chẵn.

Theo biểu thức (6.4.2.8) ta có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} s_{pk} &= e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2.2} \right)} = e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{4} \right)} \\ &= e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\pi \frac{2k-1}{4}}, \quad k = 1, 2 \\ \Rightarrow \quad s_{p1} &= e^{j\frac{3\pi}{4}}, \quad k = 1 \\ s_{p2} &= e^{j\frac{5\pi}{4}}, \quad k = 2 \end{aligned}$$

Theo biểu thức (6.4.2.7) ta có:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

ở đây $H_0 = 1$; $n = 2$ vậy ta có:

$$H_o(s) = \frac{1}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})} = \frac{1}{\left(s - e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(s - e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}$$

$$= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Xét vị trí các điểm cực: ở đây chúng ta có hai điểm cực s_{p1} và s_{p2} , hai điểm cực này nằm bên trái trục ảo của mặt phẳng s để đảm bảo cho hệ thống là ổn định. Hình 6.4.2.4 sẽ minh hoạ vị trí của s_{p1} và s_{p2} .

* Nhận xét về các điểm cực

Đối với n chẵn:

$$s_{p1} = s_{pn}^*, s_{p2} = s_{p(n-1)}^*, \dots,$$

$$s_{p2}^n = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}^*$$

hoặc là:

$$s_{p1}^* = s_{p,n}, s_{p2}^* = s_{p,(n-1)}, \dots, s_{p,\frac{n}{2}}^* = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Đối với n lẻ:

$$s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2^{n+1}-1}{2n} \right)} = e^{j\pi}$$

$$\Rightarrow s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = -1$$

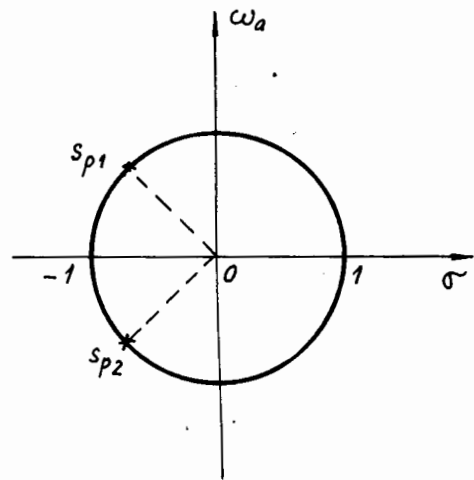
Với tần số không chuẩn hoá ta có:

$$s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \omega_{ac} e^{j\pi} = -\omega_{ac}$$

và ta có:

$$s_{p1} = s_{pn}^*, s_{p2} = s_{p(n-1)}^*, \dots, s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}^*$$

hoặc là:



Hình 6.4.2.4.

$$s_{p1}^* = s_{p,n}, s_{p2}^* = s_{p,n-1}, \dots, s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}^* = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}.$$

* Nhận xét về giá trị của H_0

Đối với n chẵn:

$$\begin{aligned} H_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (s_{pk}) = \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |s_{pk}|^2 \end{aligned}$$

Ở tần số chuẩn hoá ta có $|s_k| = 1$ vậy ta có giá trị của H_0 như sau:

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |1|^2 = 1 \quad (6.4.2.12)$$

Ở tần số không chuẩn hoá ta có $|s_k| = \omega_{ac}$, vậy ta có giá trị của H_0 như sau:

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (\omega_{ac})^2 = \omega_{ac}^n \quad (6.4.2.13)$$

Với n lẻ ta có:

$$\begin{aligned} H_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (s_{pk}) = - \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ &= - s_{p, \frac{n+1}{2}}^{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |s_{pk}|^2 \end{aligned}$$

Ở tần số chuẩn hoá ta có $|s_k| = 1$ và $s_{p, \frac{n+1}{2}} = -1$, vậy ta có giá trị của H_0 như

sau:

$$H_0 = - s_{p, \frac{n+1}{2}}^{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |s_{pk}|^2 = - (-1) \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |1|^2 = 1 \quad (6.4.2.14)$$

Ở tần số không chuẩn hoá ta có $|s_{pk}| = \omega_{ac}$, $s_{p, \frac{n+1}{2}} = -\omega_{ac}$ vậy ta có giá trị của

H_0 như sau:

$$H_0 = - s_{p, \frac{n+1}{2}}^{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |s_{pk}|^2 = - (-\omega_{ac}) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |\omega_{ac}|^2 = \omega_{ac}^n \quad (6.4.2.15)$$

d) Tính tần số cắt ω_{ac}

Phân trên ta đã có:

$$1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} \leq (1 - \delta_1)^{-2}$$

Ta sử dụng dấu bằng để tính ω_{ac} :

$$\left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} = (1 - \delta_1)^{-2} - 1$$

$$\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} = \left[(1 - \delta_1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}}$$

$$\Rightarrow \omega_{ac} = \frac{\omega_{ap}}{\left[(1 - \delta_1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}}} \quad (6.4.2.16)$$

* Nhận xét về hàm truyền đạt $H_a(s)$

Với n chẵn:

ở tần số chuẩn hoá:

$$H_0 = 1$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[s^2 + 2 \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + 1 \right]} \quad (6.4.2.17)$$

ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_0 = \omega_{ac}^n$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.18)$$

Với n lẻ:

ở tần số chuẩn hoá:

$$H_0 = 1; s_{\frac{n+1}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} \left[s^2 + 2 \sin\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right) s + 1 \right]} \quad (6.4.2.19)$$

ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_0 = \omega_{ac}^n; s_{p, \frac{n+1}{2}} = -\omega_{ac}$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{(s + \omega_{ac})} \cdot \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{n-1} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.20)$$

Ví dụ 6.4.2.3.

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \quad \text{ở dải thông}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ở dải chắn}$$

$$\omega_p = 0,1\pi; \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Chúng ta có bốn bước chính để tổng hợp bộ lọc số từ bộ lọc tương tự.

Bước 1. Như đầu bài đã cho ta có 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \quad \text{ở dải thông}$$

$$\Rightarrow (1 - \delta_1) = \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}}$$

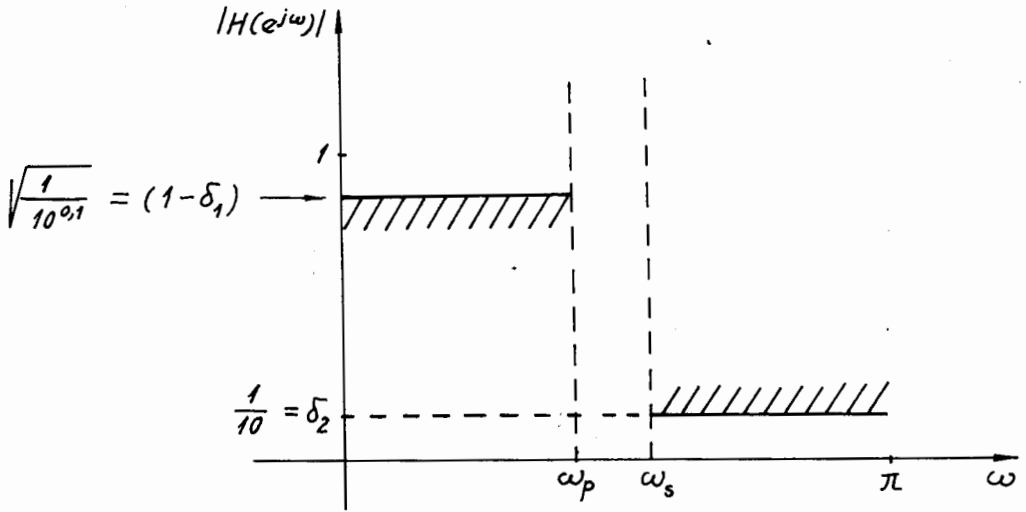
$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ở dải chắn}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{1}{10}$$

$$\omega_p = 0,1\pi \approx 0,3141593$$

$$\omega_s = 0,2\pi \approx 0,6283185$$

Minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc số trên hình 6.4.2.5.



Hình 6.4.2.5.

Bước 2.

Xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số tương ứng theo phương pháp biến đổi song tuyến.

$$|H_d(\omega_a)| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \quad \text{ở dải thông}$$

$$|H_d(\omega_a)| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ở dải chắn}$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \lg\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

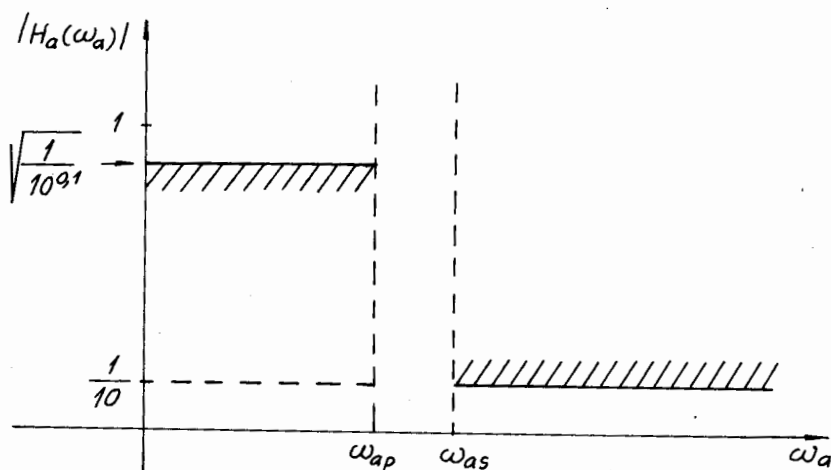
$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \lg\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

Nếu chúng ta chuẩn hoá ω_{ap} và ω_{as} bằng tần số lấy mẫu F_s thì các giá trị của ω_{ap} và ω_{as} sẽ được tính như sau:

$$\omega_{ap} = 2 \lg\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) \approx 0,3167689$$

$$\omega_{as} = 2 \lg\left(\frac{0,2\pi}{2}\right) \approx 0,3167689$$

Minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự trên hình 6.4.2.6.



Hình 6.4.2.6.

Bước 3

Tổng hợp bộ lọc tương tự Butterworth.

Trước hết tìm bậc của bộ lọc n , áp dụng công thức sau:

$$n = \frac{\lg \frac{\left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right)}{(1 - \delta_1)^2} - 1}{2 \lg \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}} \approx \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}}$$

$$n = \frac{\lg \frac{10^2 - 1}{10^{0,1} - 1}}{2 \lg \left(\frac{0,6498394}{0,3167689} \right)} \approx 4,1377164$$

Vậy ta chọn $n = 5$.

* Tính toán tần số

Để tính toán tần số cắt với $n = 5$, chúng ta có thể chọn sao cho tôn trọng một cách chính xác các chỉ tiêu kỹ thuật đặt ra trong dải thông ở tần số cắt ω_w , cụ thể như sau:

với $n = 5 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} \right)^{2n} = 10^{0,1}$

$$\text{mà} \quad \omega_{ap} = 2tg\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) \approx 0,3167689$$

$$\text{Vậy } \omega_{ac} = \frac{1}{(10^{0,1} - 1)^{\frac{1}{10}}} \cdot 0,3167689 \approx 0,3626207$$

* Tính toán các cực của $H_0(s)$ và $H_d(s)$

$$H_0 = (\omega_{ac})^n = (0,3626207)^5 = 0,0062699$$

$$s_{pk} = \omega_{ac} e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)}$$

$$= 0,3626207 \cdot e^{j\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)\pi}$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad s_{p1} = 0,3626207 \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right)}$$

$$= 0,3626207 \cdot e^{j\frac{3\pi}{5}}$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad s_{p2} = 0,3626207 \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right)}$$

$$= 0,3626207 \cdot e^{j\frac{4\pi}{5}}$$

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad s_{p3} = 0,3626207 \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{10}\right)}$$

$$= -0,3626207$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad s_{p4} = s_{p2}^*$$

$$k = 5 \quad \Rightarrow \quad s_{p5} = s_{p1}^*$$

Ở đây $n = 5$ là số lẻ, ở tần số không chuẩn hoá (bởi ω_{ac}) ta áp dụng công thức (6.4.2.19):

$$\begin{aligned} H_d(s) &= \frac{1}{(s + \omega_{ac})^5} \cdot \frac{\omega_{ac}^5}{\prod_{k=1}^2 \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin\left(\frac{2k-1}{10}\pi\right) \cdot s + \omega_{ac}^2 \right]} \\ &= \frac{1}{s + 0,3626207} \cdot \frac{0,0062699}{(s^2 + 0,2241119s + 0,1314938)(s^2 + 0,5867326s + 0,1314938)} \end{aligned}$$

Bước 4

Chuyển $H_d(s)$ thành $H(z)$ bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Cần chú ý rằng các tần số tương tự của bộ lọc tương tự đã được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s , vậy trong phương pháp biến đổi song tuyến ta cũng chuẩn hoá biến s bởi tần số lấy mẫu F_s như sau:

- không chuẩn hoá bởi F_s : $s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

- chuẩn hoá bởi F_s : $s = 2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Vậy ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,3626207\right)} \cdot \frac{0,0062699}{\left[\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,224119 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,1314938\right]}$$

$$\cdot \frac{1}{\left[\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,586326 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,1314938\right]}$$

Sau khi tính toán ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0,6930352z^{-1})} \cdot \frac{0,0001092 \cdot (1+z^{-1})^5}{(1 - 1,6894082z^{-1} + 0,8042417z^{-2})(1 - 1,4584491z^{-1} + 0,557569z^{-2})}$$

6.4.3. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ CHEBYSHEV

a) Mở đầu

Chúng ta đã biết rằng, đối với bộ lọc tương tự Butterworth, đáp ứng biên độ giảm đơn điệu cả ở dải thông và dải chắn. Chính vì vậy gần đúng Butterworth không cho ta kết quả tốt, tức là với cùng một chỉ tiêu kỹ thuật đã cho thì bậc của bộ lọc tương tự Butterworth sẽ lớn.

Để giảm bậc của bộ lọc tương tự, chúng ta sẽ sử dụng một gần đúng khác, đó là gần đúng Chebyshev, gần đúng này sẽ cho ta kết quả tốt hơn. Gần đúng Chebyshev có hai loại: loại 1 và loại 2.

Gần đúng Chebyshev loại 1: Đáp ứng biên độ gợn sóng ở dải thông và dải chắn (tương ứng ta gọi là bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1).

Gần đúng Chebyshev loại 2: Đáp ứng biên độ giảm đơn điệu ở dải thông và gợn sóng ở dải chắn (tương ứng ta gọi là bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2).

Để đặt cơ sở toán học cho gần đúng Chebyshev, chúng ta phải nghiên cứu đa thức Chebyshev.

b) Đa thức Chebyshev

Các đa thức Chebyshev được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} T_n(x) = \cos n\theta \\ x = \cos \theta \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (|x| \leq 1) \quad (6.4.3.1)$$

Xuất phát từ công thức lượng giác sau đây:

$$\underbrace{\cos[(n+1)\theta]}_{T_{n+1}(x)} + \underbrace{\cos[(n-1)\theta]}_{T_{n-1}(x)} = 2 \underbrace{\cos \theta}_x \underbrace{\cos n\theta}_{T_n(x)}$$

Ta có quan hệ:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

hoặc quan hệ:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (6.4.3.2)$$

Quan hệ (6.4.3.2) ở trên cho phép chúng ta biểu diễn đa thức Chebyshev $T_n(x)$ theo x bắt đầu từ hai đa thức đầu tiên $T_0(x)$ và $T_1(x)$ như sau:

$$n = 0 \Rightarrow T_0(x) = \cos(0 \cdot \theta) = \cos 0 = 1 \Rightarrow T_0(x) = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(1 \cdot \theta) = \cos \theta = x \Rightarrow T_1(x) = x$$

$$n = 2 \Rightarrow T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) \Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1 = 2^1x^2 - x^0$$

$$\begin{aligned} n = 3 \Rightarrow T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x \\ &= 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x = 2^2x^3 - 3x^1 \end{aligned}$$

.....

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left[x^n - \frac{n}{1/2^2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2/2^4} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3/2^6} x^{n-6} + \dots \right] \quad (6.4.3.3)$$

Ngược lại chúng ta cũng có thể biến x có số mũ bất kỳ dưới dạng đa thức Chebyshev như sau:

$$1 = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}[1 + T_2(x)] = \frac{1}{2}[T_0(x) + T_2(x)]$$

$$x^3 = \frac{1}{4}[3x + T_3(x)] = \frac{1}{4}[3T_1(x) + T_3(x)]$$

$$x^4 = \frac{1}{8} [3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)]$$

$$x^5 = \frac{1}{16} [10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)]$$

.....

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{k} T_{n-2k}(x) \quad (6.4.3.4)$$

ở đây:

$\left[\frac{n}{2}\right]$: phần nguyên của $\frac{n}{2}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Σ' : nghĩa là nếu tồn tại từ $T_0(x)$ thì từ này sẽ được chia hai (có nghĩa là $\frac{T_0(x)}{2}$).

Ví dụ 6.4.3.1

Hãy viết biểu thức của $T_3(x)$ và $T_4(x)$, sau đó vẽ đồ thị $T_3(x)$ và $T_4(x)$.

Giải

Theo biểu thức (6.4.3.3) ta có:

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 2^{4-1} \left[x^4 - \frac{4}{1!2^2} x^{4-2} + \frac{4(4-3)}{2!2^4} x^{4-4} \right] = 2^3 \left[x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right] \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

Đồ thị của $T_3(x)$ và $T_4(x)$ được vẽ trên hình 6.4.3.1.

Nhận xét

$$+) x = \cos \theta \Rightarrow |x| \leq 1$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos x \Rightarrow T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \quad |x| \leq 1$$

+) Nếu x nằm ngoài khoảng $(-1, +1)$: $|x| > 1$ thì θ sẽ là số phức: $\theta \rightarrow j\theta$

$$\Rightarrow \arccos x = j\theta$$

$$\text{hoặc là: } x = \cos j\theta = \frac{1}{2}(e^{j(j\theta)} + e^{-j(j\theta)}) = \frac{1}{2}(e^{-\theta} + e^{\theta}) = \cosh \theta$$

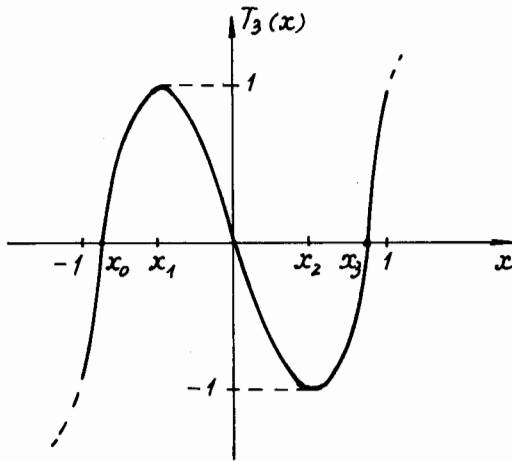
⇒ Vậy nếu $|x| > 1$ ta có:

$$x = \cosh \theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arccosh} x$$

$$\arccos x = j\theta = j\operatorname{arccosh} x$$

$$\Rightarrow T_n(x) = \cos(nj\theta) = \frac{1}{2}(e^{j(nj\theta)} + e^{-j(nj\theta)}) = \frac{1}{2}(e^{-n\theta} + e^{n\theta}) = \cosh(n\theta)$$

$$\Rightarrow T_n(x) = \cosh(n\operatorname{arccosh} \theta) \quad |x| > 1 \quad (6.4.3.5)$$

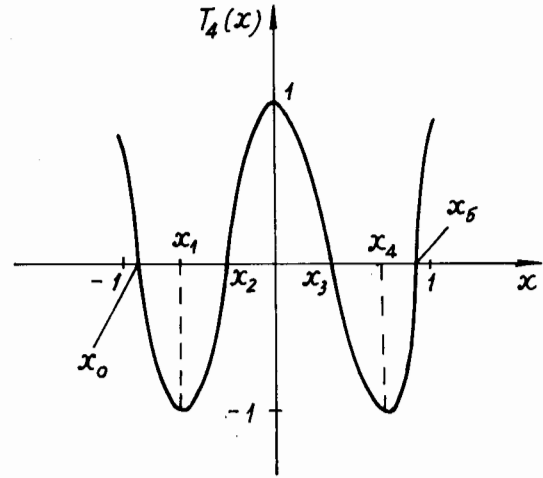


$$x_0 = -0,866$$

$$x_1 = -0,5$$

$$x_2 = 0,5$$

$$x_3 = 0,866$$



$$x_0 = -0,923$$

$$x_1 = -0,7$$

$$x_2 = -0,387$$

$$x_3 = 0,387$$

$$x_4 = 0,7$$

$$x_5 = 0,923$$

Hình 6.4.3.1.

c) Bộ lọc tương tự Chebyshev loại I

Định nghĩa

Bộ lọc tương tự Chebyshev loại I là bộ lọc có đáp ứng biên độ gợn sóng ở dải thông và giảm đơn điệu ở dải chắn.

Tức là về toán học ta có:

$$L(\omega_a^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_a) \quad (6.4.3.6)$$

ở đây:

ε là một tham số,

ω_a là tần số chuẩn hoá.

Vậy chúng ta có bình phương của đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại I chuẩn hoá như sau:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_a)} \quad (6.4.3.7)$$

ở đây: n là bậc của bộ lọc (hoặc bậc của đa thức Chebyshev):

$$\Rightarrow L_n(\omega_a) = \begin{cases} \cos(n \arccos \omega_a) & \text{với } |\omega_a| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} \omega_a) & \text{với } |\omega_a| > 1 \end{cases}$$

ε là một tham số xác định biên độ của gợn sóng ở dải thông.

Ta biết rằng $T_n^2(\omega_a)$ dao động giữa không và một đối với $|\omega_a| \leq 1$ và tăng một cách đơn điệu đối với $|\omega_a| > 1$ điều này dẫn đến $|H_a(\omega_a)|^2$ sẽ gợn sóng giữa 1 và $\frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ đối với $|\omega_a| \leq 1$ và giảm một cách đơn điệu đối với $|\omega_a| > 1$.

Ví dụ 6.4.3.2.

Hãy vẽ đồ thị đáp ứng biên độ $|H_a(\omega_a)|$ đối với $n = 3$ và $n = 4$.

Giải

Xem các ví dụ 6.4.3.1 ta thấy rằng:

Với $n = 3$:

$$\begin{aligned} \omega_a = 0 &\Rightarrow T_3(\omega_a) = 0 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)|^2 = 1 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_a = 0,5 &\Rightarrow T_3(\omega_a) = -1 \Rightarrow T_3^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_a = 1 &\Rightarrow T_3(\omega_a) = 1 \Rightarrow T_3^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

Với $n = 4$:

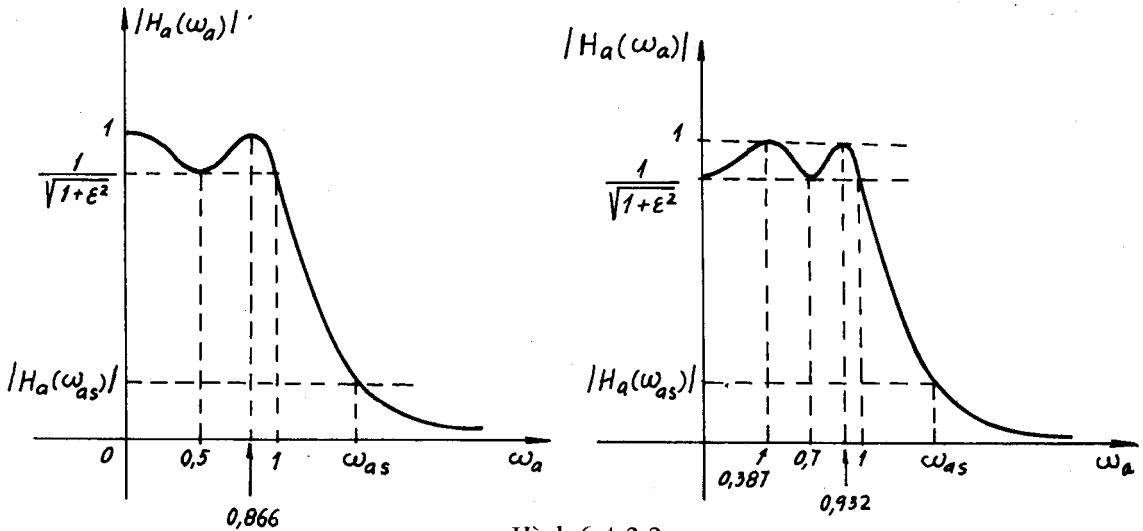
$$\begin{aligned} \omega_a = 0 &\Rightarrow T_4(\omega_a) = 1 \Rightarrow T_4^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_4^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

$$\omega_a = 0,7 \Rightarrow T_4(\omega_a) = -1 \Rightarrow T_4^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_4^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\omega_a = 1 \Rightarrow T_4(\omega_a) = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

Hình 6.4.3.2 sẽ minh họa đáp ứng biên độ $|H_a(\omega_a)|$ trong hai trường hợp $n = 3$ và $n = 4$.



Hình 6.4.3.2.

* Vị trí các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ của bộ lọc Chebyshev loại I

Ta biết rằng với $s = j\omega_a$ thì $\omega_a = \frac{s}{j}$, vậy ta có $\omega_a^2 = -s^2$ và chúng ta có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} L(\omega_a^2) &= L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) \\ &= 1 + \varepsilon^2 \left[\cosh\left(\operatorname{narccosh}\frac{s}{j}\right) \right]^2 = \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)} \text{ với } \omega_a > 1 \end{aligned}$$

và với khoảng $0 \leq \omega_a \leq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} L(\omega_a^2) &= L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 1 + \varepsilon^2 \left[\cos\left(\operatorname{narccos}\frac{s}{j}\right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)} \text{ với } 0 \leq \omega_a \leq 1 \end{aligned} \quad (6.4.3.8)$$

Tức là:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{1}{L(-s^2)} \quad (6.4.3.9)$$

Vậy các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ chính là nghiệm của đa thức $L(-s^2) = 0$.

Giả sử gọi các nghiệm của $L(-s^2) = 0$ là s_{pk} , ta có:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$$

Chúng ta sẽ tính toán các điểm cực s_{pk} trong khoảng $0 \leq \omega_a \leq 1$ như sau:

$$L(-s_{pk}^2) = 1 + \varepsilon^2 \left[\cos \left(n \arccos \frac{s_{pk}}{j} \right) \right]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\cos \left(n \arccos \frac{s}{j} \right) \right]^2 = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \cos \left(n \arccos \frac{s}{j} \right) = \pm \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

Thực hiện đổi biến số:

$$u_k + jv_k = \arccos \frac{s_{pk}}{j}$$

$$\Rightarrow \cos(u_k + jv_k) = \frac{s_{pk}}{j} = \frac{1}{j} (\sigma_k + j\omega_{ak})$$

$$\Rightarrow \sigma_k + j\omega_{ak} = j \cos(u_k + jv_k)$$

Từ đây ta có:

$$n \arccos \frac{s_{pk}}{j} = n(u_k + jv_k)$$

$$\Rightarrow \cos \left(n \arccos \frac{s_{pk}}{j} \right) = \cos[n(u_k + jv_k)] = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

Vậy chúng ta chứng tỏ rằng $\cos[n(u_k + jv_k)]$ là số ảo.

Áp dụng công thức lượng giác:

$$\cos(\alpha + j\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

ta có:

$$\cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \cos jnv_k - \sin nu_k \sin jnv_k = \frac{j}{\varepsilon}$$

$$\cos jnv_k = \frac{e^{j(jnv_k)} + e^{-j(jnv_k)}}{2} = \cosh nv_k$$

$$\sin jnv_k = \frac{e^{j(jnv_k)} - e^{-j(jnv_k)}}{2j} = j \sinh nv_k$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} \cos(nu_k + jnv_k) &= \underbrace{\cos nu_k \cosh nv_k}_{=0} - \underbrace{j \sin nu_k \sinh nv_k}_{\pm \frac{j}{\varepsilon}} \\ &= 0 \quad \pm \frac{j}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Cuối cùng từ phương trình phức ta thu được hệ hai phương trình thực như sau:

$$\cos nu_k \cosh nv_k = 0 \quad (6.4.3.10)$$

$$\sin nu_k \sinh nv_k = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.4.3.11)$$

Từ phương trình (6.4.3.10) ta thấy rằng:

$$\text{Nếu: } \cos nu_k = 0 \Rightarrow nu_k = \frac{\pi}{2}(2k - 1)$$

$$\text{Vậy: } u_k = \frac{\pi}{2n}(2k - 1) \quad (6.4.3.12)$$

Từ phương trình (6.4.3.11) ta có:

$$\text{khi } \sin nu_k = \pm 1 \text{ thì } \sinh nv_k = \pm \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow nv_k = \operatorname{arcsinh}\left(\pm \frac{1}{\varepsilon}\right) = \pm \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{Vậy } v_k = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.4.3.13)$$

Vậy với n và ε cố định thì v_k là cố định với mọi giá trị của k .

Từ:

$$\begin{aligned} s_{pk} &= \sigma_k + j\omega_{ak} = j\cos(u_k + jv_k) = j[\cos u_k \cosh v_k - \sin u_k \sinh v_k] \\ &= j[\cos u_k \cosh v_k - j \sin u_k \sinh v_k] \\ &= j\cos u_k \cosh v_k + \sin u_k \sinh v_k \end{aligned}$$

từ đây ta có:

$$\sigma_k = \sin u_k \sinh v_k \quad (6.4.3.14)$$

$$\omega_{ak} = \cos u_k \cosh v_k \quad (6.4.3.15)$$

Thay giá trị của u_k và v_k trong biểu thức (6.4.3.12) và (6.4.3.13) vào (6.4.3.14) và (6.4.3.15) ta có:

$$\sigma_k = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cdot \left[\pm \sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]$$

$$\omega_{ak} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cdot \cosh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Và cũng từ các biểu thức (6.4.3.14) và (6.4.3.15) ta có:

$$\sin u_k = \frac{\sigma_k}{\sinh v_k}$$

$$\cos u_k = \frac{\omega_{ak}}{\cosh v_k} \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, 2n$$

Cuối cùng ta thu được phương trình sau đây:

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2 v_k} + \frac{\omega_{ak}^2}{\cosh^2 v_k} = 1 \quad (6.4.3.16)$$

Phương trình (6.4.3.16) là phương trình của hình ellipse có dạng sau đây;

$$\frac{\sigma^2}{R_a^2} + \frac{\omega_a^2}{R_b^2} = 1 \quad (6.4.3.17)$$

ở đây:

$$R_a = \sinh v_k$$

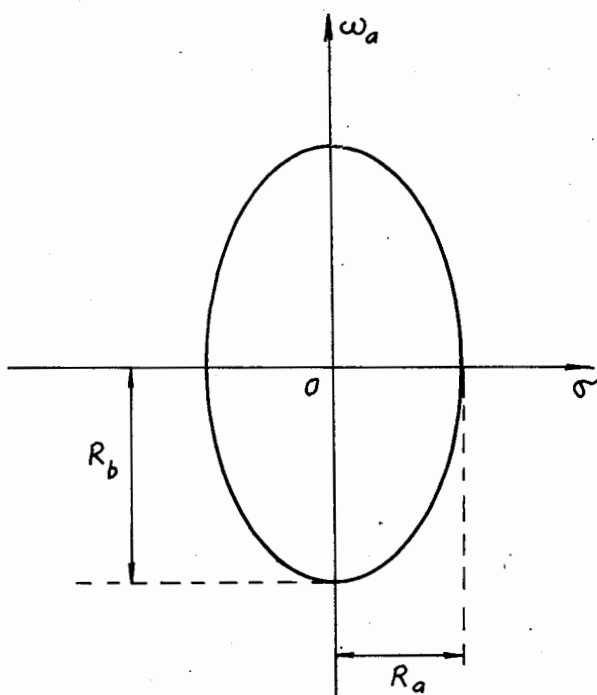
$$R_b = \cosh v_k$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}$$

(R_a và R_b là số dương nên chúng ta lấy giá trị dương của v_k).

Đồ thị mô tả đường ellipse của phương trình 6.4.3.17 được cho trên hình 6.4.3.3.

Từ đây ta thấy rằng các cặp (σ_k, ω_{ak}) sẽ nằm trên đường ellipse trên hình 6.4.3.3, tức là các điểm cực s_{pk} sẽ nằm trên đường



Hình 6.4.3.3.

ellipse có các bán kính là R_a và R_b , cụ thể ta có thể viết như sau:

$$\sigma_k = \sin u_k \sinh v_k = \sin u_k \cdot R_a$$

$$\omega_{ak} = \cos u_k \cosh v_k = \cos u_k \cdot R_b$$

$$u_k = \frac{\pi}{2n} (2k - 1)$$

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak} \quad (6.4.3.18)$$

Nhận xét:

Chúng ta có thể viết R_a và R_b dưới một dạng khác như sau:

$$R_a = \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2}$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \sinh n v_k = \frac{1}{\epsilon} = \frac{e^{n v_k} - e^{-n v_k}}{2}$$

Ngoài ra chúng ta biết rằng:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\epsilon} = \ln \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}} \right)$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}} \right) = \ln \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow e^{v_k} = e^{\ln \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{Đặt } e^{v_k} = \gamma \Rightarrow \ln e^{v_k} = \ln \gamma \Rightarrow \ln \gamma = v_k$$

$$\Rightarrow \ln \gamma = \ln \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \gamma = \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Vậy cuối cùng ta có:

$$R_a = \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \cosh v_k = \frac{e^{v_k} + e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.4.3.19)$$

Ví dụ 6.4.3.3

Hãy tìm các điểm cực s_{pk} của $H_a(s).H_a(-s)$ đối với $n = 3$ và giả sử ε đã cho trước. Sau đó vẽ vị trí các điểm cực này trên đường ellipse.

Giải

Áp dụng biểu thức 6.4.3.18 ta thấy rằng đối với n và ε đã cho trước thì các bán kính R_a và R_b là hằng số.

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm u_k :

Với $n = 3$ ta có u_k như sau:

$$u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \Big|_{n=3} = \frac{2k-1}{6} \pi$$

$$k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a1} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_2 = R_a; \quad \omega_{a2} = 0$$

$$k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$k = 4 \Rightarrow u_4 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \sigma_4 = -\frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$k = 5 \Rightarrow u_5 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma_5 = -R_a; \quad \omega_{a5} = 0$$

$$k = 6 \Rightarrow u_6 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \sigma_6 = -\frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a6} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

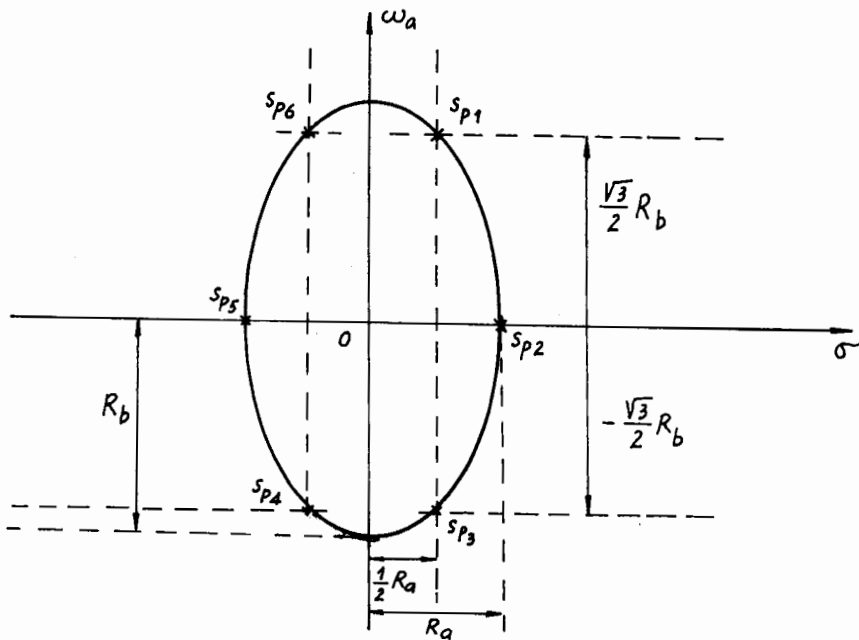
Vị trí của 6 điểm cực này được minh hoạ trên hình 6.4.3.4.

Nhận xét:

Đối với các bộ lọc ổn định, các điểm cực của $H_a(s)$ phải nằm bên trái trục ảo (trong mặt phẳng s), vậy thì các điểm cực của $H_a(-s)$ sẽ nằm ở bên phải trục ảo. Chúng ta có thể thấy trong ví dụ 6.4.3.3 thì:

$s_{p,4}, s_{p,5}, s_{p,6}$ là các điểm cực của $H_a(s)$

$s_{p,1}, s_{p,2}, s_{p,3}$ là các điểm cực của $H_a(-s)$.



Hình 6.4.3.4.

* Xác định $H_a(s)$ và vị trí các điểm cực của $H_a(s)$

Để tìm hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc ổn định chúng ta có thể viết như sau:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{B}{\prod_{k=1}^{2n} (s - s_{pk})}; \quad B \text{ là hằng số}$$

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak} = R_a \sin u_k + jR_b \cos u_k$$

Tương tự như ví dụ 6.4.3.3 ta thấy rằng:

Nếu $k = (n + 1) \div 2n$ thì $\sigma_k < 0 \Rightarrow s_{pk}$ sẽ nằm bên trái trục ảo \Rightarrow bộ lọc là ổn định.

Vậy đối với bộ lọc ổn định ta có hàm truyền đạt $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=n+1}^{2n} (s - s_{pk})}; \quad H_0 \text{ là hằng số}$$

$$\text{với } u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Chúng ta có thể viết lại u_k và $H_a(s)$ bằng cách đổi biến số như sau:

$$e = k - n \Rightarrow k = e + n$$

$$\Rightarrow u_e = \frac{2(e+n)-1}{2n} \pi = \left(\frac{2e-1}{2n} + 1 \right) \pi$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

$$u_k = \left(\frac{2k-1}{2n} + 1 \right) \pi \quad (6.4.3.20)$$

Vị trí các điểm cực của bộ lọc ổn định vẫn được xác định theo hai hệ biểu thức (6.4.3.18) và (6.4.3.19).

Hằng số H_0 có thể được chọn bằng cách sau đây:

Chúng ta có thể viết:

$$H_a(\omega_a) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (j\omega_a - s_{pk})}$$

Với n lẻ \Rightarrow ở gốc tọa độ $|H_a(\omega_a)| = 1$

$$\Rightarrow \frac{|H_0|}{\left| \prod_{k=1}^n (j\omega_a - s_{pk}) \right|} \bigg|_{\omega_a=0} = \frac{|H_0|}{\left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right|} = 1$$

$$\Rightarrow |H_0| = \left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right|$$

$$\Rightarrow H_0 = \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \quad (6.4.3.21)$$

Với n chẵn \Rightarrow ở gốc tọa độ $H_a(\omega_a) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

$$\Rightarrow \frac{|H_0|}{\left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right|} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\Rightarrow |H_0| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right|$$

$$\Rightarrow H_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \cdot \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \quad (6.4.3.22)$$

Ví dụ 6.4.3.4.

Hãy tìm $H_a(s)$ của bộ lọc Chebyshev loại I tương ứng với $n = 3$. Hãy xác định vị trí các điểm cực của $H_a(s)$ trên mặt phẳng s .

Giải

Trước hết ta tìm các điểm cực s_{pk} ứng với $n = 3$ như sau:

Áp dụng biểu thức (6.4.3.20) ta có:

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \sigma_1 &= \sin \frac{7\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a \\ &\Rightarrow \omega_{a1} = \cos \frac{7\pi}{6} \cdot R_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma_2 &= \sin \frac{3\pi}{2} \cdot R_a = -R_a \\ &\Rightarrow \omega_{a2} = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot R_b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \sigma_3 &= \sin \frac{11\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a \\ &\Rightarrow \omega_{a3} = \cos \frac{11\pi}{6} \cdot R_b = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \end{aligned}$$

Vậy:

$$s_{p1} = -\frac{1}{2} R_a - j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b; \quad s_{p2} = -R_a; \quad s_{p3} = -\frac{1}{2} R_a + j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$\Rightarrow s_{p1} = s_{p3}^* \text{ hoặc } s_{p1}^* = s_{p3}$$

Từ đây ta tìm được $H_a(s)$ như sau:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^3 (s - s_{pk})} = \frac{H_0}{(s + R_a) \left(s + \frac{1}{2} R_a + j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \right) \left(s + \frac{1}{2} R_a - j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \right)} \\ &= \frac{H_0}{(s + R_a) \left(s^2 + R_a s + \frac{1}{4} R_a^2 + \frac{3}{4} R_b^2 \right)} \end{aligned}$$

ở đây:

$$H_0 = \prod_{k=1}^3 (-s_{pk}) = R_a \left(\frac{1}{4} R_a^2 + \frac{3}{4} R_b^2 \right)$$

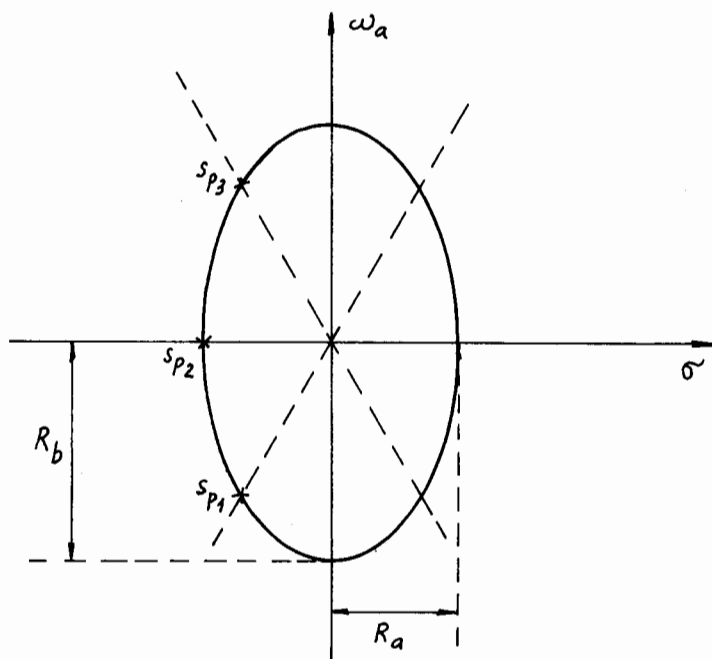
$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} = (1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$$

Tất cả các điểm cực đều có: $\sigma_k < 0$, vậy tất cả các điểm cực này đều nằm bên trái trục ảo, dẫn đến bộ lọc Chebyshev loại I này là bộ lọc ổn định.

Vị trí các điểm cực s_{p1} , s_{p2} và s_{p3} của hàm truyền đạt $H_a(s)$ đối với bộ lọc này được minh hoạ trên hình 6.4.3.5.



Hình 6.4.3.5.

Nhận xét về H_0

+ Với n lẻ, ta có các điểm cực s_{pk} như sau:

$$s_{pk}; s_{p1}; \dots; s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}; \dots; s_{pn}$$

$$k = \frac{n+1}{2} \Rightarrow u_{\frac{n+1}{2}} = \left[\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1}{2n} + 1 \right] \cdot \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{n+1} = \sin \frac{3\pi}{2} . R_a = - R_a$$

$$\omega_{a, \frac{n+1}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} . R_b = 0$$

$$\Rightarrow \quad s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = - R_a: \text{ thực và âm}$$

Tương tự ta thấy rằng:

$$s_{p1} = s_{pn}^*; \quad s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \quad \dots; \quad s_{p\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}^*$$

Theo biểu thức (6.4.3.21) ta có thể viết:

$$\begin{aligned} H_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n s_{pk} = - \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ &= (-1)^{s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pk}|^2 \\ &= R_a \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pk}|^2 \end{aligned} \quad (6.4.3.23)$$

+ Với n chẵn ta có các điểm cực s_{pk} như sau:

$$s_{pk}; s_{p1}; \dots; s_{p\left(\frac{n-1}{2}\right)}; s_{p\frac{n}{2}}; s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}; \dots; s_{pn}$$

mà ta thấy rằng:

$$s_{p1} = s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\frac{n}{2}} = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}^*$$

Theo biểu thức (6.4.3.22) ta có thể viết:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} (-1)^n \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ \Rightarrow \quad H_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |s_{pk}|^2 \end{aligned} \quad (6.4.3.24)$$

Nhận xét về $H_a(s)$

Theo biểu thức (6.4.3.20) ta có $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

Từ đây ta phân tích $H_a(s)$ với n lẻ và n chẵn như sau:

Với n lẻ ta có:

$$s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = -R_a = -\sinh v_k = -\frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$s_{p1} = s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}^*$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{H_0}{\left(s - s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right) \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}) \cdot \prod_{k=\frac{n+1}{2}+1}^n (s - s_{pk})}$$

$$= \frac{H_0}{\left(s - s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right) \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}^*)}$$

$$= \frac{H_0}{\left(s - s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right) \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}) (s - s_{pk}^*)}$$

mà: $s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$, vậy ta có:

$$(s - s_{pk}) \cdot (s - s_{pk}^*) = s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2)$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{H_0}{(s + R_a) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2) \right]} \quad (6.4.3.25)$$

Với n chẵn ta có:

$$s_{p1} = s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\frac{n}{2}} = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}^*$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (s - s_{pk}) \cdot \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^n (s - s_{pk})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})(s - s_{pk}^*)} \\
\Rightarrow H_a(s) &= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n \left[s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2) \right]} \quad (6.4.3.26)
\end{aligned}$$

*** Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 ở tần số không chuẩn hoá**

Chúng ta biết rằng ở tần số ω_a chuẩn hoá bởi ω_{ap} theo biểu thức (6.4.3.7) ta có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega_a)}$$

Vậy trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá ta có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_{ap}}\right)} \quad (6.4.3.27)$$

ở đây:

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right) = \begin{cases} \cos\left(\arccos \frac{\omega}{\omega_{ap}}\right) & \text{với } \left|\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right| \leq 1 \\ \cosh\left(\operatorname{arccosh} \frac{\omega}{\omega_{ap}}\right) & \text{với } \left|\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right| > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 6.4.3.5

Hãy vẽ đồ thị đáp ứng biên độ $|H_a(\omega_a)|$ với $n = 3$ trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá.

Giải

Tương tự ví dụ 6.4.3.2 ta thấy rằng:

Với $n = 3$ ta có:

$$\omega_a = 0 \Rightarrow T_3\left(\frac{\omega_a}{\omega_{ap}}\right) = T_3(0) = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1$$

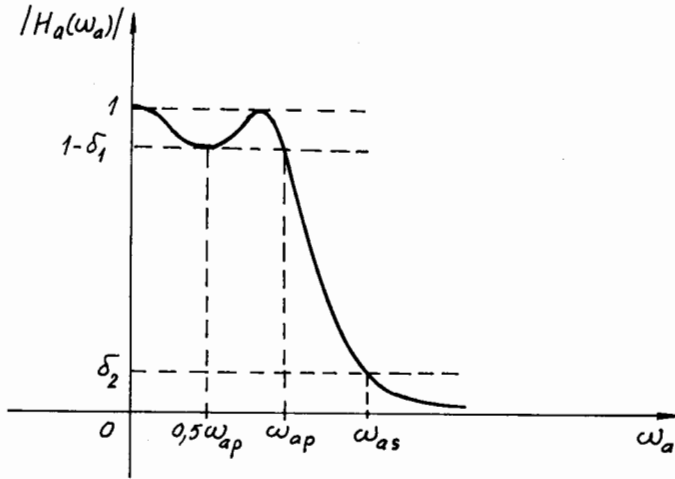
$$\omega_a = \frac{\omega_{ap}}{2} \Rightarrow T_3\left(\frac{\omega_{ap}}{2\omega_{ap}}\right) = T_3\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow T_3^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\omega = \omega_{ap} \Rightarrow T_3\left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ap}}\right) = T_3(1) = 1 \Rightarrow T_3^2(1) = 1$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

Hình 6.4.3.6 sẽ minh hoạ đáp ứng tần số $|H_a(\omega_a)|$ với $n = 3$ trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá.



Hình 6.4.3.6.

Nhận xét về $H_a(s)$ và H_0 trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá

Chúng ta biết rằng ở tần số chuẩn hoá ta có:

$$\omega_a \rightarrow \frac{s}{j} \Rightarrow L(\omega_a^2) \rightarrow L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right)$$

Vậy ở tần số không chuẩn hoá ta có:

$$\frac{\omega_a}{\omega_{ap}} \rightarrow \frac{s}{j\omega_{ap}} \Rightarrow L(\omega_a^2) \rightarrow L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j\omega_{ap}}\right) = \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)}$$

Dẫn đến các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ chính là nghiệm của $L(-s^2)$:

$$\Rightarrow L(-s_{pk}^2) = 1 + \varepsilon^2 \left[\cos\left(\arccos \frac{s_{pk}}{j\omega_{ap}}\right) \right]^2$$

$$\text{và } u_k + jv_k = \arccos \frac{s_{pk}}{j\omega_{ap}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k}{\omega_{ap}} + j \frac{\omega_{ak}}{\omega_{ap}} = j \cos(u_k + jv_k)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k}{\omega_{ap}} = \sin u_k \cdot \sinh v_k \Rightarrow \sigma_k = \omega_{ap} \sin u_k \sinh v_k$$

$$\frac{\omega_{ak}}{\omega_{ap}} = \cos u_k \cdot \cosh v_k \Rightarrow \omega_{ak} = \omega_{ap} \cos u_k \cosh v_k$$

$$\Rightarrow \sin u_k = \frac{\sigma_k}{\omega_{ap} \sinh v_k}$$

$$\cosh u_k = \frac{\omega_{ak}}{\omega_{ap} \cosh v_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k^2}{(\omega_{ap} \sinh v_k)^2} + \frac{\omega_{ak}^2}{(\omega_{ap} \cosh v_k)^2} = 1$$

Vậy phương trình hình ellipse có dạng sau đây:

$$\frac{\sigma^2}{R_a'^2} + \frac{\omega_a^2}{R_b'^2} = 1 \quad (6.4.3.28)$$

ở đây:

$$R_a' = \omega_{ap} \sinh v_k = \omega_{ap} \cdot R_a$$

$$R_b' = \omega_{ap} \cosh v_k = \omega_{ap} \cdot R_b$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}$$

Đồ thị hình ellipse này được cho trên hình 6.4.3.7.

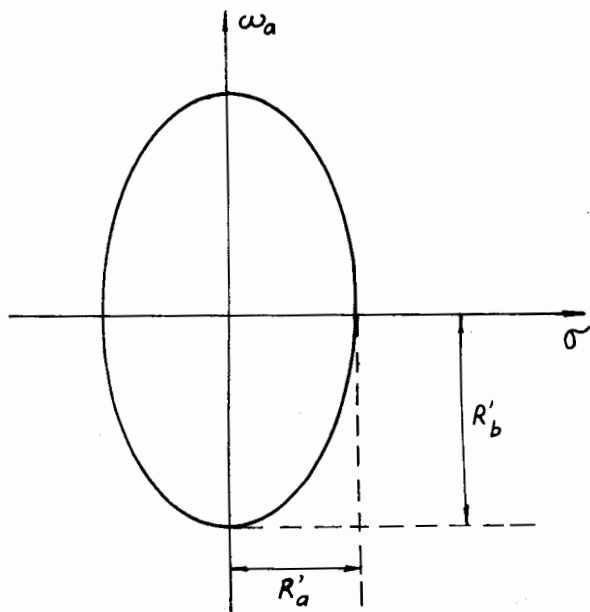
Cuối cùng ta có:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$$

$$\sigma_k = \sin u_k \cdot R_a'$$

$$\omega_{ak} = \cos u_k \cdot R_b'$$

$$R_a' = \omega_{ap} \cdot R_a = \omega_{ap} \cdot \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$



Hình 6.4.3.7.

$$R'_b = \omega_{ap} \cdot R_b = \omega_{ap} \cdot \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^1$$

Với n lẻ:

$$H_0 = R'_a \cdot \prod_{k=1}^{n-1} |s_{pk}|^2$$

$$H_a(s) = \frac{H_0}{(s + R'_a) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} [s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2)]} \quad (6.4.3.29)$$

Với n chẵn:

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \cdot \prod_{k=1}^n |s_{pk}|^2$$

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n [s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2)]} \quad (6.4.3.30)$$

* Tính toán bậc n của bộ lọc

Theo biểu thức (6.4.3.27), ở tần số không chuẩn hoá chúng ta đã có:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_{ap}} \right)}}$$

Ở dải thông ta có:

$$\omega_a = \omega_{ap} \Rightarrow T_n^2 \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ap}} \right) = T_n^2(1) = 1 \text{ với mọi } n.$$

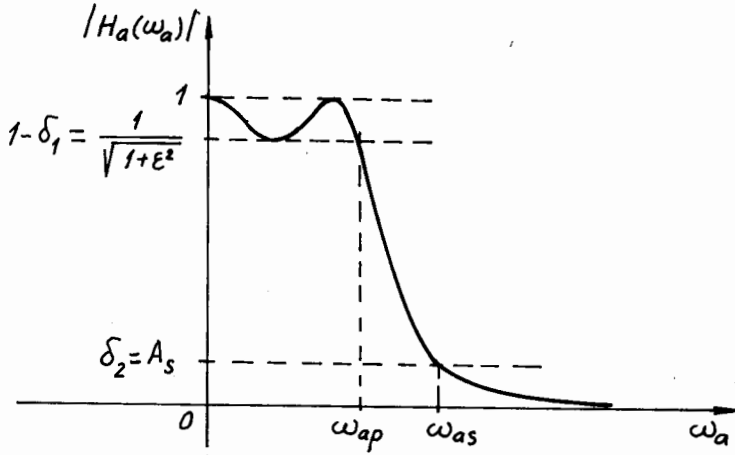
$$\Rightarrow |H_a(\omega_{ap})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{(1 - \delta_1^2)} - 1$$

Ở dải chặn ta có:

$$\begin{aligned}\omega_a = \omega_{as} &\Rightarrow |H_a(\omega_{as})| = A_s = \delta_2 \\ \Rightarrow |H_a(\omega_{as})| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)}} = A_s = \delta_2\end{aligned}$$

Đồ thị minh hoạ $|H_a(\omega_a)|$ cho trên hình 6.4.3.8.



Hình 6.4.3.8.

Từ đây tính toán tiếp tục ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)} &= \frac{1}{A_s} = \frac{1}{\delta_2} \\ \Rightarrow T_n \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right) &= \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\varepsilon}\end{aligned}$$

mà chúng ta biết rằng ở dải chặn $\omega_{as} > \omega_{ap} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} > 1$

$$\Rightarrow T_n \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right) = \cosh \left(\operatorname{narccos} \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \operatorname{narccosh} \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} = \operatorname{arccossh} \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\operatorname{arccosh} \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon}}{\operatorname{arccos} \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}}$$

mà ta có: $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\frac{1}{A_s^2} - 1}{\varepsilon^2} - 1} \right]}{\ln \left[\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)^2 - 1} \right]} \quad (6.4.3.31)$$

Chú ý: Chúng ta chọn n là số nguyên.

Ví dụ 6.4.3.6

Hãy tìm bậc n của bộ lọc Chebyshev loại 1 với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\varepsilon = 0,5088471$$

$$A_s = \delta_s = \frac{1}{10}$$

$$\omega_{ap} = 0,1\pi$$

$$\omega_{as} = 0,2\pi$$

Giải

$$\frac{1}{A_s^2} = 100; \quad \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} = \frac{0,2\pi}{0,1\pi} = 2$$

Áp dụng biểu thức (6.4.3.31) ta có:

$$n = \frac{\ln \left[\frac{\sqrt{100-1}}{0,5088471} + \sqrt{\frac{100-1}{(0,5088471)^2} - 1} \right]}{\ln \left[2 + \sqrt{2^2 - 1} \right]} = 2,7834301$$

Chọn n là số nguyên, vậy $n = 3$.

d) Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2

* **Định nghĩa**

Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 là bộ lọc có đáp ứng biên độ gợn sóng ở dải chặn và giảm đơn điệu ở dải thông (tức là ngược với bộ lọc loại 1).

Về mặt toán học ta có $L(\omega_a^2)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$L(\omega_a^2) = 1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)} \right]^2 \quad (6.4.3.32)$$

ở đây:

ω_{as} là tần số giới hạn dải chặn;

ε là tham số;

ω_a là tần số chuẩn hoá.

Từ đây ta có đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 như sau:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{L(\omega_a^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)} \right]^2} \quad (6.4.3.33)$$

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} x) & |x| > 1 \end{cases}$$

Mà ε và ω_{as} là hằng số, vậy:

+) $T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)$ sẽ dao động giữa 0 và 1 với $\left|\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right| \leq 1$.

Tức là với $\left|\frac{\omega_a}{\omega_{as}}\right| \geq 1$ hoặc $|\omega_a| \geq |\omega_{as}|$.

$\Rightarrow T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)$ dao động giữa 0 và 1 trong dải chặn. Ngoài ra ta có thể viết:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)}{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} \quad (6.4.3.34)$$

\Rightarrow ở dải chắn $|H_a(\omega_a)|^2$ sẽ dao động giữa 2 giá trị 0 và $\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})}$.

Chúng ta thường gọi độ gợn sóng ở dải chắn là δ_2 (hoặc A_s). Vậy:

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} = \delta_2^2 = A_s^2 \quad (6.4.3.35)$$

Chú ý rằng tại $\omega_a = \omega_{as}$ thì $T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right) = T_n^2(1) = 1$.

Vậy:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})}} = \delta_2$$

+) $T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)$ sẽ tăng đơn điệu với $\left|\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right| > 1$, tức là với $\left|\frac{\omega_a}{\omega_{as}}\right| < 1$ hoặc $|\omega_a| < |\omega_{as}|$.

Vậy tại gốc toạ độ $\omega_a = 0$ ta có:

$$T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)\bigg|_{\omega_a=0} = T_n(\infty) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega_a \rightarrow 0} |H_a(\omega_a)|^2 = \lim_{\omega_a \rightarrow \infty} \frac{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)}{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} = 1$$

Tức là tại gốc toạ độ $\omega_a = 0$ thì:

$$|H_a(\omega_a)|\big|_{\omega_a=0} = 1$$

Tại $\omega_a = 1$ ta có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{\left[1 + \varepsilon^2 \frac{T_n(\omega_a)}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)}\right]^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Ví dụ 6.4.3.7

Hãy vẽ đồ thị $|H_a(\omega_a)|$ ứng với bậc của bộ lọc $n = 3$.

Giải

Ở dải thông:

$$\omega_a = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1$$

$$\omega_a = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

Ở dải chắn:

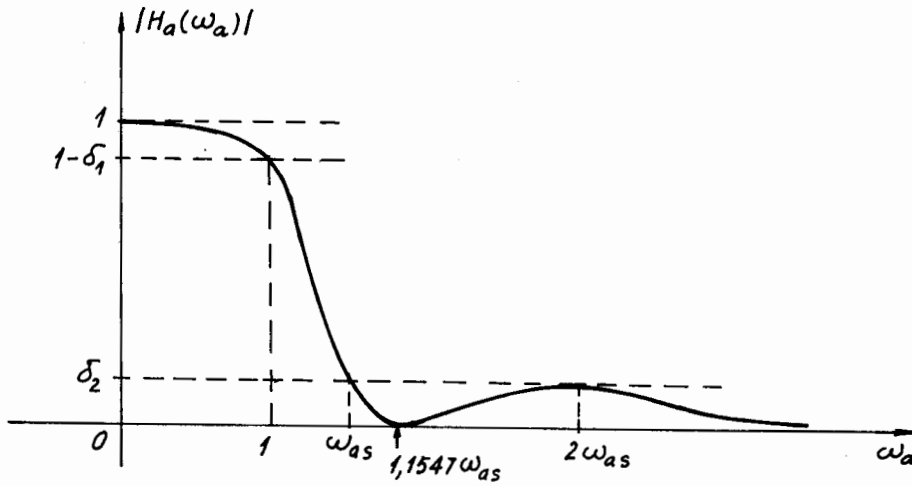
$$\omega_a = \omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,866} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,866 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

$$\omega_a = 2\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,5 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

$$\omega_a = \infty \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ cho trên hình 6.4.3.9.



Hình 6.4.3.9.

Ví dụ 6.4.3.8

Hãy vẽ đồ thị $|H_a(\omega_a)|$ ứng với bậc của bộ lọc $n = 4$.

Giải

Ở dải thông:

$$\omega_a = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1$$

$$\omega_a = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

Ở dải chặn:

Ta biết rằng $T_4^2(x) = 1$ nếu $x = 1$; $x = 0,707$ và $x = 0$.

Vậy:

$$\omega_a = \omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,707} = 1,414\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,707 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

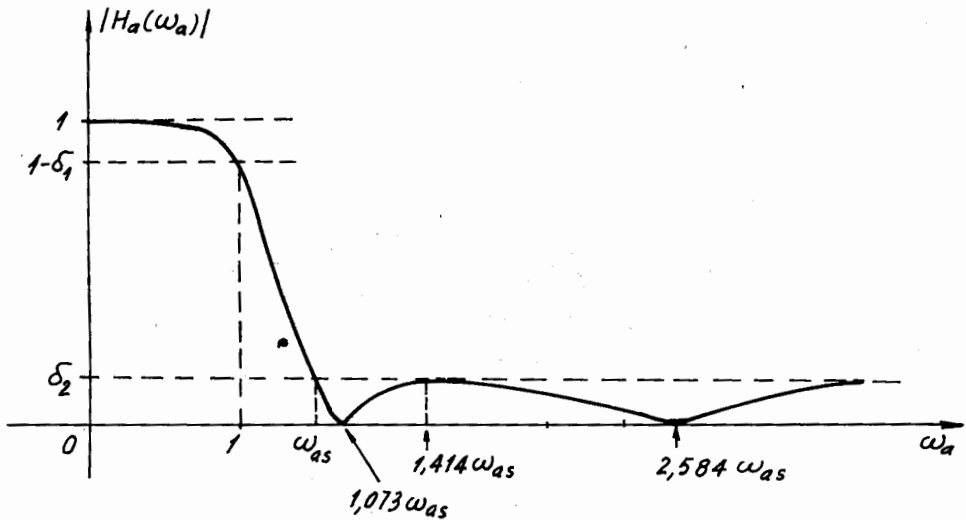
$$\omega_a = \infty \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

và $T_4^2(x) = 0$ nếu $x = 0,387$ và $x = 0,932$.

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,387} = 2,584\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,387 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,932} = 1,073\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,932 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

Hình 6.4.3.10 sẽ minh hoạ đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$.



Hình 6.4.3.10.

*** Các điểm cực và các điểm không**

Chúng ta đã có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)} \right]^2} = \frac{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)}{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right) + \epsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} = \frac{1}{L(\omega_a^2)}$$

thay: $\omega_a \rightarrow \frac{s}{j}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_a(s).H_a(-s) &= \frac{1}{L(-s^2)} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\frac{s}{j}}\right)} \right]^2} \\ &= \frac{T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right)}{T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) + \epsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} \end{aligned} \quad (6.4.3.36)$$

Vậy ta thấy rằng $H_a(s).H_a(-s)$ của bộ lọc Chebyshev loại 2 chứa tất cả các điểm không và điểm cực.

Các điểm không là các nghiệm của phương trình sau:

$$T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) = 0$$

Các điểm cực là các nghiệm của phương trình sau:

$$T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) + \epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) = 0$$

+ Xét các điểm không:

Chúng ta phải giải phương trình sau đây:

$$T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) = 0$$

Theo định nghĩa của đa thức Chebyshev ta có:

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

và:

$$T_n(x) = \cosh n\theta$$

$$x = \cosh\theta \quad x < -1 \text{ và } x > 1$$

Chúng ta có thể tính trong khoảng $-1 \leq x \leq 1$ hoặc trong khoảng $x < -1$ và $x > 1$, ta sẽ thu được kết quả như nhau. Giả sử ta tính trong khoảng $-1 \leq x \leq 1$:

$$T_n(x) = \cos n\theta = 0 \Rightarrow n\theta = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\cos\theta = x \Rightarrow x = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$$

mà $x = j \frac{\omega_{as}}{s}$.

Gọi các điểm không là s_{or}

$$\Rightarrow j \frac{\omega_{as}}{s_{or}} = \cos \frac{2r-1}{2n}\pi$$

$$\Rightarrow s_{or} = j \frac{\omega_{as}}{\cos \frac{2r-1}{2n}\pi}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (6.4.3.37)$$

Vậy các điểm không s_{or} sẽ nằm trên trục ảo.

+ Xét các điểm cực:

Chúng ta phải giải phương trình sau đây:

$$T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) + \epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) = 0$$

Từ đây có thể viết:

$$T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right) = -\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right) = \pm j\epsilon T_n(\omega_{as}) = \cos\left(n \arccos \frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right)$$

mà:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$$

Vậy để lợi dụng kết quả của bộ lọc Chebyshev loại 1, chúng ta đặt:

$$\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}} = j \frac{\omega_{as}}{\sigma_k + j\omega_{ak}} = \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}$$

Từ đây có thể viết:

$$j^2 \frac{\omega_{as}}{\sigma_k + j\omega_{ak}} = \alpha_k + j\beta_k$$

$$\Rightarrow \sigma_k + j\omega_{ak} = - \frac{\omega_{as}}{\alpha_k + j\beta_k} = - \frac{\omega_{as}(\alpha_k - j\beta_k)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

Vậy quan hệ giữa σ_k và ω_{ak} với α_k và β_k như sau:

$$\sigma_k = - \frac{\omega_{as}\alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

$$\omega_{ak} = \frac{\omega_{as}\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (6.4.3.38)$$

Vậy ta có:

$$T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right) = \cos\left(n \arccos \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}\right) = \pm \epsilon T_n(\omega_{as})$$

Đổi biến số:

$$u_k + jv_k = \arccos \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}$$

$$\Rightarrow \cos(u_k + jv_k) = \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}$$

$$\Rightarrow \alpha_k + j\beta_k = j\cos(u_k + jv_k)$$

$$\Rightarrow \cos\left(n \arccos \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}\right) = \cos[n(u_k + jv_k)] = \pm \epsilon T_n(\omega_{as})$$

$\epsilon T_n(\omega_{as})$ là thực $\Rightarrow \cos[n(u_k + jv_k)]$ là ảo.

Cũng giống trường hợp của bộ lọc Chebyshev loại 1 ta có:

$$\cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \cos jnv_k - \sin nu_k \sin jnv_k = \pm \epsilon T_n(\omega_{as})$$

mà:

$$\cos jnv_k = \cosh nv_k$$

$$\sin jnv_k = j \sinh nv_k$$

$$\Rightarrow \cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \cosh nv_k - j \sin nu_k \sinh nv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

Từ đây ta có:

$$\cos nu_k \cosh nv_k = 0$$

$$\sin nu_k \sinh nv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow \text{khi } \cos nu_k = 0 \Rightarrow nu_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \Rightarrow u_k = \frac{\pi}{2n}(2k-1)$$

$$\sin nu_k = \pm 1 \Rightarrow \sinh nv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow nv_k = \operatorname{arsinh}[\pm \varepsilon T_n(\omega_{as})] = \pm \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow v_k = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

mà:

$$\begin{aligned} \alpha_k + j\beta_k &= j \cos(u_k + jv_k) = j[\cos u_k \cosh v_k - \sin u_k \sinh v_k] \\ &= j \cos u_k \cosh v_k + \sin u_k \sinh v_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \sin u_k \sinh v_k$$

$$\beta_k = \cos u_k \cosh v_k$$

mà:

$$\alpha_k = \sin \frac{2k-1}{2n} \pi \left[\sinh \left(\pm \frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \right) \right]$$

$$= \sin \frac{2k-1}{2n} \pi \left[\pm \sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \right) \right]$$

$$\beta_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \cos \left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \right)$$

$$\Rightarrow \sin u_k = \frac{\alpha_k}{\sinh v_k}; \quad \cos u_k = \frac{\beta_k}{\cosh v_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_k^2}{\sinh^2 v_k} + \frac{\beta_k^2}{\cosh^2 v_k} = 1$$

Vậy cặp (α_k, β_k) sẽ nằm trên đường ellipse có dạng sau đây:

$$\frac{\alpha^2}{R_a} + \frac{\beta^2}{R_b} = 1 \quad (6.4.3.39)$$

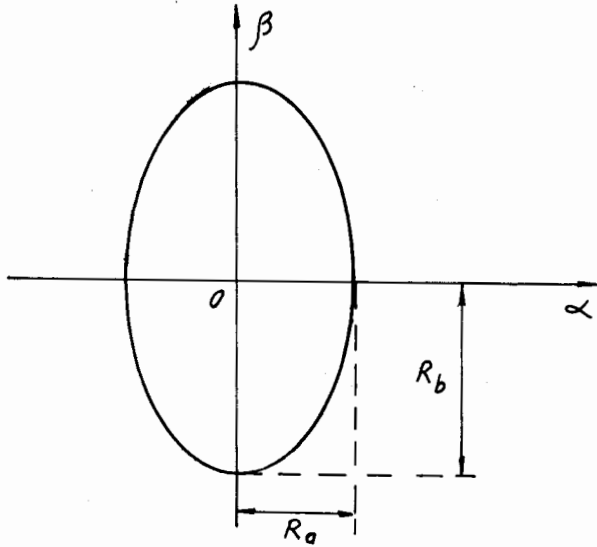
ở đây:

$$R_a = \sinh v_k$$

$$R_b = \cosh v_k$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \epsilon T_n(\omega_{as})$$

Dạng của hình ellipse này cho trên hình 6.4.3.11.



Hình 6.4.3.11.

Nhận xét

Ta có thể viết R_a và R_b dưới dạng sau đây:

$$R_a = \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2}$$

$$R_b = \cosh v_k = \frac{e^{v_k} + e^{-v_k}}{2}$$

mà:

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \epsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\operatorname{arcsinh} \epsilon T_n(\omega_{as}) = \ln \left[\epsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]$$

$$\Rightarrow v_k = \frac{1}{n} \ln \left[\epsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]$$

$$v_k = \ln \left[\epsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Đặt:

$$\ln \gamma = v_k = \ln \left[\varepsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \gamma = e^{v_k} = \left[\varepsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Vậy ta có:

$$R_a = \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \cosh v_k = \frac{e^{v_k} + e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

mà ta biết rằng:

$$\delta_2^2 = A_s^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{A_s^2} - 1 \Rightarrow \varepsilon T_n(\omega_{as}) = \sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}$$

$$\Rightarrow \gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1} + \frac{1}{A_s} \right)^{\frac{1}{n}}$$

hoặc:

$$\gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1} + \frac{1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Tổng kết lại ta có: cặp (α_k, β_k) nằm trên đường ellipse có bán kính là R_a và R_b như sau:

$$R_a = \sinh v_k$$

$$R_b = \cosh v_k$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \quad (6.4.3.40)$$

hoặc là:

$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1} + \frac{1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.4.3.41)$$

Ví dụ 6.4.3.9

Hãy tìm các điểm cực của $H_a(s)H_a(-s)$ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 khi biết bậc của bộ lọc $n = 3$.

Giải

$$\alpha_k = \sin u_k \sinh v_k = \sin u_k \cdot R_a$$

$$\beta_k = \cos u_k \cosh v_k = \cos u_k \cdot R_b$$

$$\sigma_k = -\frac{\omega_{as} \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}; \quad \omega_{ak} = \frac{\omega_{as} \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

Ta thấy rằng với n , ε và $T_n(\omega_{as})$ cố định ta cũng sẽ có R_a và R_b là cố định.

$$u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \Big|_{n=3} = \frac{2k-1}{6} \pi$$

$$k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha_1 = \sin \frac{\pi}{6} \cdot R_a = \frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_1 = \cos \frac{\pi}{6} \cdot R_b = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = -\frac{\omega_{as} \cdot \frac{1}{2} R_a}{\left(\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{a1} = \frac{\omega_{as} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R_b}{\left(\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}\omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \sin \frac{\pi}{2} \cdot R_a = R_a$$

$$\beta_2 = \cos \frac{\pi}{2} \cdot R_b = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = -\frac{\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 0} = -\frac{\omega_{as}}{R_a}$$

$$\omega_{a2} = \frac{\omega_{as} \cdot 0}{R_a^2 + 0} = 0$$

$$k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha_3 = \sin \frac{5\pi}{6} \cdot R_a = \frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_3 = \cos \frac{5\pi}{6} \cdot R_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = -\frac{\omega_{as} \cdot \frac{1}{2} R_a}{\left(\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{as} = \frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)}{\left(\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\sqrt{3}\omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$k = 4 \Rightarrow u_4 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \alpha_4 = \sin \frac{7\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_4 = \cos \frac{7\pi}{6} \cdot R_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_4 = -\frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{1}{2} R_a\right)}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{a4} = \frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\sqrt{3}\omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$k = 5 \Rightarrow u_5 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha_5 = \sin \frac{3\pi}{2} \cdot R_a = -R_a$$

$$\beta_5 = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot R_b = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_5 = -\frac{\omega_{as} \cdot (-R_a)}{(-R_a)^2 + 0} = \frac{\omega_{as}}{R_a}$$

$$\omega_{a5} = 0$$

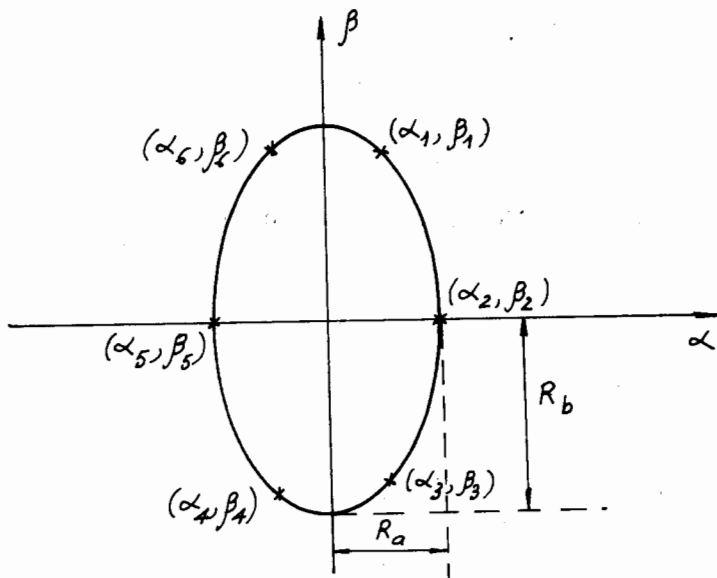
$$k = 6 \Rightarrow u_6 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \alpha_6 = \sin \frac{11\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_6 = \cos \frac{11\pi}{6} \cdot R_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_6 = -\frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) R_a}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{a6} = \frac{\omega_{as} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R_b}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\sqrt{3} \omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

Vị trí của các điểm cực này được minh hoạ trên hình 6.4.3.12.



Hình 6.4.3.12.

Ví dụ 6.4.3.10

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số như sau:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \text{ ở dải thông}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \text{ ở dải chắn}$$

$$\omega_p = 0,1\pi; \quad \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số từ bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Chúng ta có 4 bước chính để tổng hợp bộ lọc số từ bộ lọc tương tự như sau:

Bước 1. Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật

Chúng ta có 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số như đầu bài đã cho như sau:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \text{ ở dải thông}$$

$$\Rightarrow (1 - \delta_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}}$$

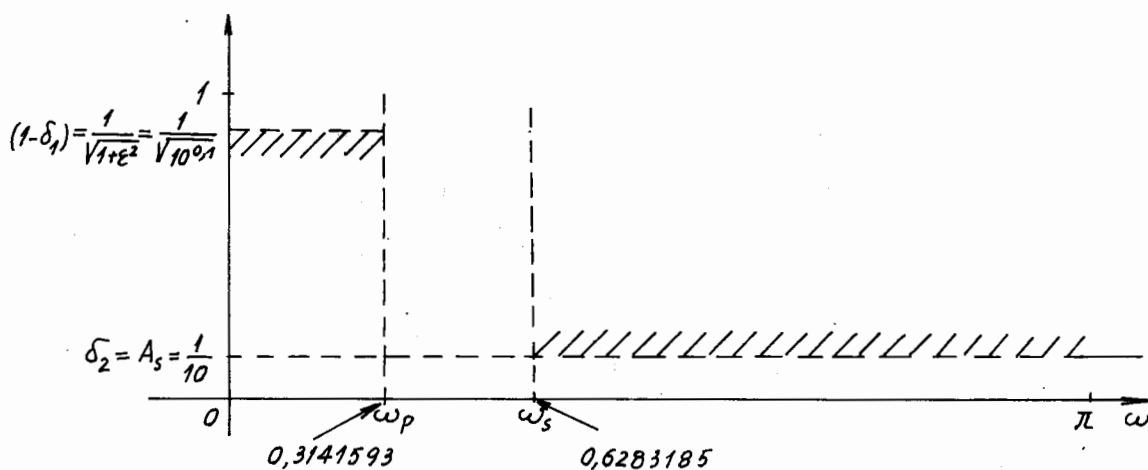
$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \text{ ở dải chắn}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = A_s = \frac{1}{10}$$

$$\omega_p = 0,1\pi \approx 0,3141593$$

$$\omega_s = 0,2\pi \approx 0,6283285$$

Minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc số trên hình 6.4.3.13.



Hình 6.4.3.13.

Bước 2. Xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự

Theo phương pháp biến đổi song tuyến thì từ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số chuyển sang các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự, về độ gợn sóng ở dải thông và dải chắn không có gì thay đổi, nhưng về tần số giới hạn dải thông và dải chắn thì có sự thay đổi, cụ thể như sau:

$$|H_d(\omega_a)| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \text{ ở dải thông}$$

$$|H_d(\omega_a)| \leq \frac{1}{10} \text{ ở dải chắn}$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

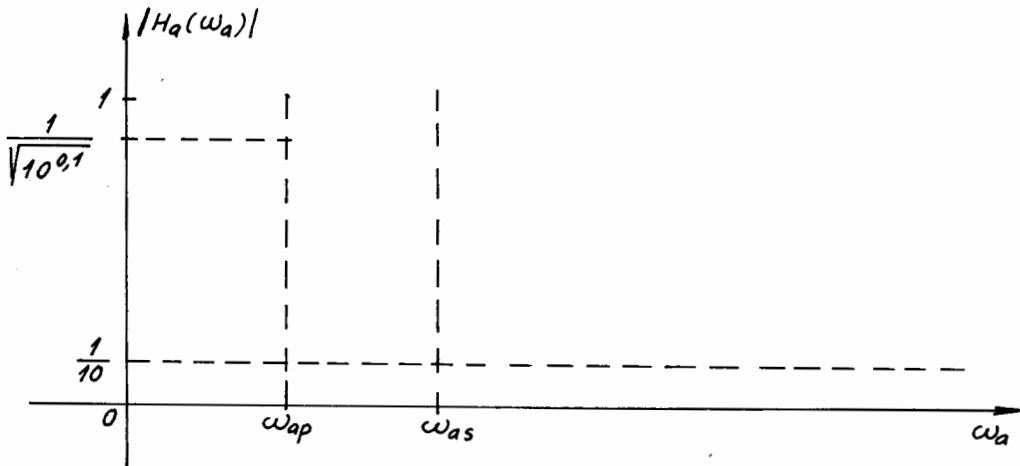
$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

Từ các giá trị của $\omega_p = 0,1\pi$ và $\omega_s = 0,2\pi$, tính theo thang chuẩn hoá ta có các giá trị của ω_{ap} và ω_{as} như sau:

$$\omega_{ap} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) \approx 0,3167689$$

$$\omega_{as} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,2\pi}{2}\right) \approx 0,6498394$$

Đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự được minh hoạ trên hình 6.4.3.14.



Hình 6.4.3.14.

Bước 3

Tổng hợp bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1.

- Tính giá trị ε :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \Rightarrow \varepsilon = 0,5088471$$

- Tính bậc của bộ lọc n :

$$n = \frac{\ln \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\varepsilon^2} \right]}{\ln \left[\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)^2 - 1} \right]}$$

Thay các giá trị của ε , δ_2 , ω_{ap} và ω_{as} ở trên vào biểu thức tính n , ta tính được:

$$n \approx 2,5006328$$

Vậy ta chọn: $n = 3$

- Tìm các điểm cực của $H_a(s)$

Trong trường hợp $n = 3 \Rightarrow n$ là số lẻ.

Trước hết chúng ta tìm R_a và R_b .

$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \quad \text{và} \quad R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{10^{0,1}}}{0,5088471} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,6096098$$

$$\Rightarrow \gamma^{-1} = 0,6212685$$

$$\Rightarrow R_a = 0,4941707$$

$$R_b = 1,1154392$$

Từ đây ta tìm R'_a và R'_b :

$$R'_a = \omega_{ap} \cdot R_a = 0,1565379 \cdot 0,4941707 = 0,0782689$$

$$R'_b = \omega_{ap} \cdot R_b = 0,1565379 \cdot 1,1154392 = 0,3533364$$

$$n = 3 \Rightarrow k = 1 \div 3$$

$$k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = -\frac{1}{2} \cdot R'_a = -0,078269$$

$$\omega_{a1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R'_b = -0,3059983$$

$$s_{p1} = -0,078269 - j0,3059983$$

$$k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = -R'_a = -0,1565379$$

$$\omega_{a2} = 0$$

$$s_{p2} = -0,1565379$$

$$k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{11\pi}{6}$$

$$s_{p3} = s_{p1}^* = -0,078269 + j0,3059983$$

* Tìm hệ số H_0

$n = 3$: là số lẻ, vậy H_0 được tính như sau:

$$\begin{aligned} H_0 &= R'_a \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pl}|^2 \\ &= R'_a |s_{p1}|^2 = 0,1565379 |s_{p1}|^2 \\ &\approx 0,01562 \end{aligned}$$

Cuối cùng ta có $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^3 (s - s_{pk})}$$

$n = 3$ là số lẻ, vậy theo biểu thức (6.4.3.25) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{H_0}{(s + R'_a) [s^2 - 2\sigma_1 s + (\sigma_1^2 + \omega_{a1}^2)]} \\ &= \frac{0,01562}{(s + 0,1565379) [s^2 + 0,156538s + 0,006126 + 0,093635]} \\ &= \frac{0,01562}{(s + 0,1565379) (s^2 + 0,156538s + 0,09961)} \end{aligned}$$

Bước 4.

Thực hiện biến đổi song tuyến để tìm $H(z)$.

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Chuẩn hoá biến s bởi tần số lấy mẫu F_s ta có:

$$s = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Vậy ta có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{0,1562}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,1565379\right) \left[\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,156538 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,09961 \right]}$$

Sau khi tính toán ta có kết quả sau đây:

$$H(z) = 0,0030012 \cdot \frac{(1+z^{-1})^3}{(1-0,8548248z^{-1})(1-1,5751076z^{-1}+0,7104914z^{-2})}$$

6.4.4. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ CAUER (HOẶC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ ELLIPTIQUE)

a) Định nghĩa

Bộ lọc Cauer là bộ lọc có đáp ứng biên độ gợn sóng ở cả dải thông và ở cả dải chắn.

Về mặt toán học, hàm $L(\omega_a^2)$ có dạng sau đây:

$$L(\omega_a^2) = 1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a) \quad (6.4.4.1)$$

mà:

$$\begin{aligned} |H_a(\omega_a)|^2 &= \frac{1}{L(\omega_a^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a)} \\ |H_a(\omega_a)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a)}} \end{aligned} \quad (6.4.4.2)$$

ε là tham số liên quan đến δ_1 .

Nếu tính theo dB ta có:

$$\begin{aligned} LO(\omega_a) &= 20 \lg \frac{1}{|H_a(\omega_a)|} = 10 \lg \left[\frac{1}{|H_a(\omega_a)|} \right]^2 \\ &= 10 \lg L(\omega_a^2) \end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta đặt:

$$LO_p = LO(\omega_{ap}) = 10 \lg L(\omega_{ap}^2)$$

Điều kiện của hàm $F_n(\omega_a)$ tại tần số $\omega_a = \omega_{ap}$ là:

$$F_n(\omega_a) \Big|_{\omega=\omega_{ap}} = 1$$

$$\Rightarrow L(\omega_{ap}^2) = 1 + \epsilon^2$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_{ap})| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

$$\Rightarrow LO_p = 10 \lg(1 + \epsilon^2) \text{ hay } (1 + \epsilon^2)^{10} = 10^{LO_p}$$

$$\Rightarrow 1 + \epsilon^2 = 10^{0,1 LO_p} \Rightarrow \epsilon^2 = 10^{0,1 LO_p} - 1$$

Ở tần số $\omega_a = \omega_{as}$:

$$|H_a(\omega_a)| = A_s \equiv \delta_2$$

Đặt:

$$LO_s = LO(\omega_{as}) = 10 \lg L(\omega_{as}^2) = 10 \lg \left[\frac{1}{|H_a(\omega_a)|} \right]^2$$

$$= 10 \lg \frac{1}{A_s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_s^2} = 10^{0,1 LO_s}$$

$$L(\omega_{as}^2) = 1 + \epsilon^2 F_n^2(\omega_{as})$$

$$10 \lg L(\omega_{as}^2) = 10 \lg [1 + \epsilon^2 F_n^2(\omega_{as})]$$

$$= 10 \lg \frac{1}{A_s^2}$$

hoặc là:

$$1 + \epsilon^2 F_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{A_s^2}$$

$$\Rightarrow F_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{A_s^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow F_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{10^{0,1 LO_p} - 1} (10^{0,1 LO_s} - 1) \equiv L^2$$

Nếu chúng ta đặt:

ở tần số:

$$\omega_a = \omega_{a0i} : F_n(\omega_a) = 0$$

$$\omega_a = \omega_{a\infty i} : F_n(\omega_a) = \infty$$

với n lẻ: $i = 1 \div \frac{n-1}{2}$

với n chẵn: $i = 1 \div \frac{n}{2}$

với n lẻ ở gốc toạ độ ($\omega_a = 0$): $F_n(\omega_a) = 0$

với n chẵn ở gốc toạ độ ($\omega_a = 0$): $F_n(\omega_a) = 1$.

Ví dụ 6.4.4.1

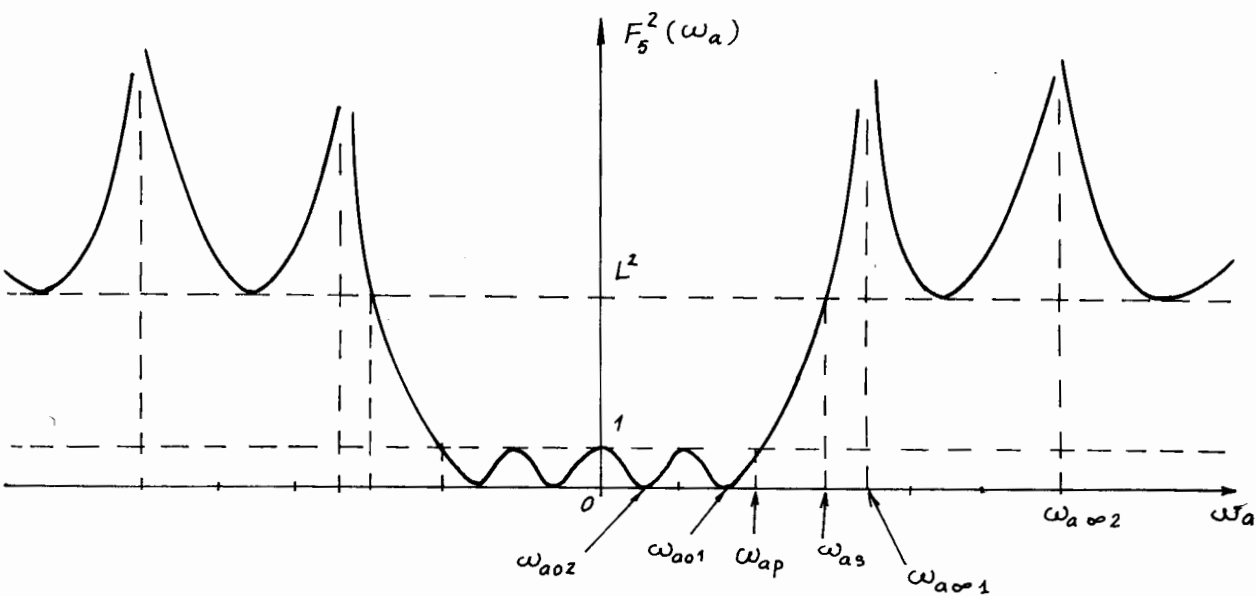
Giả sử cho $n = 5$.

Hãy xác định ω_{a0i} , $\omega_{a\infty i}$ và dạng của $F_n(\omega_a)$ và $|H_a(\omega_a)|$.

Giải

+ Nếu $n = 5$, ta có hai giá trị của ω_{a0i} là ω_{a01} và ω_{a02} và hai giá trị của $\omega_{a\infty i}$ là $\omega_{a\infty 1}$ và $\omega_{a\infty 2}$.

Để thoả mãn các điều kiện của $F_n(\omega_a)$, chúng ta có dạng của $F_n^2(\omega_a)$ cho trên hình 6.4.4.1.



Hình 6.4.4.1.

$F_n(\omega_a)$ là một hàm hữu tỷ Chebyshev.

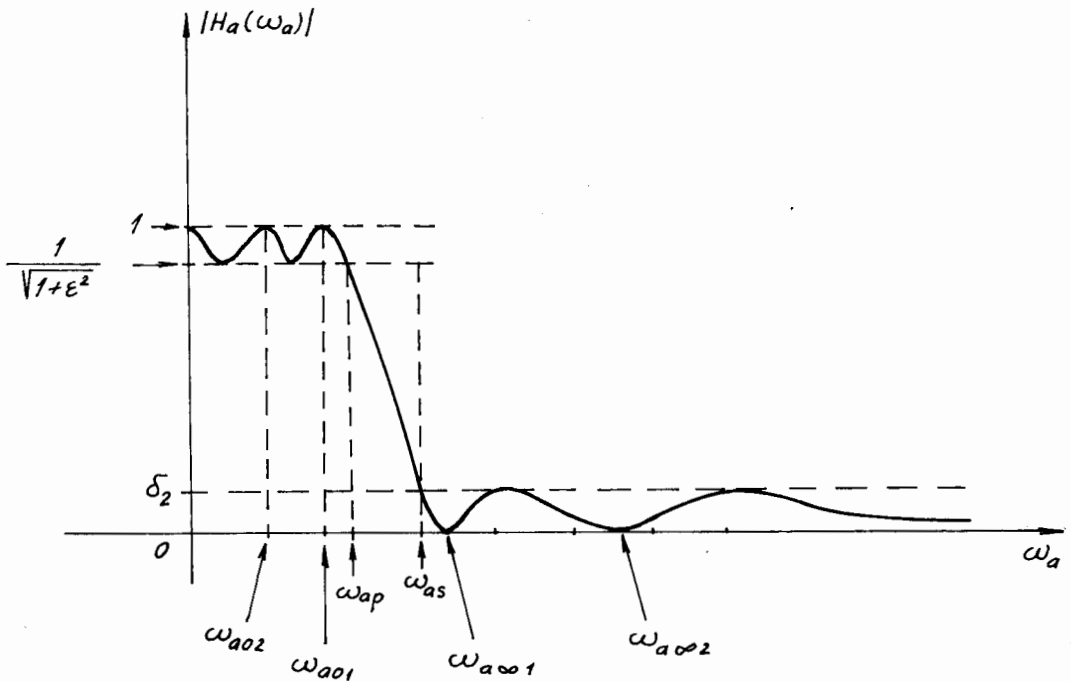
$F_n^2(\omega_a)$ dao động trong khoảng 0 và 1 đối với $|\omega_a| < \omega_{ap}$.

$F_n^2(\omega_a)$ dao động trong khoảng L^2 và vô cùng đối với $|\omega_a| > \omega_{as}$.

Từ đây chúng ta nhận được đáp ứng tần số của bộ lọc Cauchy với $n = 5$ như sau:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a)}}$$

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ được cho trên hình 6.4.4.2.



Hình 6.4.4.2.

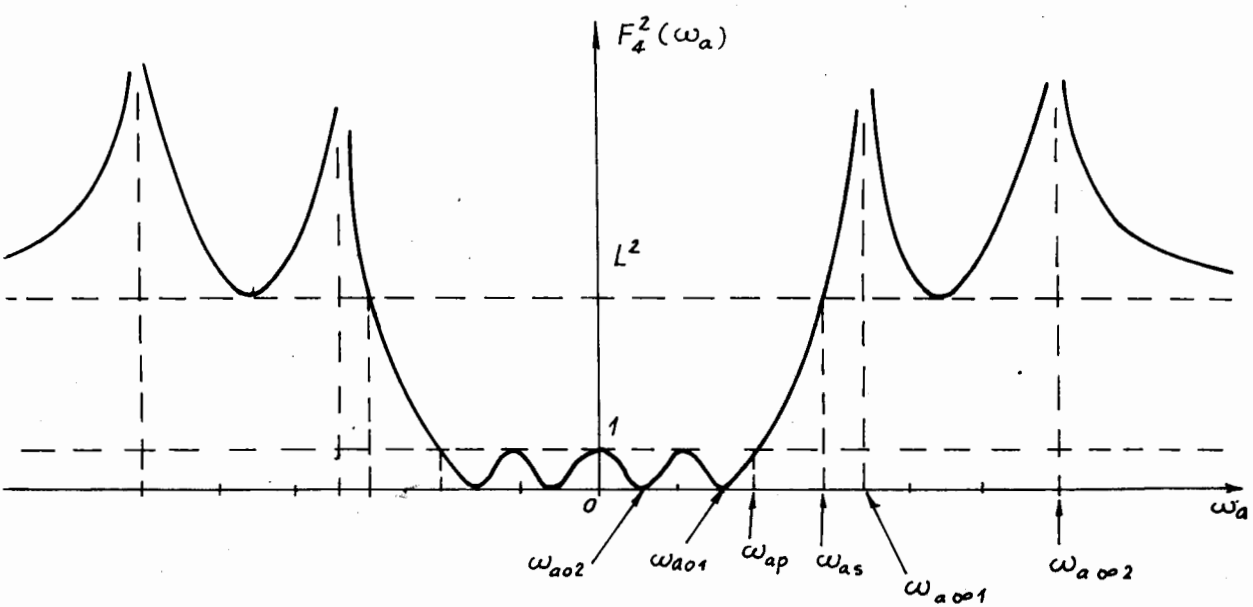
Ví dụ 6.4.4.2

Giả sử cho $n = 4$.

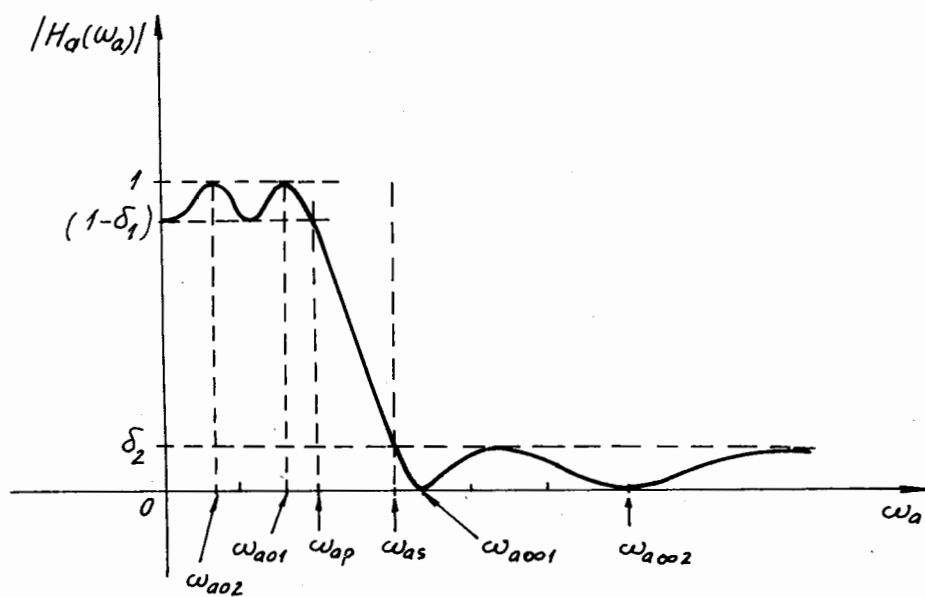
- Hãy xác định ω_{a01} , $\omega_{a\infty 1}$.
- Hãy vẽ dạng của $F_n(\omega_a)$ và $|H_a(\omega_a)|$.

Giải

Các giá trị của ω_{a01} , $\omega_{a\infty 1}$ và dạng của $F_n(\omega_a)$ và $|H_a(\omega_a)|$ được cho trên hình 6.4.4.3 và 6.4.4.4.



Hình 6.4.4.3.



Hình 6.4.4.4.

Ở tần số chuẩn hoá theo kiểu sau đây:

$$\omega_{ac} = \sqrt{\omega_{ap} \cdot \omega_{as}} = 1$$

$$\omega_{ap} = \sqrt{k}$$

$$\omega_{as} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Vậy:

$$k = \frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}}$$

Ở đây k được gọi là hệ số lọc.

Theo kiểu chuẩn hoá ở trên chúng ta có:

$$\omega_{aoi} = \frac{1}{\omega_{as} \omega_i} \quad \text{hoặc} \quad \omega_{as} \omega_i = \frac{1}{\omega_{aoi}}$$

Tức là: $\omega_{aoi} \cdot \omega_{as} \omega_i = 1$

Như thế chúng ta nhận được biểu thức của $F_n(\omega_a)$ như sau:

+ Với n lẻ:

$$F_n(\omega_a) = \frac{(-1)^r \cdot \omega_a}{\sqrt{1}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{\omega_a^2 - \omega_{aoi}^2}{1 - \omega_a^2 \cdot \omega_{aoi}^2} \quad (6.4.4.4)$$

$$r = \frac{n-1}{2}$$

$$\omega_{aoi} = \sqrt{k} \cdot \text{Sn}\left(\frac{2iK}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

+ Với n chẵn:

$$F_n(\omega_a) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{1}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{\omega_a^2 - \omega_{aoi}^2}{1 - \omega_a^2 \cdot \omega_{aoi}^2} \quad (6.4.4.5)$$

$$r = \frac{n}{2}$$

$$\omega_{aoi} = \sqrt{k} \cdot \text{Sn}\left(\frac{(2i-1)K}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ở đây:

$\text{Sn}(x, k)$ là hàm sin elliptique không đầy đủ loại 1 như sau:

$$\text{Sn}(x, k) = \sin \Phi$$

$$x = \int_0^\Phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (6.4.4.6)$$

K được định nghĩa bởi tích phân elliptique đầy đủ loại một:

$$K(k) = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (6.4.4.7)$$

Như vậy $K(k)$ chính là hàm Jacobi.

b) Các điểm cực và các điểm không của $H_a(s)$

Người ta đã tìm được các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ (tức là các điểm không của $L_w(-s^2)$) như sau:

+ Với n lẻ:

$$\begin{aligned} s_{pi} &= \sigma_i + j\omega_{ai} \\ &= \frac{(-1)^i \sigma_0 V_i \pm j\omega_{aoi}.W}{1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \end{aligned} \quad (6.4.4.8)$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\omega_{aoi}^2) \left(1 - \frac{\omega_{aoi}^2}{k}\right)}$$

$$\omega_{aoi} = \sqrt{k} \cdot \text{Sn}\left(\frac{2Ki}{n}, k\right)$$

$$\sigma_0 = \frac{-2q^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cosh 2m\Lambda}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{0,05.LOp} + 1}{10^{0,05.LOp} - 1}$$

Ngoài ra chúng ta có thể tính ω_{aoi} không thông qua hàm sin elliptique theo công thức sau đây:

$$\omega_{aoi} = \frac{2q^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sinh \frac{(2m+1)\pi i}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cosh \frac{2m\pi i}{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \quad (6.4.4.9)$$

$$q \approx q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$q_o = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$n \geq \frac{\log 16D}{\log \frac{1}{q}} \quad (6.4.4.10)$$

$$D = \frac{10^{0,11O_s} - 1}{10^{0,11O_p} - 1}$$

Các điểm không (các điểm cực của $L_a(-s^2)$) như sau:

$$s_{oi} = \pm \frac{j}{\omega_{aoi}}$$

+ Với n chẵn:

$$\begin{aligned} s_{pi} &= \sigma_i + j\omega_{oi} \\ &= \frac{\pm [\sigma_0 V_i + j(-1)^i \omega_{aoi} W]}{1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (6.4.4.11)$$

Các tham số W , V_i và σ_i được tính như trong trường hợp n lẻ, nhưng ω_{aoi} lại được tính như sau:

$$\omega_{aoi} = \sqrt{k} \operatorname{Sn} \left[\frac{(2i-1)K}{n}, k \right] \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

hoặc:

$$\omega_{aoi} = \frac{2q^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin \frac{(2m+1)\pi \left(i - \frac{1}{2}\right)}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \frac{2m\pi \left(i - \frac{1}{2}\right)}{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \quad (6.4.4.12)$$

Từ đây chúng ta nhận được hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc tương tự thông thấp elliptique ở tần số chuẩn hoá như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{D_c(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{li}s + B_{oi}} \quad (6.4.4.13)$$

ở đây:

$$r = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{với } n \text{ lẻ} \\ \frac{n}{2} & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$D_0(s) = \begin{cases} s + \sigma_0 & \text{với } n \text{ lẻ} \\ 1 & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

A_{oi} , B_{1i} , B_{0i} và H_0 được tính bằng các công thức sau:

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$q_0 = \frac{4}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$q \approx q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$D = \frac{10^{0,1LO_s} - 1}{10^{0,1LO_p} - 1}$$

$$n \geq \frac{\log 16/D}{\log \frac{1}{q}}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{0,05,LO_p} + 1}{10^{0,05,LO_p} - 1}$$

$$\sigma_{\rm c} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cosh 2m\Lambda}$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

$$\omega_{oi} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi\mu}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cos \frac{2m\pi\mu}{n}}$$

$$\mu = \begin{cases} i & \text{với } n \text{ lẻ} \\ i - \frac{1}{2} & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\omega_{aoi}^2) \cdot \left(1 - \frac{\omega_{aoi}^2}{k}\right)}$$

$$A_{oi} = \frac{1}{\omega_{aoi}^2}$$

$$B_{oi} = \frac{(\sigma_0 V_i)^2 + (\omega_{aoi} W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2)^2}$$

$$B_{1i} = \frac{2\sigma_0 V_i}{1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2}$$

$$H_0 = \begin{cases} \sigma_0 \cdot \prod_{i=1}^r \frac{B_{oi}}{A_{oi}} & \text{với } n \text{ lẻ} \\ 10^{-0,05L_{Op}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{B_{oi}}{A_{oi}} & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Ví dụ 6.4.4.1

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự thông thấp elliptique như sau:

$$L_{Op} = 0,1 \text{ dB}$$

$$L_{Os} = 50 \text{ dB}$$

$$\omega_{ap} = 0,9486833 \approx \sqrt{0,9}$$

$$\omega_{as} = 1,0540926 \approx \frac{1}{\sqrt{0,9}}$$

Hãy tìm $H_a(s)$?

Giải

$$k = \frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} = \frac{\sqrt{0,9}}{\frac{1}{\sqrt{0,9}}} = 0,9$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - (0,9)^2} = 0,435890$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = 0,102330$$

$$\Rightarrow q = 0,102352$$

$$D = 4.293.090$$

$$\Rightarrow n \geq 7,92$$

Vậy ta chọn $n = 8$ là số chẵn.

$$H_0 = 2,876332 \cdot 10^{-3}$$

$$n = 8 \Rightarrow r = \frac{n}{2} = 4 \quad \text{và} \quad D_0(s) = 1$$

n chẵn nên hàm truyền đạt $H_a(s)$ có dạng sau:

$$H_a(s) = H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{1i}s + B_{oi}}$$

Các hệ số A_{oi} , B_{1i} và B_{oi} được cho trên bảng 6.4.4.1.

Ví dụ 6.4.4.2

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$L O_p = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_p})|} = 0,1 \text{ dB}$$

$$L O_s = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_s})|} = 50 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 0,2819526\pi$$

$$\omega_s = 0,3087732\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Causer bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Cũng giống như các ví dụ về tổng hợp bộ lọc số mà chúng ta đã trình bày ở trên, ở đây chúng ta cũng có 4 bước sau đây:

Bước 1. Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật

Chúng ta có 4 chỉ tiêu kỹ thuật như đầu bài đã cho như sau:

+ Ở dải thông:

$$20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega})|} \leq 0,1 \text{ dB}$$

Tức là:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \frac{1}{10^{0,005}} = \frac{1}{\sqrt{10^{0,01}}} \approx 0,988553$$

+ Ở dải chặn:

$$20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega})|} \geq 50 \text{ dB}$$

Tức là:

$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10^{2.5}} = \frac{1}{\sqrt{10^5}} \approx 0,0031623$$

+ Tần số giới hạn dải thông và dải chắn:

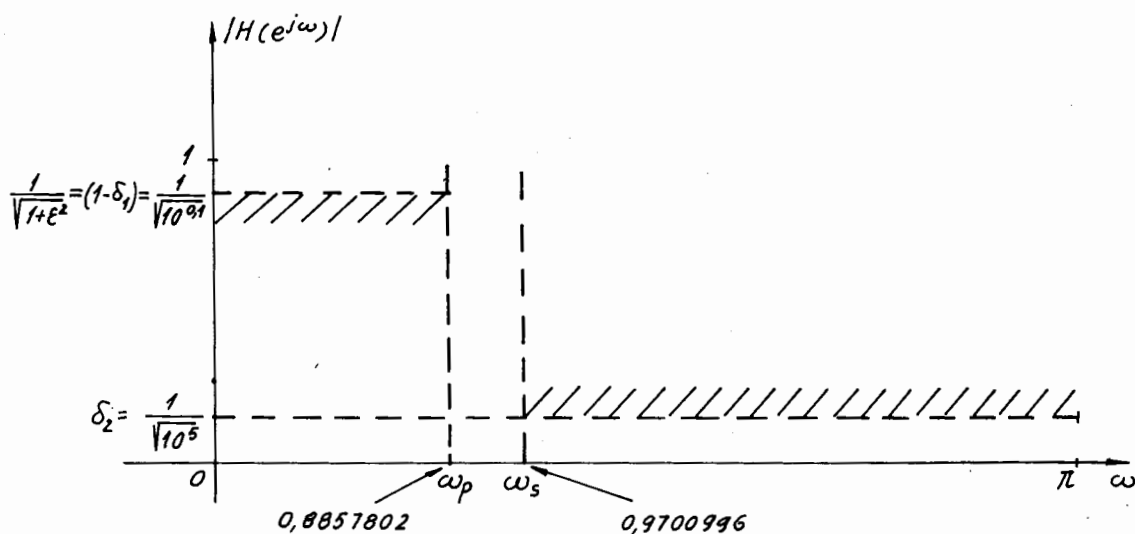
$$\omega_p = 0,2819526\pi$$

$$\approx 0,8857802$$

$$\omega_s = 0,3087932\pi$$

$$\approx 0,9700996$$

Vậy đáp ứng biên độ của bộ lọc số $|H(e^{j\omega})|$ với các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho ở trên sẽ được minh hoạ trên hình 6.4.4.5.



Hình 6.4.4.5.

Bước 2. Xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự.

Chúng ta đã biết rằng khi dùng phương pháp biến đổi song tuyến để chuyển từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số thì ta phải xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự từ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số. Về độ gợn sóng ở dải thông và dải chắn thì không có gì thay đổi nhưng về độ gợn sóng ở dải thông và dải chắn thì có sự sửa đổi như sau:

Ở dải thông:

$$|H_a(\omega_a)| \geq \frac{1}{\sqrt{10^{0,01}}} = 1 - \delta_1$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{0,2819526\pi}{2}\right)$$

Ở dải chắn:

$$|H_a(\omega_a)| \leq \frac{1}{\sqrt{10^5}} = \delta_2$$

$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{0,3087932\pi}{2}\right)$$

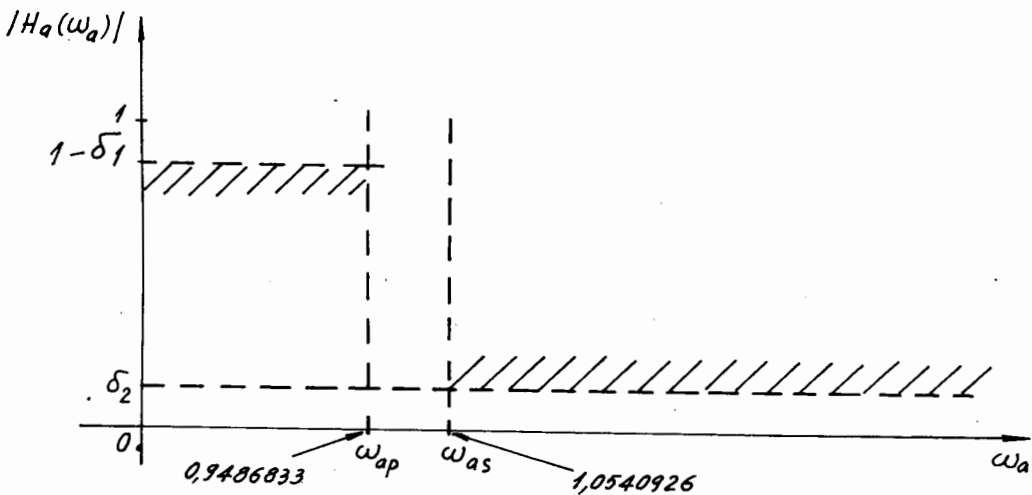
Tính ω_{ap} và ω_{as} theo thang tần số chuẩn hoá ta thu được kết quả sau:

$$\omega_{ap} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,2819526\pi}{2}\right) \approx 0,9486833 \approx \sqrt{0,9}$$

$$\omega_{as} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,3087932\pi}{2}\right) \approx 1,0540926 \approx \frac{1}{\sqrt{0,9}}$$

Vậy $\omega_{ap} \cdot \omega_{as} = 1$.

Đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Cauer với các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho ở trên được minh hoạ trên hình 6.4.4.6.



Hình 6.4.4.6.

Bước 3. Tổng hợp bộ lọc tương tự elliptique

Theo các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho là:

$$LO_p = 0,1 \text{ dB}; \quad \omega_{ap} = 0,9486833$$

$$LO_s = 50 \text{ dB}; \quad \omega_{as} = 1,0540926$$

Chúng ta thu được các kết quả sau đây:

+ Bậc của bộ lọc: $n = 8$.

+ Hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc:

$$H_a(s) = H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{li}s + B_{oi}}$$

$$H_0 = 2,876332 \cdot 10^{-3}$$

Các hệ số A_{oi} , B_{li} , B_{oi} được cho trên bảng 6.4.4.1 sau đây:

Bảng 6.4.4.1

i	A_{oi}	B_{oi}	B_{li}
1	14,34825	0,2914919	0,8711547
2	2,231643	0,6123726	0,4729136
3	1,320447	0,8397386	0,1825141
4	1,128832	0,9264592	0,4471442

Bước 4. Thực hiện biến đổi song tuyến

Trong trường hợp tần số chuẩn hoá ta có:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + A_{oi}}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + B_{li} \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + B_{oi}} \\
 &= H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{4(1-2z^{-1}+z^{-2}) + A_{oi}(1+2z^{-1}+z^{-2})}{4(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 2B_{li}(1-z^{-2}) + B_{oi}(1+2z^{-1}+z^{-2})}
 \end{aligned}$$

Rút gọn lại ta thu được hàm truyền đạt của bộ lọc số như sau:

$$H(z) = H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{(4 + A_{oi})z^{-2} + (2A_{oi} - 8)z^{-1} + (4 + A_{oi})}{(4 - 2B_{li} + B_{oi})z^{-2} + (2B_{oi} - 8)z^{-1} + (4 + 2B_{li} + B_{oi})}$$

6.5. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ

Ở các phần trên chúng ta đã nghiên cứu xong phương pháp tổng hợp các bộ lọc tương tự và các bộ lọc số thông thấp, mà chúng ta chưa nghiên cứu các phương pháp tổng hợp các bộ lọc thông cao, thông dải và chắn dải. Trong thực tế chúng ta không cần phải có phương pháp riêng để tổng hợp các bộ lọc này, mà chúng ta chỉ cần sử dụng một phương pháp gần đúng, đó là phương pháp biến đổi tần số. Tức là bằng cách biến đổi tần số chúng ta sẽ chuyển từ bộ lọc thông thấp cơ bản ban đầu thành các bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải với các chỉ tiêu kỹ thuật mong muốn.

Sau đây chúng ta sẽ lần lượt xét các biến đổi tần số trong miền tương tự và trong miền số.

6.5.1. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ TRONG MIỀN TƯƠNG TỰ

Để có được các dạng khác của bộ lọc tương tự xuất phát từ một bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu chúng ta sẽ sử dụng phép biến đổi từ biến s của hàm truyền đạt $H_a(s)$ thành biến s' của hàm truyền đạt $H_a(s')$ là hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự mong muốn.

Chúng ta có thể viết biến đổi này như sau:

$$s = f(s') \quad (6.5.1.1)$$

a) Biến đổi thông thấp - thông thấp (Lowpass to Lowpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc thông thấp cơ bản ban đầu có tần số cắt là ω_{ac} và hàm truyền đạt là $H_a(s)$, bây giờ chúng ta muốn chuyển nó sang một bộ lọc thông thấp khác có tần số cắt là ω'_{ac} và hàm truyền đạt tương ứng là $H_a(s')$. Khi đó chúng ta sẽ dùng biến đổi tần số tương tự sau đây:

$$s = \lambda s' \quad (6.5.1.2)$$

ở đây: λ là hằng số.

Tức là:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=\lambda s'} \quad (6.5.1.3)$$

Trong biểu thức (6.5.1.2) ta thấy rằng trong mặt phẳng s , nếu $\sigma = 0$ thì $s = j\omega_a$ và $s' = j\omega'_a$, khi đó ta có thể viết như sau:

$$\lambda = \frac{s}{s'} = \frac{j\omega_a}{j\omega'_a} \Rightarrow \omega'_a = \frac{\omega_a}{\lambda}$$

tức là tần số được biến đổi theo hệ số λ .

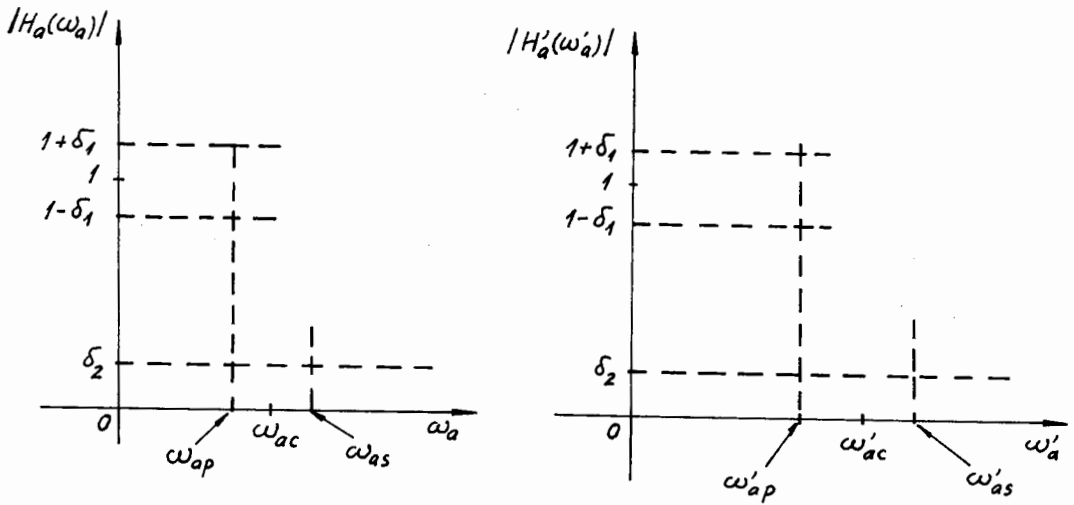
Như vậy chỉ có tần số được biến đổi, còn độ gợn sóng ở dải thông δ_1 và độ gợn sóng ở dải chắn δ_2 sẽ giữ nguyên không đổi. Nếu chúng ta lấy tần số chuẩn là tần số cắt ω_{ac} thì giá trị của λ được tính như sau:

$$\lambda = \frac{\omega_{ac}}{\omega'_{ac}} \quad (6.5.1.4)$$

Vậy nếu bộ lọc thông thấp ban đầu khi chúng ta đã thiết kế ra được chuẩn hoá theo tần số cắt ω_{ac} , tức là $\omega_{ac} = 1$ thì λ sẽ có giá trị sau:

$$\lambda = \frac{1}{\omega'_{ac}} \quad (6.5.1.5)$$

Đồ thị minh hoạ biến đổi tần số tương tự thông thấp - thông thấp với hệ số $\lambda < 1$ được cho trên hình 6.5.1.1.



Hình 6.5.1.1.

Ví dụ 6.5.1.1

Giả sử sau khi tổng hợp chúng ta thu được một bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth ở tần số chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự thông thấp tương ứng với hệ số biến đổi tần số $\lambda = \frac{2}{3}$.

Giải Theo biểu thức (6.5.1.3) ta có:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{3}s'} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}s' - \frac{2}{3}s'_{pk} \right)} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^n}{\prod_{k=1}^n (s' - s'_{pk})}$$

b) Biến đổi thông thấp - thông cao (Lowpass to Highpass Transformation)

Từ một bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ với tần số cắt là ω_{ac} , chúng ta có thể biến đổi thành bộ lọc tương tự thông cao có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ và với tần số cắt là ω'_{ac} nhờ phép biến đổi sau đây:

$$s = \frac{\lambda}{s'} \quad (6.5.1.6)$$

ở đây λ là hằng số.

Tức là:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=\frac{\lambda}{s'}} \quad (6.5.1.7)$$

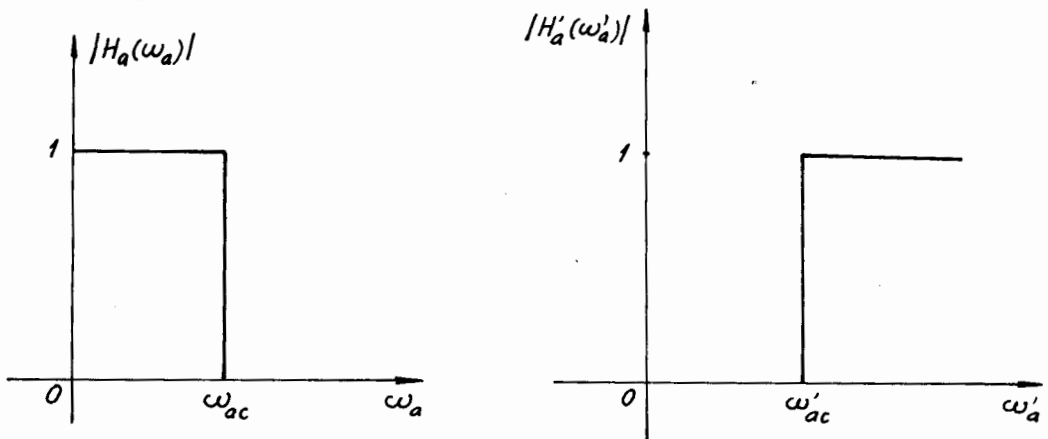
Trong trường hợp này λ được tính như sau:

$$\lambda = \omega_{ac} \omega'_{ac} \quad (6.5.1.8)$$

Nếu bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu đã được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hoá tức là $\omega_{ac} = 1$ thì λ sẽ có giá trị như sau:

$$\lambda = \omega'_{ac} \quad (6.5.1.9)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông cao trong trường hợp bộ lọc lý tưởng được cho trên hình 6.5.1.2.



Hình 6.5.1.2

Ví dụ 6.5.1.2

Giả sử sau khi tổng hợp chúng ta thu được một bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth ban đầu ở tần số chuẩn hoá bởi tần số cắt ω_{ac} ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự thông cao tương ứng với hệ số biến đổi tần số là λ :

Giải

Áp dụng biểu thức (6.5.1.6) và (6.5.1.7) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s') &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{\lambda}{s'}} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{\lambda}{s'} - \frac{\lambda}{s'_{pk}} \right)} \end{aligned}$$

c) Biến đổi thông thấp - thông dải (Lowpass to Bandpass Transformation)

Giả sử từ bộ lọc thông thấp tương tự cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ và với tần số cắt là ω_{ac} , chúng ta cần biến đổi thành bộ lọc thông dải tương tự có hàm truyền đạt là $H_a(s')$ với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} . Chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số sau đây:

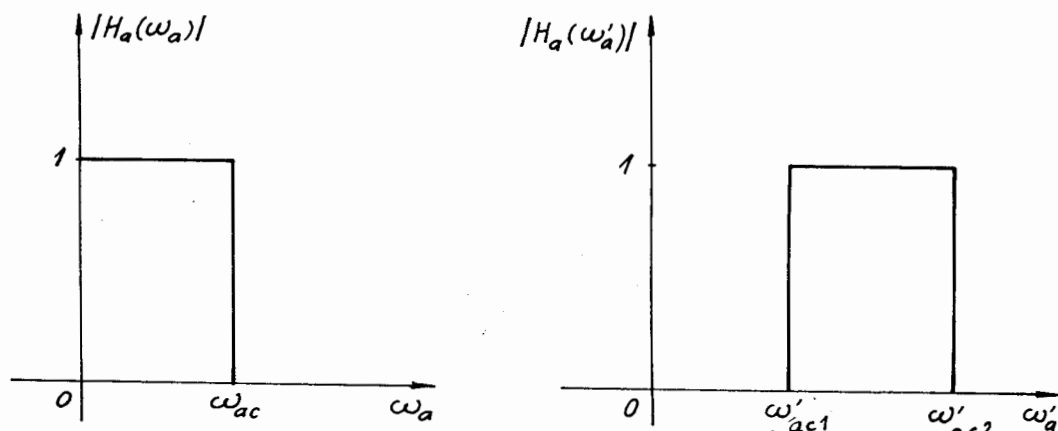
$$s = f(s') = \omega_{ac} \frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}}{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})} \quad (6.5.1.10)$$

Nếu bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện như sau:

$$s = f(s') = \frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}}{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})} \quad (6.5.1.11)$$

và ta có: $H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=f(s')} \quad (6.5.1.12)$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông dải trong trường hợp bộ lọc lý tưởng được cho trên hình 6.5.1.3.



Hình 6.5.1.3.

Ví dụ 6.5.1.3

Hãy biến đổi bộ lọc tương tự thông thấp đơn giản với tần số cắt chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

thành bộ lọc tương tự thông dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .

Giải

Theo các biểu thức (6.5.1.11) và (6.5.1.12) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s') &= \frac{1}{\frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}}{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})} + 1} \\ &= \frac{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})}{s'^2 + s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1}) + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \end{aligned}$$

d) Biến đổi thông thấp - chắn dải (Lowpass to Bandstop Transformation)

Giả sử từ bộ lọc thông thấp tương tự cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ với tần số cắt là ω_{ac} , chúng ta cần biến đổi thành bộ lọc tương tự chắn dải có hàm truyền đạt là $H_a(s')$ với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} . Chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số sau đây:

$$s = f(s') = \omega_{ac} \frac{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})}{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \quad (6.5.1.13)$$

Nếu bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) thì phép biến đổi tần số sẽ được thực hiện theo biểu thức sau đây:

$$s = f(s') = \frac{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})}{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \quad (6.5.1.14)$$

và ta có:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=f(s')} \quad (6.5.1.15)$$

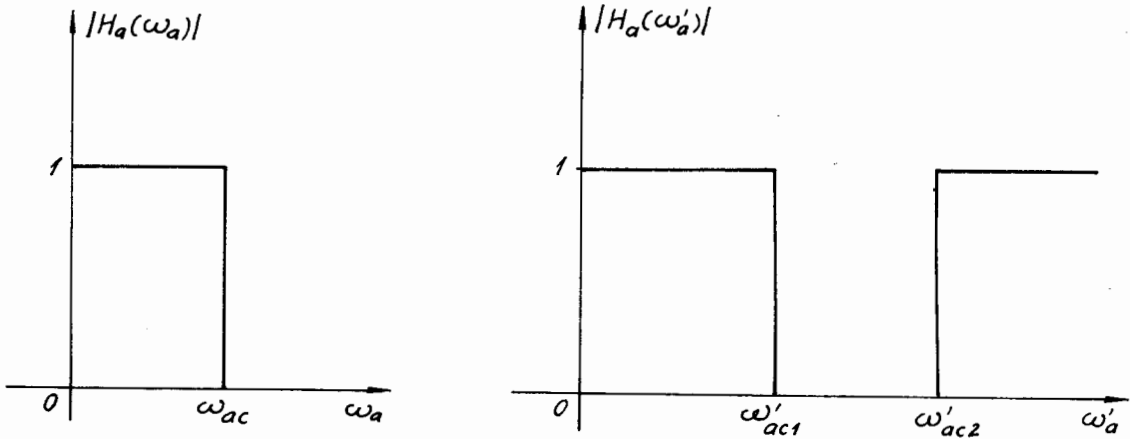
Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - chắn dải trong trường hợp bộ lọc lý tưởng được cho trên hình 6.5.1.4.

Ví dụ 6.5.1.4

Hãy biến đổi bộ lọc tương tự thông thấp đơn giản với tần số chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

thành bộ lọc tương tự chắn dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .



Hình 6.5.1.4.

Giải

Theo các biểu thức (6.5.1.14) và (6.5.1.15) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s') &= \frac{1}{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1}) + 1} \\ &= \frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}}{s'^2 + s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1}) + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \end{aligned}$$

6.5.2. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ TRONG MIỀN SỐ

Cũng giống như trong miền tương tự, trong miền số chúng ta cũng có thể thực hiện phép biến đổi tần số để biến đổi bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu thành bộ lọc số thông thấp, thông cao, thông dải hoặc chắn dải. Phép biến đổi tần số trong miền số là thay thế biến z^{-1} bởi hàm $f(z'^{-1})$ và phải đảm bảo tính ổn định của hệ thống mới.

Phép biến đổi tổng quát được cho bởi công thức sau đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^K \frac{z'^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z'^{-1}} \quad (6.5.2.1)$$

ở đây $|\alpha_k| < 1$ để đảm bảo tính ổn định.

a) Biến đổi thông thấp - thông thấp (Lowpass to Lowpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , bây giờ chúng ta muốn chuyển nó thành một bộ lọc số thông thấp khác với tần số cắt là ω'_c và có hàm truyền đạt là $H(z')$. Khi đó phép biến đổi tần số được cho bởi biểu thức sau đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = \frac{z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z'^{-1}} \quad (6.5.2.2)$$

với

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2} T_s\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.3)$$

T_s là chu kỳ lấy mẫu.

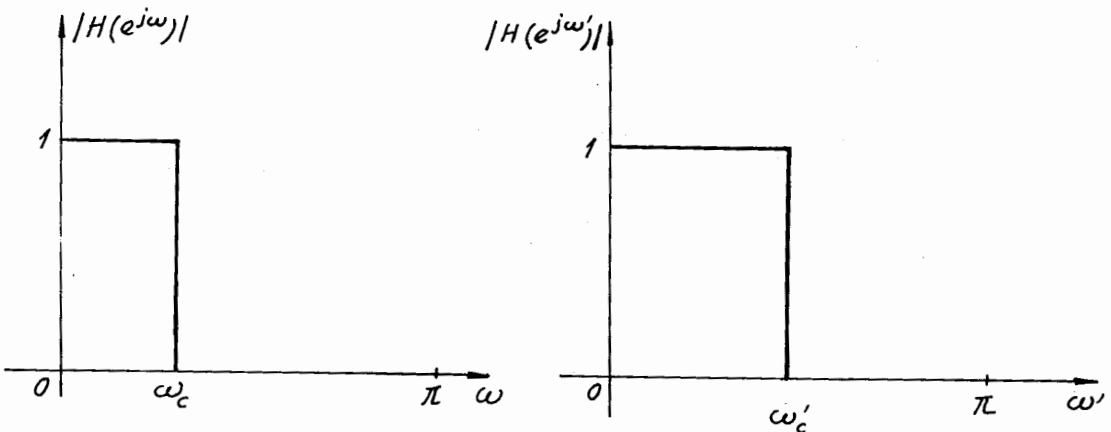
Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của hệ số α được tính như sau:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2}\right)} \quad (6.5.2.4)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1} = f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.5)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông thấp đối với bộ lọc số lý tưởng được cho trên hình 6.5.2.1 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu.



Hình 6.5.2.1.

Ví dụ 6.5.2.1

Cho bộ lọc số thông thấp với tần số cắt $\omega_c = 0,1\pi$ và hàm truyền đạt $H(z)$ của nó có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{0,0030012 \cdot (1 + z^{-1})^3}{(1 - 0,8548248 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - 1,5751076 \cdot z^{-1} + 0,7404914 \cdot z^{-2})}$$

Hãy biến đổi bộ lọc số này thành bộ lọc số thông thấp với tần số cắt $\omega'_c = 0,3\pi$.

Giải

Áp dụng biểu thức (6.5.2.4) để tính α trong trường hợp tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s :

$$\alpha = \frac{\sin \frac{0,1\pi - 0,3\pi}{2}}{\sin \frac{0,1\pi + 0,3\pi}{2}} = \frac{-0,309017}{0,5877853} = -0,5257311$$

Áp dụng biểu thức (6.5.2.2) ta có:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = \frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 \cdot z'^{-1}}$$

Áp dụng biểu thức (6.5.2.5) ta có:

$$H(z') = \frac{0,0030012 \left(1 + \frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right)}{\left[1 - 0,8548248 \left(\frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right) \right] \cdot \frac{1}{\left[1 - 1,5751076 \left(\frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right) + 0,7404914 \left(\frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right)^2 \right]}}$$

Sau khi tính toán ta thu được kết quả cuối cùng sau đây:

$$H(z') = \frac{0,0514122 (1 + z'^{-1})^3}{(1 - 0,5977088 z'^{-1}) (1 - 0,479047 z'^{-1} + 0,5013543 \cdot z'^{-2})}$$

b) Biến đổi thông thấp - thông cao (Lowpass to highpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , bây giờ chúng ta cần chuyển thành bộ lọc số thông cao có hàm truyền đạt là $H(z')$ với tần số cắt là ω'_c . Khi đó phép biến đổi tần số sẽ được thực hiện bởi biểu thức sau đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = - \frac{z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z'^{-1}} \quad (6.5.2.6)$$

với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2} T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.7)$$

T_s là chu kỳ lấy mẫu.

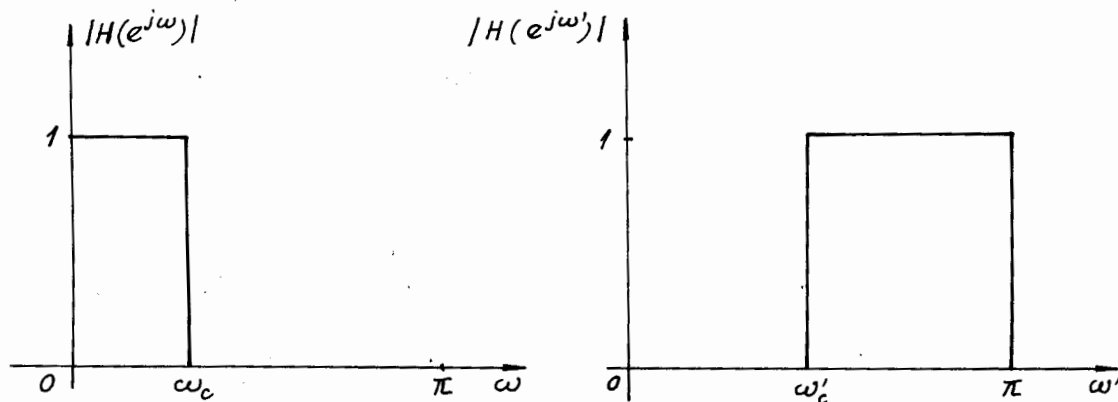
Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của hệ số α được tính như sau:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2}\right)} \quad (6.5.2.8)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1}=f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.9)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông cao đối với bộ lọc số lý tưởng được trình bày trên hình 6.5.2.2 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu.



Hình 6.5.2.2.

c) Biến đổi thông thấp - thông dải (Lowpass to Bandpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , bây giờ chúng ta cần chuyển thành bộ lọc số thông dải có hàm truyền đạt là $H(z')$ với tần số cắt dưới là ω'_{c1} và tần số cắt

trên là ω'_{c2} . Khi đó chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số được cho bởi biểu thức dưới đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = - \frac{z'^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z'^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{2\alpha k}{k+1} z'^{-1} + \frac{k-1}{k+1} z'^{-2}} \tag{6.5.2.10}$$

với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2} T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right)} \tag{6.5.2.11}$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} T_s\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right) \tag{6.5.2.12}$$

Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của α và k được tính như sau:

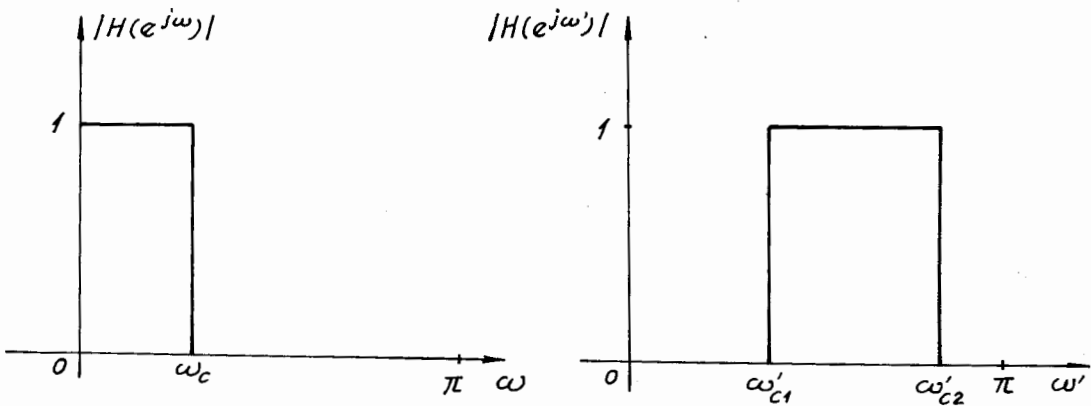
$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right)} \tag{6.5.2.13}$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right) \tag{6.5.2.14}$$

và ta có:

$$H(z') = H(z)\Big|_{z^{-1}=f(z'^{-1})} \tag{6.5.2.15}$$

Phép biến đổi tần số thông thấp - thông dải đối với bộ lọc số lý tưởng được minh hoạ trên hình 6.5.2.3 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s .



Hình 6.5.2.3.

d) Biến đổi thông thấp - chặn dải (Lowpass to Bandstop Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , chúng ta cần chuyển thành bộ lọc số chặn dải có hàm truyền đạt là $H(z')$ với tần số cắt dưới là ω'_{c1} và tần số cắt trên là ω'_{c2} . Khi đó chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số được cho bởi biểu thức dưới đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = - \frac{z'^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} z'^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{1 - \frac{2\alpha}{k+1} z'^{-1} + \frac{1-k}{1+k} z'^{-2}} \quad (6.5.2.16)$$

với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2} T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.17)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} T_s\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right) \quad (6.5.2.18)$$

Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của α và k được tính như sau:

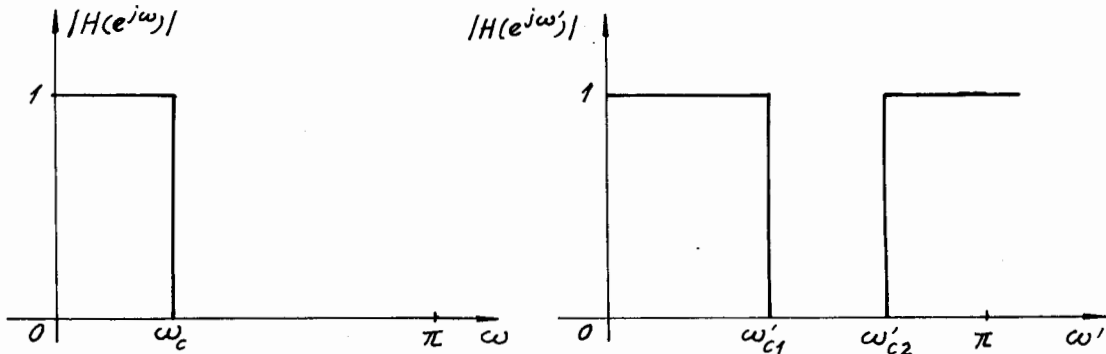
$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right)} \quad (6.5.2.19)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right) \quad (6.5.2.20)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1} = f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.21)$$

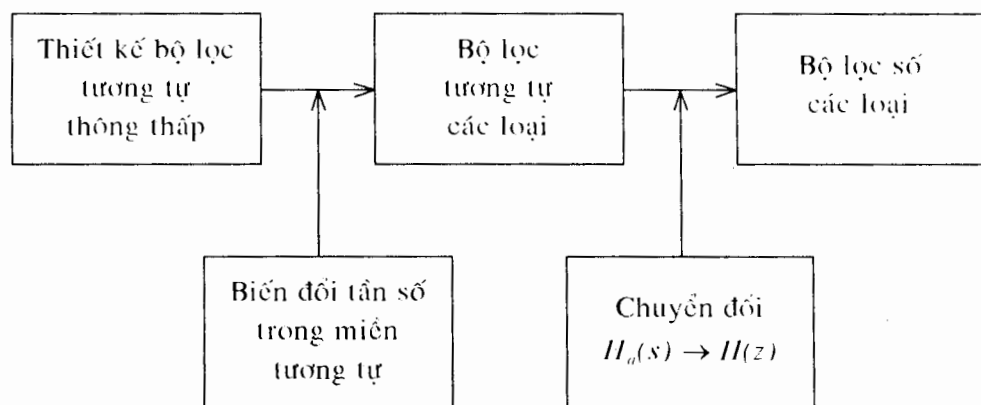
Phép biến đổi tần số thông thấp - chặn dải với bộ lọc số lý tưởng được minh hoạ trên hình 6.5.2.4 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s .



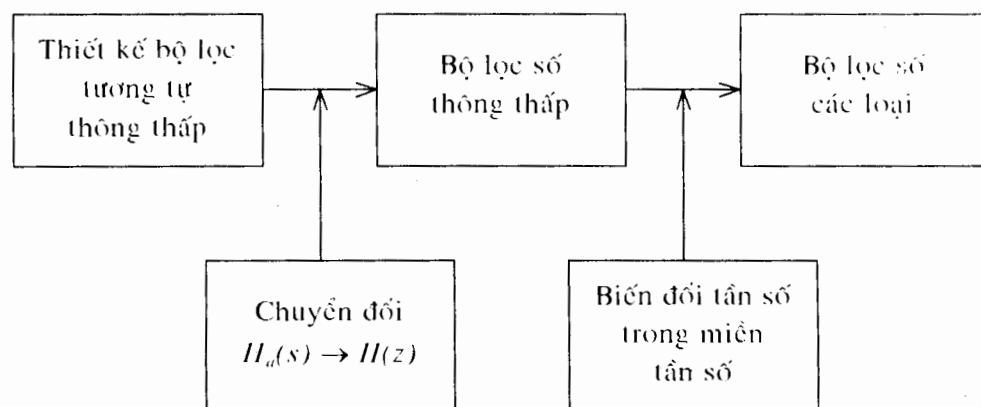
Hình 6.5.2.4.

6.5.3. KẾT LUẬN

Qua các phép biến đổi tần số trong miền tương tự và miền số, chúng ta thấy rằng có hai phương pháp thiết kế bộ lọc số các loại, xuất phát từ việc thiết kế bộ lọc tương tự thông thấp. Hai phương pháp này được minh hoạ trên hình 6.5.3.1 a và b.



(a)



(b)

Hình 6.5.3.1.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài tập 6.1

Hãy tính toán thời gian truyền nhóm của một bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Bài tập 6.2

Hãy tính toán biên độ $|H(e^{j\omega})|$ và pha $\varphi(\omega)$ của bộ lọc số IIR được cho bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = x(n) + b_1x(n-1) - a_1y(n-1)$$

Bài tập 6.3

Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp bất biến xung. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.4

Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp bất biến xung. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.5

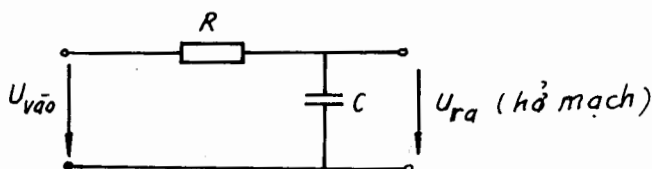
Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp bất biến xung. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.6

Cho mạch lọc thông thấp tương tự sau đây:



Hình BT 6.6.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp bất biến xung.

Bài tập 6.7

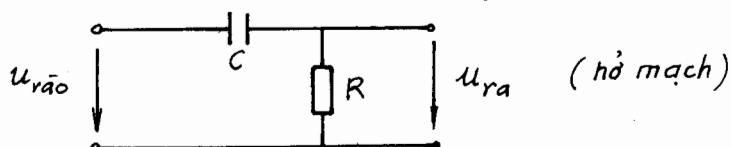
Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_o(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp biến đổi song tuyến. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.8

Cho mạch điện tương tự sau đây:

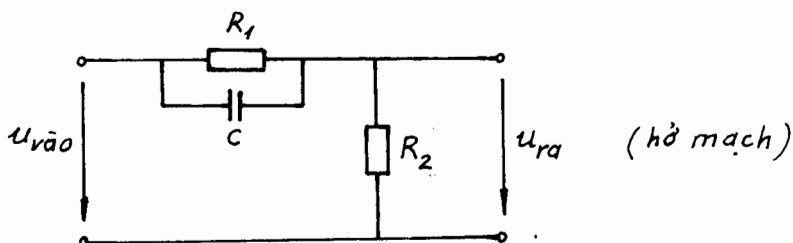


Hình BT 6.8.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.9

Cho mạch điện tương tự sau đây:

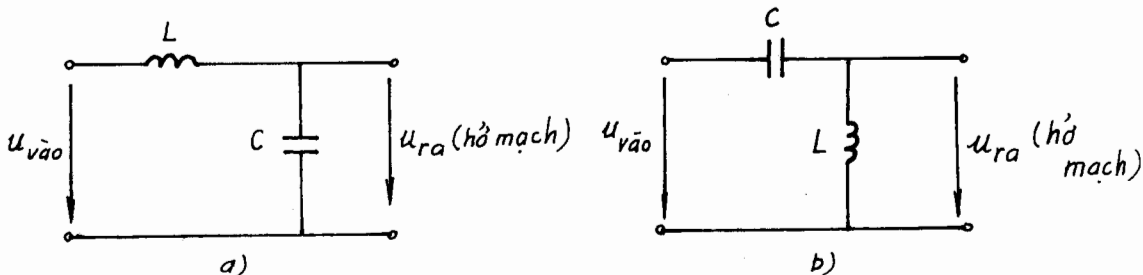


Hình BT 6.9.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.10

Cho các mạch điện tương tự sau đây:



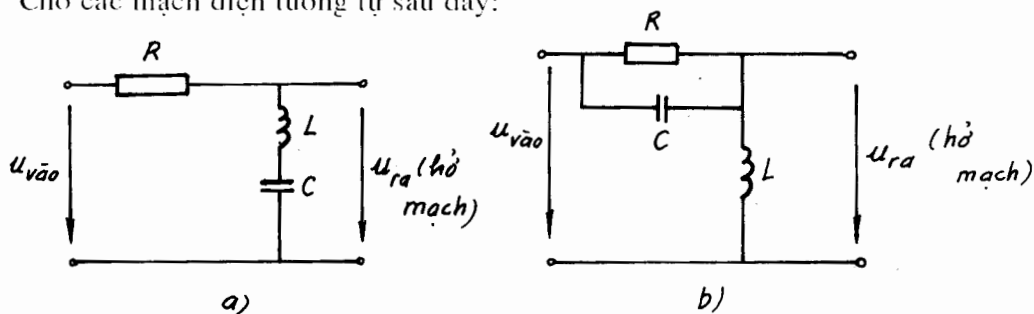
Hình BT 6.10.

Hãy chuyển các mạch này thành mạch số bằng phương pháp:

- Phương pháp biến đổi song tuyến;
- Phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.11

Cho các mạch điện tương tự sau đây:



Hình BT 6.11.

Hãy chuyển các mạch này thành mạch số bằng phương pháp:

- Phương pháp biến đổi song tuyến;
- Phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.12

Cho hàm truyền đạt của hệ thống tương tự như sau:

$$H_u(s) = \frac{s^2 + 7s + 10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)(s^2 + 4s + 3)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống số tương ứng bằng phương pháp biến đổi z thích ứng.

- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống số.

Bài tập 6.13

Hãy chứng minh rằng trong biểu thức (6.4.2.7) đối với cả n chẵn và n lẻ thì các điểm cực của bộ lọc tương tự Butterworth được tính bằng công thức sau đây:

$$s_{pk} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Bài tập 6.14

Từ biểu thức (6.4.2.9) và (6.4.2.10) sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)} \quad \text{ở dải thông}$$

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)} \quad \text{ở dải chặn}$$

Hãy chứng minh công thức tính bậc của bộ lọc n trong biểu thức (6.4.2.11) sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \omega_{as} - \lg \omega_{ap}}$$

Bài tập 6.15

Hãy chứng minh các công thức tìm $H_a(s)$ đối với bộ lọc tương tự Butterworth trong trường hợp bậc của bộ lọc n là số chẵn và n là số lẻ như sau:

Với n là số chẵn:

- Ở tần số chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[s^2 + 2 \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + 1 \right]} \quad (6.4.2.16)$$

- Ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.17)$$

Với n là số lẻ:

- Ở tần số chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2 \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.18)$$

- Ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{1}{s + \omega_{ac}} \cdot \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.19)$$

Bài tập 6.16

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \quad \omega_p = 0,1\pi; \quad \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng các phương pháp:

- + phương pháp tương đương vi phân;
- + phương pháp bất biến xung.

Bài tập 6.17

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,05; \quad \omega_p = 0,2\pi; \quad \omega_s = 0,3\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.18

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \quad \omega_p = 0,1\pi; \quad \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại I bằng các phương pháp:

- + phương pháp tương đương vi phân;
- + phương pháp bất biến xung.

Bài tập 6.19

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = 0,05; \quad \delta_2 = 0,08; \quad \omega_p = 0,3\pi; \quad \omega_s = 0,4\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự Chebyshev loại I bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.20

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = 0,03; \quad \delta_2 = 0,09; \quad \omega_p = 0,4\pi; \quad \omega_s = 0,6\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự Chebyshev loại I bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.21

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$LO_p = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_p})|} = 0,1 \text{ dB}$$

$$LO_s = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_s})|} = 50 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 0,2\pi; \quad \omega_s = 0,3\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Caucer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.22

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$LO_p = 10 \text{ dB}; \quad LO_s = 30 \text{ dB}; \quad \omega_p = 0,3\pi; \quad \omega_s = 0,5\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Caucer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.23

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \quad \omega_p = 0,4\pi; \quad \omega_s = 0,6\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Caucer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.24

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = 0,07; \quad \delta_2 = 0,09; \quad \omega_p = 0,5\pi; \quad \omega_s = 0,6\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Caucer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.25

Giả sử chúng ta có bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu (dạng của bộ lọc tương tự Butterworth) với hàm truyền đạt như sau:

$$H_a(s) = \frac{\omega_{ac}}{s + \omega_{ac}}$$

Hãy biến đổi bộ lọc tương tự thông thấp với tần số cắt là ω_{ac} này thành:

- Bộ lọc tương tự thông thấp khác với tần số cắt $\omega'_{ac} = 1,5\omega_{ac}$.
- Bộ lọc tương tự thông cao với tần số cắt $\omega'_{ac} = 2\omega_{ac}$.
- Bộ lọc tương tự thông dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .
- Bộ lọc tương tự chắn dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .

Bài tập 6.26

Cho bộ lọc số thông thấp Butterworth có hàm truyền đạt $H(z)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(z) = \frac{0,25(1+z^{-1})}{1-0,51z^{-1}}$$

Bộ lọc số này có tần số cắt $\omega_c = 0,2\pi$.

Hãy biến đổi bộ lọc số này thành:

- Bộ lọc số thông thấp khác với tần số cắt $\omega'_c = 0,1\pi$.
- Bộ lọc số thông cao với tần số cắt $\omega'_c = 0,3\pi$.
- Bộ lọc số thông dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/3$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/2$.
- Bộ lọc số chắn dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/4$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/3$.

Bài tập 6.27

Cho bộ lọc số thông thấp có hàm truyền đạt $H(z)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(z) = \frac{0,003(1+z^{-1})^3}{(1-0,855z^{-1})(1-0,575z^{-1}+0,740z^{-2})}$$

Bộ lọc số này có tần số cắt $\omega_c = 0,1\pi$.

Hãy biến đổi bộ lọc số này thành:

- Bộ lọc số thông thấp khác với tần số cắt $\omega'_c = 0,2\pi$.

b) Bộ lọc số thông cao với tần số cắt $\omega'_c = \pi/4$.

c) Bộ lọc số thông dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/4$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/2$.

d) Bộ lọc số chắn dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/5$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/3$.

Bài tập 6.28

Hãy thiết kế bộ lọc số thông cao Butterworth với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,08; \omega_p = \pi/3; \omega_s = \pi/2$$

Dùng hai phương pháp đi từ bộ lọc thông thấp tương tự được minh hoạ trên hình 6.5.3.1 a và b.

Bài tập 6.29

Hãy thiết kế bộ lọc số thông dải Butterworth với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\delta_1 = 0,07; \delta_2 = 0,1;$$

$$\omega_{p1} = 0,2\pi; \omega_{s1} = 0,3\pi$$

$$\omega_{p2} = 0,5\pi; \omega_{s2} = 0,6\pi$$

Dùng hai phương pháp đi từ bộ lọc thông thấp tương tự được minh hoạ trên hình 6.5.3.1 a và b.

Bài tập 6.30

Hãy thiết kế bộ lọc số thông cao Chebyshev loại I với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\delta_1 = 0,05; \delta_2 = 0,1; \omega_p = \pi/4; \omega_s = \pi/3.$$

Chương 7

CẤU TRÚC VÀ ĐỘ NHAY CỦA CÁC BỘ LỌC SỐ

7.1. MỞ ĐẦU

Chúng ta đã nghiên cứu các loại bộ lọc số tuyến tính bất biến khác nhau cũng như việc tính toán bậc của bộ lọc số sao cho phải tôn trọng các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho là $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$:

$$n = f(\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s) \quad (7.1.1.1)$$

Từ việc tính toán bậc của bộ lọc chúng ta đã tính được giá trị các hệ số của bộ lọc (như là hệ số a_k và b_r) nhưng các hệ số này là các hệ số chính xác để có được bộ lọc theo đúng yêu cầu (ta còn nói rằng các hệ số này có giá trị liên tục). Nhưng để thực hiện vật lý một bộ lọc số thì các giá trị của hệ số bộ lọc phải được biểu diễn ở dạng mã nhị phân, điều này dẫn đến sai số so với giá trị chính xác của bộ lọc bởi vì rằng số bit mà chúng ta mã hoá là hữu hạn. Sai số lượng tử hoá có hai kiểu: cắt bỏ hoặc làm tròn.

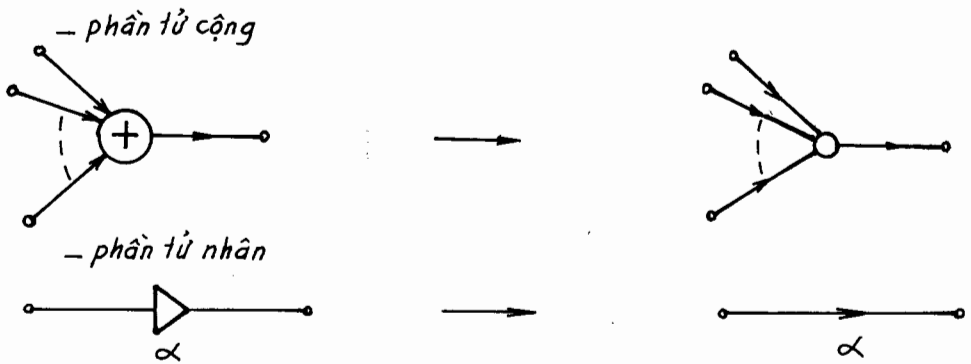
Các sai số này có thể được giảm đi nhờ một số tiêu chuẩn mã hoá nào đó và các sai số này cũng có thể được giảm đi nếu chúng ta chọn được cấu trúc thích hợp của bộ lọc, như là nhờ cách chọn một cấu trúc đặc biệt có thể giảm độ nhạy của đáp ứng tần số (hoặc hàm truyền đạt) đối với sai số lượng tử hoá các hệ số của bộ lọc.

Trong chương 1 và chương 2 chúng ta đã nghiên cứu một số cấu trúc của các hệ thống FIR và IIR với các phần tử thực hiện là trễ, cộng và nhân.

Nhưng để có thể biểu diễn dễ dàng hơn trên màn hình của máy tính người ta có thể sử dụng graphe tín hiệu có hướng như cho trên hình 7.1.1.1.



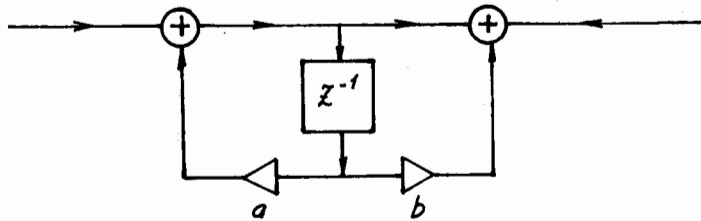
Hình 7.1.1.1.



Hình 7.1.1.1 (tiếp theo).

Ví dụ 7.1.1.1

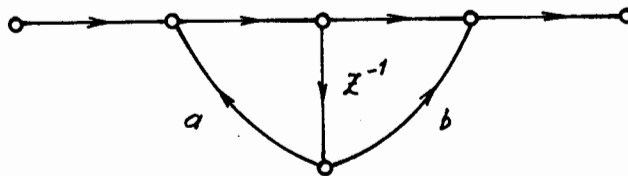
Hãy biểu diễn bộ lọc số bậc 1 cho trên hình 7.1.1.2 dưới dạng graphe có hướng.



Hình 7.1.1.2.

Giải

Kết quả cho trên hình 7.1.1.3.



Hình 7.1.1.3.

7.2. CẤU TRÚC CỦA BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI HỮU HẠN

Trong chương 5 chúng ta đã nghiên cứu khá chi tiết các phương pháp tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn và đã đưa ra một loại cấu trúc trực tiếp của bộ lọc.

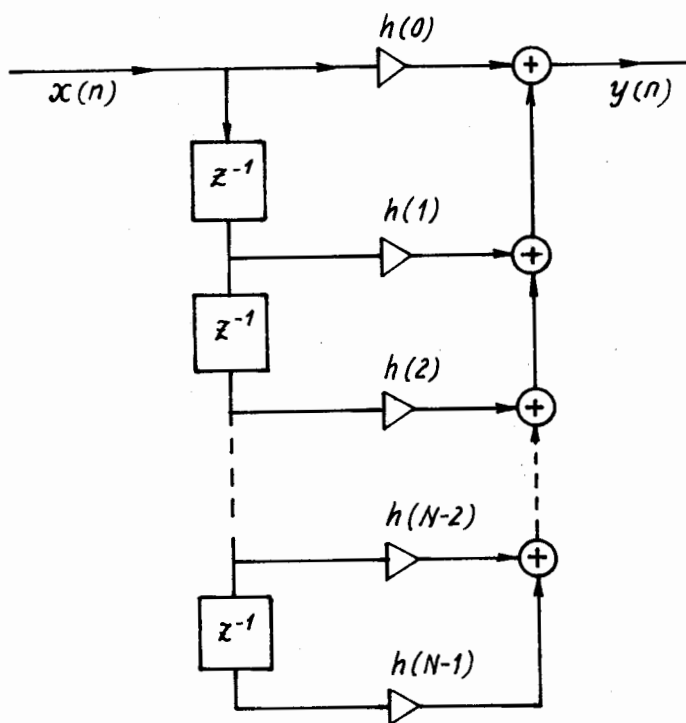
Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một số loại cấu trúc tiêu biểu nữa, mỗi một loại sẽ có một số ưu nhược điểm riêng của nó.

7.2.1. CẤU TRÚC TRỰC TIẾP CHUẨN TẮC

Loại cấu trúc này chúng ta đã nghiên cứu ở chương 1 và chương 5, tức là suy trực tiếp từ phương trình sai phân biểu diễn quan hệ vào ra của bộ lọc. Quan hệ vào ra của bộ lọc FIR, như ta đã biết, được cho trực tiếp theo quan hệ (7.2.1.1) sau đây:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$
$$= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x[n-(N-1)] \quad (7.2.1.1)$$

Quan hệ (7.2.1.1) ở trên dẫn đến sơ đồ thực hiện cho trên hình 7.2.1.1, cấu trúc này được gọi là cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc.



Hình 7.2.1.1.

Chú ý

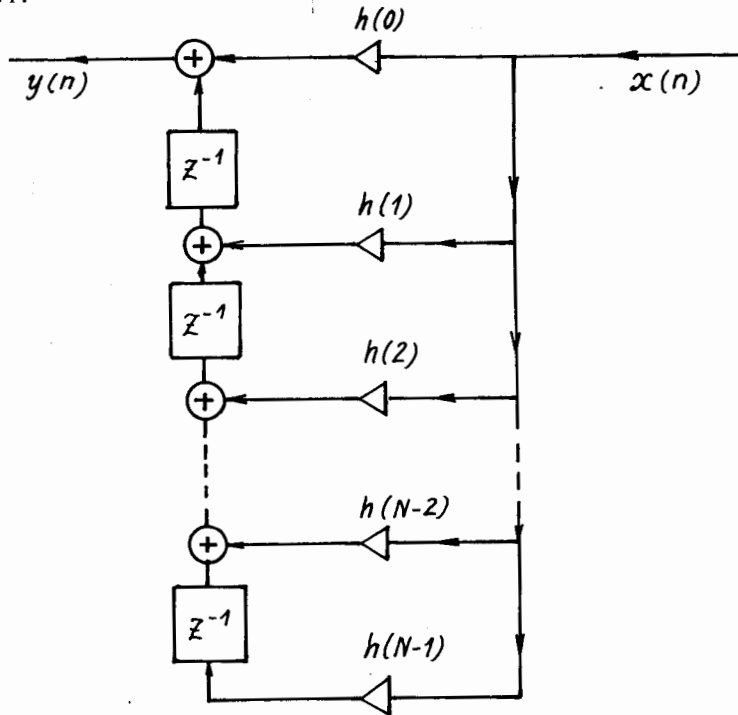
Mạch điện phải đảm bảo sự vận hành của bộ lọc số FIR loại này phải thực hiện ba thao tác cơ bản sau đây:

- nạp vào bộ nhớ;
- phép nhân;
- phép cộng.

Vậy để thực hiện sơ đồ đã cho cần phải có N bộ nhớ số liệu và đối với mỗi một số ở đầu ra cần phải thực hiện N phép nhân và $N - 1$ phép cộng.

7.2.2. CẤU TRÚC TRỰC TIẾP CHUYỂN VỊ

Việc chuyển vị graphe cho ta một cấu trúc mới, gọi là cấu trúc chuyển vị, cấu trúc này được biểu diễn trên hình 7.2.2.1, đây là cấu trúc chuyển vị của cấu trúc cho trên hình 7.2.1.1.



Hình 7.2.2.1

Chú ý

Nhìn vào cấu trúc loại này ta thấy rằng nó dẫn đến việc thực hiện phép nhân mỗi một số liệu vào $x(n)$ với tất cả các hệ số của bộ lọc, mặt khác các bộ nhớ sẽ lưu trữ các tổng riêng, bởi vì ở thời điểm n bộ nhớ đầu tiên sẽ lưu trữ số $h(N-1)x(n)$ và tiếp theo là: $h(N-1)x(n-1) + h(N-2)x(n)$, rồi đến: $h(N-1)x(n-2) + h(N-2)x(n-1) + h(N-3)x(n)$, ... và cuối cùng là $y(n)$.

Như vậy sự khác nhau giữa hai cấu trúc trên là vị trí của các bộ nhớ.

7.2.3. CẤU TRÚC CHUẨN TẮC DẠNG TẦNG

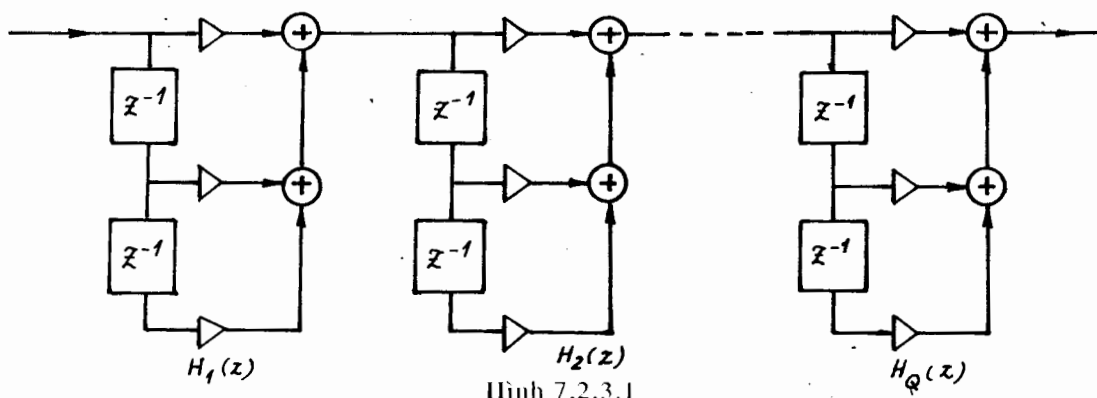
Chúng ta đều biết rằng chúng ta có thể thực hiện phân hoạch hàm $H(z)$ thành tích các hàm cơ sở bậc một hoặc bậc hai.

Việc phân hoạch này tương ứng với cấu trúc dạng tầng, tức là bộ lọc sẽ được thực hiện bởi một dãy các tế bào bậc một, bậc hai, ... ghép nối, tiếp với nhau.

Giả sử chúng ta có thể phân $H(z)$ thành các hệ bậc hai như sau:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^Q (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

Từ đây ta thu được cấu trúc dạng tầng trên hình 7.2.3.1 dưới đây:



Hình 7.2.3.1

7.2.4. CẤU TRÚC CHUẨN TẮC TRỰC TIẾP CỦA BỘ LỌC SỐ FIR PHA TUYẾN TÍNH

a) Trường hợp N chẵn

Chúng ta biết rằng nếu $h(n)$ là đối xứng thì chúng ta có thể viết:

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad (7.2.4.1)$$

có nghĩa là:

$$h(0) = h(N - 1); \quad h(1) = h(N - 2), \dots$$

Vậy nếu N chẵn thì ta có:

$$\begin{aligned} H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} &= h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h\left(\frac{N}{2}-1\right)z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} + h\left(\frac{N}{2}\right)z^{-\frac{N}{2}} + \\ &+ h\left(\frac{N}{2}\right)z^{-\frac{N}{2}} + h\left(\frac{N}{2}+1\right)z^{-\left(\frac{N}{2}+1\right)} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)} \end{aligned}$$

Áp dụng quan hệ (7.2.4.1) ta có:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right] \quad (7.2.4.2)$$

Từ quan hệ (7.2.4.2) ta thu được cấu trúc cho trên hình 7.2.4.1.

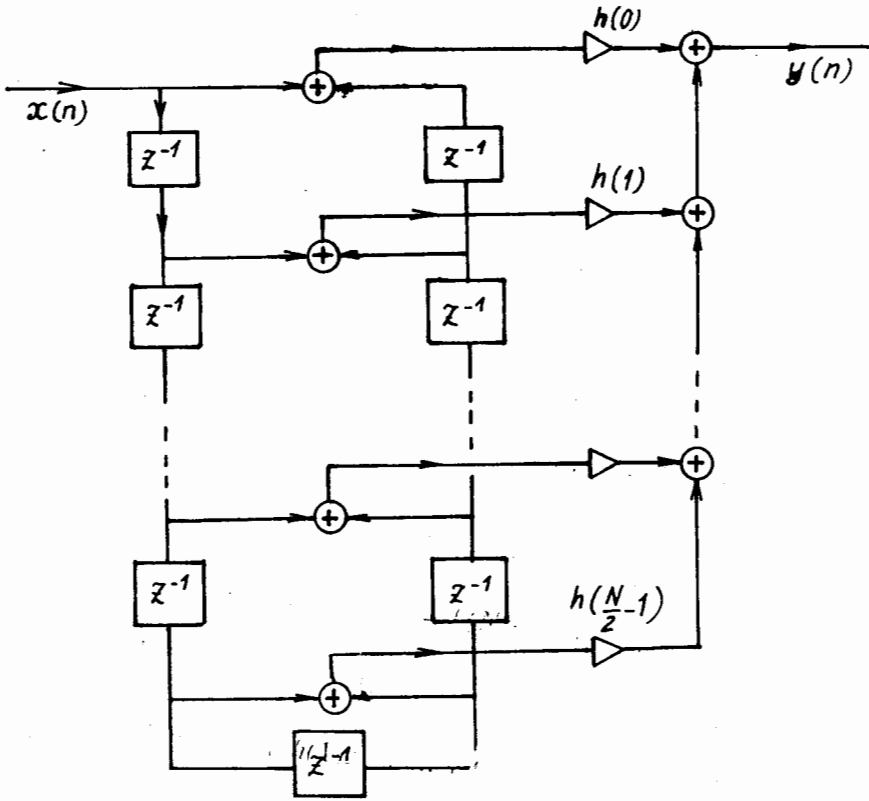
Nếu $h(n)$ là phản đối xứng thì chúng ta có thể viết:

$$h(n) = -h(N - 1 - n) \quad (7.2.4.3)$$

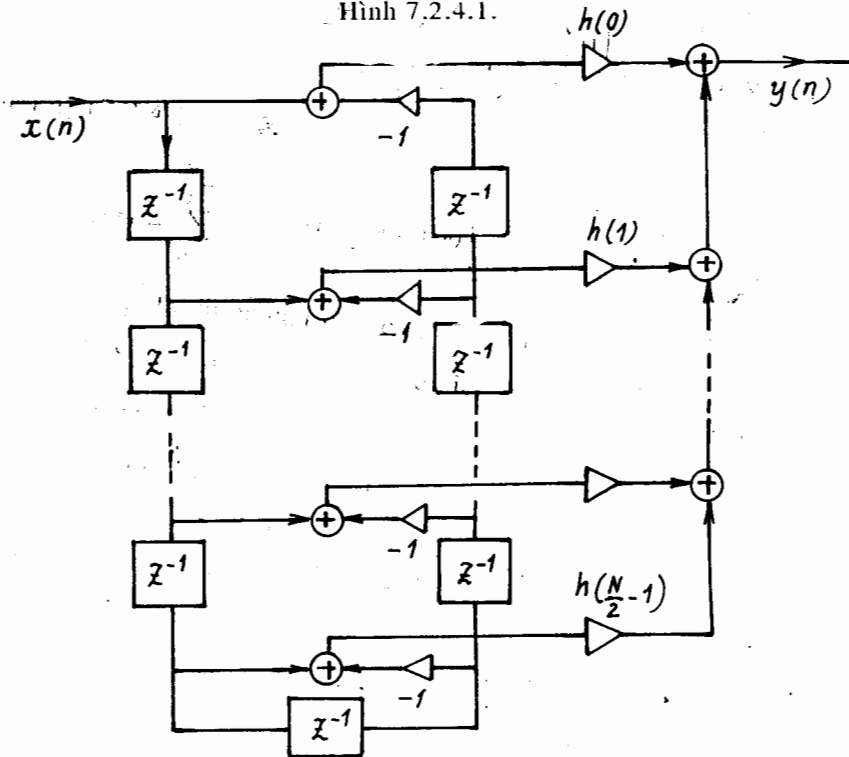
bằng cách tương tự chúng ta thu được:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)} \right] \quad (7.2.4.4)$$

Từ (7.2.4.4) chúng ta thu được sơ đồ cho trên hình 7.2.4.2.



Hình 7.2.4.1.



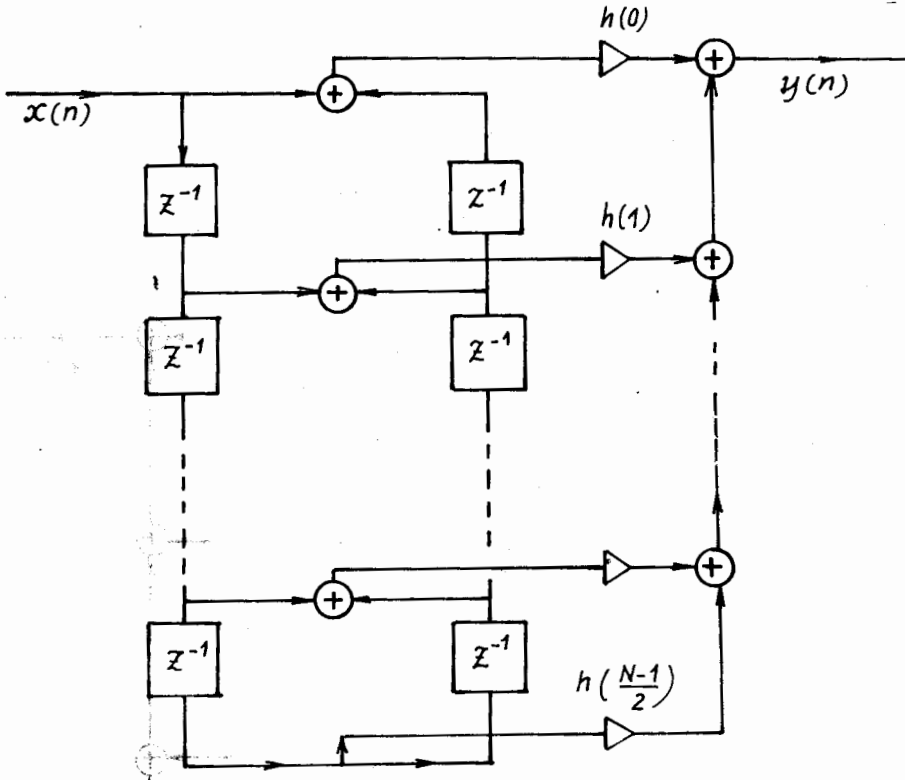
Hình 7.2.4.2.

b) Trường hợp N lẻ

Nếu $h(n)$ là đối xứng, tức là ta có quan hệ (7.2.4.1) vì vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h\left(\frac{N-1}{2}-1\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}-1\right)} + \\
 &\quad + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} + h\left(\frac{N-1}{2}+1\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}+1\right)} + \\
 &\quad + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \quad (7.2.4.4)
 \end{aligned}$$

Và từ quan hệ (7.2.4.4) ở trên chúng ta thu được cấu trúc cho trên hình 7.2.4.3.

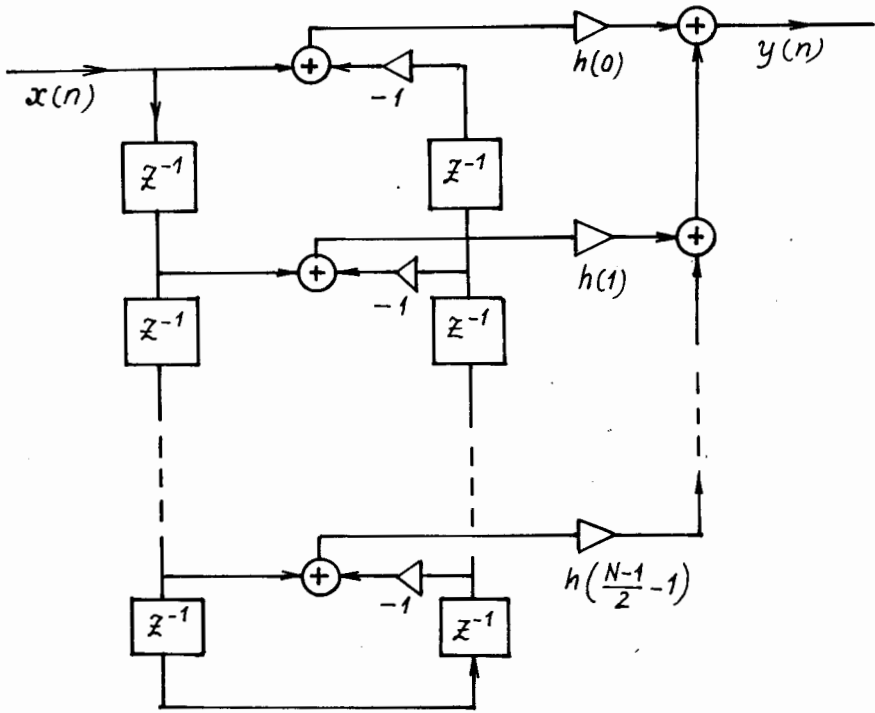


Hình 7.2.4.3.

Nếu $h(n)$ là phản đối xứng, tức là ta có quan hệ (7.2.4.3). Vậy ta có quan hệ dưới đây:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)\left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}\right] \quad (7.2.4.5)$$

Từ quan hệ (7.2.4.5) chúng ta thu được cấu trúc cho trên hình (7.2.4.4).



Hình 7.2.4.4.

7.2.5. CẤU TRÚC CỦA BỘ LỌC SỐ FIR VỚI LẤY MẪU TẦN SỐ

Trong chương 5 chúng ta đã nghiên cứu phương pháp lấy mẫu tần số để tổng hợp các bộ lọc số FIR pha tuyến tính.

Do đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số FIR có chiều dài hữu hạn là N , vậy nó được đánh giá bởi biến đổi Fourier rời rạc (DFT) N điểm như sau:

$$H(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (7.2.5.1)$$

và:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

ở đây:

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{và} \quad W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (7.2.5.2)$$

Chúng ta đã đánh giá hàm truyền đạt của bộ lọc số FIR $H(z)$ theo hàm của $H(k)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (7.2.5.3)$$

ở đây: $W_N^{-k} = e^{j \frac{2\pi}{N} k}$.

Chúng ta có thể biểu diễn hệ thống có $H(z)$ cho bởi quan hệ (7.2.5.3) như là nối tiếp của hai hệ thống $H_1(z)$ và $H_2(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1}{N} H_1(z) H_2(z) \quad (7.2.5.4)$$

ở đây:

$$H_1(z) = 1 - z^{-N} \quad (7.2.5.5)$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (7.2.5.6)$$

Từ đây ta lại thấy rằng hệ thống $H_2(z)$ được hình thành bởi N hệ thống bậc nhất ghép song song với nhau, và ta có thể viết:

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_{2k}(z) \quad (7.2.5.7)$$

ở đây:

$$H_{2k}(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (7.2.5.8)$$

Hệ thống $H(z)$ này được biểu diễn trên hình 7.2.5.1.

Chú ý

Nhìn vào hình 7.2.5.1 ta thấy rằng $H_1(z)$ là hệ thống không đệ quy còn $H_{2k}(z)$ là các hệ thống đệ quy, như vậy trong trường hợp này chúng ta đã dùng cấu trúc đệ quy để thực hiện hệ thống FIR.

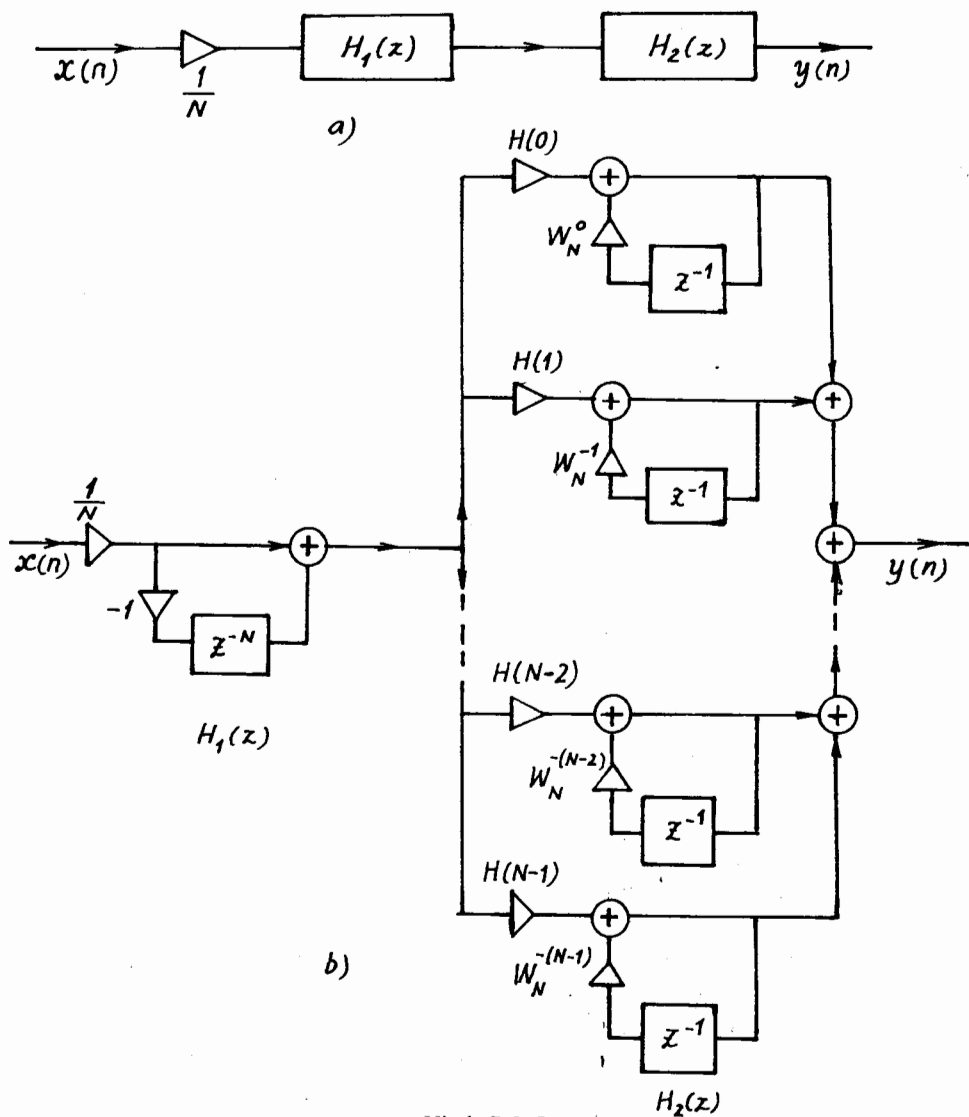
Bây giờ chúng ta tiến hành phân tích sâu hơn nữa ý nghĩa của cấu trúc lấy mẫu tần số. Cụ thể chúng ta sẽ tiến hành phân tích hai hệ thống $H_1(z)$ và $H_2(z)$ trong biểu thức (7.2.5.4) và hình 7.2.5.1.

- Phân tích hệ thống $H_1(z)$

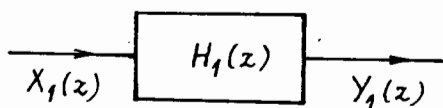
$$H_1(z) = 1 - z^{-N}$$

Hệ thống $H_1(z)$ này có tên là bộ lọc số răng lược (Comb filter).

Giả sử hệ thống $H_2(z)$ có sơ đồ khối cho trên hình 7.2.5.2.



Hình 7.2.5.1.



Hình 7.2.5.2.

Từ hình 7.2.5.2 ta thấy rằng:

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = 1 - z^{-N} \Rightarrow Y_2(z) = X_1(z)(1 - z^{-N})$$

$$\Rightarrow Y_1(z) = X_1(z) - X_1(z)z^{-N}$$

Lấy biến đổi z ngược (IZT) hai vế của phương trình trên ta có:

$$IZT[Y_1(z)] = IZT[X_1(z)] - IZT[X_1(z)z^{-1}]$$

Vậy ta thu được phương trình sau:

$$y_1(n) = x_1(n) - x(n - N) \quad (7.2.5.9)$$

Từ phương trình (7.2.5.9) ở trên ta có thể nói rằng tín hiệu ra của hệ thống này chính là sự khác nhau của hai mẫu tín hiệu vào cách nhau N mẫu.

Đáp ứng tần số của hệ thống này được tính như sau:

$$H_1(e^{j\omega}) = H_1(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1 - e^{-j\omega N}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - (\cos \omega N - j \sin \omega N)$$

Vậy:

$$\operatorname{Re}[H_1(e^{j\omega})] = 1 - \cos \omega N$$

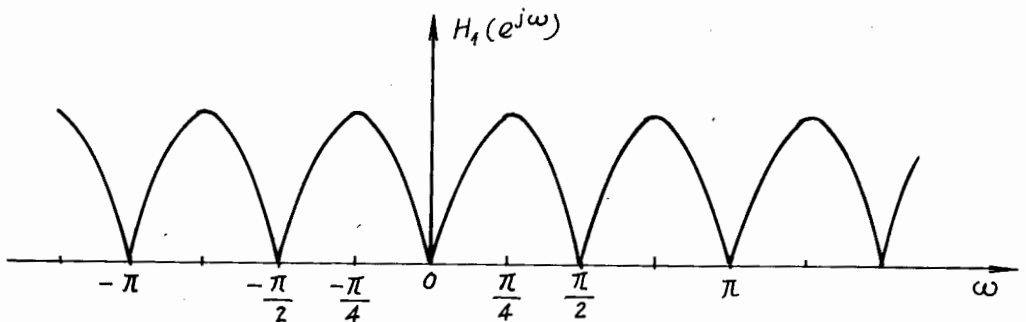
$$\operatorname{Im}[H_1(e^{j\omega})] = \sin \omega N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |H_1(e^{j\omega})| &= \left[(1 - \cos \omega N)^2 + \sin^2 \omega N \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [2(1 - \cos \omega N)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

mà: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, vậy:

$$|H_1(e^{j\omega})| = \left[2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega N}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = 2 \left| \sin \frac{\omega N}{2} \right| \quad (7.2.5.10)$$

Đáp ứng biên độ $|H_1(e^{j\omega})|$ được biểu diễn trên hình 7.2.5.3 ứng với $N = 4$.



Hình 7.2.5.3.

Nhìn vào hình 7.2.5.3 ta thấy rằng dạng của $|H_1(e^{j\omega})|$ giống một cái lược, vì vậy hệ thống này được gọi là bộ lọc hình răng lược.

Bây giờ chúng ta xét các điểm không của $H_1(z)$.

Chúng ta viết $H_1(z)$ dưới dạng phân thức hữu tỷ.

$$H_1(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

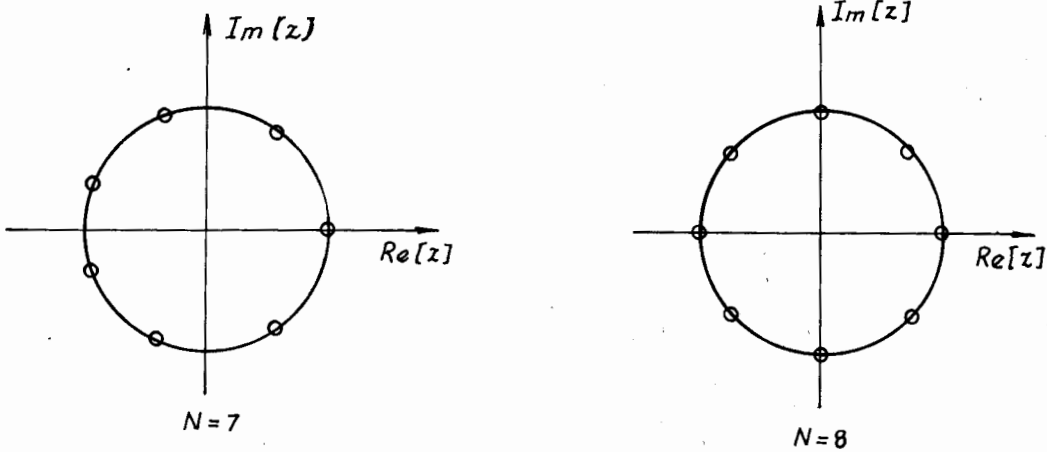
Cho tử số của $H_1(z)$ triệt tiêu chúng ta sẽ tìm được các điểm không của $H_1(z)$:

$$z^N - 1 = 0 \Rightarrow z^N = 1$$

Vậy $H_1(z)$ có N điểm không phân bố đều trên vòng tròn đơn vị tại các điểm:

$$z_m = e^{j \frac{2\pi}{N} m} \quad m = 0 \div N-1 \quad (7.2.5.11)$$

Vị trí các điểm không này được minh hoạ trên hình 7.2.5.4 với $N = 7$ và $N = 8$.



Hình 7.2.5.4.

Bây giờ chúng ta xét các điểm cực của $H_1(z)$:

$$H_1(z) = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

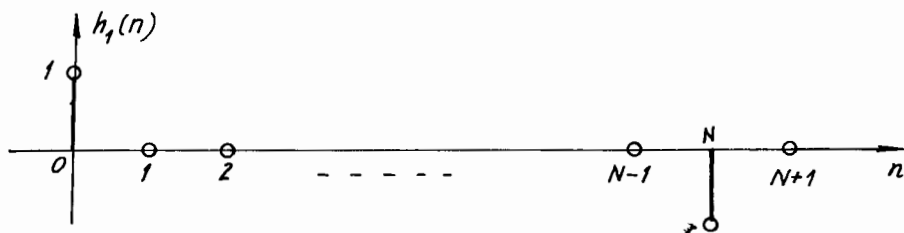
Vậy $H_1(z)$ có một điểm cực bội bậc N ở gốc toạ độ, như vậy bộ lọc này là ổn định.

Nếu xét trong miền n , chúng ta có đáp ứng xung $h_1(n)$ như sau:

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \text{IZT}[H_1(z)] = \text{IZT}[1 - z^{-N}] \\ &= \delta(n) - \delta(n - N) \end{aligned} \quad (7.2.5.12)$$

Đồ thị của $h_1(n)$ được cho trên hình 7.2.5.5.

Từ hình 7.2.5.5 ta thấy rằng $h_1(n)$ là phản đối xứng và chiều dài của $h_1(n)$ là $N + 1$.



Hình 7.2.5.5.

Chúng ta tiếp tục xét các hệ thống đệ quy bậc nhất $H_{2k}(z)$. Chúng ta biết rằng các hệ thống $H_{2k}(z)$ này được ghép song song với nhau tạo ra hệ thống $H_2(z)$, $H_{2l}(z)$ có dạng sau đây:

$$H_{2k}(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

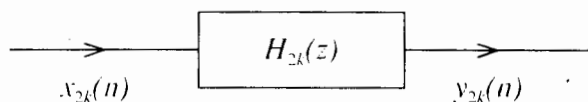
Trong chương 2 chúng ta đã có công thức tổng quát của hàm truyền đạt của hệ thống đệ quy như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{l=1}^N a_l z^{-l}}, \quad a_0 = 1$$

và phương trình sai phân tương ứng:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{l=1}^N a_l x(n-l)$$

Sơ đồ khối của hệ thống $H_{2k}(z)$ được biểu diễn trên hình 7.2.5.6 sau đây:



Hình 7.2.5.6.

Từ hình 7.2.5.6 ta có đầu ra $y_{2k}(n)$ như sau:

$$y_{2k}(n) = H(k) x_{2k}(n) + W_N^{-k} y_{2k}(n-1) \quad (7.2.5.13)$$

Bây giờ hãy xét các điểm cực của $H_{2k}(z)$.

Biểu diễn $H_{2k}(z)$ dưới dạng phân thức hữu tỷ sau đây:

$$H_{2k}(z) = \frac{zH(k)}{z - W_N^{-k}}$$

Từ đây ta thấy rằng mỗi $H_{2k}(z)$ sẽ có một điểm cực đơn là z_{pk} có dạng sau:

$$z_{pk} = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad (7.2.5.14)$$

Như vậy $H_2(z)$ sẽ có N điểm cực đơn.

Nhận xét về các điểm cực z_{pk} :

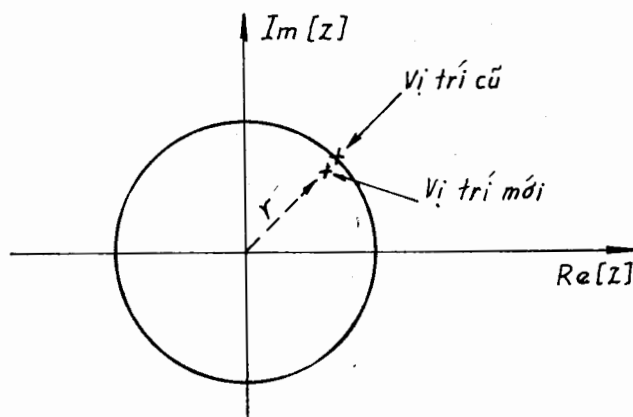
- Các điểm cực z_{pk} nằm chính xác trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z .
- Các điểm cực của $H_2(z)$ này trùng một cách chính xác với các điểm không của $H_1(z)$, như thế trong tổ hợp $H_1(z)$. $H_2(z)$ thì các điểm cực của $H_2(z)$ sẽ bị triệt tiêu bởi các điểm không của $H_1(z)$.

Chú ý trong thực tế

- Về mặt lý thuyết, các điểm cực của $H_2(z)$ trùng hoàn toàn với các điểm không của $H_1(z)$ trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z , vì thế hệ thống tổng quát $H(z)$ là ổn định.

- Nhưng trong thực tế, hệ thống tổng quát $H(z)$ vẫn có thể mất ổn định do hiệu ứng lượng tử hoá các hệ số của bộ lọc dẫn đến sự khác nhau chút ít giữa các điểm cực của $H_2(z)$ và các điểm không của $H_1(z)$.

- Chúng ta có thể tránh được sự mất ổn định này nếu chúng ta dời vị trí các điểm cực và các điểm không một chút về phía trong vòng tròn đơn vị trên đường bán kính hướng vào gốc toạ độ như trên hình 7.2.5.7 sau đây:



Hình 7.2.5.7

- Để làm được điều đã nói ở trên ta chỉ việc nhân các điểm cực và các điểm không với một số thực dương r , giá trị của $r < 1$ nhưng $r \approx 1$, tức là các điểm cực z_{pk} và các điểm không z_{oi} được thay thế bởi các điểm cực rz_{pk} và các điểm không rz_{oi} . Như thế hàm truyền đạt $H(z)$ ở biểu thức (7.2.5.3) được thay thế bởi hàm truyền đạt có biến z được thay thế bằng biến rz có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=1}^N \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} \cdot r \cdot z^{-1}} \quad (7.2.5.15)$$

Để tìm $H(k)$ từ $H(z)$ ta sẽ thay $z = e^{j\omega_k}$, tức là:

$$\begin{aligned} H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_k}} &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega_k n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{kn} \end{aligned}$$

Vậy:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{kn} \equiv H(W_N^{kn})$$

Do z được thay bằng rz nên $H(k)$ được tính lại như sau:

$$\begin{aligned} H(z) &\rightarrow H(rz) \\ H(rz) \Big|_{rz=e^{j\omega_k}} &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) r e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) r W_N^{kn} \end{aligned}$$

Vậy:

$$H(k) \rightarrow H(r W_N^{kn})$$

Cuối cùng ta có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1-r^N}{1-r^N z^{-N}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(r W_N^{kn})}{1-r W_N^k z^{-1}} \quad (7.2.5.16)$$

Gold và Rader đã sử dụng các giá trị của r trong khoảng từ $1 - 2^{-12}$ đến $1 - 2^{-27}$ như vậy vẫn đảm bảo hệ thống ổn định mà không ảnh hưởng đến đáp ứng tần số của hệ thống sau khi lượng tử hoá các hệ số của hệ thống.

Vì hệ số W_N^k là số phức nên chúng ta phải thực hiện các phép tính phức. Để tránh các phép tính phức này chúng ta phải biến đổi cấu trúc của $H_{2N}(z)$ theo các trường hợp cụ thể của $h(n)$.

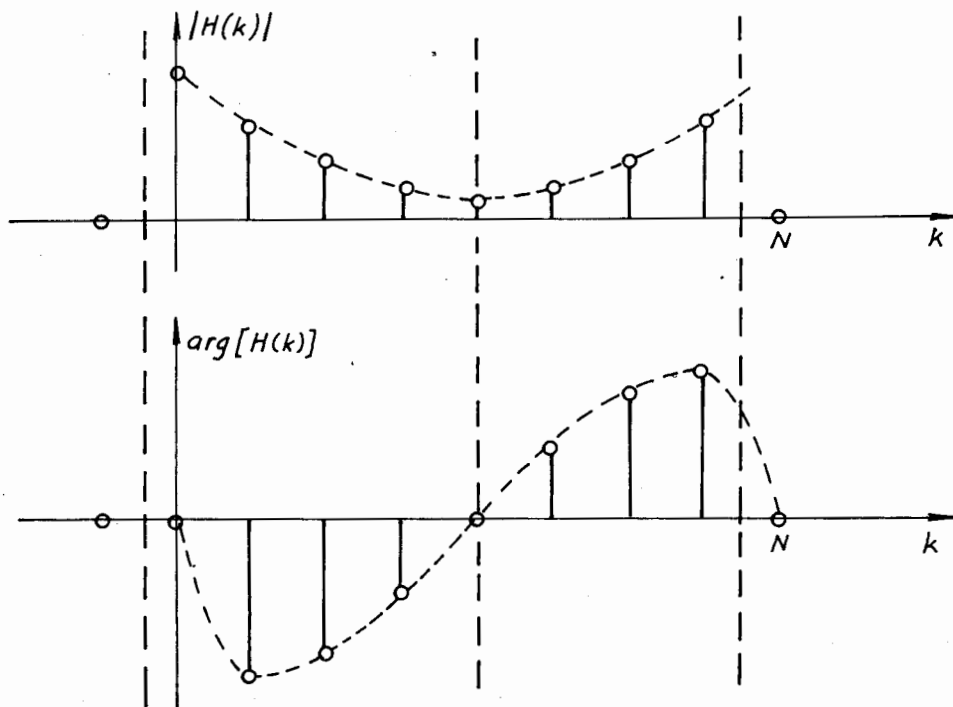
Trong chương 5, sau khi thiết kế các bộ lọc FIR phải thực hiện được về vật lý. Như vậy $h(n)$ phải là thực, dẫn đến $H(k)$ có tính chất đối xứng Hermitt (chương 4) tức là:

$$\begin{aligned} H(k)_N &= H^*(-k)_N \\ \Rightarrow |H(k)_N| &= |H(-k)_N| \\ \arg[H(k)_N] &= -\arg[H(-k)_N] \end{aligned}$$

Vậy: $|H(k)_N|$ là đối xứng.

$\arg[H(k)_N]$ là phản đối xứng.

Hình 7.2.5.8 sẽ cho một ví dụ minh hoạ với $N = 8$.



Hình 7.2.5.8.

Trong trường hợp N chẵn nhìn vào hình 7.2.5.8 chúng ta rút ra được kết luận sau:

Trong khoảng từ 0 đến $N - 1$ thì:

$|H(0)|$ đứng một mình

$\left|H\left(\frac{N}{2}\right)\right|$ đứng một mình

$$|H(k)| = |H(N-k)| \text{ với } k \neq 0 \text{ và } k \neq \frac{N}{2}$$

Bây giờ chúng ta xét xem các $H(k)$ là thực hay phức:

$$H(0) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)W_N^{0n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \Rightarrow H(0) \text{ là thực}$$

$$H\left(\frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)W_N^{\frac{N}{2}n} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n h(n) \Rightarrow H\left(\frac{N}{2}\right) \text{ là thực}$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)W_N^{kn} \text{ với } n \neq 0 \text{ và } n \neq \frac{N}{2} \Rightarrow H(k) \text{ là phức}$$

Ngoài ra W_N^{-k} cũng là phức.

Vậy khi thực hiện hàm truyền đạt $H(z)$ trong biểu thức 7.2.5.3 chúng ta phải thực hiện với các phép tính phức.

Để tránh phải thực hiện các phép tính phức chúng ta có thể tổ hợp các thành phần liên hợp phức lại như sau:

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} + \\ &\quad + \frac{H(0)}{1 - W_N^{-0} z^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 - W_N^{-\frac{N}{2}} z^{-1}} \end{aligned}$$

Từ đây biến đổi tiếp chúng ta thu được kết quả cuối cùng như sau:

$$H_2(z) = \sum_{k=1}^{N-1} 2|H(k)| \frac{\cos\theta(k) - z^{-1} \cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi}{N}k\right]}{1 - 2z^{-1} \cos \frac{2\pi}{N}k + z^{-2}} + \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + z^{-1}}$$

Hoặc là:

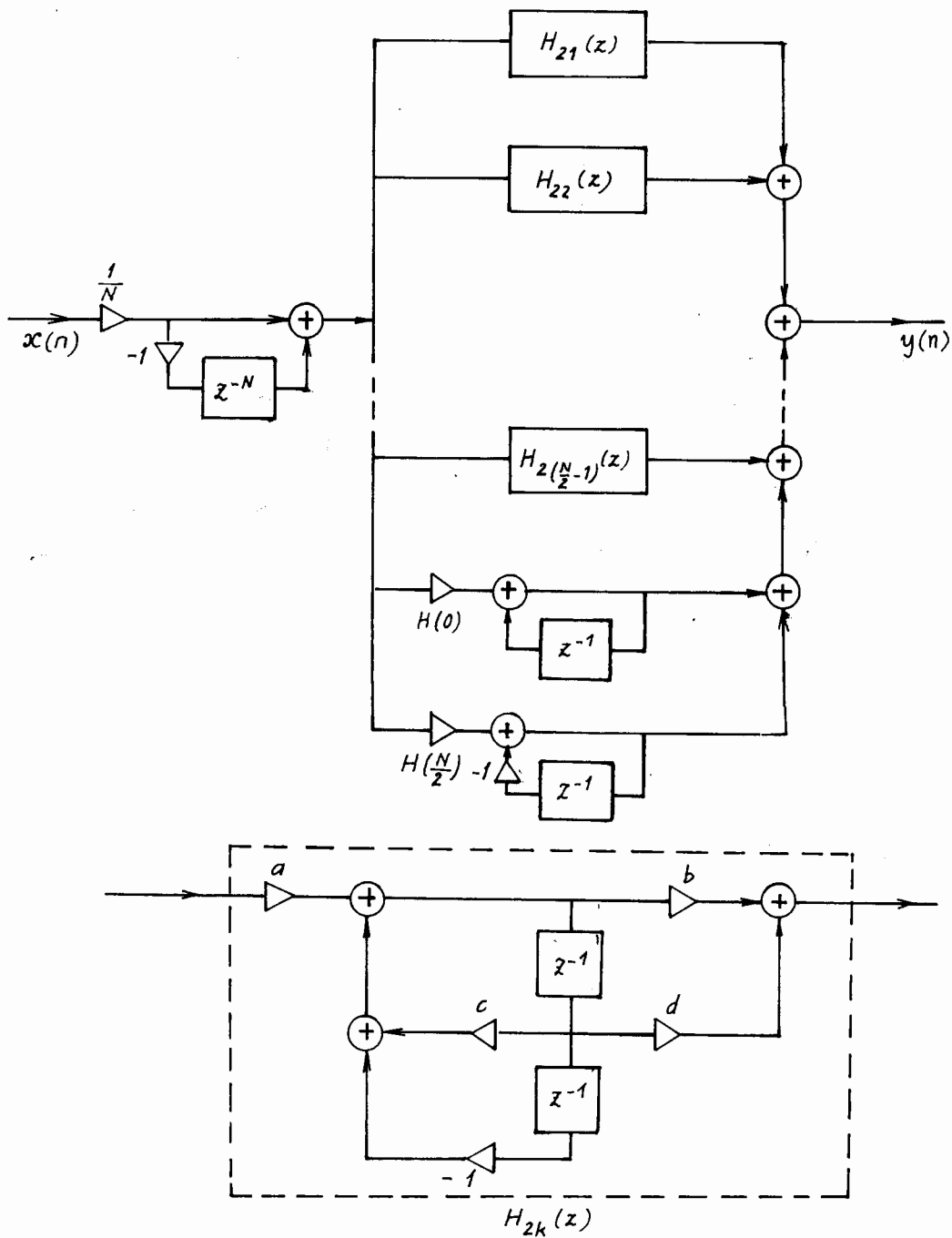
$$\begin{aligned} H_2(z) &= \sum_{k=1}^{N-1} 2|H_k(z)| + \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + z^{-1}} \\ H_{2k}(z) &= 2|H(k)| \frac{\cos\theta(k) - z^{-1} \cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi}{N}k\right]}{1 - 2z^{-1} \cos \frac{2\pi}{N}k + z^{-2}} \end{aligned} \quad (7.2.5.17)$$

ở đây:

$$H(k) = |H(k)|e^{j\theta(k)}$$

$$H(N - k) = |H(k)|e^{-j\theta(k)}$$

Từ biểu thứ (7.2.5.17) chúng ta thu được cấu trúc mới không có các hệ số phức. Cấu trúc mới này được cho trên hình (7.2.5.9).



$$a = 2|H(k)|$$

$$c = 2\cos\frac{2\pi}{N}k$$

$$b = \cos\theta(k)$$

$$d = -\cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi}{N}k\right]$$

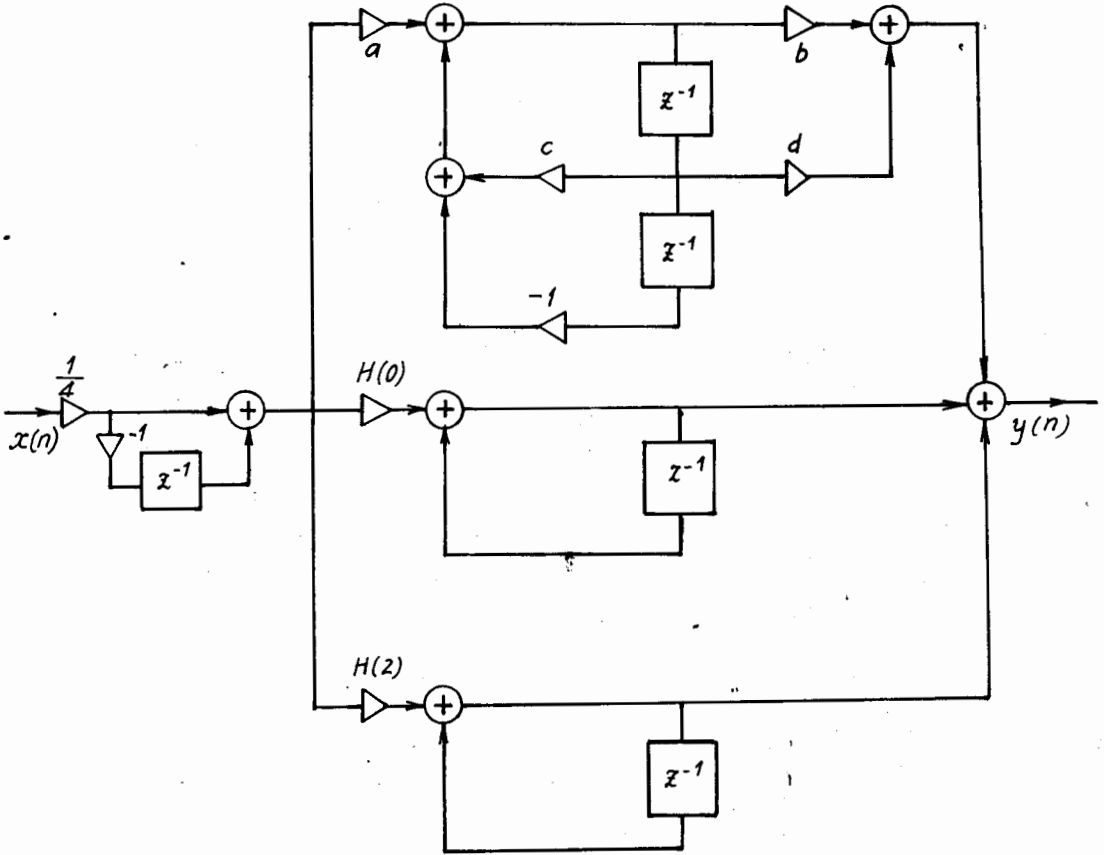
Hình 7.2.5.9.

Ví dụ 7.2.5.1

Hãy vẽ cấu trúc lấy mẫu tần số của bộ lọc số FIR với chiều dài của bộ lọc $N = 4$.

Giải

Ở đây chiều dài $N = 4$ là số chẵn vậy ta áp dụng sơ đồ cho trên hình 7.2.5.9 ta sẽ thu được cấu trúc lấy mẫu tần số với $N = 4$. Cấu trúc này được minh hoạ trên hình 7.2.5.10.



$$a = 2|H(1)| \quad b = \cos\theta(1) \quad c = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad d = -\cos\left[\theta(1) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Hình 7.2.5.10.

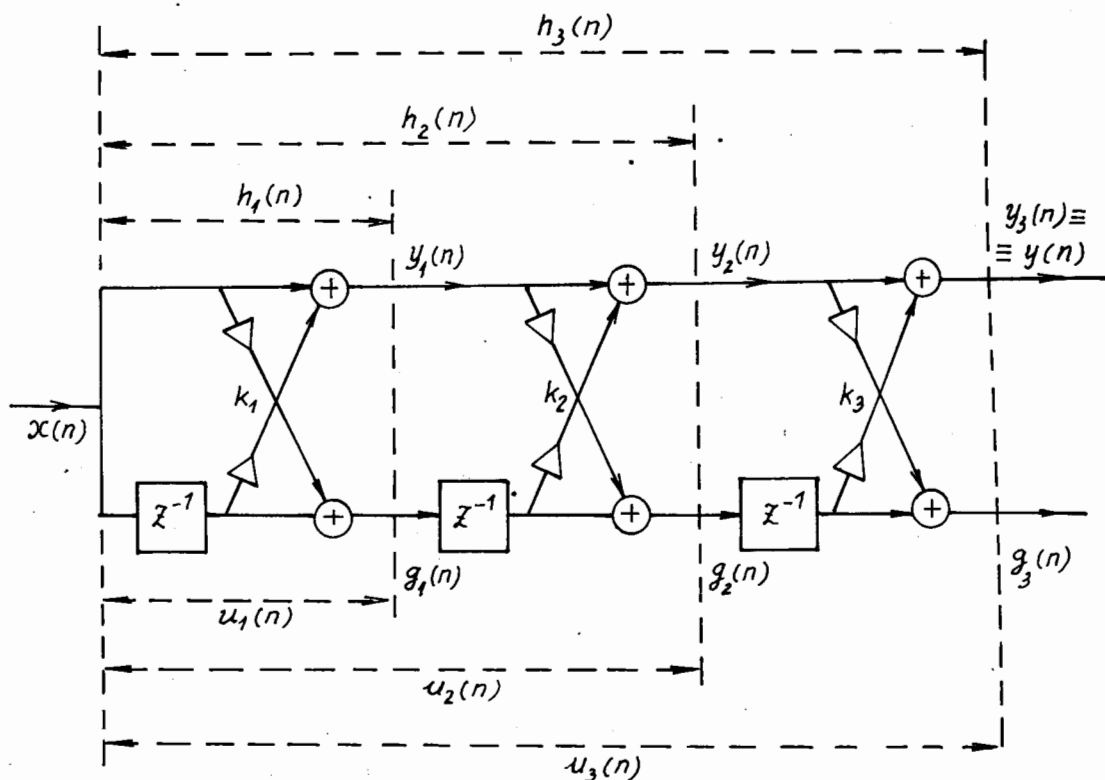
7.2.6. CẤU TRÚC DẠNG MẮT CÁO

Trong khi nghiên cứu về phân tích và tổng hợp tiếng nói, người ta nghĩ ra cấu trúc dạng mắt cáo để mô phỏng thanh quản và tổng quát hơn là các hệ thống tiên đoán tuyến tính.

Cấu trúc dạng mắt cáo có thể dùng để thực hiện các bộ lọc số FIR và cả IIR. Trong mục này chúng ta sẽ tiến hành nghiên cứu đối với bộ lọc số FIR.

Trước hết chúng ta nghiên cứu cấu trúc dạng mắt cáo trong trường hợp đơn giản với ba tế bào, rồi từ đây suy ra trường hợp tổng quát với M tế bào.

Cấu trúc dạng mắt cáo với ba tế bào được cho trên hình 7.2.6.1 sau đây:



Hình 7.2.6.1.

Đối với tế bào thứ nhất, $y_1(n)$ và $g_1(n)$ liên hệ với dãy vào $x(n)$ theo các quan hệ sau đây:

Trong miền n :

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) + k_1 x(n-1) \\ g_1(n) &= k_1 x(n) + x(n-1) \end{aligned} \quad (7.2.6.1)$$

Trong miền z :

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= X(z) + K_1 z^{-1} X(z) \\ G_1(z) &= K_1 X(z) + z^{-1} X(z) \end{aligned} \quad (7.2.6.2)$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_1 z^{-1} \\ k_1 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(z) \\ X(z) \end{bmatrix} \quad (7.2.6.3)$$

Đối với tế bào thứ hai ta có các quan hệ sau đây:

Trong miền n :

$$\begin{aligned}y_2(n) &= y_1(n) + k_2 g_1(n-1) \\g_2(n) &= k_2 y_1(n) + g_1(n-1)\end{aligned}\quad (7.2.6.4)$$

Trong miền z :

$$\begin{aligned}Y_2(z) &= Y_1(z) + K_1 z^{-1} G_1(z) \\G_2(z) &= K_2 Y_1(z) + z^{-1} G_1(z)\end{aligned}\quad (7.2.6.5)$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Y_2(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_2 z^{-1} \\ K_2 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix}\quad (7.2.6.6)$$

Tương tự đối với tế bào thứ ba chúng ta có các quan hệ sau đây:

Trong miền n :

$$\begin{aligned}y_3(n) &= y_2(n) + k_3 g_2(n-1) \\g_3(n) &= k_3 y_2(n) + g_2(n-1)\end{aligned}\quad (7.2.6.7)$$

Trong miền Z :

$$\begin{aligned}Y_3(z) &= Y_2(z) + K_3 z^{-1} G_2(z) \\G_3(z) &= K_3 Y_2(z) + z^{-1} G_2(z)\end{aligned}\quad (7.2.6.8)$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} Y_3(z) \\ G_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_3 z^{-1} \\ K_3 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_2(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix}\quad (7.2.6.9)$$

Giả sử ta ký hiệu ma trận \mathbf{K}_3 như sau:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & K_3 z^{-1} \\ K_3 & z^{-1} \end{bmatrix}\quad (7.2.6.10)$$

Áp dụng ma trận nghịch đảo \mathbf{K}_3^{-1} ta có:

$$\begin{bmatrix} Y_2(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_3^{-1} \begin{bmatrix} Y_3(z) \\ G_3(z) \end{bmatrix}\quad (7.2.6.11)$$

ở đây:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_3^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{K}_3|} \begin{bmatrix} z^{-1} & -K_3 z^{-1} \\ -K_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^{-1} - K_3^2 z^{-1}} \begin{bmatrix} z^{-1} & -K_3 z^{-1} \\ -K_3 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{K}_3^{-1} &= \frac{1}{1 - k_3^2} \begin{bmatrix} 1 & -K_3 \\ -K_3 z & z \end{bmatrix}, \quad (k_3 \neq 1)\end{aligned}\quad (7.2.6.12)$$

Vậy ta có:

$$\begin{bmatrix} Y_2(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - k_3^2} \begin{bmatrix} 1 & -K_3 \\ -K_3 z & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_3(z) \\ G_3(z) \end{bmatrix}\quad (7.2.6.13)$$

Phương trình ma trận (7.2.6.13) ở trên là cơ sở để tính toán các hệ số k_m của cấu trúc dạng mắt cáo từ các hệ số $h(n)$ của đáp ứng xung của bộ lọc số FIR.

Sau đây chúng ta tiến hành tìm công thức tính k_m từ $h(n)$.

Chúng ta biết rằng:

$$y_3(n) = y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^M h(i)x(n-i)$$

(đặt: $N-1 = M = 3$)

$$\Rightarrow y_3(n) = y(n) = \sum_{i=0}^3 h(i)x(n-i) = h(n)*x(n)$$

Trong miền z ta có:

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^3 h(n)z^{-n}$$

Vì đầu ra của tế bào thứ ba cũng chính là đầu ra của bộ lọc FIR nên ta đánh số như sau:

$$y(n) = y_3(n); \quad Y(z) = Y_3(z)$$

$$\text{và} \quad h(n) = h_3(n); \quad H(z) = H_3(z)$$

$$H_3(z) = \sum_{i=0}^3 h_3(i)z^{-i}$$

$$\text{Nếu} \quad x(n) = \delta(n)$$

$$\text{thì} \quad y(n) = h(n); \quad Y(z) = H(z).$$

Tương tự như vậy, tính từ đầu vào đến đầu ra của tế bào thứ hai và đầu ra của tế bào thứ nhất ta cũng có quan hệ sau:

$$y_2(n) = h_2(n); \quad Y_2(z) = H_2(z)$$

$$y_1(n) = h_1(n); \quad Y_1(z) = H_1(z)$$

Đối với $g_3(n)$ ta có quan hệ sau:

$$g_3(n) = \sum_{i=0}^3 u_3(i)x(n-i)$$

Ở đây $u_3(i)$ là đáp ứng xung tương ứng với đầu ra $g_3(n)$. Chú ý rằng trong miền biến số ta có quan hệ giữa đáp ứng xung với đầu ra $y_3(n)$ và đầu ra $g_3(n)$ như sau:

$$u_3(n) = h_3(3-n)$$

Vậy ta có:

$$g_3(n) = \sum_{i=0}^3 h_3(3-i)x(n-i)$$

Trong miền z ta có quan hệ sau:

$$\begin{aligned} G_3(z) &= U_3(z) \cdot X(z) \\ &= \underbrace{\left[\sum_{i=0}^3 U_3(i) \cdot z^{-i} \right]}_{U_3(z)} \cdot X(z) \\ &= \underbrace{\left[\sum_{i=0}^3 h(3-i) \cdot z^{-i} \right]}_{z^{-3}H_3(z^{-1})} \cdot X(z) \end{aligned}$$

Vậy khi $x(n) = \delta(n)$, ta có các quan hệ sau:

$$\begin{aligned} g_3(n) &= u_3(n); & G_3(z) &= U_3(z) \\ g_2(n) &= u_2(n); & G_2(z) &= U_2(z) \\ g_1(n) &= u_1(n); & G_1(z) &= U_1(z) \end{aligned}$$

Do vậy chúng ta có thể viết:

$$\begin{bmatrix} H_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{1-k_3^2} \begin{bmatrix} 1 & -k_3 \\ -k_3 z & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_3(z) \\ U_3(z) \end{bmatrix} \quad (7.2.6.14)$$

và:

$$\begin{bmatrix} H_3(z) \\ U_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_3 z^{-1} \\ k_3 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \quad (7.2.6.15)$$

Trong các biểu thức của $y_3(n)$ và $g_3(n)$ ta có thể rút ra kết luận sau đây:

$$k_3 = h_3(3) = h(3) \quad (7.2.6.16)$$

và hệ số $h_3(0)$ phải được đặt bằng 1.

$$h_3(0) = 1 = h(0)$$

Trong các biểu thức của $y_2(n)$ và $g_2(n)$ ta cũng thấy rằng:

$$k_2 = h_2(2) \quad \text{và} \quad h_2(2-i) = u_2(i) \quad (7.2.6.17)$$

Bây giờ chúng ta tìm $h_2(2)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} &= \frac{1}{1-k_3^2} \begin{bmatrix} 1 & -k_3 \\ -k_3 z & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_3(z) \\ U_3(z) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow H_2(z) &= \frac{1}{1-k_3^2} [H_3(z) - k_3 U_3(z)] = \sum_{i=0}^2 h_2(i) z^{-i} \quad (7.2.6.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_2(z) &= \frac{1}{1-k_3^2} [-k_3 z H_3(z) + z U_3(z)] \\
 &= \sum_{i=0}^2 U_2(i) z^{-i} = \sum_{i=0}^2 h_2(2-i) z^{-i}
 \end{aligned}
 \tag{7.2.6.19}$$

Từ biểu thức (7.2.6.18) ta rút ra được kết quả của công thức tính $h_2(n)$ như sau:

$$\begin{aligned}
 h_2(0) &= \frac{1-h_3^2(3)}{1-k_3^2} = 1 \\
 h_2(1) &= \frac{h_3(1)-h_3(3)h_3(2)}{1-k_3^2} \\
 h_2(2) &= \frac{h_3(2)-h_3(3)h_3(1)}{1-k_3^2}
 \end{aligned}$$

Vậy k_2 được tìm bằng công thức sau đây:

$$k_2 = \frac{1}{1-h_3(3)} [h_3(2) - h_3(3)h_3(1)] \tag{7.2.6.20}$$

Trong các biểu thức của $y_1(n)$ và $g_1(n)$ ta thấy rằng:

$$k = h_1(n) \text{ và } h_1(1-i) = u_1(i)$$

Từ đây chúng ta tiến hành tìm $h_1(1)$:

Tương tự như phần trên, ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Y_2(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & k_2 z^{-1} \\ k_2 & z^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_2} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Y_2(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

mà:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_2^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{K}_2|} \begin{bmatrix} z^{-1} & -k_2 z^{-1} \\ -k_2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^{-1} - k_2^2 z^{-1}} \begin{bmatrix} z^{-1} & -k_2 z^{-1} \\ -k_2 & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \mathbf{K}_2^{-1} &= \frac{1}{1-k_2^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -k_2 \\ -k_2 z & z \end{bmatrix} \\
 y_2(n) &= \sum_{i=0}^2 h_2(i) x(n-i)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_2(z) = H_2(z)X(z) = \left[\sum_{i=0}^2 h_2(i)z^{-i} \right] X(z)$$

Khi $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y_2(n) = h_2(n)$

$$Y_2(z) = H_2(z)$$

Tiếp tục đối với $g_2(n)$ ta cũng có:

$$g_2(n) = \sum_{i=1}^2 u_2(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^2 h_2(2-i)x(n-i)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_2(z) &= U_2(z)X(z) = \left[\sum_{i=0}^2 u_2(i)z^{-i} \right] X(z) \\ &= \left[\sum_{i=0}^2 h_2(2-i)z^{-i} \right] X(z) \end{aligned}$$

Tương tự khi $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y_2(n) = u_2(n)$

$$G_2(z) = U_2(z)$$

Cuối cùng chúng ta có thể viết:

$$\begin{bmatrix} H_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} H_1(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix} \quad (7.2.6.21)$$

và:

$$\begin{bmatrix} H_1(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2^{-1} \begin{bmatrix} H_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \quad (7.2.6.22)$$

$$\Rightarrow H_1(z) = \frac{1}{1-k_2^2} [H_2(z) - k_2 U_2(z)] = \sum_{i=0}^1 h_1(i)z^{-i} \quad (7.2.6.23)$$

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \frac{1}{1-k_2^2} [-k_2 z H_2(z) + z U_2(z)] = \sum_{i=0}^1 u_1(i)z^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^1 h_1(1-i)z^{-i} \end{aligned} \quad (7.2.6.24)$$

Từ biểu thức (7.2.6.23) ta rút ra được kết quả của công thức tính $h_1(n)$ như sau:

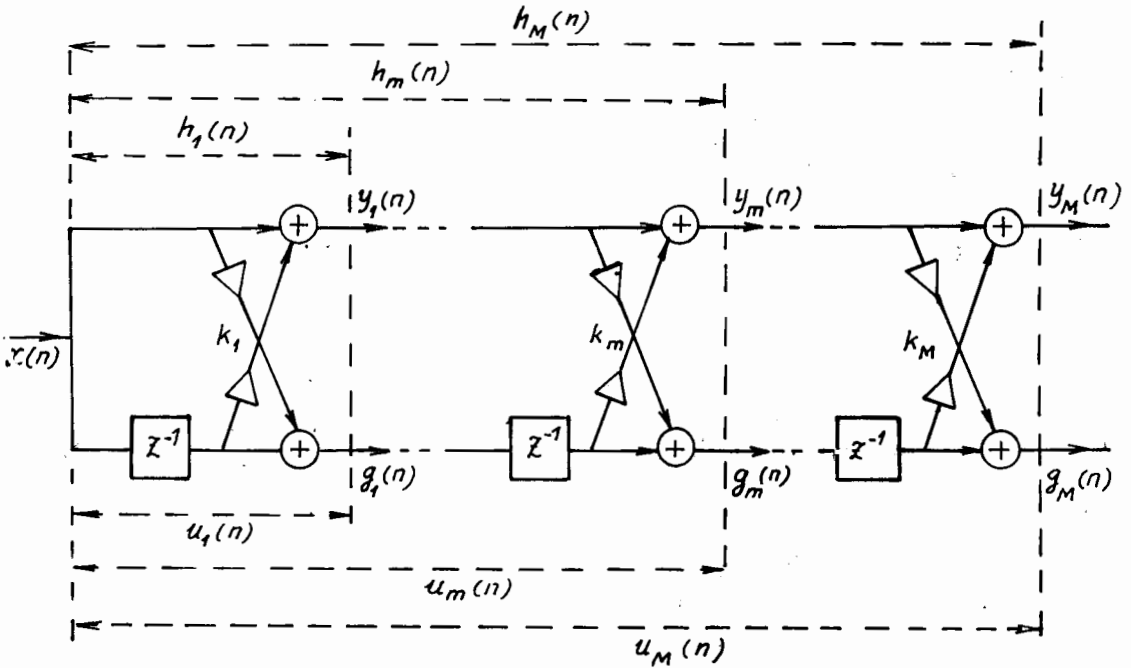
$$h_1(0) = \frac{1}{1-k_2^2} [1 - k_2^2] = 1$$

$$h_1(1) = \frac{1}{k_2^2} [h_2(1) - h_2(2)h_2(1)]$$

Vậy k_1 được tính bằng công thức sau đây:

$$k_1 = \frac{1}{1 - h_2^2(2)} [h_2(1) - h_2(2)h_2(1)] \quad (7.2.6.25)$$

Bây giờ chúng ta phát triển trường hợp 3 tế bào thành trường hợp M tế bào. Sơ đồ trên hình 7.2.6.2 cho ta trường hợp M tế bào.



Hình 7.2.6.2.

Trong trường hợp tổng quát, trước hết ta đặt $h(0) = 1$ và cũng giống trường hợp 3 tế bào, ta có:

$$k_M = h(M) = h_M(M) \quad (7.2.6.26)$$

Các hàm truyền đạt tương ứng với các đầu ra của tế bào thứ m có dạng ma trận cho bởi quan hệ ma trận (7.6.2.27) sau đây:

$$\begin{bmatrix} H_m(z) \\ U_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_m z^{-1} \\ k_m & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{m-1}(z) \\ U_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (7.2.6.27)$$

Quan hệ này cũng có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{bmatrix} H_{m-1}(z) \\ U_{m-1}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - k_m^2} \begin{bmatrix} 1 & -k_m \\ -k_m z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_m(z) \\ U_m(z) \end{bmatrix}, \quad k_m \neq 1 \quad (7.2.6.28)$$

Ta thấy rằng các hệ số của $H_{m-1}(z)$ là $h_{m-1}(i)$ ($i = 0 \div m - 1$) có thể được tính qua các hệ số $h_m(i)$ ($i = 1 \div m$) của $H_m(z)$:

$$H_{m-1}(z) = \sum_{i=0}^{m-1} h_{m-1}(i) z^{-i} = \frac{1}{1 - k_m^2} [H_m(z) - k_m U_m(z)] \quad (7.2.6.29)$$

$$h_2(1) = \frac{1}{1-k_3^2} [h_3(1) - h_3(3)h_3(1)] = \frac{2}{3}$$

$$h_2(2) = \frac{1}{1-k_3^2} [h_3(2) - h_3(3)h_3(1)] = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k_3 = \frac{1}{3}$$

$$h_1(0) = 1$$

$$h_1(1) = \frac{1}{1-k_2^2} [h_2(1) - h_2(2)h_2(1)] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$$

7.3. CẤU TRÚC CỦA BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN

Trong chương 6 chúng ta đã nghiên cứu các phương pháp thiết kế các bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài vô hạn và cùng với chương 1 chúng ta cũng đã thực hiện các hệ thống rời rạc bằng cấu trúc suy trực tiếp từ phương trình sai phân hoặc hàm truyền đạt $H(z)$ ứng với hệ số $a_0 = 1$. Cấu trúc đó gọi là cấu trúc trực tiếp. Sau đây chúng ta sẽ tiến hành nghiên cứu các loại cấu trúc khác nhau của bộ lọc số IIR.

7.3.1. CẤU TRÚC TRỰC TIẾP CHUẨN TẮC

a) Cấu trúc trực tiếp

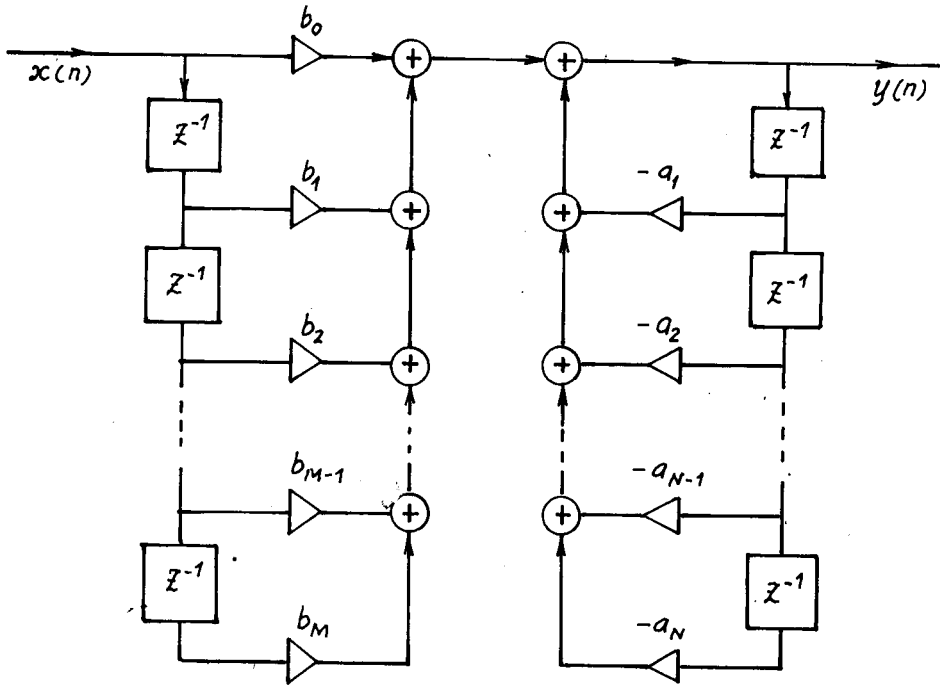
Các bộ lọc số IIR có thể được thực hiện trực tiếp bằng các thuật toán thể hiện trong các biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ hoặc phương trình sai phân như chúng ta đã nghiên cứu ở chương 1, chương 2 và chương 6.

Chúng ta đã có hàm truyền đạt $H(z)$ và phương trình sai phân biểu diễn hệ thống IIR với hệ số $a_0 = 1$ như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (7.3.1.1)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k) \quad (7.3.1.2)$$

Cấu trúc trực tiếp thực hiện các biểu thức (7.3.1.1) và (7.3.1.2) được cho trên hình 7.3.1.1.



Hình 7.3.1.1.

b) Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc

Chúng ta có thể coi hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR là tích của hai hàm truyền đạt $H_1(z)$ và $H_2(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

đặt:

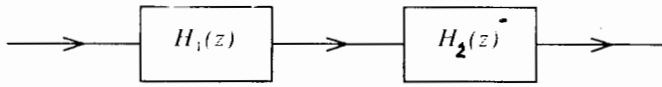
$$H_1(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Vậy:

$$H(z) = H_1(z).H_2(z) \quad (7.3.1.3)$$

Để thực hiện $H(z)$ theo $H_1(z)$ và $H_2(z)$, ta có cấu trúc nối tiếp cho trên hình 7.3.1.2.



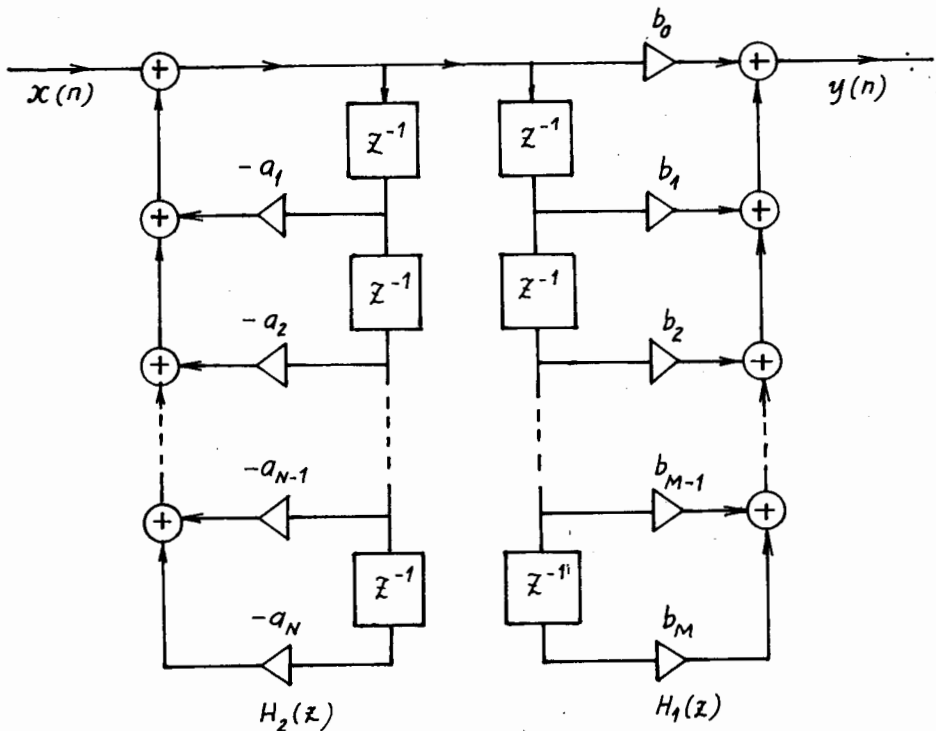
Hình 7.3.1.2.

Sơ đồ chi tiết để thực hiện cấu trúc nối tiếp trên hình 7.3.1.2 chính là cấu trúc cho trên hình 7.3.1.1.

Bây giờ chúng ta hoán vị $H_1(z)$ và $H_2(z)$ thì $H(z)$ không có gì thay đổi:

$$H(z) = H_2(z).H_1(z) \quad (7.3.1.4)$$

Sơ đồ thực hiện $H(z)$ theo $H_2(z)$ và $H_1(z)$ như biểu thức (7.3.1.4) được cho trên hình 7.3.1.3 sau đây:



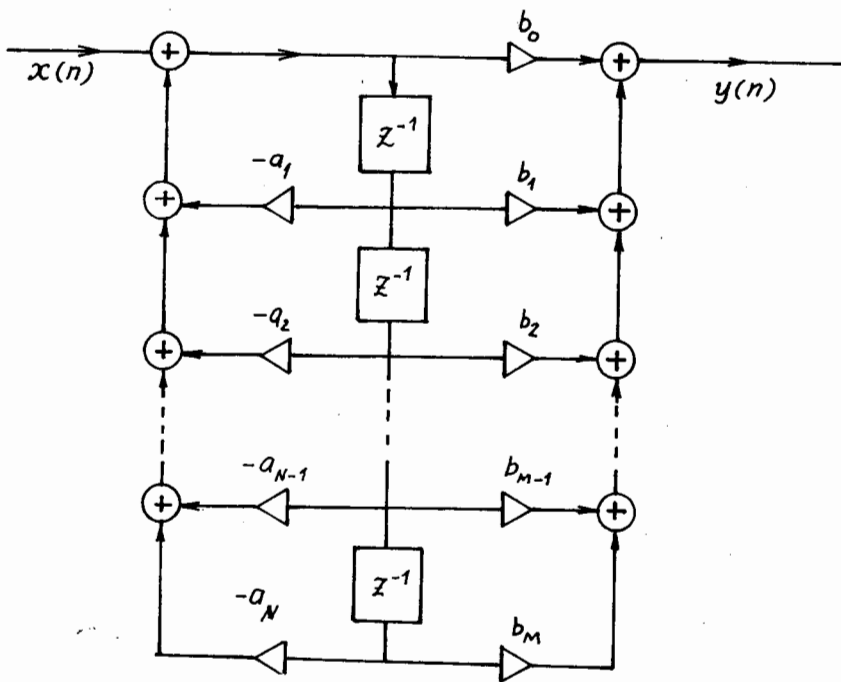
Hình 7.3.1.3.

Cấu trúc trên hình 7.3.1.3 sử dụng hai dãy các phân tử trễ đối với cùng một tín hiệu. Vậy để tiết kiệm phân tử trễ, chúng ta chỉ cần dùng một dãy phân tử trễ như trên hình 7.3.1.4.

Cấu trúc cho trên hình 7.3.1.4 gọi là cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của bộ lọc số IIR.

Ví dụ 7.3.1.1

Hãy thực hiện bằng cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:



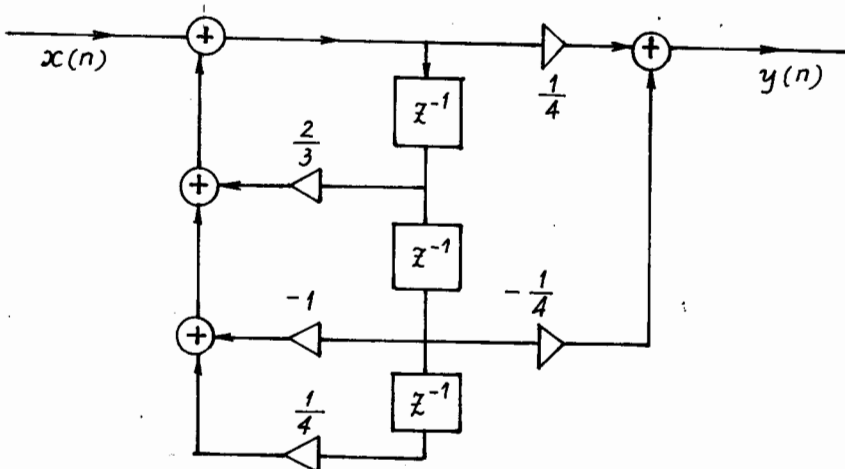
Hình 7.3.1.4 (trường hợp $M = N$).

$$H(z) = \frac{-1 + z^{-2}}{-1 + 6z^{-1} - 4z^{-2} + z^{-3}}$$

Giải

$$H(z) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-1 + z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}$$

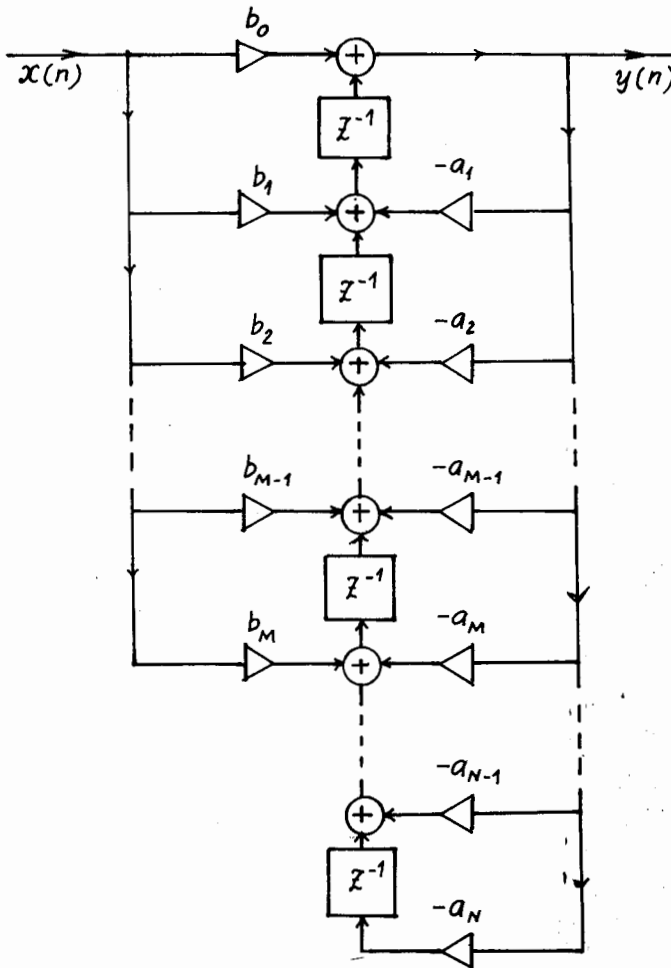
Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của bộ lọc số IIR này được cho trên hình 7.3.1.5.



Hình 7.3.1.5.

c) Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc chuyển vị

Cũng giống như với bộ lọc số FIR, ở đây chúng ta cũng có cấu trúc chuyển vị. Từ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc ta có cấu trúc trực tiếp chuyển vị, hình 7.3.1.6 sẽ mô tả cấu trúc này trong trường hợp $N > M$.



Hình 7.3.1.6.

d) Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng

Chúng ta đã có hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR trong trường hợp hệ số $a_0 = 1$ như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

và chúng ta có thể viết:

$$H(z) = \frac{b_0 + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Nếu $N > M$ ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0 \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} + \frac{-b_0 \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= b_0 + \frac{-b_0 \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} - b_0 \sum_{k=M+1}^N a_k z^{-k} + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^M (b_k - b_0 a_k) z^{-k} - \sum_{k=M+1}^N b_0 a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} + b_0 \end{aligned}$$

Đặt:

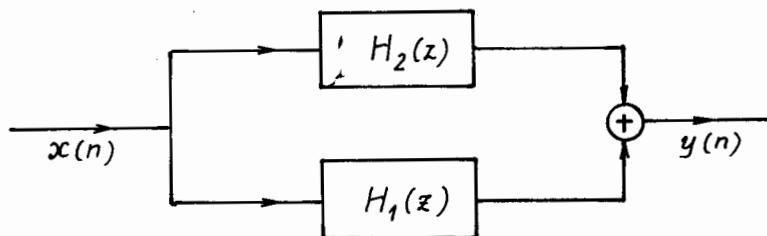
$$H_1(z) = \frac{\sum_{k=1}^M (b_k - b_0 a_k) z^{-k} - \sum_{k=M+1}^N b_0 a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$H_2(z) = b_0$$

Vậy:

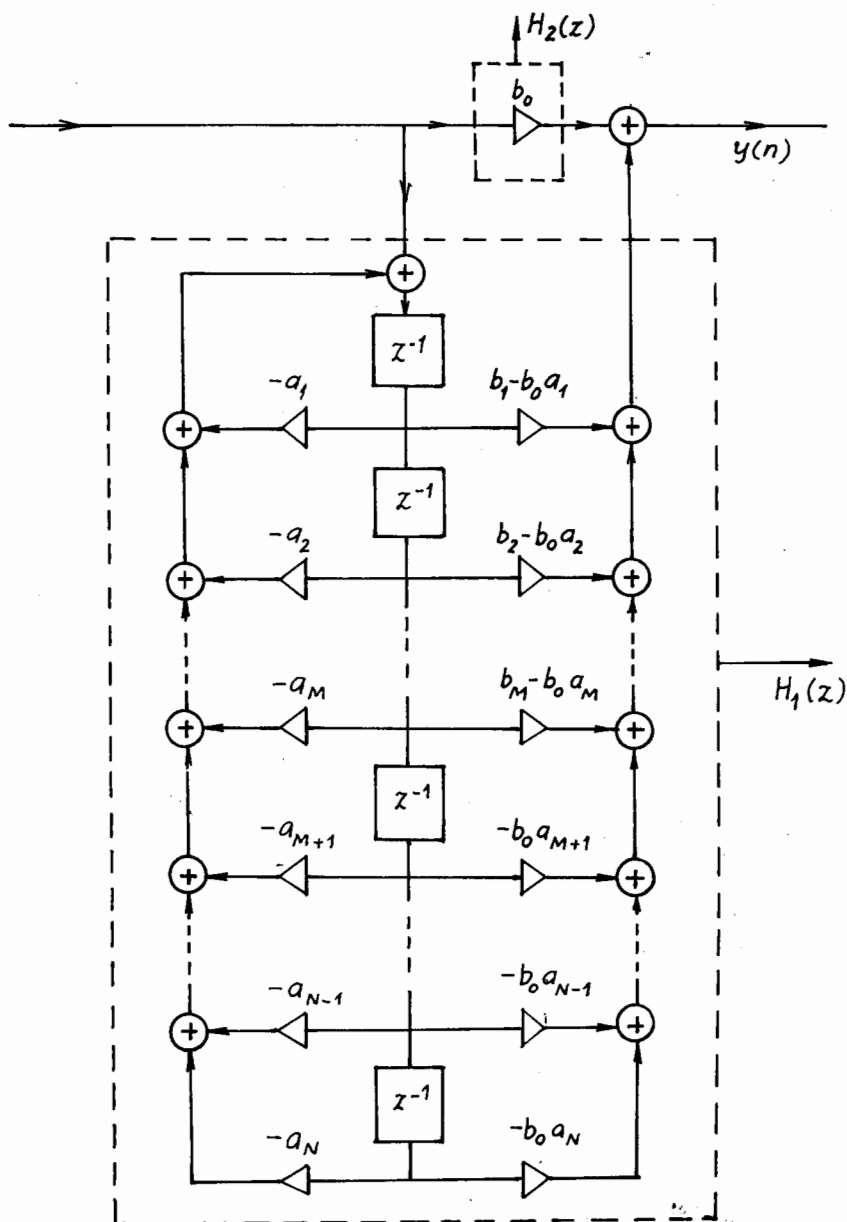
$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

Sơ đồ khối của $H(z)$ theo $H_1(z)$ và $H_2(z)$ được cho trên hình 7.3.1.7.



Hình 7.3.1.7.

Sơ đồ chi tiết của $H(z)$ được cho trên hình 7.3.1.8.



Hình 7.3.1.8.

Ví dụ 7.3.1.2

Hãy thực hiện bằng cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng của bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{2 - 3z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}$$

Giải

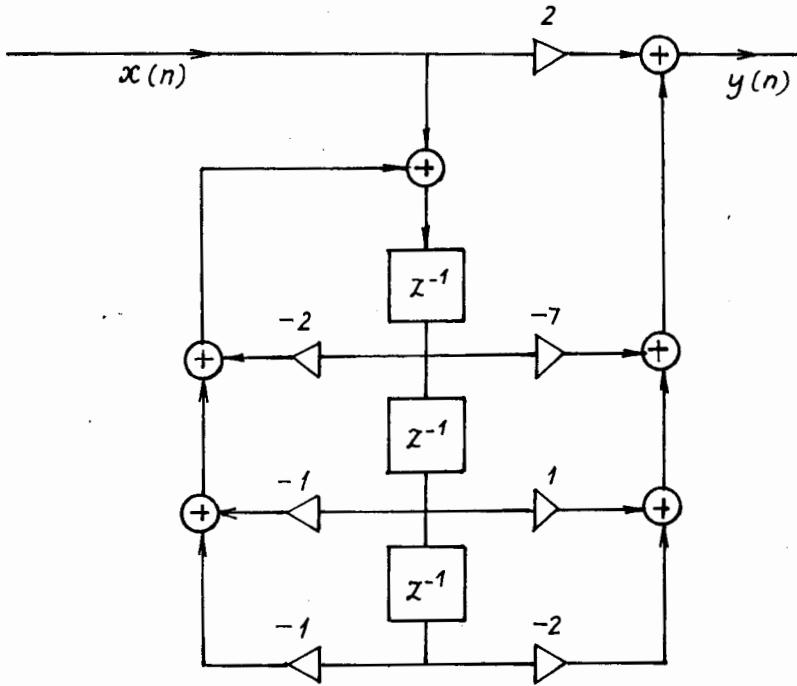
Ở đây: $N = 3$; $M = 2$, vậy ta có:

$$b_1 - b_0 a_1 = -3 - (2.2) = -7$$

$$b_2 - b_0 a_2 = 3 - (2.1) = 1$$

$$-b_0 a_3 = -(2.1) = -2$$

Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng của bộ lọc số IIR này được biểu diễn trên hình 7.3.1.9.



Hình 7.3.1.9.

7.3.2. CẤU TRÚC CHUẨN TẮC DẠNG TĂNG

Chúng ta đã có biểu thức của $H(z)$:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Nếu $a_0 = 1$ thì ta có:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Hàm truyền đạt $H(z)$ này có thể được đặc trưng bởi các điểm cực và điểm không như sau:

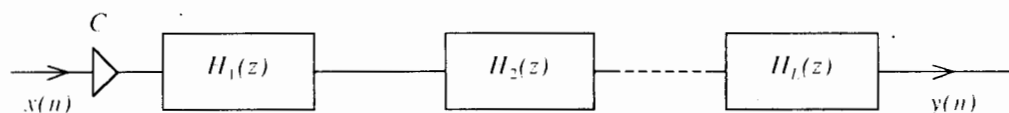
$$H(z) = C \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_{or} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - z_{pk} z^{-1})}; \quad C - \text{hằng số}$$

Vì thế chúng ta có thể biểu diễn $H(z)$ dưới dạng tích của những hàm bậc nhỏ hơn như là bậc một và bậc hai.

Việc biểu diễn $H(z)$ như thế này tương ứng với cấu trúc dạng tầng, tức là bộ lọc số được thực hiện bằng cách nối tiếp các tế bào bậc thấp hơn.

$$H(z) = C \cdot \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (7.3.2.1)$$

Sơ đồ khối thực hiện biểu thức 7.3.2.1 cho bởi hình 7.3.2.1.



Hình 7.3.2.1.

Ví dụ 7.3.2.1

Cho bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{3 - 3z^{-2}}{16 - 2z^{-3}}$$

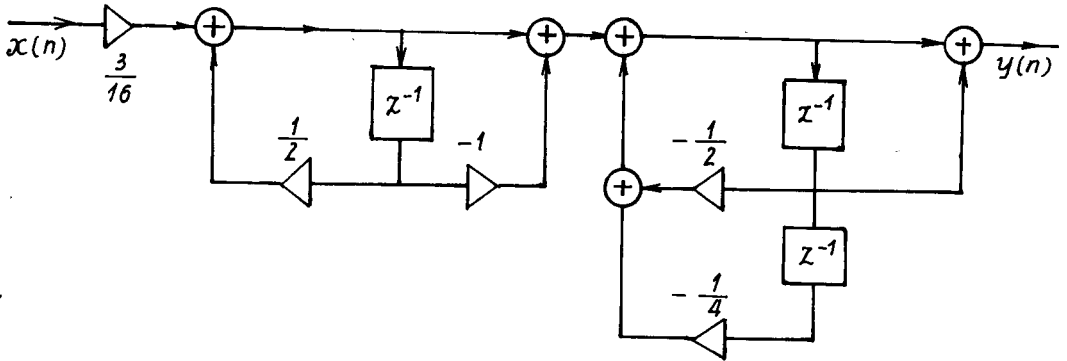
Hãy vẽ cấu trúc dạng tầng của hệ thống này.

Giải

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{8 - z^{-3}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(2 - z^{-1})(4 + 2z^{-1} + z^{-2})} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{2 - z^{-1}} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{4 + 2z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{4\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc dạng tầng thực hiện hàm truyền đạt $H(z)$ này được cho trên hình 7.3.2.2.



Hình 7.3.2.2.

7.3.3. CẤU TRÚC CHUẨN TẮC DẠNG SONG SONG

Cấu trúc chuẩn tắc dạng song song nhận được bằng cách biểu diễn hàm truyền đạt $H(z)$ dưới dạng tổng các hàm truyền đạt đơn giản hơn như sau:

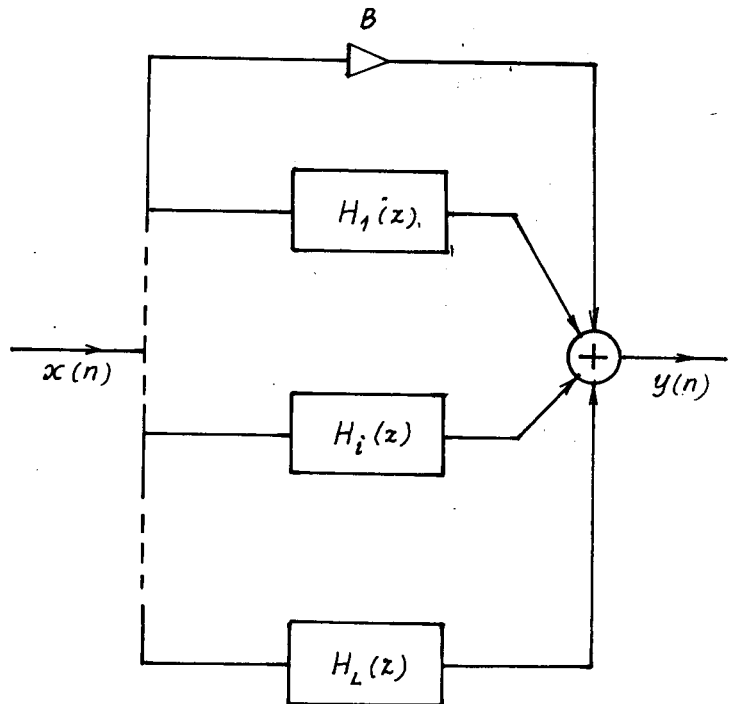
$$H(z) = B + \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (7.3.3.1)$$

B là hằng số.

Sơ đồ khối thực hiện dạng cấu trúc song song được cho bởi hình 7.3.3.1

Ví dụ 7.3.3.1

Cho hệ thống có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:



Hình 7.3.3.1.

$$H(z) = \frac{-1 + z^{-2}}{(-2 + z^{-1})(2 - 2z^{-1} + z^{-2})}$$

Hãy vẽ cấu trúc dạng song song của hệ thống này.

Giải

Chúng ta có thể tìm $H(z)$ dưới dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{C}{-2 + z^{-1}} + \frac{D + Ez^{-1}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

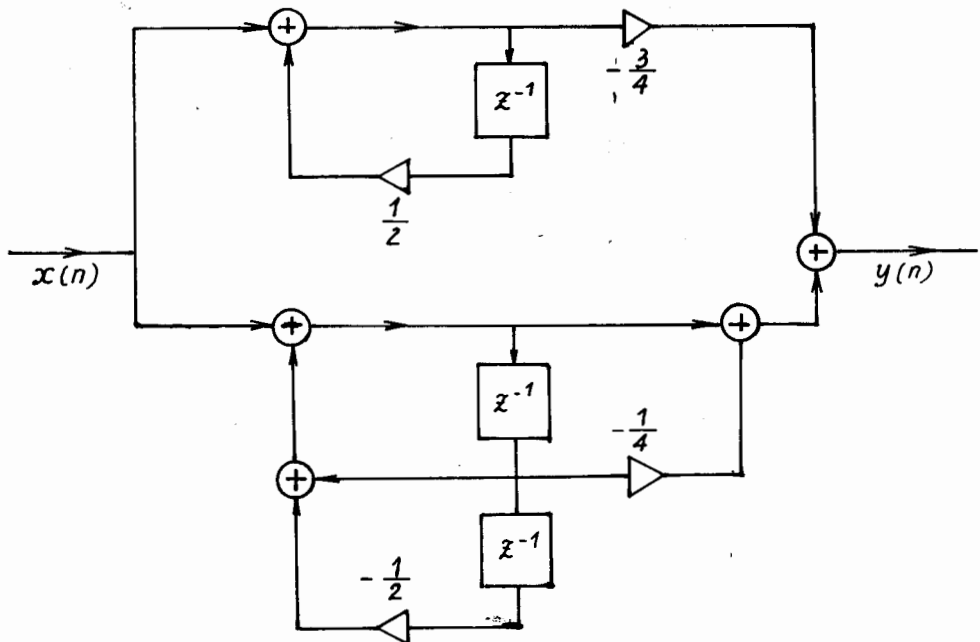
Cân bằng hệ số ta có:

$$C = \frac{3}{2}; D = 2; E = -\frac{1}{2}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\frac{3}{2}}{-2 + z^{-1}} + \frac{2 - \frac{1}{2}z^{-1}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{-\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{4}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \end{aligned}$$

Cấu trúc dạng song song để thực hiện $H(z)$ được cho trên hình 7.3.3.2.



Hình 7.3.3.2.

7.3.4. CẤU TRÚC DẠNG HÌNH THANG

Chúng ta lại có thể biến đổi biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ để có được một cấu trúc mới gọi là cấu trúc dạng hình thang.

Chúng ta bắt đầu nghiên cứu cấu trúc này từ hàm truyền đạt của hệ bậc 2 như sau:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (7.3.4.1a)$$

hoặc:
$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \quad (7.3.4.1b)$$

từ đây chúng ta tiến hành các phép chia như sau:

$$\begin{array}{r|l} b_0 z^2 + b_1 z + b_2 & a_0 z^2 + a_1 z + a_2 \\ - b_0 z^2 + \frac{b_0}{a_0} a_1 z + \frac{b_0}{a_0} a_2 & \frac{b_0}{a_0} \\ \hline 0 + \left(b_1 - \frac{b_0}{a_0} a_1 \right) z + \left(b_2 - \frac{b_0}{a_0} a_2 \right) & \\ \Rightarrow H(z) = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\left(b_1 - \frac{b_0}{a_0} \right) z + \left(b_2 - \frac{b_0}{a_0} a_2 \right)}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \end{array}$$

Chúng ta đặt:
$$h_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad (7.3.4.2)$$

Vậy:

$$H(z) = h_0 + \frac{1}{\frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{\left(b_1 - \frac{b_0}{a_0} \right) z + \left(b_2 - \frac{b_0}{a_0} a_2 \right)}} \quad (7.3.4.3)$$

Tiếp tục phép chia với đa thức mẫu:

$$\begin{array}{r|l} a_0 z^2 + a_1 z + a_2 & (b_1 - h_0 a_1) z + (b_2 - h_0 a_2) \\ - a_0 z^2 + a_0 \frac{b_2 - h_0 a_2}{b_1 - h_0 a_1} z & \frac{a_0}{b_1 - h_0 a_1} \\ \hline \left(a_1 - a_0 \frac{b_2 - h_0 a_2}{b_1 - h_0 a_1} \right) z + a_2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow H(z) = h_0 + \frac{1}{\frac{a_0}{b_1 - h_0 a_1} z + \frac{\begin{pmatrix} a_1 - a_0 & b_2 - h_0 a_2 \\ b_1 - h_0 a_1 & b_2 - h_0 a_2 \end{pmatrix} z + a_2}{(b_1 - h_0 a_1)z + (b_2 - h_0 a_2)}}$$

Đặt:

$$h_1 = \frac{a_0}{b_1 - h_0 a_1} \quad (7.3.4.4)$$

Vậy:

$$H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{\frac{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)}{[a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)]z + a_2}}} \quad (7.3.4.5)$$

Tiếp tục phép chia với đa thức mẫu ta có:

$$\begin{array}{r|l} (b_1 - h_0 a_1)z + (b_2 - h_0 a_2) & [a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)]z + a_2 \\ \hline (b_1 - h_0 a_1)z + a_2 \frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)} & \frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)} \\ \hline b_2 - h_0 a_2 - a_2 \frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)} & \end{array}$$

$$\Rightarrow H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{\frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)} + \frac{b_2 - h_0 a_2 - a_2 \frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)}}{[a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)]z + a_2}}$$

Đặt:

$$h_2 = \frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)} \quad (7.3.4.6)$$

Vậy:

$$H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{\frac{[a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)]z + a_2}{b_2 - h_0 a_2 - a_2 h_2}}}} \quad (7.3.4.7)$$

Tiếp tục phép chia với đa thức mẫu:

$$\frac{\frac{[a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)]z + a_2}{[a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)]z}}{\frac{b_2 - h_0 a_2 - a_2 h_2}{\frac{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)}{b_2 - h_0 a_2 - a_2 h_2} z}}$$

$$\Rightarrow H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{\frac{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)}{b_2 - h_0 a_2 - a_2 h_2} z + \frac{a_2}{b_2 - h_0 a_2 - a_2 h_2}}}}$$

Đặt:

$$h_3 = \frac{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)}{(b_2 - h_0 a_2) - a_2 h_2} \quad (7.3.4.8)$$

$$\Rightarrow H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 z + \frac{1}{(b_2 - h_0 a_2) - a_2 h_2}}}}} \quad (7.3.4.9)$$

Đặt:

$$h_4 = \frac{(b_2 - h_0 a_2) - a_2 h_2}{a_2} \quad (7.3.4.10)$$

$$\Rightarrow H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 z + \frac{1}{h_4}}}}} \quad (7.3.4.11)$$

ở đây:

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{b_0}{a_0} & h_3 &= \frac{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)}{(b_2 - h_0 a_2) - a_2 h_2} \\ h_1 &= \frac{a_0}{b_1 - h_0 a_1} & h_4 &= \frac{(b_2 - h_0 a_2) - a_2 h_2}{a_2} \\ h_2 &= \frac{b_1 - h_0 a_1}{a_1 - h_1(b_2 - h_0 a_2)} \end{aligned} \right\} \quad (7.3.4.12)$$

Nhận xét: Nếu ta lấy tích của tất cả các h_i sẽ được:

$$h_0 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4 = \frac{b_0}{a_2}$$

$$\Rightarrow \prod_{i=0}^4 h_i = \frac{b_0}{a_2} \quad (7.3.4.13)$$

Bây giờ chúng ta xét cấu trúc dạng hình thang: chúng ta có thể viết biểu thức (7.3.4.3) như sau:

$$H(z) = h_0 + H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = h_0 X(z) + H_1(z) X(z)$$

Đặt:

$$W_1(z) = H_1(z) X(z)$$

$$H_1(z) = \frac{1}{h_1 z + H_2(z)}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{h_2 z + H_3(z)}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{h_3 z + H_4(z)}$$

$$H_4(z) = \frac{1}{h_4}$$

Biến đổi tiếp $H_1(z)$ ta có:

$$H_1(z) = \frac{1}{h_1 z + H_2(z)} = \frac{h_1 z}{h_1 z} \cdot \frac{1}{h_1 z + H_2(z)} = \frac{h_1 z + H_2(z) - H_2(z)}{h_1 z (h_1 z + H_2(z))}$$

$$= \frac{1}{h_1 z} \left[\frac{h_1 z + H_2(z)}{h_1 z + H_2(z)} - \frac{H_2(z)}{h_1 z + H_2(z)} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 z} [1 - H_2(z) \cdot H_1(z)] = \frac{z^{-1}}{h_1} [1 - H_2(z) \cdot H_1(z)]$$

Vậy ta có:

$$W_1(z) = H_1(z) X(z) = \frac{1}{h_1} z^{-1} [X(z) - H_2(z) \cdot H_1(z) X(z)]$$

$$= \frac{1}{h_1} z^{-1} [X(z) - H_2(z) W_1(z)]$$

Đặt:

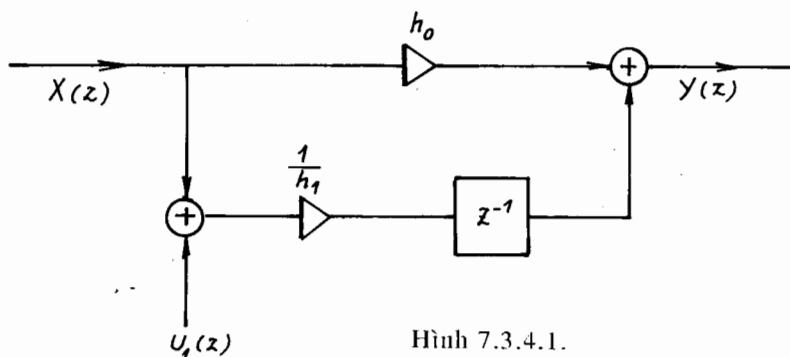
$$U_1(z) = -H_2(z) W_1(z)$$

$$\Rightarrow W_1(z) = \frac{1}{h_1} z^{-1} [X(z) + U_1(z)]$$

Vậy:

$$\begin{aligned} Y(z) &= h_0 X(z) + W_1(z) \\ &= h_0 X(z) + \frac{1}{h_1} z^{-1} [X(z) + U_1(z)] \end{aligned}$$

Từ đây ta có sơ đồ trên hình 7.3.4.1.



Hình 7.3.4.1.

Tiếp tục tính toán ta có:

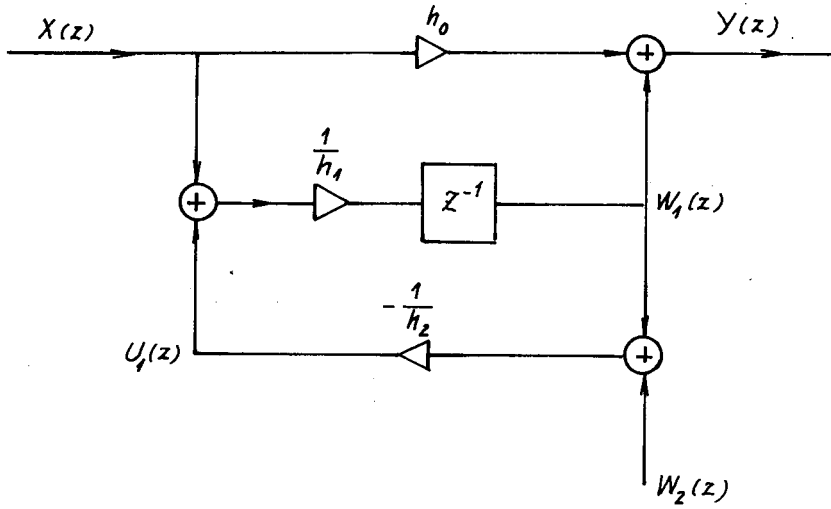
$$\begin{aligned} U_1(z) &= -H_2(z)W_1(z) = -\frac{1}{h_2 + H_3(z)} W_1(z) \\ &= -\frac{h_2}{h_2} \cdot \frac{1}{h_2 + H_3(z)} W_1(z) = -\frac{h_2 + H_3(z) - H_3(z)}{h_2 [h_2 + H_3(z)]} W_1(z) \\ &= -\frac{1}{h_2} \left[\frac{h_2 + H_3(z)}{h_2 + H_3(z)} - \frac{H_3(z)}{h_2 + H_3(z)} \right] W_1(z) \\ &= -\frac{1}{h_2} [1 - H_3(z)H_2(z)] W_1(z) \\ &= -\frac{1}{h_2} [W_1(z) - H_3(z)H_2(z)W_1(z)] \\ &= -\frac{1}{h_2} [W_1(z) - H_3(z)U_1(z)] \end{aligned}$$

Đặt:

$$W_2(z) = H_3(z)U_1(z)$$

$$\Rightarrow U_1(z) = -\frac{1}{h_2} [W_1(z) - W_2(z)]$$

Từ đây ta có sơ đồ trên hình 7.3.4.2.



Hình 7.3.4.2.

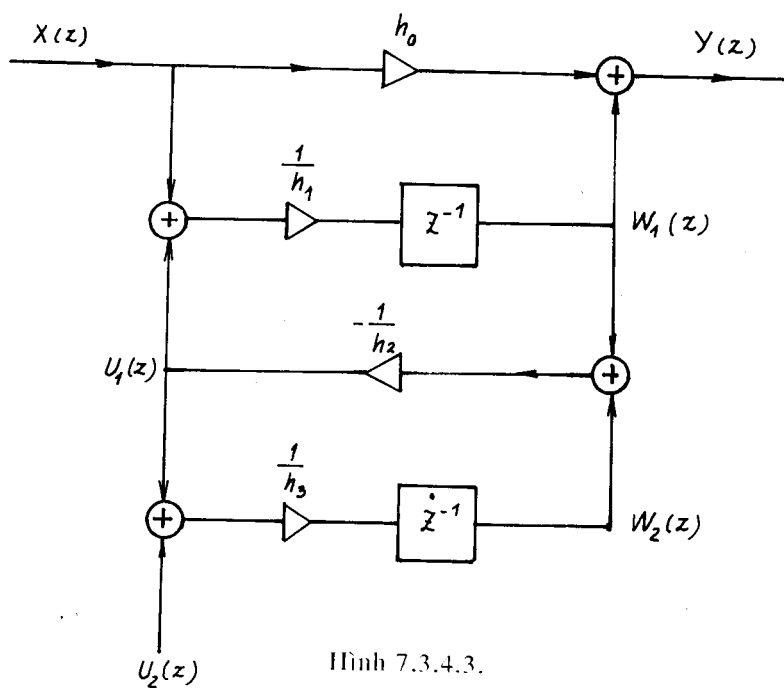
Tiếp tục tính toán với $W_2(z)$ ta có:

$$\begin{aligned}
 W_2(z) &= H_3(z)U_1(z) = \frac{1}{h_3z + H_4(z)} U_1(z) \\
 &= \frac{h_3z}{h_3z} \cdot \frac{1}{h_3z + H_4(z)} U_1(z) \\
 &= \frac{h_3z + H_4(z) - H_4(z)}{h_3z(h_3z + H_4(z))} U_1(z) \\
 &= \frac{1}{h_3} z^{-1} \left[\frac{h_3z + H_4(z)}{h_3z + H_4(z)} - \frac{H_4(z)}{h_3z + H_4(z)} \right] U_1(z) \\
 &= \frac{1}{h_3} z^{-1} [1 - H_4(z)H_3(z)] U_1(z) \\
 &= \frac{1}{h_3} z^{-1} [U_1(z) - H_4(z)H_3(z)U_1(z)] \\
 &= \frac{1}{h_3} z^{-1} [U_1(z) - H_4(z)W_2(z)]
 \end{aligned}$$

Đặt: $U_2(z) = -H_4(z)W_2(z)$

$$\Rightarrow W_2(z) = \frac{1}{h_3} z^{-1} [U_1(z) + U_2(z)]$$

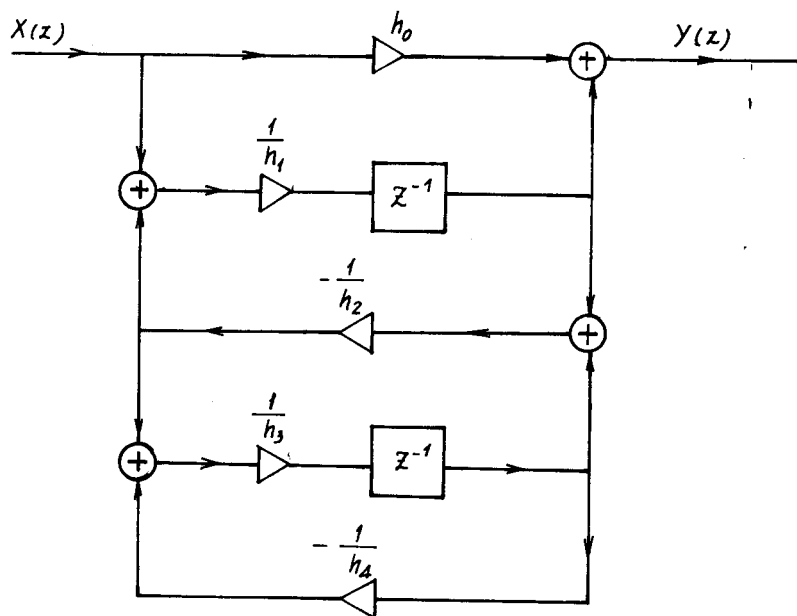
Từ đây ta có sơ đồ trên hình 7.3.4.3.



Tiếp tục tính toán với $U_2(z)$ ta có:

$$U_2(z) = -H_4(z)W_2(z) = -\frac{1}{h_4}W_2(z)$$

Từ đây ta có sơ đồ trên hình 7.3.4.4.



Bây giờ chúng ta tiến hành xét cấu trúc dạng hình thang trong trường hợp tổng quát.

Giả sử ta có hàm truyền đạt của bộ lọc số IIR dạng tổng quát sau đây:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^N b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (7.3.4.14)$$

Phân tích $H(z)$ thành dạng hình thang như sau:

$$H(z) = h_0 + \frac{1}{h_1 z + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 z + \dots + \frac{1}{h_{2N}}}}} \quad (7.3.4.15)$$

Các hệ số h_i được tính như sau:

$$h_i = \frac{k_{i-2,i-2} - h_{i-2} k_{i-1,i-1}}{k_{i-1,i-1} - h_{i-1} k_{i,i}}, \quad i = 2, 3, \dots, 2N \quad (7.3.4.16)$$

ở đây:

$$\begin{bmatrix} k_{i,i} \\ k_{i+1,i} \\ \vdots \\ k_{2N,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i-1,i-2} \\ k_{i,i-2} \\ \vdots \\ k_{2N-1,i-2} \end{bmatrix} - h_{i-2} \begin{bmatrix} k_{i,i-1} \\ k_{i+1,i-1} \\ \vdots \\ k_{2N,i-1} \end{bmatrix} \quad (7.3.4.17)$$

Các giá trị ban đầu được cho như sau:

$$h_0 = \frac{b_0}{a_0}$$

$$h_1 = \frac{a_0}{b_1 - h_0 a_1}$$

$$\begin{bmatrix} k_{0,0} \\ k_{0,1} \\ \vdots \\ k_{N-1,0} \\ k_{N,0} \\ \vdots \\ k_{2N-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \\ \vdots \\ k_{N,1} \\ k_{N+1,1} \\ \vdots \\ k_{2N,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.4.18)$$

Chú ý rằng:

$$+ \prod_{i=0}^{2N} h_i = \frac{b_0}{a_N} \quad (7.3.4.19)$$

+ Điều kiện để hệ thống thực hiện được là $a_0 \neq 0$.

Ví dụ 7.3.4.1

Cho hệ thống IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}}{3 + 5z^{-1} + 7z^{-2}}$$

Hãy vẽ cấu trúc hình thang của hệ thống này.

Giải

Áp dụng các biểu thức (7.3.4.16), (7.3.4.17) và (7.3.4.18) để tính các giá trị của h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ta có:

$$\text{ở đây:} \quad b_0 = 1; \quad a_0 = 3$$

$$b_1 = 2; \quad a_1 = 5$$

$$b_2 = 4; \quad a_2 = 7$$

$$h_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{3}$$

$$h_1 = \frac{a_0}{b_1 - h_0 a_1} = \frac{3}{2 - \frac{1}{3} \cdot 5} = 9$$

$$h_2 = \frac{k_{0,0} - h_0 k_{1,1}}{k_{1,1} - h_1 k_{2,2}}$$

$$k_{0,0} = b_1 = 2$$

$$k_{1,1} = a_1 = 5$$

$$k_{2,2} = k_{1,0} - h_0 k_{2,1}$$

$$k_{1,0} = b_2 = 4$$

$$k_{2,1} = a_2 = 7$$

Vậy:

$$k_{2,2} = b_2 - h_0 a_2 = 4 - \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{2 - \frac{1}{3} \cdot 5}{5 - 9 \cdot \frac{5}{3}} = -\frac{1}{30}$$

$$h_3 = \frac{k_{1,1} - h_1 k_{2,2}}{k_{2,2} - h_2 k_{3,3}}$$

$$k_{1,1} = a_1 = 5$$

$$h_2 = -\frac{1}{30}$$

$$h_1 = 9$$

$$k_{3,3} = k_{2,1} - h_1 k_{3,2}$$

$$k_{2,2} = \frac{5}{3}$$

$$k_{3,2} = k_{2,0} - h_0 k_{3,0} = 0 - h_0 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow k_{3,3} = k_{2,1} = a_2 = 7$$

$$\Rightarrow h_3 = \frac{5 - 9 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot 7} = \frac{5 - 15}{\frac{5}{3} + \frac{7}{30}} = \frac{-10}{\frac{57}{30}} = -\frac{300}{57}$$

$$h_4 = \frac{k_{2,2} - h_2 k_{3,3}}{k_{3,3} - h_3 k_{4,4}}$$

$$k_{2,2} = \frac{5}{3}$$

$$k_{4,4} = k_{3,2} - h_2 k_{4,3}$$

$$h_2 = -\frac{1}{30}$$

$$k_{3,2} = 0$$

$$k_{3,3} = a_2 = 7$$

$$k_{4,3} = k_{3,1} - h_0 k_{4,2}$$

$$h_3 = -\frac{300}{57}$$

$$k_{3,1} = 0$$

$$k_{4,2} = k_{3,0} - h_0 k_{4,1}$$

$$k_{3,0} = 0$$

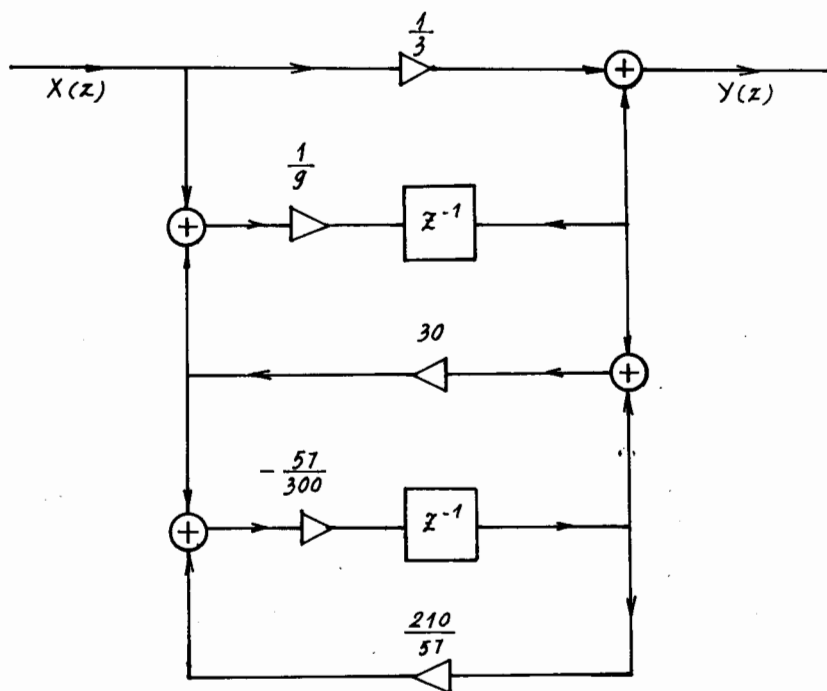
$$k_{4,1} = 0$$

$$\Rightarrow k_{4,3} = 0$$

$$\Rightarrow k_{4,4} = 0$$

$$\Rightarrow h_{41} = \frac{\frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot 7}{7} = \frac{57}{210}$$

Vậy cấu trúc hình thang của hệ thống này được cho trên hình 7.3.4.5.



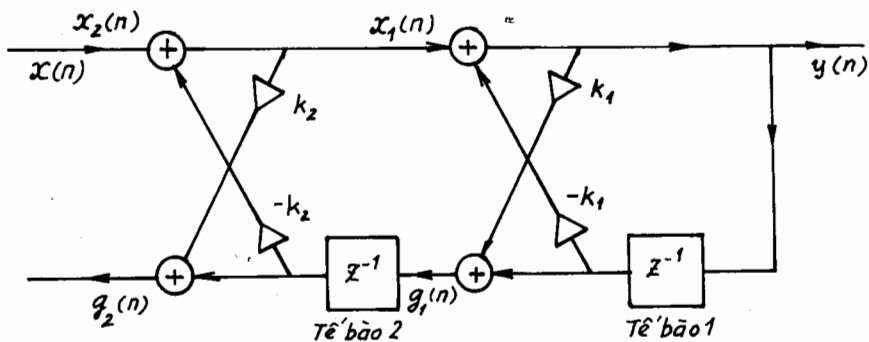
Hình 7.3.4.5.

7.3.5. CẤU TRÚC DẠNG MẮT CÁO

Đầu tiên xét cấu trúc dạng mắt cáo của bộ lọc số IIR đệ quy thuần túy bậc hai:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 a_i z^{-i}} \quad (7.3.5.1)$$

Cấu trúc dạng mắt cáo sẽ gồm 2 tế bào được biểu diễn trên hình 7.3.5.1.



Hình 7.3.5.1.

Nhìn trên hình 7.3.5.1 ta có thể viết:

Trong miền n ta có:

$$y(n) = x_1(n) - k_1 y(n-1)$$

$$g_1(n) = k_1 g(n) + y(n-1)$$

Trong miền z ta có:

$$Y(z) = X_1(z) - k_1 z^{-1} Y(z)$$

$$G_1(z) = k_1 Y(z) + z^{-1} Y(z)$$

Từ đây ta có:

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{1+k_1 z^{-1}} \quad (7.3.5.2)$$

$$U_1(z) = \frac{G_1(z)}{Y(z)} = k_1 + z^{-1} \quad (7.3.5.3)$$

Tiếp tục tính toán ta có:

$$x_1(n) = x_2(n) - k_2 g_1(n-1)$$

$$g_2(n) = k_2 x_1(n) + g_1(n-1)$$

$$\Rightarrow X_1(z) = X_2(z) - k_2 z^{-1} G_1(z)$$

$$G_2(z) = k_2 X_1(z) + z^{-1} G_1(z)$$

Vậy:

$$y(n) = x_2(n) - k_2 g_1(n-1) - k_1 y(n-1)$$

$$= x_2(n) - k_2 [k_1 y(n-1) + y(n-2)] - k_1 y(n-1)$$

$$= x_2(n) - k_1(1+k_2)y(n-1) - k_2 y(n-2)$$

$$\Rightarrow Y(z) = X_2(z) - k_1(1+k_2)z^{-1}Y(z) - k_2 z^{-2}Y(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X_2(z)} = \frac{1}{1+k_1(1+k_2)z^{-1} + k_2 z^{-2}} = H_2(z) \quad (7.3.5.4)$$

và:

$$g_2(n) = k_2 [y(n) + k_1 y(n-1)] + k_1 y(n)$$

$$= k_2 y(n) + k_1(k_2 + 1)y(n-1) + y(n-2)$$

$$G_2(z) = k_2 Y(z) + k_1(k_2 + 1)z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z)$$

$$\Rightarrow U_2(z) = \frac{G_2(z)}{Y(z)} = k_2 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + z^{-2} \quad (7.3.5.5)$$

Theo biểu thức (7.3.5.1) ta có:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 a_i z^{-i}} \equiv H_2(z)$$

Đặt:

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 a_{2,i} z^{-i}} = \frac{1}{D_2(z)} \quad (7.3.5.6)$$

So sánh biểu thức (7.3.5.4) với (7.3.5.6) ta rút ra kết luận sau:

$$a_{2,1} = k_1(k_2 + 1)$$

$$a_{2,2} = k_2$$

Thay vào biểu thức (7.3.5.5) ta có:

$$\begin{aligned} U_2(z) &= a_{2,2} + a_{2,1}z^{-1} + z^{-2} \\ &= \sum_{i=0}^{2-1} a_{2,2-i} z^{-i} + z^{-2} = z^{-2} D_2(z^{-1}) \end{aligned}$$

Đặt:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + k_1 z^{-1}} = \frac{1}{D_1(z)}$$

$$U_1(z) = k_1 + z^{-1}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} D_2(z) &= 1 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + k_2 z^{-2} \\ &= 1 + k_1 z^{-1} + k_1 k_2 z^{-1} + k_2 z^{-2} \\ &= D_1(z) + k_2 z^{-1} U_1(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(z) &= k_2 + k_1(k_1 + 1)z^{-1} + z^{-2} \\ &= k_2(1 + k_1 z^{-1}) + z^{-1}(k_1 + z^{-1}) \\ &= k_2 D_1(z) + z^{-1} U_1(z) \end{aligned}$$

Dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{bmatrix} D_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & k_2 z^{-1} \\ k_2 & z^{-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{K}_2}}} \cdot \begin{bmatrix} D_1(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} D_1(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_1(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_2^{-1} \begin{bmatrix} D_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2|} \begin{bmatrix} z^{-1} & -k_2 z^{-1} \\ -k_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-k_2^2} \begin{bmatrix} 1 & -k_2 \\ -k_2 z^{-1} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

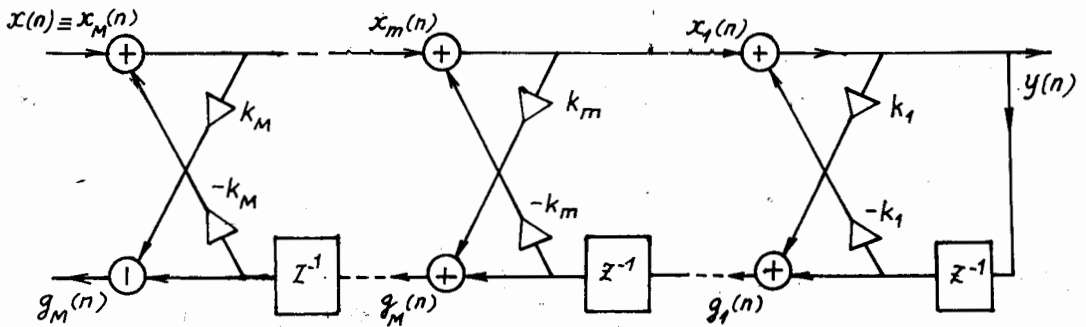
$$\begin{aligned} D_1(z) &= \frac{1}{1-k_2^2} [D_2(z) - k_2 U_2(z)] \\ &= \frac{1}{1-k_2^2} \left[1 + \sum_{i=1}^2 a_{2,1} z^{-i} - k_2 \left(\sum_{i=0}^1 a_{2,2-i} z^{-i} + z^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^1 a_{1,i} z^{-i} &= \frac{1}{1-k_2^2} [1 + a_{2,1} z^{-1} + a_{2,2} z^{-2} - k_2 a_{2,2} - k_2 a_{2,1} z^{-1} + k_2 z^{-2}] \\ \Rightarrow a_{1,1} &= \frac{1}{1-k_2^2} [a_{2,1} - k_2 a_{2,1}] = \frac{1}{1-a_{2,2}^2} (a_{2,1} - a_{2,2} a_{2,1}) \quad (7.3.5.7) \end{aligned}$$

Xét trường hợp tổng quát:

Cấu trúc dạng mắt cáo trong trường hợp tổng quát được cho trên hình 7.3.5.2.



Hình 7.3.5.2.

Trường hợp tổng quát ta có:

$$\begin{bmatrix} D_m(z) \\ U_m(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & k_m z^{-1} \\ k_m & z^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_m} \begin{bmatrix} D_{m-1}(z) \\ U_{m-1}(z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{m-1}(z) \\ U_{m-1}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_m^{-1} \begin{bmatrix} D_m(z) \\ U_m(z) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-k_m^2} \begin{bmatrix} 1 & -k_m \\ -k_m z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_m(z) \\ U_m(z) \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$D_{m-1}(z) = \frac{1}{1-k_m^2} [D_m(z) - k_m U_m(z)]$$

Vậy:

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_{m-1,i} z^{-i} = \frac{1}{1-k_m^2} \left[1 + \sum_{m=1}^m a_{m,i} z^{-i} - k_m \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{m,m-1} z^{-i} + z^{-m} \right) \right]$$

Cuối cùng ta có:

$$a_{m-1,i} = \frac{1}{1-k_m^2} [a_{m,i} - k_m a_{m,m-i}]$$

$$a_{m-1,i} = \frac{1}{1-a_{m,m}^2} [a_{m,i} - a_{m,m} a_{m,m-i}] \quad (7.3.5.8)$$

ở đây:

$$a_{m,m} = k_m, \quad a_{m-1,m-1} = k_{m-1}$$

$$a_{M,M} = k_M$$

7.4. ĐỘ NHAY

7.4.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để thực hiện bộ lọc số nào đó chúng ta phải lượng tử hoá và mã hoá ra mã nhị phân các hệ số thu được sau khi tổng hợp bằng các phương pháp được trình bày ở chương 5 và chương 6. Việc làm này gây ra sai số (làm tròn hoặc cắt bỏ), sai số này sẽ làm hàm truyền đạt (hoặc đáp ứng tần số) lệch khỏi giá trị ban đầu sau khi tổng hợp.

Giả sử ta ký hiệu như sau:

α_k : hệ số trước khi lượng tử hoá (gọi là hệ số liên tục);

$\alpha_k + \Delta\alpha_k$: hệ số sau khi lượng tử hoá (gọi là hệ số rời rạc);

$\Delta\alpha_k$: sai số sau khi lượng tử hoá.

Để giảm những sai số này chúng ta có thể thay đổi cách lượng tử hoá và mã hoá, như là tăng số bit, nhưng việc tăng này không có lợi về kinh tế cũng như về kỹ thuật.

7.4.2. ĐỊNH NGHĨA ĐỘ NHAY

Định nghĩa: Độ nhảy của đáp ứng tần số (hoặc hàm truyền đạt) đối với hệ số α_k được định nghĩa như sau:

$$S_{\alpha_k}(e^{j\omega}) = \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial \alpha_k} \quad (7.4.2.1)$$

Độ nhảy này được gọi là độ nhảy riêng.

Ví dụ 7.4.2.1

Cho đáp ứng tần số của một bộ lọc số như sau:

$$H(e^{j\omega}) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

Hãy tìm độ nhảy riêng của đáp ứng tần số đối với các hệ số của bộ lọc.

Giải

- Đối với hệ số $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ ta có:

$$S_{h\left(\frac{N-1}{2}\right)}(e^{j\omega}) = 1$$

- Đối với các hệ số $h(n)$ với $n \neq \frac{N-1}{2}$ ta có:

$$S_{h(n)}(e^{j\omega}) = 2\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

Ngoài ra chúng ta còn định nghĩa thêm một số loại độ nhảy nữa như sau:

- Độ nhảy tuyệt đối:

$$S_{abs}(e^{j\omega}) = \sum_{\alpha_k} |S_{\alpha_k}(e^{j\omega})| \quad (7.4.2.2)$$

- Độ nhảy cầu phương:

$$S_q(e^{j\omega}) = \left[\sum_{\alpha_k} S_{\alpha_k}^2(e^{j\omega}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.4.2.3)$$

Nhận xét

- Nếu độ nhảy càng thấp thì càng tốt cho việc mã hoá, có nghĩa là giảm được số bit khi mã hoá.

- Việc chọn cấu trúc thích hợp có thể làm giảm độ nhảy đáng kể. Cấu trúc có độ nhảy thấp là một hướng nghiên cứu rất thực tế.

- Mỗi độ nhảy cầu phương $S_q(e^{j\omega})$ sẽ có một giá trị cực đại là $S_q(e^{j\omega})_{\max}$ vậy chúng ta có thể đánh giá độ nhảy cầu phương một cách tương đối so với $S_q(e^{j\omega})_{\max}$ ta gọi là *độ nhảy cầu phương tương đối*. Vậy độ nhảy cầu phương tương đối được đánh giá như sau:

$$S_{qR}(e^{j\omega}) = \frac{S_q(e^{j\omega})}{S_q(e^{j\omega})_{\max}} \quad (7.4.2.4)$$

Ví dụ 7.4.2.2

Cho đáp ứng độ lớn (hoặc đáp ứng tần số) của bộ lọc số FIR loại I có dạng sau đây (xem bảng 5.4.5.1):

$$A(e^{j\omega}) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos(\omega n)$$

- + Hãy tính độ nhảy riêng của bộ lọc số FIR này,
- + Hãy tính độ nhảy tuyệt đối,
- + Hãy tính độ nhảy cầu phương,
- + Hãy tính độ nhảy cầu phương tương đối.

Giải

- + Tính độ nhảy riêng:

$$S_{h\left(\frac{N-1}{2}\right)}(e^{j\omega}) = \frac{\partial A(e^{j\omega})}{\partial h\left(\frac{N-1}{2}\right)} = 1$$

$$S_{h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)}(e^{j\omega}) = \frac{\partial A(e^{j\omega})}{\partial h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)} = 2\cos(\omega n)$$

- + Tính độ nhảy tuyệt đối:

$$\begin{aligned} S_{abs}(e^{j\omega}) &= \sum_{h(n)} |S_{h(n)}(e^{j\omega})| \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} |\cos(\omega n)| \end{aligned}$$

+ Tính độ nhạy cấu phương:

$$\begin{aligned}
 S_q(e^{j\omega}) &= \left[\sum_{h(n)} S_{h(n)}^2(e^{j\omega}) \right]^2 \\
 S_q^2(e^{j\omega}) &= 1 + 4 \sum_{n=1}^{N-1} \cos^2(\omega n) \\
 &= 1 + 4 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1 + \cos(2\omega n)}{2} \\
 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} [1 + \cos(2\omega n)] \\
 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\omega n) \\
 S_q^2(e^{j\omega}) &= N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\omega n) \\
 &= N + \sum_{n=1}^{N-1} (e^{j2n\omega} + e^{-j2n\omega}) \\
 &= N + e^{j0} - e^{j0} + 2 \sum_{n=1}^{N-1} e^{j2n\omega} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} e^{-j2n\omega}}_{\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{-1} e^{j2n\omega}} \\
 \Rightarrow S_q^2(e^{j\omega}) &= N - 1 + \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{N-1} e^{j2n\omega}
 \end{aligned}$$

Đổi biến số: $m = n + \frac{N-1}{2}$ ta có:

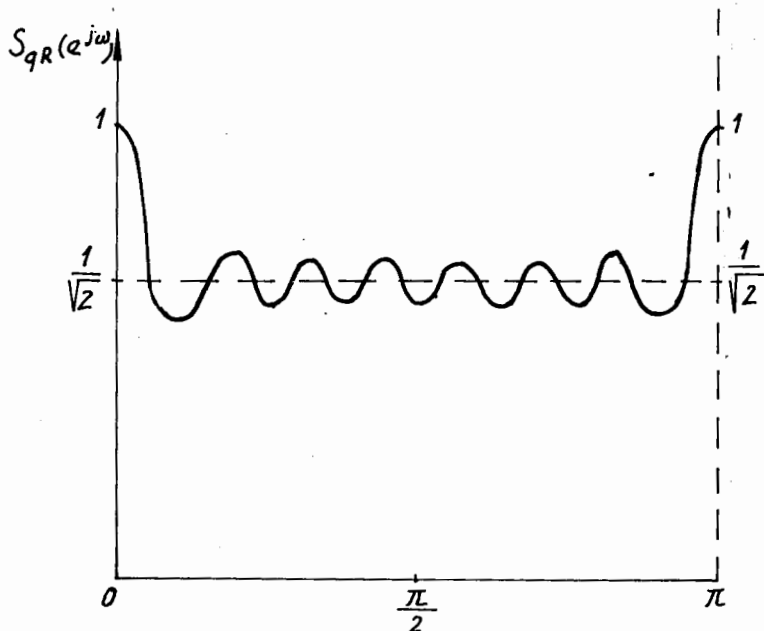
$$S_q^2(e^{j\omega}) = N - 1 + \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\left(m - \frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$\begin{aligned}
&= N - 1 + e^{-j(N-1)\omega} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2m\omega} \\
&= N - 1 + e^{-j(N-1)\omega} \cdot \frac{1 - e^{j2N\omega}}{1 - e^{j2\omega}} \\
&= N - 1 + \frac{e^{-jN\omega} - e^{jN\omega}}{e^{-j\omega} - e^{j\omega}} = N - 1 + \frac{\sin N\omega}{\sin \omega} \\
\Rightarrow S_q(e^{j\omega}) &= \left[N - 1 + \frac{\sin N\omega}{\sin \omega} \right]^2
\end{aligned}$$

+ Tính độ nhạy cầu phương tương đối:

Theo công thức tính $S_q^2(e^{j\omega})$ thì hàm $\frac{\sin N\omega}{\sin \omega}$ sẽ lấy giá trị cực đại tại $\omega = 0$ và bằng N . Vậy $S_q^2(e^{j\omega})$ sẽ lấy giá trị cực đại tại $\omega = 0$ và bằng $2N - 1$. Từ đây ta có thể tính được độ nhạy cầu phương tương đối bằng biểu thức sau đây:

$$S_{qR}(e^{j\omega}) = \frac{S_q(e^{j\omega})}{S_q(e^{j\omega})_{\max}} = \left[\frac{N - 1 + \frac{\sin N\omega}{\sin \omega}}{2N - 1} \right]^2$$



Hình 7.4.2.1.

Từ đây ta thấy rằng khi bậc của bộ lọc tăng vô hạn thì giá trị của độ nhạy $S_{qR}(e^{j\omega})$ tiến về một giá trị giới hạn xác định độc lập với tần số như sau:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{qR}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

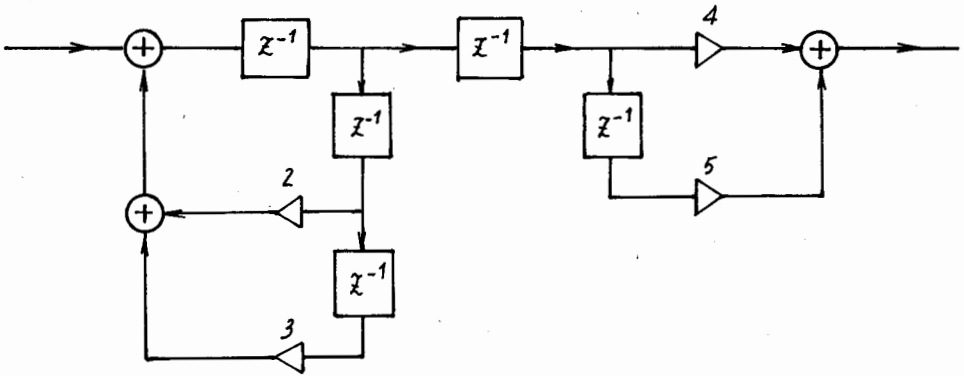
Vì vậy khi N lớn giới hạn $\frac{1}{\sqrt{2}}$ này có thể được sử dụng để xác định nhanh số lượng bit cần thiết cho việc biểu diễn các hệ số của bộ lọc.

Đồ thị minh họa sự biến thiên của $S_{qR}(e^{j\omega})$ ứng với $N = 15$ được cho trên hình 7.4.2.1.

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

Bài tập 7.1

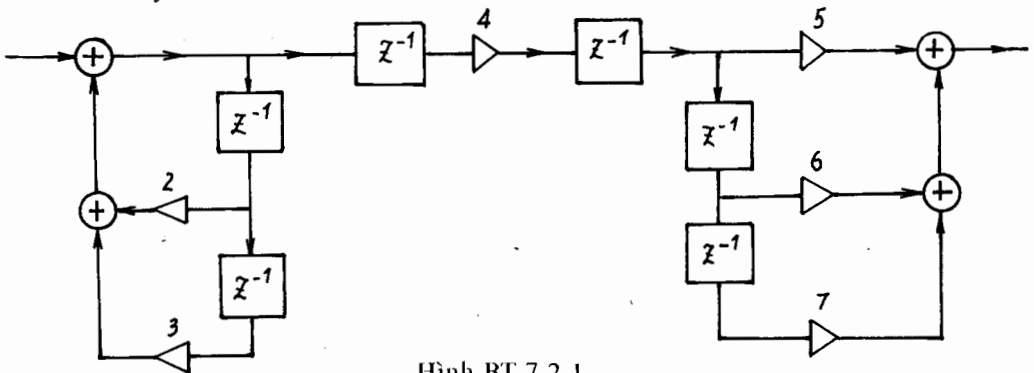
Hãy biểu diễn sơ đồ bộ lọc số cho trên hình BT 7.1.1 sau đây dưới dạng đồ hình có hướng.



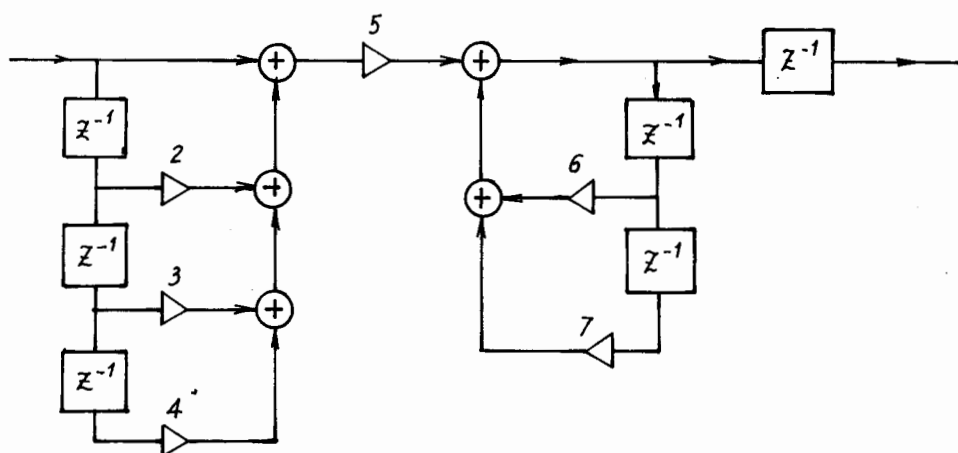
Hình BT 7.1.1.

Bài tập 7.2

Hãy tìm cấu trúc chuyển vị của các cấu trúc cơ sở đồ cho trên hình BT 7.2.1 và BT7.2.2 sau đây:



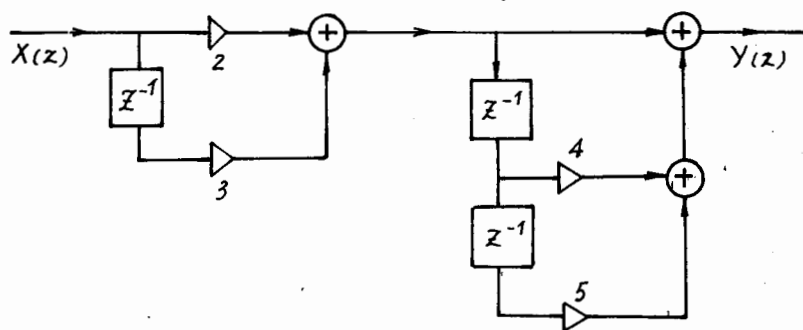
Hình BT 7.2.1.



Hình BT 7.2.2.

Bài tập 7.3

Cho bộ lọc số có cấu trúc dạng tầng như trên hình BT 7.3 sau đây:



Hình BT 7.3.

Hãy tìm cấu trúc trực tiếp từ cấu trúc ở trên.

Bài tập 7.4

Hãy vẽ cấu trúc pha tuyến tính của các bộ lọc số có đáp ứng xung như sau:

a) $h(n) = \{2, 3, 4, 3, 2\}$

$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ 0 \end{array}$

b) $h(n) = \{1, 2, 3, 0, -3, -2, -1\}$

$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ 0 \end{array}$

c) $h(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$

$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ 0 \end{array}$

d) $h(n) = \{1, 2, 3, 4, -4, -3, -2, -1\}$
 $\quad \quad \quad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ 0 \end{array}$

Bài tập 7.5

Hãy chứng minh biểu thức (7.2.5.17):

$$H_2(z) = \sum_{k=1}^{N-1} H_{2k}(z) + \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1+z^{-1}}$$

$$H_{2k}(z) = 2|H(k)| \frac{\cos\theta(k) - z^{-1} \cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi}{N}k\right]}{1 - 2z^{-1} \cos \frac{2\pi}{N}k + z^{-2}}$$

Bài tập 7.6

Hãy vẽ cấu trúc lấy mẫu tần số của bộ lọc số FIR trong trường hợp chiều dài của bộ lọc N là số chẵn như sau:

a) $H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$

b) $H(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{3}{6}z^{-3} + \frac{2}{6}z^{-4} + \frac{1}{6}z^{-5}$

c) $H(z) = 1 + \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{6}{8}z^{-2} + \frac{5}{8}z^{-3} + \frac{4}{8}z^{-4} + \frac{3}{8}z^{-5} + \frac{2}{8}z^{-6} + \frac{1}{8}z^{-7}$

Bài tập 7.7

Hãy xét cấu trúc lấy mẫu tần số của bộ lọc số FIR trong trường hợp chiều dài của bộ lọc N là số lẻ (tức là hãy tìm $H_2(z)$, $H_{2k}(z)$ như biểu thức 7.2.5.17 và sau đó vẽ cấu trúc lấy mẫu tần số).

Bài tập 7.8

Hãy vẽ cấu trúc lấy mẫu tần số của bộ lọc số FIR trong trường hợp chiều dài của bộ lọc N là số lẻ như sau:

a) $H(z) = 1 + \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{3}{5}z^{-2} + \frac{2}{5}z^{-3} + \frac{1}{5}z^{-4}$

b) $H(z) = 1 + \frac{6}{7}z^{-1} + \frac{5}{7}z^{-2} + \frac{4}{7}z^{-3} + \frac{3}{7}z^{-4} + \frac{2}{7}z^{-5} + \frac{1}{7}z^{-6}$

c) $H(z) = 1 + \frac{8}{9}z^{-1} + \frac{7}{9}z^{-2} + \frac{6}{9}z^{-3} + \frac{5}{9}z^{-4} + \frac{4}{9}z^{-5} + \frac{3}{9}z^{-6} + \frac{2}{9}z^{-7} + \frac{1}{9}z^{-8}$

Bài tập 7.9

Hãy vẽ cấu trúc pha tuyến tính và cấu trúc lấy mẫu tần số của các bộ lọc số FIR pha tuyến tính có đáp ứng xung như sau:

a) $h(n) = \{1, 2, 2, 1\}$

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ 0 \end{array}$$

b) $h(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ 0 \end{array}$$

Bài tập 7.10

Cho bộ lọc số FIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = 1 + \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{3}{5}z^{-2} + \frac{2}{5}z^{-3} + \frac{1}{5}z^{-4}$$

Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp và cấu trúc dạng mắt cáo.

Bài tập 7.11

Cho bộ lọc số FIR có cấu trúc dạng mắt cáo 3 tầng với các hệ số $k_1 = \frac{1}{4}$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = \frac{1}{3}$, hãy xác định các hệ số của cấu trúc trực tiếp.

Bài tập 7.12

Cho bộ lọc số FIR có cấu trúc dạng mắt cáo 4 tầng với các hệ số $k_1 = \frac{1}{5}$, $k_2 = \frac{1}{4}$, $k_3 = \frac{1}{6}$ và $k_4 = \frac{1}{8}$, hãy xác định các hệ số của cấu trúc trực tiếp.

Bài tập 7.13

Hãy tìm biểu thức của $y_3(n)$, $g_3(n)$, $y_2(n)$, $g_2(n)$, $y_1(n)$, $g_1(n)$ và từ đó chứng minh rằng:

$$k_3 = h_3(3), k_2 = h_2(2), k_1 = h_1(1)$$

$$u_3(n) = h_3(3 - n), u_2(n) = h_2(2 - n), u_1(n) = h_1(1 - n)$$

Bài tập 7.14

Từ biểu thức (7.2.6.18) hãy chứng minh kết quả tính $h_2(n)$ và k_2 theo công thức (7.2.6.20).

Bài tập 7.15

Từ biểu thức (7.2.6.21) hãy chứng minh kết quả tính $h_1(n)$ và k_1 theo công thức (7.2.6.25).

Bài tập 7.16

Từ biểu thức (7.2.6.27) hãy chứng minh kết quả tính $h_{m-1}(n)$ và k_m theo công thức (7.2.6.28).

Bài tập 7.17

Cho hệ thống số có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = 1 - 1,99z^{-1} + 1,572z^{-2} - 0,458z^{-3}$$

Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp và cấu trúc dạng mắt cáo của hệ thống này.

Bài tập 7.18

Cho bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}}{5 + 6z^{-1} + 7z^{-2} + 8z^{-3}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuyển vị.

Bài tập 7.19

Cho bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 5z^{-2}}{4 + 6z^{-1} + 8z^{-2} + 10z^{-3}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng,

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng chuyển vị.

Bài tập 7.20

Cho bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}}{2 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 6z^{-3}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc,

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc chuyển vị,

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng,

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc biến dạng chuyển vị.

Bài tập 7.21

Cho các bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

a) $H(z) = \frac{2}{1 - 25z^{-2}}$

b) $H(z) = \frac{1 + z^{-3}}{1 - 27z^{-3}}$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc,

+ Hãy vẽ cấu trúc song song,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng tầng.

Bài tập 7.22

Cho hai bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$\text{a) } H(z) = \frac{16 + z^{-4}}{1 + 16z^{-4}}$$

$$\text{b) } H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 8z^{-2}}{2 - z^{-1} + 4z^{-2}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các bộ lọc số này,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng song song,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng tầng.

Bài tập 7.23

Cho hai hệ thống IIR được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$\text{a) } y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + \frac{1}{2}x(n)$$

$$\text{b) } y(n) = \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng song song,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng tầng.

Bài tập 7.24

Cho các hệ thống IIR được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$\text{a) } y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

$$\text{b) } y(n) = -0,2y(n-1) + 0,5y(n-2) + 0,7x(n) - 0,25x(n-2)$$

$$\text{c) } y(n) = -0,1y(n-1) + 0,2y(n-2) + 2x(n) + 3x(n-1) + 6x(n-2)$$

$$\text{d) } y(n) = y(n-1) - 0,5y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$$

$$\text{e) } y(n) = 0,5y(n-1) + 0,25y(n-2) + y(n-3) + x(n) - x(n-2)$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng song song,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng tầng.

Bài tập 7.25

Cho hai hệ thống IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$\text{a)} \quad H(z) = \frac{2 + 3z^{-1}}{4 + 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

$$\text{b)} \quad H(z) = \frac{0,25z^{-1} + 0,5z^{-2}}{0,5 + 0,7z^{-1} + 0,9z^{-2}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này.

+ Hãy vẽ cấu trúc hình thang của các hệ thống này.

Bài tập 7.26

Cho các hệ thống IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$\text{a)} \quad H(z) = \frac{2 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$\text{b)} \quad H(z) = \frac{1 + z^{-2} + 2z^{-3}}{2 + z^{-3} + 3z^{-4} + 5z^{-6}}$$

$$\text{c)} \quad H(z) = \frac{3 + 5z^{-4}}{1 + 2z^{-5} + 3z^{-6} + 6z^{-7}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này.

+ Hãy vẽ cấu trúc hình thang của các hệ thống này.

Bài tập 7.27

Cho các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$\text{a)} \quad y(n] + 2y(n-1) = 3x(n]$$

$$\text{b)} \quad y(n] + \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}(n-2) = x(n] - \frac{1}{3}x(n-1)$$

$$\text{c)} \quad y(n] - \frac{1}{3}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-3) = x(n] - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n-2)$$

$$\text{d)} \quad 2y(n] - y(n-1) - 2y(n-2) = \frac{1}{2}x(n] - 3x(n-2)$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này.

+ Hãy vẽ cấu trúc hình thang của các hệ thống này.

Bài tập 7.28

Cho các hệ thống IIR có hàm truyền đạt như sau:

a)
$$H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

b)
$$H(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3}}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng mắt cáo của các hệ thống này.

Bài tập 7.29

Cho các hệ thống IIR được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

a)
$$y(n] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] + x[n]$$

b)
$$y[n] = -0,25y[n-1] - 0,5y[n-2] - 0,75y[n-3] + x[n]$$

c)
$$y[n] = 0,2y[n-1] + 0,7y[n-3] + 0,9y[n-4] + x[n]$$

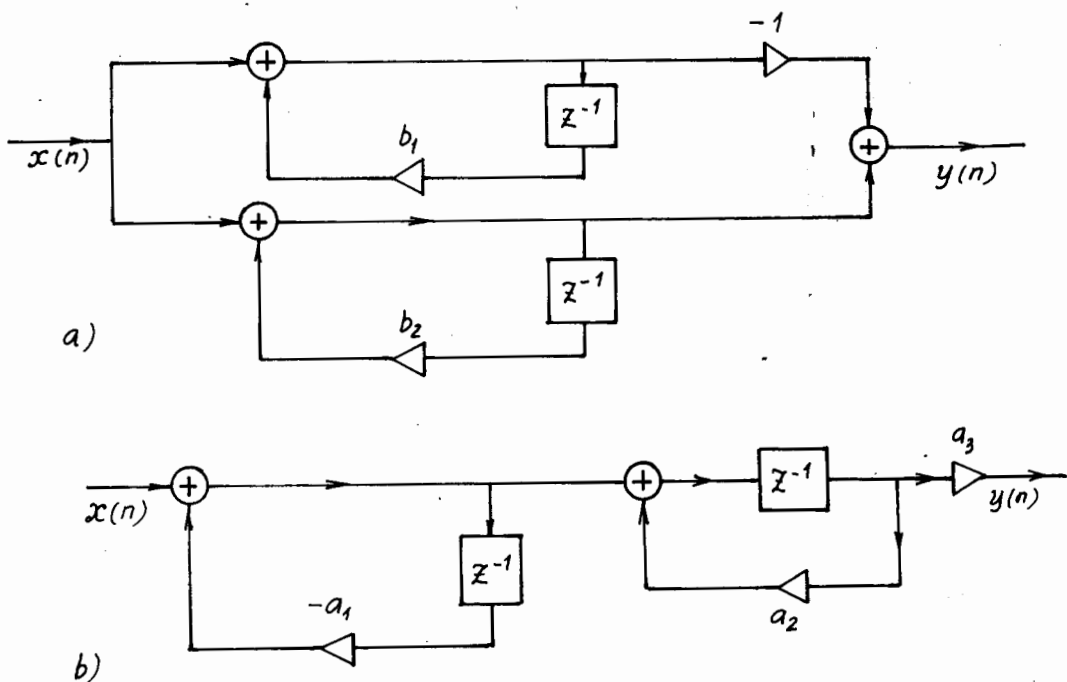
d)
$$y[n] = 0,5y[n-2] + 0,75y[n-4] + 0,25x[n]$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc của các hệ thống này

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng mắt cáo của các hệ thống này.

Bài tập 7.30

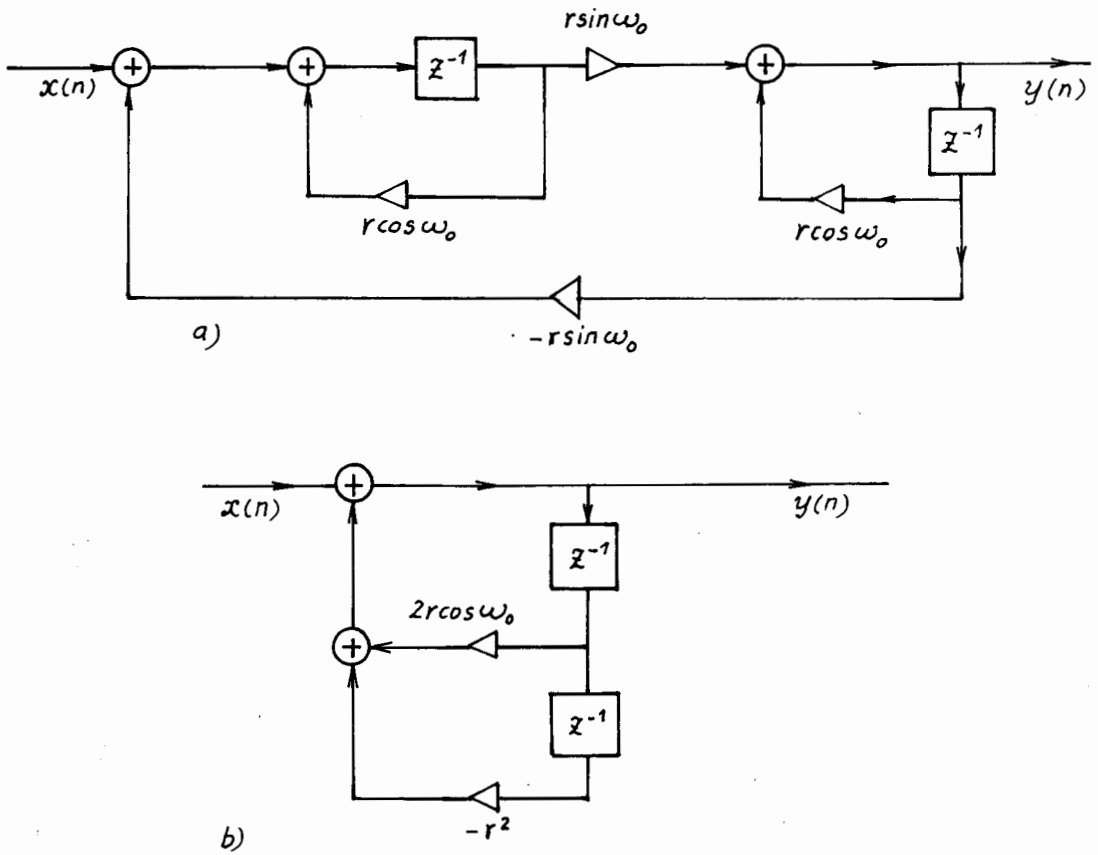
Hãy tính các hệ số a_1 , a_2 và a_3 theo hàm của các hệ số b_1 và b_2 sao cho hai sơ đồ cho trên hình BT 7.30 sau đây là tương đương.



Hình BT 7.30.

Bài tập 7.31

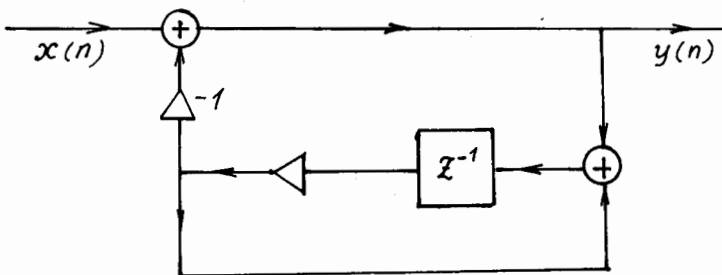
Hãy chứng minh rằng hai hệ thống có cấu trúc cho trên hình BT 7.31 là tương đương nhau.



Hình BT 7.31.

Bài tập 7.32

Cho hệ thống có cấu trúc cho trên hình BT 7.32 sau đây:

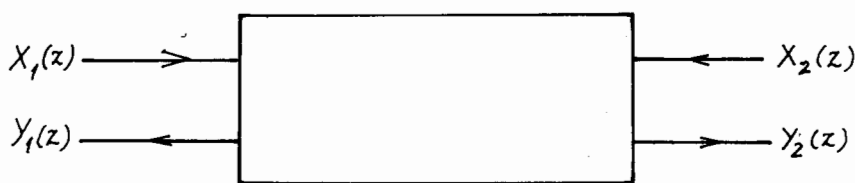


Hình BT 7.32.

- + Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống này,
- + Đây là hệ thống đệ quy hay không đệ quy.

Bài tập 7.33

Cho hệ thống số với hai đầu vào là $X_1(z)$ và $X_2(z)$ và hai đầu ra là $Y_1(z)$ và $Y_2(z)$, hệ thống này có sơ đồ khối cho trên hình BT 7.33 sau đây:



Hình BT 7.33.

Chúng ta biết rằng:

$$Y_1(z) = H_1(z)X_1(z) + H_2(z)X_2(z)$$

$$Y_2(z) = H_3(z)X_1(z) + H_4(z)X_2(z)$$

ở đây:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad H_2(z) = 1$$

$$H_3(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad H_4(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

+ Hãy vẽ sơ đồ cấu trúc của hệ thống số này.

Bài tập 7.34

Cho đáp ứng độ lớn (hoặc đáp ứng tần số) của các bộ lọc số FIR loại 2, FIR loại 3, FIR loại 4 có dạng như sau (xem bảng 5.4.5.1):

- FIR loại 2:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^N 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

- FIR loại 3:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N-1} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \sin(\omega n)$$

- FIR loại 4:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^N 2h\left(\frac{N}{2}-n\right) \sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

- + Hãy tính độ nhạy riêng của các bộ lọc số này,
- + Hãy tính độ nhạy tuyệt đối,
- + Hãy tính độ nhạy cầu phương,
- + Hãy tính độ nhạy cầu phương tương đối,
- + Hãy vẽ đồ thị độ nhạy cầu phương tương đối trong các trường hợp:

- $N = 15$ với FIR loại 3

- $N = 14$ với FIR loại 2 và loại 4

Trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq \pi$.

Bài tập 7.35

Cho bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Ở đây các hệ số của $H(z)$ như sau:

$$a_0 = 1; a_1 = -2r\cos\theta; a_2 = r^2$$

+ Hãy tính độ nhạy riêng của các điểm cực với các hệ số a_1 và a_2 là:

$$S'_{a_1} = \frac{\partial r}{\partial a_1}; S'_{a_2} = \frac{\partial r}{\partial a_2}; S'_{a_1} = \frac{\partial \theta}{\partial a_1}; S'_{a_2} = \frac{\partial \theta}{\partial a_2}$$

Chương 8

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI

8.1. MỞ ĐẦU

Trong lĩnh vực tương tự người ta đã sử dụng kỹ thuật không gian trạng thái (hoặc biến trạng thái) để phân tích các hệ thống tương tự. Một kỹ thuật tương tự như thế cũng có thể được phát triển đối với các hệ thống số.

Việc biểu diễn các hệ thống số hoặc bộ lọc số trong không gian trạng thái chính là việc tổng quát hoá cách mô tả bằng phương trình sai phân theo các trạng thái trong của hệ thống cũng như quan hệ giữa đầu vào đầu ra.

Biểu diễn trong không gian trạng thái đặc biệt quan trọng đối với việc tổng hợp các cấu trúc khác nhau của các bộ lọc số dựa vào việc biến đổi của việc biểu diễn không gian trạng thái của bộ lọc.

Kỹ thuật không gian trạng thái dựa trên cơ sở của lý thuyết điều khiển hiện đại. Nó được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, đặc biệt trong xử lý số tín hiệu và lý thuyết mạch.

8.2. PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI

8.2.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong trường hợp tổng quát chúng ta biết rằng trạng thái của một hệ thống bậc N ở thời điểm n được xác định bởi một tập hợp N biến bên trong, các biến này được biểu diễn bởi một vectơ $Q(n)$ gọi là vectơ trạng thái.

Vậy hoạt động của hệ thống sẽ được mô tả bởi vectơ trạng thái và các tín hiệu vào.

Đối với một hệ thống tuyến tính rời rạc, có đầu vào và đầu ra $y(n)$, sẽ được đặc trưng bởi các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{Q}(n+1) = \underline{A} \underline{Q}(n) + \underline{B}x(n)$$

$$y(n) = \underline{C}^t \cdot \underline{Q}(n) + d x(n) \quad (8.2.1.1)$$

ở đây:

= là ký hiệu ma trận vuông,

- là ký hiệu ma trận cột,

t là ký hiệu ma trận chuyển vị.

8.2.2. MA TRẬN TRẠNG THÁI

Trong trường hợp của chúng ta, chúng ta sẽ tìm các ma trận \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} và d xuất phát từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N .

Trong các chương trước chúng ta đã có phương trình sai phân bậc N dạng tổng quát sau đây:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (8.2.2.1)$$

Bây giờ chúng ta định nghĩa hai toán tử T_1 và T_2 là hai toán tử tuyến tính và bất biến.

Nếu chúng ta có một dãy $\lambda(n)$ nào đấy, chúng ta cho toán tử T_1 tác động vào dãy $\lambda(n)$, chúng ta sẽ có quan hệ sau đây:

$$T_1[\lambda(n)] = \sum_{r=0}^M b_r \lambda(n-r) \quad (8.2.2.2)$$

Nếu chúng ta tác động toán tử T_2 vào dãy $\lambda(n)$ thì chúng ta thu được quan hệ sau đây:

$$T_2[\lambda(n)] = \lambda(n) - \sum_{k=1}^N a_k \lambda(n-k) = y_\lambda(n) \quad (8.2.2.3)$$

Nếu T_1 tác động vào $x(n)$, chúng ta thu được ở đầu ra là $v(n)$, tức là:

$$T_1[x(n)] = v(n)$$

Theo định nghĩa của toán tử T_1 ở (8.2.2.1) ta có:

$$T_1[x(n)] = v(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (8.2.2.4)$$

Chúng ta lại tiếp tục tác động T_2 vào $v(n)$, chúng ta sẽ có đầu ra là $y_v(n)$ như sau:

$$T_2[v(n)] = v(n) - \sum_{k=1}^N a_k v(n-k) \quad (8.2.2.5)$$

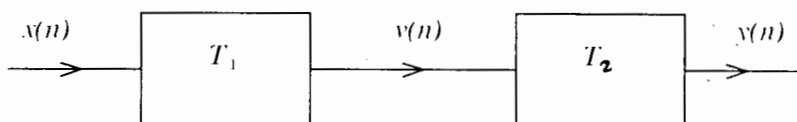
Nếu ta có toán tử T là tích của T_2 và T_1 như sau:

$$T = T_2.T_1 \quad (8.2.2.6)$$

Toán tử T là đặc trưng cho hệ thống tuyến tính bất biến, vậy nếu đầu vào là $x(n)$, ta sẽ có:

$$T[x(n)] = T_2.T_1[x(n)] = y_x(n) = y(n)$$

Sự hình thành toán tử T được minh hoạ trên hình 8.2.2.1 sau đây:



Hình 8.2.2.1.

Như vậy ta có thể lập luận như sau:

$$\begin{aligned} T_1.T_2[x(n)] &= T_2[v(n)] = v(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \\ &= \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \end{aligned} \quad (8.2.2.7)$$

Bây giờ chúng ta giả sử trường hợp đơn giản nhất là toán tử T_2 tác động vào $x(n)$ chứ không phải là $v(n)$. Như vậy chúng ta có quan hệ sau đây:

$$T_2[x(n)] = x(n) - \sum_{k=1}^N a_k y_x(n-k)$$

Chúng ta đặt:

$$y_x(n-k) = q_{n+1-k}(n)$$

thay từng giá trị của k từ N đến 1 ta có:

$$k = N \quad \Rightarrow \quad q_1(n) = y_x(n-N)$$

$$k = N-1 \quad \Rightarrow \quad q_2(n) = y_x[n-(N-1)] = y_x(n-N+1)$$

\vdots

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad q_N(n) = y_x(n-1)$$

Thế thì chúng ta có thể viết:

$$q_1(n) = y_x(n-N)$$

$$q_1(n+1) = y_x(n-N+1) = q_2(n)$$

$$q_2(n+1) = y_x(n-N+2) = q_3(n)$$

$$q_{N-1}(n+1) = y_x(n-1) = q_n(n)$$

$$q_N(n+1) = y_x(n-1+1) = y_x(n)$$

Từ đây ta có thể viết:

$$\begin{aligned} y_x(n) &= T_2[x(n)] = x(n) - a_1 y_x(n-1) - a_2 y_x(n-2) - \dots - a_N y_x(n-N) \\ &= q_N(n+1) \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$q_N(n+1) = x(n) - a_1 q_N(n) - a_2 q_{N-1}(n) - \dots - a_N q_1(n)$$

Tức là:

$$q_1(n+1) = q_2(n)$$

$$q_2(n+1) = q_3(n)$$

$$\vdots$$

$$q_{N-1}(n+1) = q_N(n)$$

$$q_N(n+1) = x(n) - a_1 q_N(n) - a_2 q_{N-1}(n) - \dots - a_N q_1(n) \quad (8.2.2.8)$$

Viết lại các biểu thức của (8.2.2.8) dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n+1) \\ q_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n) \\ q_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

Đặt:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n+1) \\ q_N(n+1) \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{Q}}(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n) \\ q_N(n) \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}} x(n) \quad (8.2.2.9)$$

Chúng ta tiếp tục tính toán:

T_2 là toán tử tuyến tính vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned} y(n) &= T_2[v(n)] \\ T_1[x(n)] &= v(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \\ \Rightarrow y(n) &= T_2 \left[\sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \right] \\ &= \sum_{r=0}^M b_r T_2[x(n-r)] \end{aligned}$$

Toán tử T_2 cũng lại là toán tử bất biến vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned} T_2[x(n-r)] &= y_x(n-r) \\ \Rightarrow y(n) &= \sum_{r=0}^M b_r y_x(n-r) \end{aligned}$$

Và chúng ta đã biết rằng:

$$y_x(n-k) = q_{N+1-k}(n)$$

Vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0 y_x(n) + b_1 y_x(n-1) + \dots + b_M y_x(n-M) \\ &= b_0 y_x(n) + b_1 q_N(n) + \dots + b_M q_{N+1-M}(n) \end{aligned}$$

mà ta đã có:

$$\begin{aligned} y_x(n) &= x(n) - a_1 q_N(n) - a_2 q_{N-1}(n) + \dots + a_N q_1(n) \\ \Rightarrow b_0 y_x(n) &= b_0 x(n) - b_0 a_1 q_N(n) - b_0 a_2 q_{N-1}(n) + \dots + b_0 a_N q_1(n) \end{aligned}$$

Nếu $N > M$ ta có thể viết:

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0 x(n) + (b_1 - b_0 a_1) q_N(n) + (b_2 - b_0 a_2) q_{N-1}(n) + \dots + \\ &\quad + (b_M - b_0 a_M) q_{N+1-M}(n) - b_0 a_{M+1} q_{N-M}(n) - \dots - b_0 a_N q_1(n) \end{aligned}$$

Chúng ta đặt:

$$\begin{aligned} c_N &= b_1 - b_0 a_1 \\ c_{N-1} &= b_2 - b_0 a_2 \\ &\vdots \\ c_{N+1-M} &= b_M - b_0 a_M \\ c_{N-M} &= -b_0 a_{M+1} \end{aligned}$$

$$c_2 = -b_0 a_{N-1}$$

$$c_1 = -b_0 a_N \quad (8.2.2.10)$$

Từ đây ta có thể viết:

$$y(n) = b_0 x(n) + c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) + \dots + c_N q_N(n) \quad (8.2.2.11)$$

Chúng ta viết $y(n)$ dưới dạng ma trận như sau:

$$y(n) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N] \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \dots \\ q_N(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n) \quad (8.2.2.12)$$

Đặt:

$$\underline{\mathbf{C}}' = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N]; \quad \underline{\mathbf{Q}}(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \dots \\ q_N(n) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = b_0$$

ta có thể viết:

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{Q}}(n) + \mathbf{d}x(n) \quad (8.2.2.13)$$

và chúng ta nhận được các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n) \quad (8.2.2.14)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{Q}}(n) + \mathbf{d}x(n)$$

với:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = b_0$$

$$N > M$$

$$c_{N+1-k} = b_k - b_0 a_k \quad 1 \leq k \leq M$$

$$c_{N+1-k} = -b_0 a_k \quad M+1 \leq k \leq N$$

- N biến hỗ trợ $q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n)$ được gọi là các biến trạng thái.

- $\underline{\mathbf{Q}}(n)$ được gọi là vector trạng thái
- $\underline{\mathbf{A}}$ được gọi là ma trận trạng thái (hay gọi là ma trận của hệ thống)

Ví dụ 8.2.2.1

Cho một hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 2y(n-1) - 4y(n-2)$$

+ Hãy tìm các ma trận: $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{C}}$, \mathbf{d} .

+ Hãy viết phương trình trạng thái.

Giải

$$N = 2, M = 1$$

$$b_0 = 2, b_1 = 3, a_1 = -2, a_2 = 4$$

$$c_{N+1-k} = b_k - b_0 a_k \quad 1 \leq k \leq M$$

Vậy ta có:

$$c_{2+1-k} = c_{3-k} \quad 1 \leq k \leq 1$$

$$\Rightarrow c_2 = b_1 - b_0 a_1 = 7$$

$$c_1 = -b_0 a_2 = -8$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = 2.$$

Từ đây ta có phương trình trạng thái sau đây:

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [-8 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + 2x(n)$$

Ví dụ 8.2.2.2

Cho một hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) + 2y(n-1) - 4y(n-2)$$

+ Hãy tìm các ma trận: $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{C}}$, \mathbf{d} .

+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Giải

$$N = 2, M = 2$$

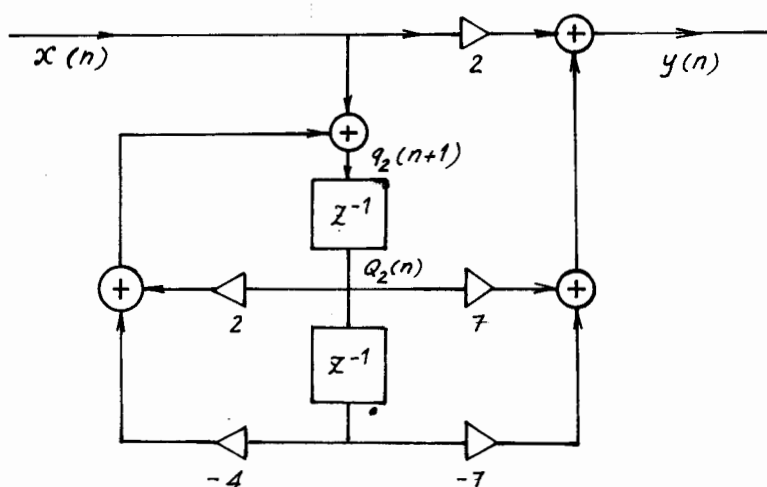
$$b_0 = 2, b_1 = 3, b_2 = 1, a_1 = -2, a_2 = 4$$

$$\Rightarrow c_2 = b_1 - b_0 a_1 = 7$$

$$c_1 = b_2 - b_0 a_2 = -7$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = 2.$$

Từ đây ta có cấu trúc không gian trạng thái như trên hình 8.2.2.1.



Hình 8.2.2.1.

8.3. PHÂN TÍCH HỆ THỐNG TRONG MIỀN n

8.3.1. XÁC ĐỊNH ĐẦU RA $y(n)$

Xuất phát từ các phương trình trạng thái, chúng ta có thể phân tích hệ thống tuyến tính trong miền n .

Chúng ta đã có phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n+1) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(n)$$

$$n = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(1) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(0) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(0)$$

$$n = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(2) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(1) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(1)$$

$$n = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(3) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(2) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(2)$$

$$n = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(4) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(3) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(3)$$

.....

Thế phương trình trên xuống dưới ta có:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(2) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(0) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(0)] + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{x}(1)$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{\underline{A}}^2 \underline{Q}(0) + \underline{\underline{A}} \underline{B}x(0) + \underline{B}x(1) \\
\underline{Q}(3) &= \underline{\underline{A}} \left[\underline{\underline{A}}^2 \underline{Q}(0) + \underline{\underline{A}} \underline{B}x(0) + \underline{B}x(1) \right] + \underline{B}x(2) \\
&= \underline{\underline{A}}^3 \underline{Q}(0) + \underline{\underline{A}}^2 \underline{B}x(0) + \underline{\underline{A}} \underline{B}x(1) + \underline{B}x(2) \\
\underline{Q}(4) &= \underline{\underline{A}} \left[\underline{\underline{A}}^3 \underline{Q}(0) + \underline{\underline{A}}^2 \underline{B}x(0) + \underline{\underline{A}} \underline{B}x(1) + \underline{B}x(2) \right] + \underline{B}x(3) \\
&= \underline{\underline{A}}^4 \underline{Q}(0) + \underline{\underline{A}}^3 \underline{B}x(0) + \underline{\underline{A}}^2 \underline{B}x(1) + \underline{\underline{A}} \underline{B}x(2) + \underline{B}x(3) \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Tương tự chúng ta có phương trình tổng quát sau đây:

$$\underline{Q}(n) = \underline{\underline{A}}^n \underline{Q}(0) + \underline{\underline{A}}^{n-1} \underline{B}x(0) + \underline{\underline{A}}^{n-2} \underline{B}x(1) + \dots + \underline{B}x(n-1)$$

hoặc:

$$\underline{Q}(n) = \underline{\underline{A}}^n \underline{Q}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\underline{A}}^{(n-1-i)} \underline{B}x(i) \quad (8.3.1.1)$$

ở đây:

$$\underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{I}}: \text{ ma trận đơn vị bậc } N \times N$$

Ta cũng đã có:

$$\begin{aligned}
y(n) &= \underline{C}^t \underline{Q}(n) + dx(n) \\
\Rightarrow y(n) &= \underline{C}^t \left[\underline{\underline{A}}^n \underline{Q}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\underline{A}}^{(n-1-i)} \underline{B}x(i) \right] + dx(n) \\
y(n) &= \underline{C}^t \underline{\underline{A}}^n \underline{Q}(0) + \underline{C}^t \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\underline{A}}^{(n-1-i)} \underline{B}x(i) + dx(n) \quad (8.3.1.2)
\end{aligned}$$

Xét dãy nhân quả $x(n)$ ta có:

$$\begin{aligned}
&x(n) = 0 \text{ với } n < 0 \\
\Rightarrow T_2[x(n)] &= y_d(n) \\
n = -1 &\Rightarrow T_2[x(-1)] = T_2[0] = 0 = y_d(-1) \\
n = -2 &\Rightarrow T_2[x(-2)] = T_2[0] = 0 = y_d(-2) \\
&\dots\dots\dots \\
n = -N &\Rightarrow T_2[x(-N)] = T_2[0] = 0 = y_d(-N) \\
\Rightarrow y_x(n) &= 0 \text{ với } n < 0
\end{aligned}$$

và ta đã biết rằng:

$$\begin{aligned}
 q_{N+1-k}(n) &= y_x(n-k) \\
 n = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{N+1-k}(0) &= y_x(-k) \\
 k = N \quad \Rightarrow \quad q_{N+1-N}(0) &= q_1(0) = y_x(-N) = 0 \\
 k = N-1 \quad \Rightarrow \quad q_{N+1-(N-1)}(0) &= q_2(0) = y_x[-(N-1)] = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 k = 2 \quad \Rightarrow \quad q_{N+1-2}(0) &= q_{N-1}(0) = y_x(-2) = 0 \\
 k = 1 \quad \Rightarrow \quad q_{N+1-1}(0) &= q_N(0) = y_x(-1) = 0
 \end{aligned}$$

Ta có dạng ma trận sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_x(-N) \\ y_x[-(N-1)] \\ \vdots \\ y_x(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{O}}$$

O: ma trận cột không.

Trong trường hợp này ta có kết quả sau:

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}' \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\mathbf{A}}^{(n-1-i)} \underline{\mathbf{B}}x(i) + \underline{\mathbf{d}}x(n) \tag{8.3.1.2}$$

Ví dụ 8.3.1.1

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình trạng thái sau đây:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{Q}}(n+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \\
 y(n) &= [-2 \quad 4] \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + 1 \cdot x(n)
 \end{aligned}$$

với:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= u(n) \\
 \underline{\mathbf{Q}}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Hãy tính y(0), y(1) và y(2).

Giải

$$y(0) = [-2 \quad 4] \cdot \underline{\mathbf{Q}}(0) + x(0)$$

$$= [-2 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}}(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(1) = [-2 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x(1) = 5$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}}(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(2) = [-2 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x(2) = 15$$

8.3.2. XÁC ĐỊNH ĐÁP ỨNG XUNG $h(n)$ CỦA HỆ THỐNG NHÂN QUẢ

Nếu $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$.

Vậy đáp ứng xung của hệ thống như sau:

$$h(n) = \underline{\mathbf{C}}' \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\mathbf{A}}^{(n-1-i)} \underline{\mathbf{B}} \delta(i) + \mathbf{d} \delta(n) \quad (8.3.2.1)$$

Bây giờ chúng ta tiến hành tính toán $h(0)$ và $h(n)$ với $n > 0$.

Ta đã có:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}}(n) &= \underline{\mathbf{A}}^n \underline{\mathbf{Q}}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\mathbf{A}}^{(n-1-i)} \underline{\mathbf{B}} x(i) \\ n = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{Q}} &= \underline{\mathbf{Q}} + \sum_{i=0}^{-1} \underline{\mathbf{A}}^{(0-1-i)} \underline{\mathbf{B}} x(i) \\ \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{-1} \underline{\mathbf{A}}^{(0-1-i)} \underline{\mathbf{B}} x(i) &= \underline{\mathbf{Q}} \\ \Rightarrow \quad h(0) &= \underline{\mathbf{C}}' \sum_{i=0}^{-1} \underline{\mathbf{A}}^{(0-1-i)} \underline{\mathbf{B}} \delta(i) + \mathbf{d} \delta(0) \\ &= \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{Q}} + \mathbf{d} \delta(0) = \mathbf{d} \delta(0) = \mathbf{d} = \mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow h(0) = b_0 \\
 n > 0 &\Rightarrow h(n) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \delta(0) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(n-2)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \delta(1) + \dots + \underline{\underline{\mathbf{d}}} \delta(n) \\
 &\Rightarrow h(n) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}}
 \end{aligned}$$

Cuối cùng ta có giá trị của đáp ứng xung $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} b_0 & n = 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (8.3.2.2)$$

Ví dụ 8.3.2.1

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) + 2y(n-1) - 4y(n-2)$$

Dựa vào biểu thức (8.3.2.1) hãy tìm $h(2)$.

Giải

$$\begin{aligned}
 h(2) &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(2-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\
 \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} &= [-7 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \\
 \Rightarrow h(2) &= 7.
 \end{aligned}$$

8.4. TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN

8.4.1. TRỊ RIÊNG CỦA MA TRẬN

Trước hết chúng ta nghiên cứu phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ bậc $N \times N$.

Phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ được định nghĩa như sau:

$$g(\lambda) = \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| = 0 \quad (8.4.1.1)$$

ở đây:

λ - biến của phương trình đặc trưng

$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ - ma trận đơn vị.

Ví dụ 8.4.1.1

Cho ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$ bậc 2×2 như sau:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$ này.

Giải

Theo biểu thức (8.4.1.1) ta có:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \left| \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \\ \Rightarrow g(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow g(\lambda) &= (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 = 0 \\ &= 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0 \end{aligned}$$

Phương trình trên là phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$.

Định nghĩa trị riêng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$

Các nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$ được gọi là các giá trị riêng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$.

Ví dụ 8.4.1.2

Cho phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ như sau:

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$$

Hãy tìm các giá trị riêng của ma trận.

Giải

Giải phương trình đặc trưng $g(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$ ta thu được hai nghiệm $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 1$.

Vậy các giá trị riêng của ma trận $\underline{\underline{\Lambda}}$ là $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$.

Chú ý: Từ phương trình đặc trưng, tương ứng chúng ta cũng có phương trình ma trận như sau:

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 - 6\underline{\underline{\mathbf{A}}} + 5\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \\ & \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \end{aligned}$$

8.4.2. VECTƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN

Định nghĩa vectơ riêng của ma trận

Các vectơ riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ được định nghĩa như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i = \lambda_i \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.4.2.1)$$

ở đây:

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ - ma trận bậc $N \times N$

$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$ - các vectơ riêng của $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$

λ_i - các giá trị riêng của $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Ví dụ 8.4.2.1

Cho ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận.

Giải

Theo biểu thức (8.4.1.1) ta có phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ như sau:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \end{aligned}$$

$g(\lambda)$ có hai nghiệm $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = -1$.

$$\Rightarrow g(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

Theo định nghĩa vectơ riêng trong biểu thức (8.4.2.1) ta có:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i = \lambda_i \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i - \lambda_i \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Vậy ta có:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{v}}_i = \underline{\underline{O}}, \quad i = 1, 2$$

Với $i = 1$ ta có:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{v}}_1 = \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \underline{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1 = \underline{\underline{O}}$$

Từ đây ta tìm $\underline{\underline{v}}_1$ như sau:

$$\underline{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \underline{\underline{O}}$$

$$\Rightarrow -2v_{11} + 4v_{21} = 0$$

$$2v_{11} - 4v_{21} = 0$$

Từ đây ta có: $v_{11} = 2; v_{21} = 1$.

Vậy ta có:

$$\underline{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

và ta cũng có họ vectơ riêng $\underline{\underline{v}}_1$ như sau:

$$\underline{\underline{v}}_1 = k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự ta cũng tìm được vectơ $\underline{\underline{v}}_2$ như sau:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{v}}_2 = \underline{\underline{O}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \underline{\underline{v}}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{\underline{v}}_2$$

$$\underline{\underline{v}}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \underline{\underline{O}}$$

$$\Rightarrow 4v_{12} + 4v_{22} = 0$$

$$2v_{12} + 2v_{22} = 0$$

Từ đây ta có: $v_{12} = 1; v_{22} = -1$.

Vậy ta có:

$$\underline{\underline{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

và ta cũng có họ vectơ riêng $\underline{\underline{v}}_2$ như sau:

$$\underline{\mathbf{v}}_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa ma trận không suy biến $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$

Ma trận không suy biến $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ được định nghĩa như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = [\underline{\mathbf{v}}_1 \quad \underline{\mathbf{v}}_2 \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{v}}_N] \quad (8.4.2.2)$$

ở đây: \mathbf{v}_i là các vectơ riêng của ma trận.

Nhờ có ma trận $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ chúng ta có thể biến đổi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ thành một ma trận chéo $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ có các phần tử chéo là các giá trị riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Trong trường hợp này ma trận chéo $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ được hình thành như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \quad (8.4.2.3)$$

Ví dụ 8.4.2.3

Cho ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ và các vectơ riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

Giải

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= [\underline{\mathbf{v}}_1 \quad \underline{\mathbf{v}}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} &= \frac{1}{|\underline{\underline{\mathbf{P}}}|} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Chú ý:

Chúng ta có thể tìm ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ và $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^k$ thông qua ma trận $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ và $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ bằng cách như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

Vậy ta có:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \quad (8.4.2.4)$$

và:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^k = \underbrace{\underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \dots \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1}}_{k \text{ lần}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}^k = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \dots \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \dots \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}^k = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^k \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \quad (8.4.2.5)$$

ở đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N^k \end{bmatrix}$$

λ_i : là các giá trị riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ bậc $N \times N$.

Ví dụ 8.4.2.4

Cho ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ và $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ thông qua biểu thức (8.4.2.5).

Giải

Theo biểu thức (8.4.2.5) ta có:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 5$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 50 & 1 \\ 25 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Chú ý: Chúng ta có thể tìm trực tiếp $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2$ như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

8.5. CHỌN VECTƠ TRẠNG THÁI VÀ MA TRẬN CHỌN $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$

8.5.1. CHỌN VECTƠ TRẠNG THÁI

Khi một hệ thống được đặc trưng bởi quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của hệ thống thì chúng ta có thể có các trạng thái bên trong của hệ thống nhưng quan hệ giữa đầu vào và đầu ra vẫn giữ nguyên không thay đổi.

Chúng ta có thể sử dụng một ma trận $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ không suy biến để nhận được vector trạng thái mới như sau:

Gọi: $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n)$: vectơ trạng thái cũ

$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T(n)$: vectơ trạng thái mới

Ta có:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T(n) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) \quad (8.5.1.1)$$

Vậy ngược lại ta cũng có:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T(n) = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n)$$

Vậy:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T(n) \quad (8.5.1.2)$$

Chúng ta đã có các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{Q}}(n) + d(n)$$

Vậy ta có thể viết:

$$\underline{\mathbf{Q}}^T(n+1) = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot [\underbrace{\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)}_{\underline{\mathbf{Q}}(n+1)}]$$

$$= \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot [\underbrace{\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T(n)}_{\underline{\mathbf{Q}}(n)} + \underline{\mathbf{B}}x(n)]$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{Q}}^T(n+1) = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}x(n)$$

Đặt:

$$\underline{\mathbf{A}}^T = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}}; \quad \underline{\mathbf{B}}^T = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}$$

Ta có thể viết:

$$\underline{\mathbf{Q}}^T(n+1) = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + \underline{\mathbf{B}}^T x(n)$$

Tiếp tục nghiên cứu ta có:

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{Q}}(n) + d(n)$$

$$= \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + d(n)$$

Đặt: $\underline{\mathbf{C}}^{TT} = \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{T}}$

ta có:

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^{TT} \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + d(n)$$

Cuối cùng ta có:

$$\underline{\mathbf{Q}}^T(n+1) = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + \underline{\mathbf{B}}^T x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^{TT} \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + d(n)$$

$$\underline{\mathbf{A}}^T = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}} : \text{ ma trận trạng thái mới}$$

$$\underline{\mathbf{B}}^T = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}$$

$$\underline{\mathbf{C}}^{TT} = \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{T}}$$

(8.5.1.3)

Chú ý:

$$\underline{\underline{C}}^{tr} = \underline{\underline{C}}' \underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{T}}' \underline{\underline{C}})'$$

$\underline{\underline{T}}$ gọi là ma trận chọn.

Ví dụ 8.5.1.1

Cho ma trận chọn $\underline{\underline{T}}$ có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$

Giả sử các ma trận $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}'$ có dạng:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{C}}' = [c_1 \quad c_2]$$

Hãy tìm $\underline{\underline{A}}^T$, $\underline{\underline{B}}^T$ và $\underline{\underline{C}}^{tr}$?

Giải

$$\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \frac{1}{\underline{\underline{T}}} \cdot \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{t_1 t_2} \cdot \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{t_1} & \frac{a_{12}}{t_1} \\ \frac{a_{21}}{t_2} & \frac{a_{22}}{t_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{t_2}{t_1} a_{12} \\ \frac{t_1}{t_2} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^T = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{t_1} \\ \frac{b_2}{t_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^{tr} = \underline{\underline{C}}' \underline{\underline{T}} = [c_1 \quad c_2] \cdot \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = [c_1 t_1 \quad c_2 t_2]$$

Ví dụ 8.5.1.2

Cho các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{Q}}(n) + d x(n)$$

ở đây:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{C}}' = [-7 \quad 7]; d = 2$$

Chúng ta chọn ma trận chọn $\underline{\mathbf{T}}$ không suy biến như sau:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ma trận chọn $\underline{\mathbf{T}}$ này cho phép ta xác định vectơ trạng thái mới:

$$\underline{\mathbf{Q}}^T(n) = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n)$$

Hãy tìm: $\underline{\mathbf{A}}^T$, $\underline{\mathbf{B}}^T$, $\underline{\mathbf{C}}^{ff}$ và cấu trúc mới của hệ thống.

Giải

Theo các biểu thức (8.5.1.3) ta có:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}^T &= \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{B}}^T = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{C}}^{ff} = (\underline{\mathbf{T}}' \underline{\mathbf{C}})' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix} \right)' = [0 \quad 7]$$

Từ đây chúng ta tìm cấu trúc trạng thái mới.

$$\underline{\mathbf{Q}}^T(n+1) = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + \underline{\mathbf{B}}^T x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^{ff} \underline{\mathbf{Q}}^T(n) + d x(n)$$

Thay vào ta có:

$$\begin{bmatrix} q_1^T(n+1) \\ q_2^T(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1^T(n) \\ q_2^T(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$\begin{bmatrix} q_1^T(n+1) \\ q_2^T(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4q_1^T(n) + 4q_2^T(n) \\ -3q_1^T(n) - 2q_2^T(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x(n) \\ x(n) \end{bmatrix}$$

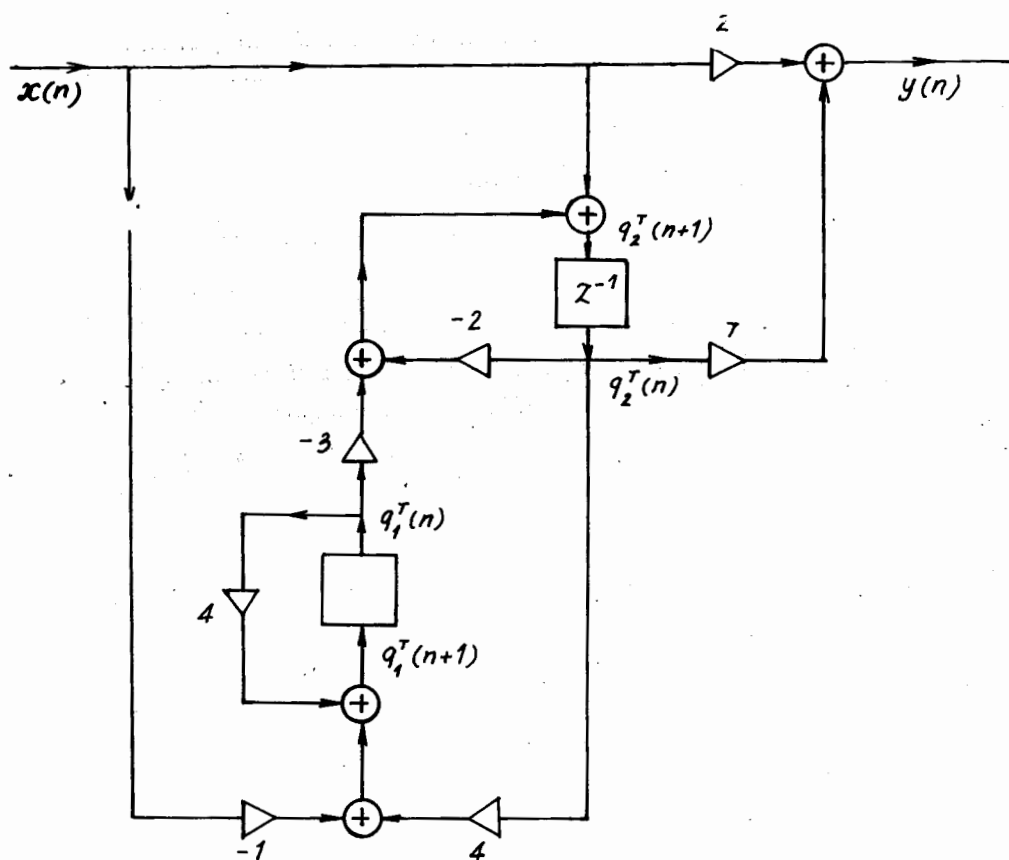
$$\Rightarrow q_1^T(n+1) = 4q_1^T(n) + 4q_2^T(n) - x(n)$$

$$q_2^T(n+1) = -3q_1^T(n) - 2q_2^T(n) + x(n)$$

$$y(n) = [0 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} q_1^T(n) \\ q_2^T(n) \end{bmatrix} + 2x(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = 7q_2^T(n) + 2x(n)$$

Từ đây ta có cấu trúc không gian trạng thái mới của hệ thống cho trên hình 8.5.1.1.



Hình 8.5.1.1.

Nhận xét:

- Các vectơ trạng thái và các ma trận trạng thái không phải là duy nhất.

- Đáp ứng xung của hệ thống không thay đổi với các ma trận và vectơ trạng thái mới, cụ thể như sau:

$$h(n) = \begin{cases} b_0 & n = 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Ta có vectơ trạng thái mới và ma trận trạng thái mới thì tương ứng ta cũng có đáp ứng xung mới là $h^T(n)$:

$$h^T(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{T(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T & n > 0 \end{cases} \quad (8.5.1.4)$$

ở đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}}; \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}; \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{T(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}} (\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}})^{n-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \dots \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \dots \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h^T(n) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(n-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} = h(n)$$

- Vậy việc ma trận trạng thái mới sẽ không làm thay đổi các tính chất của hệ thống, vậy nếu ta chọn được ma trận chọn T một cách thích hợp thì có thể ta thu được cấu trúc không gian trạng thái mới với độ nhạy thấp nhất. Việc này sẽ cho phép ta giảm được số bit dùng để mã hoá các hệ số của cấu trúc mới mà không làm thay đổi các đặc trưng của hệ thống.

Ví dụ 8.5.1.3

Cho các ma trận sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = [-7 \quad 7]; \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

hãy chứng tỏ rằng $h(2) = h^T(2)$.

Giải

$$\begin{aligned} h(2) &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(2-1)} \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ &= [-7 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT} = [0 \quad 7]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^T(2) &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{T(2,1)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \\ &= [0 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(2) = h^T(2).$$

8.5.2. TẦM QUAN TRỌNG CỦA MA TRẬN TRẠNG THÁI

Phần trên ta đã thấy rằng các vectơ trạng thái và ma trận trạng thái của hệ thống tuyến tính không phải là duy nhất. Nếu ta có một ma trận không suy biến $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ bậc $N \times N$ thì có thể tạo ra vectơ trạng thái mới và ma trận trạng thái mới:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T(n) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}$$

Việc thay thế này không làm thay đổi thông tin trong các phương trình đặc trưng của cả 2 ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ và $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ mặc dù hai ma trận này là không đồng nhất, cụ thể như sau:

Ta có phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ như sau:

$$g^T(\lambda) = \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right|$$

mà ta biết rằng:

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} : \text{ma trận đơn vị}$$

$$|M_1 M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$$

$$|M^{-1}| = |M|^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g^T(\lambda) &= \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| = \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right| \\ &= \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \lambda \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right| = \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right| \\ &= \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \right| \cdot \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| \cdot \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right| = \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| \cdot \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \right| \cdot \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right| \\ &= \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| \cdot \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right| \cdot \left| \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{-1} \right| = \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| \end{aligned}$$

Vậy:

$$\mathfrak{g}^T(\lambda) = g(\lambda)$$

Vậy chúng ta có thể nói rằng các giá trị riêng của ma trận trạng thái của một hệ thống là độc lập hoàn toàn với việc chọn các vectơ trạng thái.

Ví dụ 8.5.2.1

Cho một hệ thống tuyến tính có ma trận trạng thái như sau:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

và ta có một ma trận không suy biến $\underline{\underline{T}}$ như sau:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm $g^T(\lambda)$ và $g(\lambda)$, sau đó so sánh kết quả.

Giải

$$g(\lambda) = |\underline{\underline{\Lambda}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & (2-\lambda) \end{bmatrix} \right|$$

$$= -\lambda(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$$

$$g^T(\lambda) = |\underline{\underline{\Lambda}}^T - \lambda \underline{\underline{I}}| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} (4-\lambda) & 4 \\ -3 & (-2-\lambda) \end{bmatrix} \right|$$

$$= (4-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$$

$$\Rightarrow g^T(\lambda) = g(\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm j\sqrt{3}$$

8.6. BIẾN ĐỔI Z CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI VÀ ĐỘ ỔN ĐỊNH

8.6.1. BIẾN ĐỔI Z CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI

Trong chương 2 chúng ta đã lấy biến đổi z của phương trình sai phân để thu được biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ theo các hệ số a_k và b_r của phương trình sai phân.

Trong phần này chúng ta sẽ thu được biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ theo các ma trận $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ và d bằng cách lấy biến đổi z của các phương trình trạng thái.

Chúng ta đã có các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^t \underline{\mathbf{Q}}(n) + dx(n)$$

Lấy biến đổi z các phương trình trên ta có:

$$\begin{aligned} \text{ZT}[\underline{\mathbf{Q}}(n+1)] &= \text{ZT}[\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)] = \\ &= \underline{\mathbf{A}} \cdot \text{ZT}[\underline{\mathbf{Q}}(n)] + \underline{\mathbf{B}}\text{ZT}[x(n)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \underline{\mathbf{Q}}(z) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(z) + \underline{\mathbf{B}}X(z)$$

$$z \underline{\mathbf{Q}}(z) - \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(z) = \underline{\mathbf{B}}X(z)$$

$$(z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}}) \cdot \underline{\mathbf{Q}}(z) = \underline{\mathbf{B}}X(z)$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{Q}}(z) = (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}X(z) \quad (8.6.1.1)$$

Tiếp tục tính toán với phương trình trạng thái thứ hai ta có:

$$\begin{aligned} \text{ZT}[y(n)] &= \text{ZT}[\underline{\mathbf{C}}^t \underline{\mathbf{Q}}(n) + dx(n)] \\ &= \underline{\mathbf{C}}^t \text{ZT}[\underline{\mathbf{Q}}(n)] + d\text{ZT}[x(n)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \underline{\mathbf{C}}^t \underline{\mathbf{Q}}(z) + dX(z) \quad (8.6.1.2)$$

Thay $\underline{\mathbf{Q}}(z)$ từ biểu thức (8.6.1.1) vào biểu thức (8.6.1.2) ta có:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \underline{\mathbf{C}}^t [(z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}X(z)] + dX(z) \\ &= [\underline{\mathbf{C}}^t (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}} + d] X(z) \\ \Rightarrow H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\mathbf{C}}^t (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}} + d \end{aligned}$$

cuối cùng ta có:

$$H(z) = \underline{\mathbf{C}}^t (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}} + d \quad (8.6.1.3)$$

Ví dụ 8.6.1.1

Cho bộ lọc số được biểu diễn bởi các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^t \underline{\mathbf{Q}}(n) + dx(n)$$

với:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}'}} = [-7 \quad 7]; \mathbf{d} = 2$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số này?

Giải

Áp dụng biểu thức (8.6.1.3) trước tiên ta phải tìm $(z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})$ và $(z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1}$:

$$z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 4 & z-2 \end{bmatrix}$$

$$(z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1} = \frac{1}{z^2 - 2z + 4} \begin{bmatrix} z-2 & +1 \\ -4 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z^2 - 2z + 4} & \frac{1}{z^2 - 2z + 4} \\ \frac{-4}{z^2 - 2z + 4} & \frac{z}{z^2 - 2z + 4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{C}'}}(z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1} &= [-7 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z^2 - 2z + 4} & \frac{1}{z^2 - 2z + 4} \\ \frac{-4}{z^2 - 2z + 4} & \frac{z}{z^2 - 2z + 4} \end{bmatrix} \\ &= \left[\left(-7 \frac{z-2}{z^2 - 2z + 4} + 7 \frac{-4}{z^2 - 2z + 4} \right) \left(\frac{-7}{z^2 - 2z + 4} + \frac{7z}{z^2 - 2z + 4} \right) \right] \\ &= \left[\frac{-7z-14}{z^2 - 2z + 4} \quad \frac{7z-7}{z^2 - 2z + 4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}'}}(z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} &= \left[\frac{-7z-14}{z^2 - 2z + 4} \quad \frac{7z-7}{z^2 - 2z + 4} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{7z-7}{z^2 - 2z + 4} \end{aligned}$$

Vậy ta tìm được $H(z)$ có dạng sau đây:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{7z-7}{z^2 - 2z + 4} + 2 \\ &= \frac{2z^2 + 3z + 1}{z^2 - 2z + 4} = \frac{2 + 3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 4z^{-2}} \end{aligned}$$

Nhận xét: Cũng giống như đối với $h(n)$, hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống sẽ không thay đổi với việc chọn vectơ trạng thái mới, tức là:

$$H^T(z) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T (z\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T)^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T + \mathbf{d} = H(z)$$

Ví dụ 8.6.1.2

Cho bộ lọc số được biểu diễn bởi các phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \underline{\mathbf{B}}x(n)$$

$$y(n) = \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{Q}}(n) + d x(n)$$

với:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{C}}^T = [-7 \quad 7]; \mathbf{d} = 2$$

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} : \text{ma trận chọn không suy biến}$$

Hãy tìm $H^T(z)$ và so sánh với $H(z)$ ở ví dụ 8.6.1.1.

Giải

$$\underline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{C}}^{TT} = [0 \quad 7]; \mathbf{d} = 2$$

Từ đây ta có:

$$H^T(z) = \underline{\mathbf{C}}^{TT} (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}}^T)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}^T + \mathbf{d}$$

$$(z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}}^T) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-4 & -4 \\ +3 & z+2 \end{bmatrix}$$

$$(z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}}^T)^{-1} = \frac{1}{(z-4)(z+2)+12} \cdot \begin{bmatrix} z+2 & 4 \\ -3 & z-4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}^{TT} (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}}^T)^{-1} &= \frac{1}{(z-4)(z+2)+12} \cdot [0 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} z+2 & 4 \\ -3 & z-4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-4)(z+2)+12} [-21 \quad 7(z-4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}^{TT} (z \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{A}}^T)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}}^T &= \frac{1}{(z-4)(z+2)+12} [-21 \quad 7(z-4)] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{21+7(z-4)}{(z-4)(z+2)+12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H^T(z) = \frac{21+7(z-4)}{(z-4)(z+2)+12} + 2 = \frac{7z-7}{z^2-2z+4} + 2$$

$$= \frac{2+3z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+4z^{-2}} = H(z)$$

So sánh với kết quả ở ví dụ 8.6.1.1 ta thấy rằng biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ không thay đổi.

8.6.2. ĐỘ ỔN ĐỊNH

Chúng ta đã có phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ như sau:

$$g(\lambda) = \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right| = 0$$

hoặc tương đương ta có thể viết:

$$g(\lambda) = \left| \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right| = 0 \quad (8.6.2.1)$$

Và chúng ta cũng đã biết rằng hàm truyền đạt của một hệ thống có ma trận trạng thái $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ được cho bởi biểu thức sau:

$$H(z) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T (z \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \mathbf{d}$$

Để tính ma trận nghịch đảo $(z \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1}$ ta phải tính nghịch đảo của định thức của ma trận này, tức là phải tính:

$$\frac{1}{\left| z \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right|}$$

Vậy mẫu số của $H(z)$ chính là $\left| z \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right|$, như thế các điểm cực của $H(z)$ chính là nghiệm mẫu số: $\left| z \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right| = 0$.

So sánh nhận xét trên với phương trình (8.6.2.1) ta có thể nói rằng các điểm cực của $H(z)$ chính là các nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Ma các nghiệm của phương trình đặc trưng lại chính là các giá trị riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Vậy ta có thể nói rằng: *các điểm cực của hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống chính là các giá trị riêng của ma trận trạng thái $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:*

$$z_{pk} = \lambda_k \quad (8.6.2.2)$$

z_{pk} - các điểm cực của $H(z)$,

λ_k - các giá trị riêng của $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Chúng ta nhớ lại điều kiện ổn định của một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả như sau:

Một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt $H(z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị.

Vậy ở đây chúng ta có thể dựa vào các giá trị riêng của ma trận trạng thái để xét sự ổn định của hệ thống.

Tức là ta có thể nói rằng:

Một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các giá trị riêng của ma trận trạng thái $\underline{\mathbf{A}}$ đều có môđul nhỏ hơn đơn vị.

Ví dụ 8.6.2.1

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) + 2y(n-1) - 4y(n-2)$$

Hãy xét sự ổn định của hệ thống này dựa vào các giá trị riêng của ma trận trạng thái $\underline{\mathbf{A}}$.

Giải

Theo (8.2.2.14) chúng ta có thể dễ dàng xác định được ma trận trạng thái của hệ thống như sau:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = |\underline{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$g(\lambda) = -\lambda(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 + j\sqrt{3}; \lambda_2 = 1 - j\sqrt{3}$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{1+3} = 2 > 1$$

$$|\lambda_2| = \sqrt{1+3} = 2 > 1$$

Hệ thống này là không ổn định.

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

Bài tập 8.1

Cho hệ thống số được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + 3x(n) + 4x(n-1)$$

- + Hãy tìm các ma trận: A, B, C, d,
- + Hãy viết phương trình trạng thái mô tả hệ thống này,
- + Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc,
- + Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Bài tập 8.2

Cho hệ thống số được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 2x(n) + x(n-1)$$

- + Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc,
- + Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc chuyển vị,
- + Hãy tìm các ma trận: A, B, C, d,
- + Hãy viết phương trình trạng thái mô tả hệ thống này,
- + Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Bài tập 8.3

Cho hệ thống số được mô tả bởi phương trình trạng thái sau đây:

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [7 \quad 8] \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái để thực hiện hệ thống này.

Bài tập 8.4

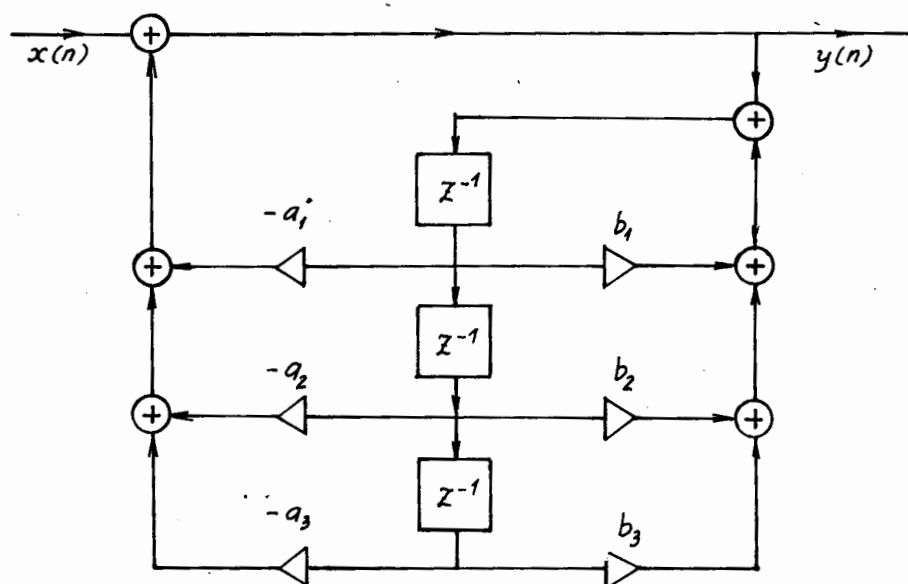
Cho hệ thống FIR được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$

- + Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc,
- + Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc chuyển vị,
- + Hãy vẽ cấu trúc dạng mắt cáo,
- + Hãy tìm các ma trận: A, B, C, d,
- + Hãy viết phương trình trạng thái mô tả hệ thống này,
- + Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Bài tập 8.5

Cho hệ thống có sơ đồ cấu trúc như trên hình BT 8.5.



Hình BT 8.5.

+ Hãy tìm các ma trận A, B, C, d,

+ Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$.

Bài tập 8.6

Cho hệ thống đệ quy thuần túy được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$2y(n) + y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n).$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc,

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc chuyển vị,

+ Hãy vẽ cấu trúc dạng mắt cáo,

+ Hãy tìm các ma trận: A, B, C, d,

+ Hãy viết phương trình trạng thái mô tả hệ thống này,

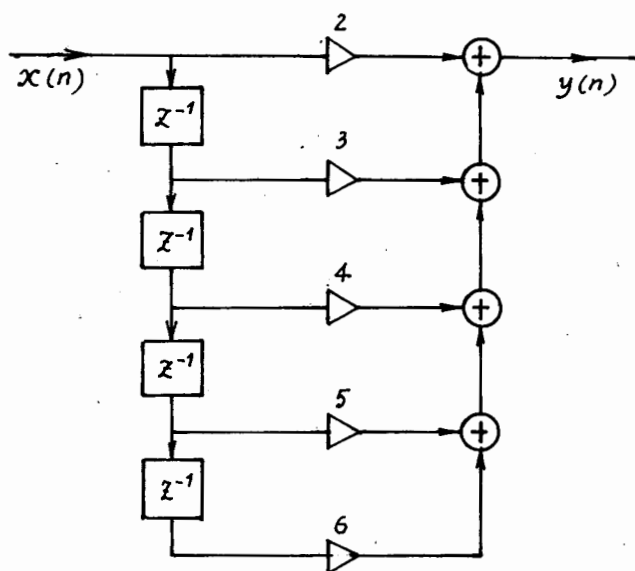
+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Bài tập 8.7

Cho hệ thống FIR có sơ đồ cấu trúc cho trên hình BT 8.7.

+ Hãy tìm các ma trận A, B, C, d,

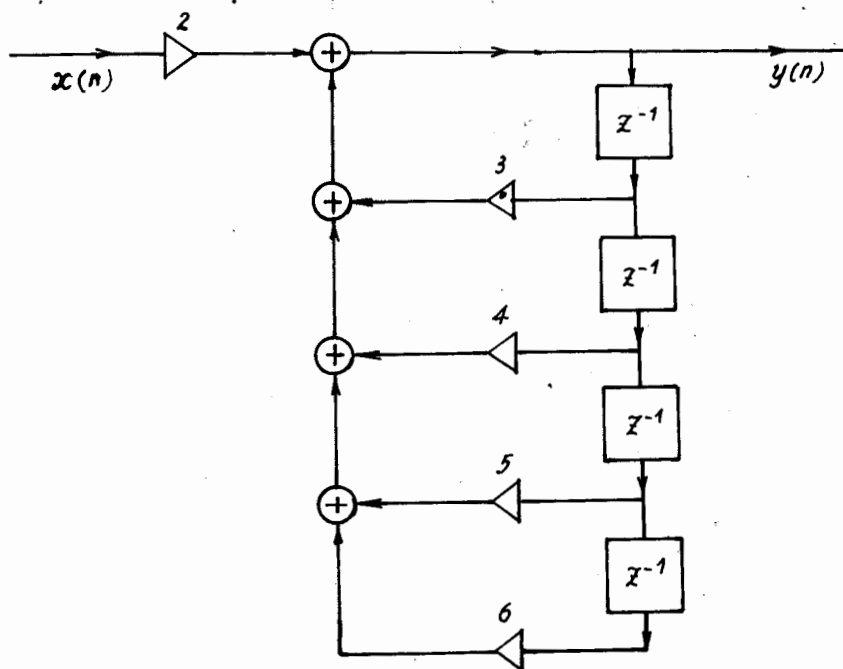
+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.



Hình BT 8.7.

Bài tập 8.8

Cho hệ thống đệ quy thuận tủy có sơ đồ cấu trúc cho trên hình BT 8.8.

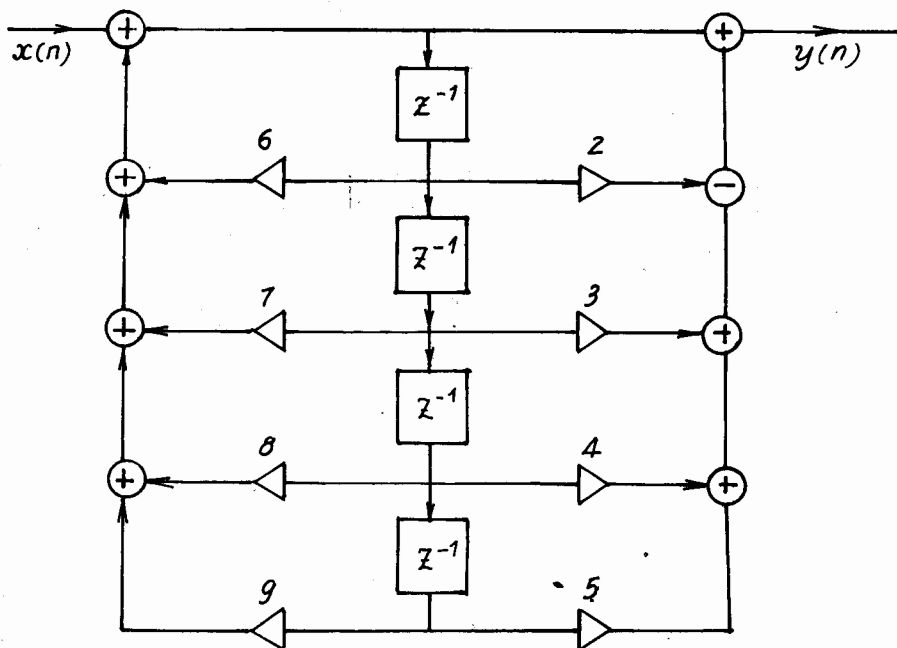


Hình BT 8.8.

- + Hãy tìm các ma trận A, B, C, d,
- + Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Bài tập 8.9

Cho hệ thống đệ quy thuần túy có sơ đồ cấu trúc cho trên hình BT 8.9.



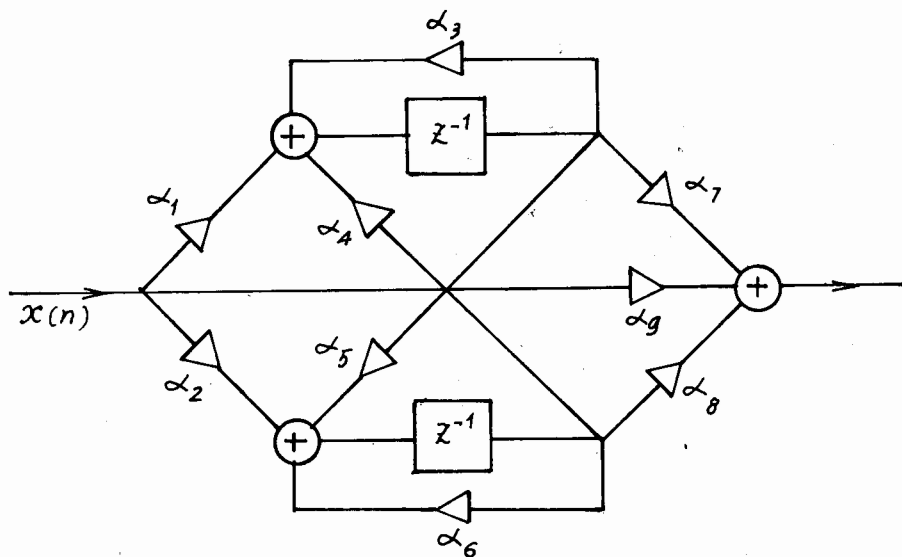
Hình BT 8.9.

+ Hãy tìm các ma trận A, B, C, d,

+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái.

Bài tập 8.10

Cho bộ lọc số có cấu trúc được cho trên hình BT 8.10 sau đây:



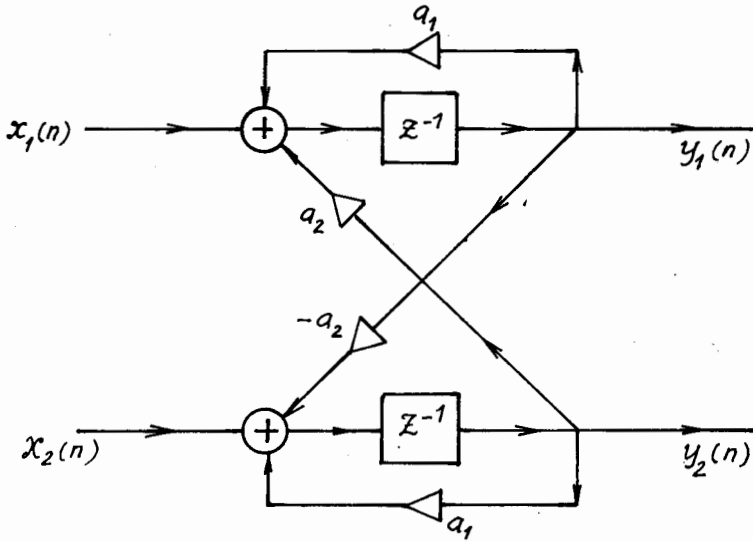
Hình BT 8.10.

+ Hãy tìm các ma trận A, B, C, d theo hàm của các hệ số α_i .

+ Cho nhận xét nếu $\alpha_5 = -\alpha_4$ và $\alpha_6 = \alpha_3$.

Bài tập 8.11

Cho bộ lọc số có cấu trúc được cho trên hình BT 8.11 sau đây:



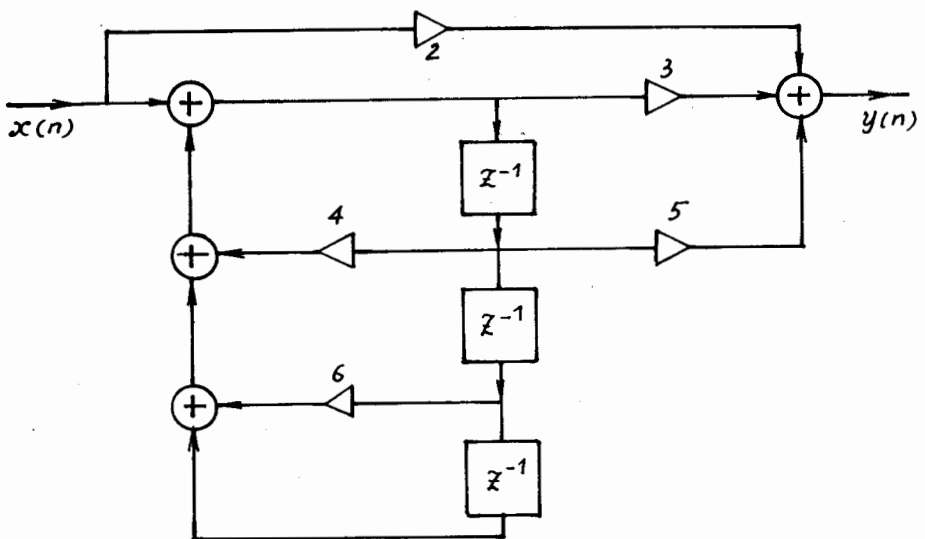
Hình BT 8.11.

+ Hãy viết phương trình trạng thái của mạch,

+ Hãy tìm các ma trận A, B, C, d.

Bài tập 8.12

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 8.12 sau đây:



Hình BT 8.12.

Hãy tìm các ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, \mathbf{d} .

Bài tập 8.13

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [1,5 \quad 1,5] \cdot \underline{\mathbf{Q}}(n) + 3x(n)$$

Hãy tìm $y(n)$ với:

$$x(n) = u(n)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 8.14

Cho hệ thống được đặc trưng bởi các ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, \mathbf{d} sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = 4$$

Hãy tìm $y(n)$ với:

$$x(n) = u(n)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}(n+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 8.15

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$2y(n) - 4y(n-1) + y(n-2) = x(n) + 3x(n-1) + 6x(n-2)$$

+ Hãy lập biểu thức tính đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống,

+ Hãy tính các giá trị $h(1)$; $h(2)$ và $h(3)$.

Bài tập 8.16

Cho hệ thống được đặc trưng bởi các ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, \mathbf{d} có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = 1$$

+ Hãy lập biểu thức tính đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống này,

+ Hãy tính các giá trị $h(0)$ và $h(1)$.

Bài tập 8.17

Giả sử ta có hệ thống bậc hai được mô tả bởi các ma trận trạng thái có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = 0$$

- Hãy tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$,
- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống này.

Bài tập 8.18

Giả sử ta có ma trận trạng thái $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Hãy tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ này,
- Hãy tìm ma trận chéo $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$,
- Từ ma trận chéo $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ hãy tìm $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2$.

Bài tập 8.19

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = 2y(n-1) - 3y(n-2) + 2x(n) + 4x(n-2)$$

- Hãy tìm ma trận trạng thái $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$,
- Hãy tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$,
- Hãy tìm ma trận chéo $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$,
- Từ ma trận chéo $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ hãy tìm $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^3$,
- Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái của hệ thống này.

Bài tập 8.20

Giả sử ta có các ma trận trạng thái sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Cho ma trận chọn $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

Hãy tìm $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT}$.

Bài tập 8.21

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình trạng thái sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [-4 \quad 4] \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(n) + x(n)$$

Chúng ta chọn ma trận chọn $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ không suy biến như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

+ Hãy tìm $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT}$,

+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái với $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^*$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T$,

+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái với $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT}$.

Bài tập 8.22

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$2y(n) + 4y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n) + 8x(n-1) + 12x(n-2)$$

+ Hãy tìm các ma trận trạng thái $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T$, \mathbf{d} ,

+ Hãy tìm các ma trận trạng thái $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT}$, \mathbf{d} với ma trận chọn $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

+ Hãy vẽ cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc

+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái với $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T$, \mathbf{d} ,

+ Hãy vẽ cấu trúc không gian trạng thái với $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{iT}$, \mathbf{d} .

Bài tập 8.23

Giả sử chúng ta có hàm truyền đạt của một bộ lọc số được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(z) = \gamma + \frac{\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}$$

và các ma trận trạng thái có dạng:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ và } \underline{\underline{\mathbf{d}}}$$

+ Hãy tìm các hệ số của bộ lọc theo hàm của $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2$ và $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$,

+ Hãy cho nhận xét về việc hoán vị dấu của các hệ số $a_{11}, \dots, \underline{\underline{\mathbf{d}}}$.

Bài tập 8.24

Cho các ma trận trạng thái có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{d}}} = 0,2$$

Hãy tìm các hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống được cho bởi các ma trận trên.

Bài tập 8.25

Cho hệ thống có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$\text{a) } H(z) = \frac{2 + 11z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\text{b) } H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 6z^{-2} + 9z^{-3}}{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 6z^{-3}}$$

Hãy tìm các ma trận $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$.

Bài tập 8.26

Cho các ma trận trạng thái có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a_2 & -a_3 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{d}}} = 0$$

+ Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$,

+ Hãy xét sự ổn định của hệ thống này.

Bài tập 8.27

Cho các ma trận trạng thái có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{d}}} = 0$$

và cho ma trận chọn $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ có dạng sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

+ Hãy tìm $H(z)$ và $H^T(z)$,

+ Hãy so sánh kết quả.

Bài tập 8.28

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1) + 3y(n-1) - 6y(n-2)$$

+ Hãy tìm ma trận trạng thái $\underline{\mathbf{A}}$,

+ Hãy tìm phương trình đặc trưng của ma trận $\underline{\mathbf{A}}$,

+ Hãy xét sự ổn định của hệ thống này.

Chương 9

LỌC SỐ NHIỀU NHỊP

9.1. MỞ ĐẦU

Kỹ thuật lọc số nhiều nhịp ngày càng được ứng dụng nhiều trong lĩnh vực xử lý số tín hiệu, như là nó có thể dùng để tăng tốc độ tính toán trong các bộ lọc số bằng cách giảm số phép nhân phải thực hiện trong một giây.

Chúng ta biết rằng trong quá trình xử lý số tín hiệu, bề rộng của dải tần số có thể thay đổi, như là các phép lọc sẽ triệt tiêu các thành phần tần số không mong muốn, thế thì bề rộng dải tần của tín hiệu xử lý sẽ giảm đi và chúng ta có thể giảm tần số lấy mẫu cho phù hợp với bề rộng phổ của tín hiệu và như vậy ta sẽ giảm được số phép tính toán trong bộ lọc số.

Do những tính chất ưu việt của nó, kỹ thuật lọc số nhiều nhịp đã được nghiên cứu rất nhiều trong những năm gần đây và đã thu được những kết quả khả quan về lý thuyết cũng như ứng dụng kỹ thuật như trong viễn thông, xử lý tiếng nói, xử lý hình ảnh, các hệ thống antenna, kỹ thuật audio số. Đặc biệt hai ứng dụng chính của nó là mã hoá band con (subband coding) dùng trong xử lý tiếng nói và phân đường dùng trong viễn thông.

Thành tựu của kỹ thuật lọc số nhiều nhịp trong những năm vừa qua thể hiện ở việc nghiên cứu các hệ thống số nhiều nhịp, như là tổng hợp các bộ lọc phân chia (decimation filter) và các bộ lọc nội suy (interpolation filter), các bank lọc phân tích và tổng hợp, biểu diễn nhiều pha (polyphase) và cấu trúc nhiều pha.

9.2. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU

9.2.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Để làm quen với khái niệm nhiều nhịp và để dễ theo dõi các quá trình tiếp theo chúng ta cần phải định nghĩa một số khái niệm mới.

a) Định nghĩa hệ thống nhiều nhịp

Nếu trong một hệ thống xử lý số tín hiệu, tần số (hoặc nhịp) lấy mẫu được thay đổi trong quá trình xử lý, thì hệ thống số này được gọi là hệ thống xử lý số nhiều nhịp.

b) Định nghĩa phép phân chia

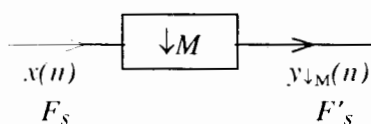
Việc giảm tần số (hoặc nhịp) lấy mẫu từ giá trị F_s về một giá trị F'_s ($F'_s < F_s$) được định nghĩa là phân chia.

Nếu $F'_s = F_s/M$ ($M > 1$ và nguyên dương) thì ta gọi là phép phân chia theo hệ số M và M gọi là hệ số phân chia.

c) Định nghĩa bộ phân chia

Hệ thống chỉ làm nhiệm vụ giảm tần số lấy mẫu được gọi là bộ phân chia.

Bộ phân chia được ký hiệu như hình 9.2.1.1



M : hệ số phân chia

Hình 9.2.1.1.

Để thuận tiện chúng ta có thể dùng ký hiệu toán tử để biểu diễn phép phân chia như sau:

$$\downarrow M[x(n)] = y_{\downarrow}(n) \equiv y_{\downarrow M}(n) \quad (9.2.1.1)$$

hay:

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow}(n) \equiv y_{\downarrow M}(n) \quad (9.2.1.2)$$

d) Định nghĩa phép nội suy

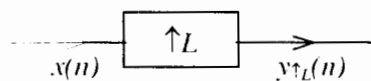
Việc tăng tần số lấy mẫu từ giá trị F_s đến một giá trị F'_s ($F'_s > F_s$) được định nghĩa là phép nội suy.

Nếu $F'_s = LF_s$ ($L > 1$ và nguyên dương) thì ta gọi là phép nội suy cho hệ số L . Và L gọi là hệ số nội suy.

e) Định nghĩa bộ nội suy

Hệ thống chỉ làm nhiệm vụ tăng tần số lấy mẫu được gọi là bộ nội suy.

Bộ nội suy được ký hiệu như trên hình 9.2.1.2.



L : hệ số nội suy

Hình 9.2.1.2

Để thuận tiện ta có thể dùng ký hiệu toán tử để biểu diễn phép nội suy như sau:

$$\uparrow L[x(n)] = y_{\uparrow L}(n) \quad (9.2.1.3)$$

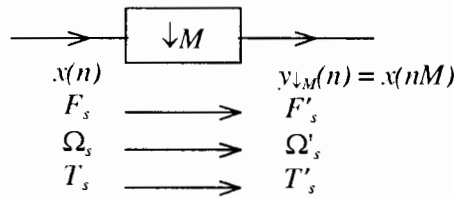
hay:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \quad (9.2.1.4)$$

9.2.2. PHÉP PHÂN CHIA THEO HỆ SỐ M

a) Biểu diễn phép phân chia trong miền biến số n

Giả sử ta có bộ phân chia theo hình 9.2.2.1 sau đây:



Hình 9.2.2.1

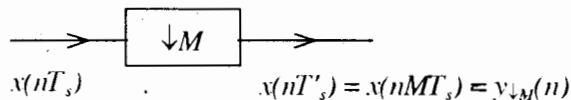
Ta thấy rằng tần số lấy mẫu F_s của tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau khi đi qua bộ phân chia này sẽ bị giảm đi M lần, tức là:

$$F'_s = \frac{F_s}{M}; \quad \Omega_s = 2\pi F_s; \quad \Omega'_s = 2\pi F'_s = 2\pi \frac{F_s}{M} = \frac{\Omega_s}{M} \quad (9.2.2.1)$$

hoặc là chu kỳ lấy mẫu $T_s = \frac{1}{F_s}$ sẽ tăng lên M lần:

$$T'_s = MT_s \quad (9.2.2.2)$$

Để hiểu rõ bản chất của quá trình phân chia này ta sẽ biểu diễn dãy vào và dãy ra của bộ phân chia này ở dạng không chuẩn hoá như trên hình 9.2.2.2 (chuẩn hoá ở đây được hiểu là chuẩn hoá bởi chu kỳ lấy mẫu).



nM : số nguyên

Hình 9.2.2.2

Như vậy tín hiệu rời rạc trước khi vào bộ phân chia là $x(nT_s)$ và sau khi ra khỏi bộ phân chia sẽ là $x(nT'_s)$.

Ví dụ 9.2.2.1

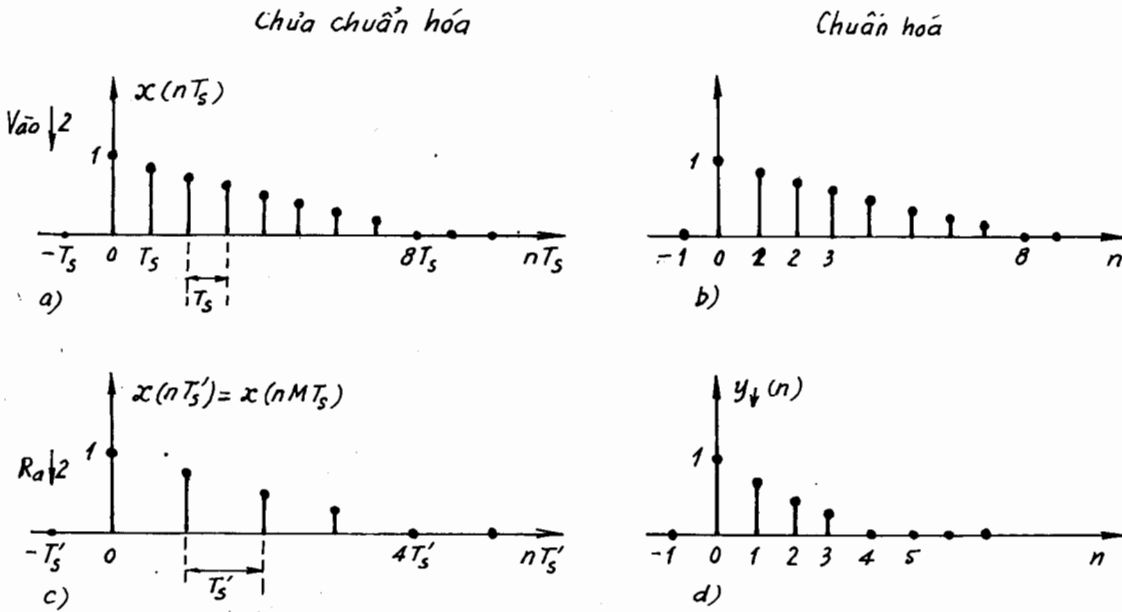
Cho tín hiệu rời rạc sau đây:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{8} & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy vẽ $x(n)$ bằng đồ thị dưới dạng không chuẩn hoá (theo chu kỳ lấy mẫu) và chuẩn hoá trước khi vào và sau khi ra khỏi bộ phân chia theo hệ số $M = 2$.

Giải

Lời giải được cho trên hình 9.2.2.3.



- (a) Tín hiệu vào không chuẩn hoá,
- (b) Tín hiệu vào chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu T_s ,
- (c) Tín hiệu ra không chuẩn hoá,
- (d) Tín hiệu ra chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu $T_s' = MT_s$.

Hình 9.2.2.3

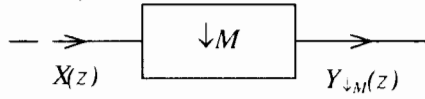
Chú ý:

- Ta thấy rằng tín hiệu ra $y_{\downarrow M}(n)$ chỉ lấy các giá trị của tín hiệu vào $x(n)$ ở các mẫu nM , bởi vì tần số lấy mẫu bị giảm đi M lần sau khi tín hiệu đi qua bộ phân chia theo hệ số M .

- Chiều dài của $x(n)$ bị co lại M lần, tức là $L[x(n)]/L[y_{\downarrow M}(n)] = M$

b) Biểu diễn phép phân chia trong miền z

Chúng ta có thể biểu diễn quá trình phân chia bằng bộ phân chia trong miền z như sơ đồ trên hình 9.2.2.4.



Hình 9.2.2.4.

Ta biết rằng trong miền biến số độc lập ta có:

$$y_{\downarrow M}(n) = x(nM) \quad (9.2.2.3)$$

Vậy:

$$Y_{\downarrow M}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\downarrow M}(n) z^{-n} = \sum_{M=-\infty}^{\infty} x(nM) z^{-n}$$

đổi biến số ta có:

$$m = n.M \text{ và } n = \frac{m}{M} :$$

$$Y_{\downarrow M}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-\frac{m}{M}} \quad \text{với } m = n.M, n: \text{ số nguyên}$$

Ta đã biết rằng dãy $p(m)$ được định nghĩa như sau:

$$p(m) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} W_M^{-lm} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} lm} = \begin{cases} 1 & \text{với } m = nM, n: \text{ số nguyên} \\ 0 & \text{với } m \text{ còn lại} \end{cases} \quad (9.2.2.4)$$

từ đây ta có:

$$\begin{aligned} Y_{\downarrow M}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot p(m) z^{-\frac{m}{M}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} lm} x(m) \cdot z^{-\frac{m}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot \left[z^{\frac{1}{M}} e^{-j \frac{2\pi}{M} l} \right]^{-m} \\ Y_{\downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j \frac{2\pi}{M} l} \right) \quad (9.2.2.5) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} W_M^l \right) \end{aligned}$$

hoặc có thể viết dưới dạng sau đây:

$$MY_{\downarrow M}(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} X\left(ze^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) \quad (9.2.2.6)$$

Ví dụ 9.2.2.2

Một tín hiệu $x(n)$ có biến đổi z là $X(z)$ đi qua bộ phân chia với hệ số $M = 2$, ở đầu ra của bộ phân chia này ta thu được $Y_{\downarrow 2}(z)$. Hãy tìm quan hệ giữa $X(z)$ và $Y_{\downarrow 2}(z)$ nếu $x(n)$ có dạng sau đây:

$$x(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$$

$$\begin{array}{c} \mapsto \\ 1 \end{array}$$

Giải

Trước hết ta tìm $X(z)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5} \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức (9.2.2.6) với $M = 2$ ta có:

$$Y_{\downarrow 2}(z) = \frac{1}{2}X(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}X(-z^{\frac{1}{2}})$$

Tính $X(z^{\frac{1}{2}})$ và $X(-z^{\frac{1}{2}})$:

$$\begin{aligned} X(z^{\frac{1}{2}}) &= z^{-\frac{1}{2}} + 2z^{-1} + 3z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-2} + z^{-\frac{5}{2}} \\ X(-z^{\frac{1}{2}}) &= -z^{-\frac{1}{2}} + 2z^{-1} - 3z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-2} - z^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$Y_{\downarrow 2}(z) = 2z^{-1} + 2z^{-2}$$

c. Biểu diễn phép phân chia trong miền tần số

Biểu diễn phép phân chia trong miền tần số chính là việc tìm quan hệ giữa:

$$Y_{\downarrow M}(e^{j\omega}) = FT[y_{\downarrow M}(n)]$$

và:

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$$

Nếu ta đánh giá $Y_{\downarrow M}(z)$ là $X(z)$ trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z thì ta sẽ tìm được quan hệ giữa $Y_{\downarrow M}(e^{j\omega})$ và $X(e^{j\omega})$, tức là:

$$Y_{\downarrow M}(e^{j\omega}) = Y_{\downarrow}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Vậy ta thu được quan hệ sau:

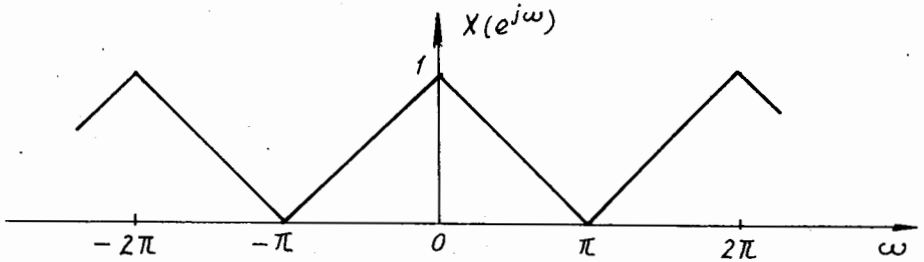
$$\begin{aligned} Y_{\downarrow M}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left(e^{j\frac{\omega}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}} \right) \end{aligned} \quad (9.2.2.7)$$

hay

$$MY_{\downarrow M}(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M-1} X \left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}} \right)$$

Ví dụ 9.2.2.3

Cho tín hiệu rời rạc $x(n]$ được lấy mẫu từ một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ với tần số lấy mẫu bằng tần số Nyquist F_{Ny} , $x(n]$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ cho trên hình (9.2.2.5).



Hình 9.2.2.5

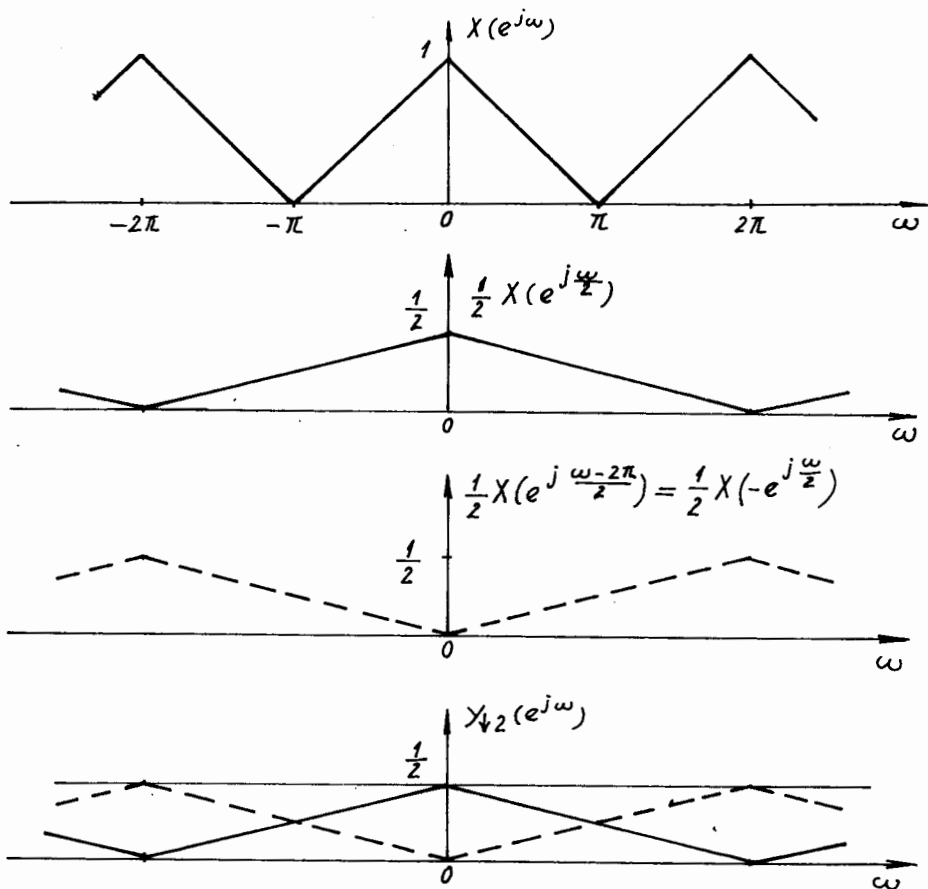
Tín hiệu này được truyền qua một bộ phân chia có hệ số $M = 2$ và ở đầu ra ta thu được $Y_{\downarrow}(n)$. Hãy vẽ phổ của $Y_{\downarrow}(n)$, tức là vẽ $Y_{\downarrow}(e^{j\omega})$ theo phổ của $X(e^{j\omega})$.

Giải

Thay $M = 2$ vào biểu thức (9.2.2.7) ta có:

$$\begin{aligned} Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} X \left(e^{j\frac{\omega}{2}} \right) + \frac{1}{2} X \left(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} X \left(e^{j\frac{\omega}{2}} \right) + \frac{1}{2} X \left(-e^{j\frac{\omega}{2}} \right) \end{aligned}$$

Như vậy phổ $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$ sẽ là sự xếp chồng phổ của hai thành phần trên, kết quả được minh họa như trên hình 9.2.2.6.



Hình 9.2.2.6

Nhận xét:

- Thành phần với $l = 0$ $X(e^{j\frac{\omega}{M}})$ chính là bản ảnh version giãn rộng M lần của $X(e^{j\omega})$.

- $M - 1$ thành phần với $1 \leq l \leq M - 1$ $X(e^{j\frac{\omega - 2\pi l}{M}})$ là bản ảnh trễ đồng dạng của bản ảnh trải rộng $X(e^{j\frac{\omega}{M}})$.

- $Y_{\downarrow 1}(e^{j\omega})$ cũng có chu kỳ là 2π theo ω , là kết quả tổ hợp của M thành phần, bởi vì về thực chất nó là tổ hợp biến đổi Fourier của các dãy hợp lại.

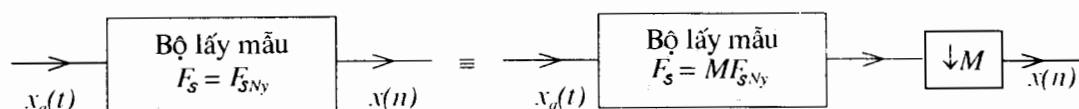
- Từ ví dụ với $M = 2$ ở trên ta thấy rằng thành phần với $l = 0$ $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$ là bản ảnh giãn rộng 2 lần của $X(e^{j\omega})$, tức là bề rộng phổ lớn hơn 2 lần nhưng bản thân $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$

không gây chồng phổ. Nhưng vì còn thành phần $l = 1$ $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$ là bản ảnh trể đồng dạng với $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$. Chính thành phần $l = 1$ sẽ xếp chồng với thành phần $l = 0$ gây hiện tượng chồng phổ và như vậy hiện tượng này sẽ làm mất thông tin chứa trong $x(n)$ khi đi qua bộ phân chia.

- Vì lý do làm hư thông tin nên thành phần với $1 \leq l \leq M - 1$ được gọi là thành phần hư danh (aliasing).

- Nhưng thành phần hư danh (với $1 \leq l \leq M - 1$) này cũng có thể không gây hiện tượng chồng phổ nếu tín hiệu vào bộ phân chia $x(n)$ có dải tần hữu hạn là $-\frac{\pi}{M} < \omega < \frac{\pi}{M}$. Tức là $x(n)$ được lấy mẫu với tần số lấy mẫu F_s lớn gấp M lần tần số Nyquist ($F_s = MF_{Ny}$) từ một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có băng thông phổ hữu hạn F_a ($F_{Ny} = 2F_a$), tức là $F_s = 2MF_a$ (xem ví dụ 9.2.2.4).

- Vậy một logic đơn giản là nếu ta tăng tần số lấy mẫu lên M lần, tức là ta cho $x_a(t)$ qua bộ lấy mẫu với $F_s = MF_{Ny}$ sau đó ta lại cho qua bộ phân chia hệ số M tức là giảm đi M lần thì ta sẽ thu được kết quả như cho $x_a(t)$ qua bộ lấy mẫu với $F_s = F_{Ny}$ như hình 9.2.2.7.



Hình 9.2.2.7

- Phép phân chia làm $x(n)$ co hẹp trong miền thời gian (nếu n là thời gian) thì sẽ dẫn đến hiện tượng giãn rộng trong miền tần số.

Ví dụ 9.2.2.4

Một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ đi qua bộ lấy mẫu với tần số $F_s = 2F_{Ny} = 4F_a$ (F_a : bề rộng của phổ $x_a(t)$) ta có $x(n)$, $x_a(t)$ có phổ là $X_a(\omega_a)$, $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$, $x(n)$ đi qua bộ phân chia với hệ số $M = 2$ và ở đầu ra ta thu được $y_2(n)$ có phổ là $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$. Hãy tìm quan hệ giữa $X_a(\omega_a)$, $X(e^{j\omega})$ và $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$ bằng đồ thị.

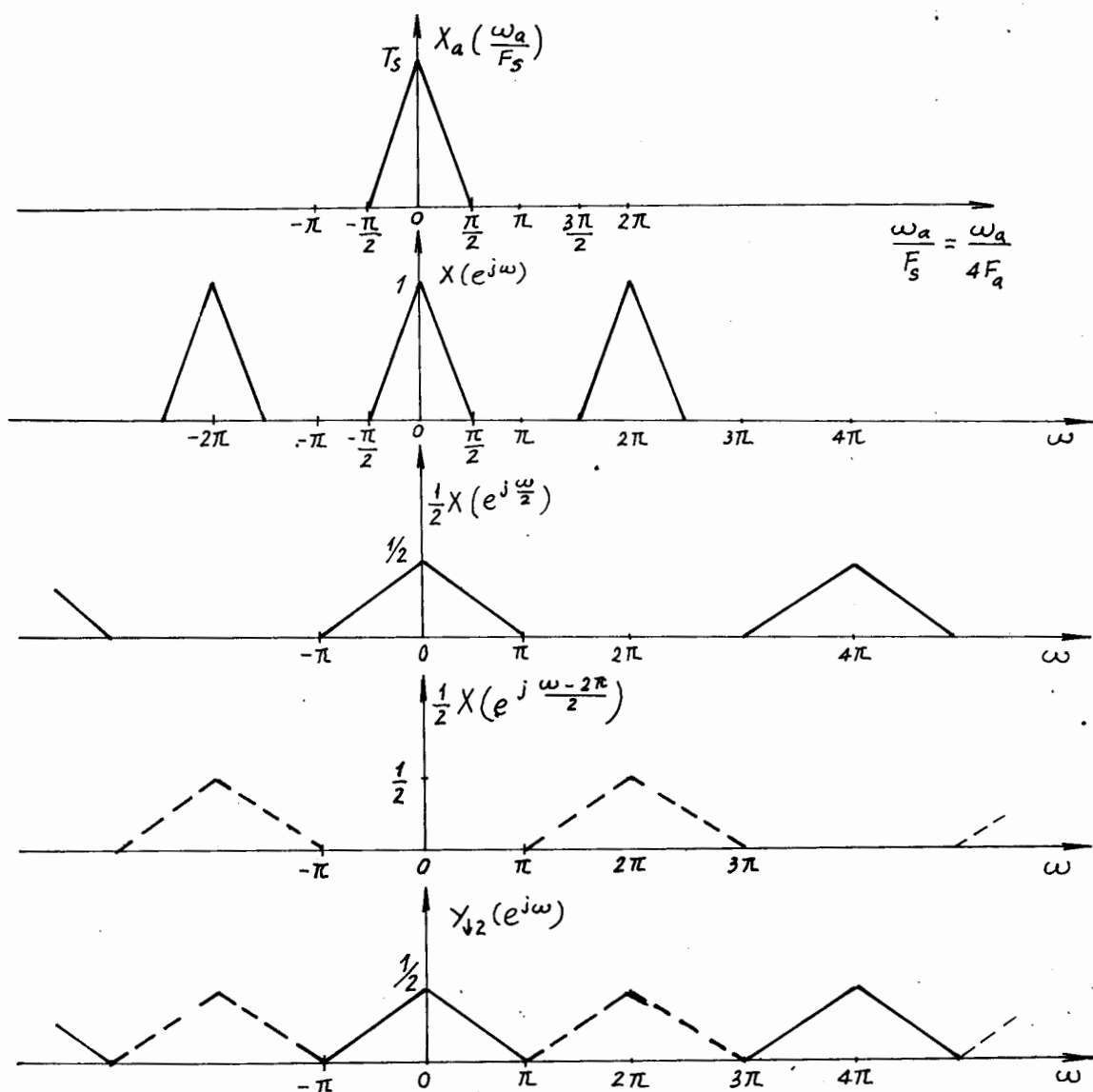
Giải

Ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\omega_a - n\Omega_s); \quad \Omega_s = 2\pi F_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2} X(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}})$$

Kết quả cho trên hình 9.2.2.8.



Hình 9.2.2.8

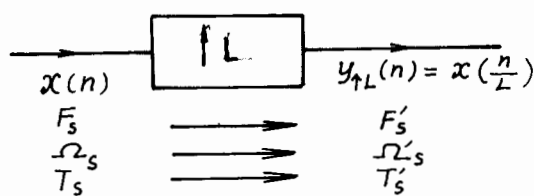
Nhận xét

Từ ví dụ 9.2.2.4 ta thấy rằng thành phần hư danh $X(-e^{j\frac{\omega}{2}})$ (aliasing) tuy có xuất hiện nhưng không gây hiện tượng chồng phổ. Vì vậy nó không làm hư thông tin của chúng ta.

9.2.3. PHÉP NỘI SUY VỚI HỆ SỐ NGUYÊN L

a) Biểu diễn phép nội suy trong miền biến số n

Giả sử ta có bộ nội suy theo hình 9.2.3.1 sau đây:



Hình 9.2.3.1.

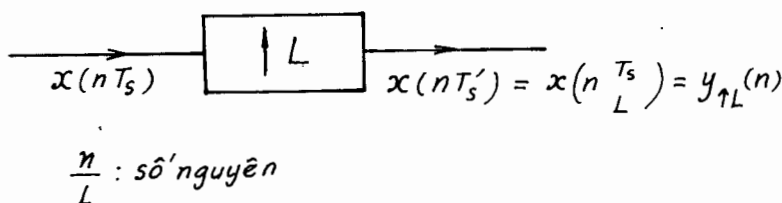
Ta thấy rằng tần số lấy mẫu F_s của tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau khi qua bộ nội suy với hệ số L sẽ tăng lên L lần, tức là:

$$F'_s = LF_s, \quad \Omega_s = 2\pi F_s, \quad \Omega'_s = 2\pi F'_s = 2\pi L \Omega_s \quad (9.2.3.1)$$

hoặc chu kỳ lấy mẫu $T_s = \frac{1}{F_s}$ sẽ giảm đi L lần:

$$T'_s = \frac{T_s}{L} \quad (9.2.3.2)$$

Để hiểu rõ phép nội suy về mặt bản chất, ta sẽ biểu diễn tín hiệu vào và ra của bộ nội suy này ở dạng không chuẩn hoá như trên hình 9.2.3.2 (chuẩn hoá được hiểu là chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu).



Hình 9.2.3.2.

Tín hiệu vào bộ nội suy là $x(nT_s)$, và tín hiệu ra sẽ trở thành $x(nT'_s) = x(\frac{n}{L}T_s)$

Ví dụ 9.2.3.1

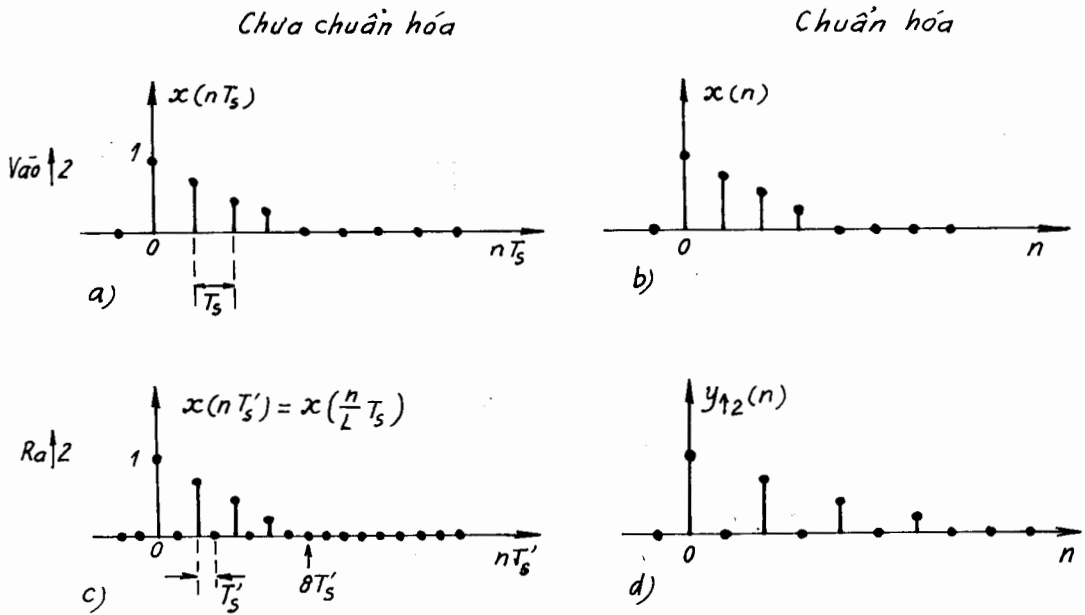
Cho dãy $x(n)$:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tín hiệu $x(n)$ này đi qua bộ nội suy với hệ số nội suy $L = 2$. Hãy vẽ dạng của $x(n)$ và $y_{\uparrow 2}(n)$ ở dạng không chuẩn hoá (theo chu kỳ lấy mẫu) và chuẩn hoá.

Giải

Lời giải được cho trên hình 9.2.3.3.



- (a) Tín hiệu vào không chuẩn hoá
- (b) Tín hiệu vào chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu T_s
- (c) Tín hiệu ra không chuẩn hoá
- (d) Tín hiệu ra chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu $T'_s = \frac{T_s}{L}$

Hình 9.2.3.3.

Chú ý

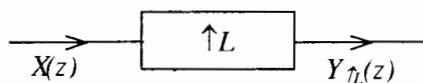
- Ta thấy rằng tín hiệu ra $y_L(n)$ chính là tín hiệu vào $x(n)$ mà giữa L mẫu bất kỳ của nó được chèn thêm $(L - 1)$ mẫu có biên độ là 0, là do tần số lấy mẫu được tăng lên L lần khi tín hiệu đi qua bộ nội suy có hệ số L .

- Chiều dài của $x(n)$ bị giãn ra L lần tức là:

$$L[y_L(n)] / L[x(n)] = L$$

b) Biểu diễn phép nội suy trong miền z

Bây giờ chúng ta sẽ biểu diễn quá trình nội suy bằng bộ nội suy trong miền z như trên hình 9.2.3.4.



Hình 9.2.3.4.

Trong miền biến số độc lập n ta có:

$$y_{\hat{L}}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (9.2.3.3)$$

Vậy:

$$Y_{\hat{L}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\hat{L}}(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{L}\right) z^{-n}$$

đổi biến $m = \frac{n}{L}$ và $n = mL$.


ta có:

$$Y_{\hat{L}}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-mL} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) (z^{+L})^{-m} \quad (9.2.3.4)$$

$$\text{hoặc} \quad Y_{\hat{L}}\left(z^{\frac{1}{L}}\right) = X(z) \quad (9.2.3.5)$$

Ví dụ 9.2.3.2

Cho tín hiệu $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$$


$x(n)$ đi qua bộ nội suy hệ số $L = 2$, ở đầu ra ta có $y_{\hat{L}}(n)$ hãy tìm $X(z) = ZT[x(n)]$ và $Y_{\hat{L}}(z) = ZT[y_{\hat{L}}(n)]$

Giải

Trước hết ta tìm $X(z)$:

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

với $L = 2$ ta có:

$$\begin{aligned} Y_{\hat{L}}(z) &= X(z^2) \\ &= z^{-2} + 2z^{-4} + 3z^{-6} + 2z^{-8} + z^{-10} \end{aligned}$$

c) Biểu diễn phép nội suy trong miền tần số

Đánh giá $Y_{\hat{L}}(z)$ và $X(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta thu được quan hệ giữa $Y_{\hat{L}}(e^{j\omega})$ và $X(e^{j\omega})$:

$$Y_{\hat{L}}(e^{j\omega}) = Y_{\hat{L}}(z) \Big|_{z = e^{j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

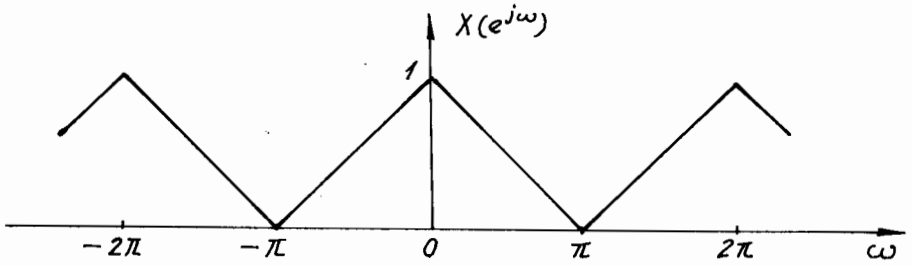
Vậy:

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (9.2.3.6)$$

hay $Y_{\uparrow L}(e^{j\frac{\omega}{L}}) = X(e^{j\omega}) \quad (9.2.3.7)$

Ví dụ 9.2.3.3

Cho tín hiệu rời rạc $x(n]$ được lấy mẫu từ tín hiệu tương tự $x_a(t)$ với tần số lấy mẫu bằng tần số Nyquist, $x(n]$ có phổ $X(e^{j\omega})$ như sau (hình 9.2.3.5).



Hình 9.2.3.5

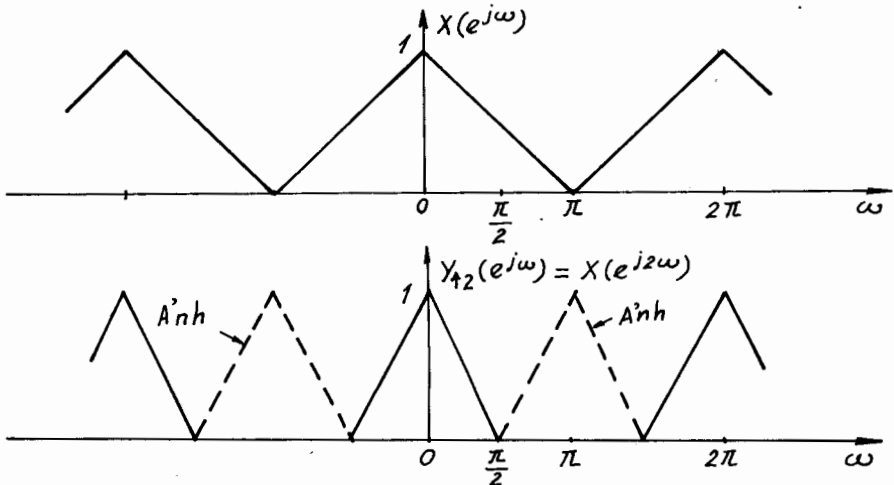
Tín hiệu này đi qua bộ nội suy hệ số $L = 2$, ở đầu ra ta thu được $y_{\uparrow 2}(n)$. Hãy vẽ phổ của $y_{\uparrow 2}(n)$, tức là vẽ $Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega})$.

Giải

Từ biểu thức: $Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$

Ta có với $L = 2$: $Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$

Kết quả được minh hoạ trên hình 9.2.2.6.



Hình 9.2.3.6.

Nhận xét

- $Y_{TL}(e^{j\omega})$ là bản ảnh (version) co hẹp L lần của $X(e^{j\omega})$, nhưng lại xuất hiện $(L - 1)$ bản sao chụp phổ cơ bản, $(L - 1)$ bản sao chụp phụ này là các ảnh được tạo ra bởi bộ nội suy hệ số L . Hiện tượng xuất hiện các bản sao chụp phụ này gọi là hiệu ứng tạo ảnh (imaging)

- Từ ví dụ với $L = 2$ ở trên ta thấy rằng hiệu ứng tạo ảnh này không gây hiện tượng chồng phổ và như vậy nó không làm mất thông tin.

- Phép nội suy làm tín hiệu $x(n)$ giãn rộng trong miền thời gian (nếu n là thời gian) thì sẽ dẫn đến hiện tượng co hẹp trong miền tần số, đây là tính chất của biến đổi Fourier.

- Phép nội suy làm chèn thêm $(L - 1)$ mẫu có biên độ 0 vào giữa hai mẫu của $x(n)$ thì trong miền tần số sẽ tạo ra $(L - 1)$ bản sao chụp phụ phổ cơ bản, tức là $L - 1$ bản sao chụp này sẽ chèn vào giữa hai phổ cơ bản.

- Từ nội suy ở đây có nghĩa là nếu tín hiệu $x(n)$ với tần số lấy mẫu F_s sau khi qua bộ nội suy sẽ có tần số lấy mẫu $F'_s = LF_s$ và với các mẫu có biên độ 0. Sau đó ta cho qua bộ lọc có tần số cắt là $\frac{\pi}{L}$ thì ở đầu ra của bộ lọc ta sẽ thu được tín hiệu với tần số lấy mẫu LF_s nhưng các mẫu biên độ 0 đã được nội suy từ các mẫu biên độ khác 0 của $x(n)$, tức là ta có tín hiệu $x(n)$ có tần số lấy mẫu LF_s với các mẫu biên độ khác 0, quá trình nội suy này được thực hiện bằng mạch lọc nội suy mà ta sẽ nghiên cứu kỹ ở phần sau.

9.2.4. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU VỚI HỆ SỐ $\frac{M}{L}$

a) Biểu diễn trong miền biến số n

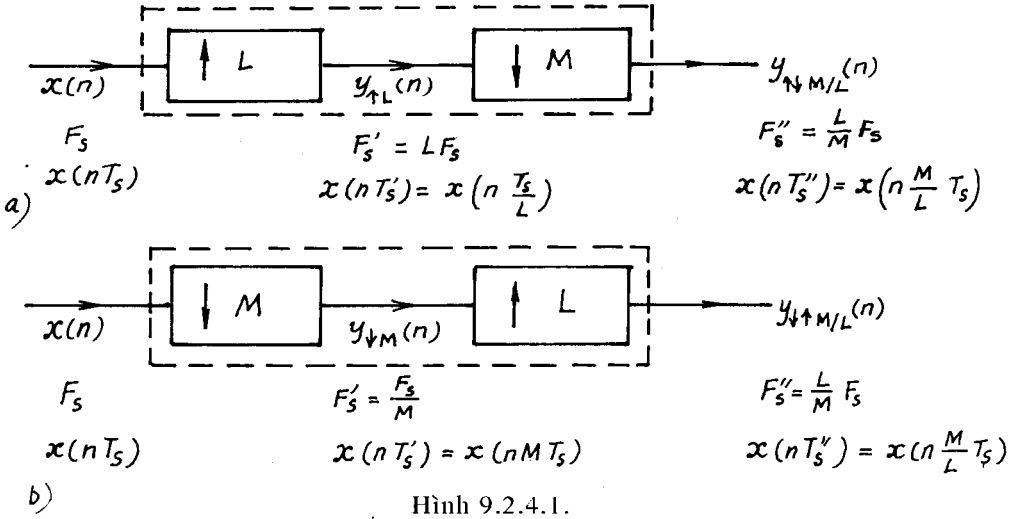
Trong kỹ thuật nhiều khi để thực hiện một nhiệm vụ nào đó chúng ta cần phải thay đổi nhịp lấy mẫu với hệ số là phân số $\frac{M}{L}$. Để thực hiện nhiệm vụ này chúng ta sẽ ghép nối tiếp hai bộ nội suy và phân chia với nhau hoặc theo thứ tự ngược lại, bộ này ta gọi là bộ biến đổi nhịp với hệ số $\frac{M}{L}$. Xem hình 9.2.4.1.

Ta thấy rằng tần số lấy mẫu F_s của tín hiệu vào $x(n)$ sau khi đi qua khối bộ biến đổi nhịp với hệ số $\frac{M}{L}$ thì tần số lấy mẫu sẽ bị thay đổi $\frac{L}{M}$ lần tức là:

$$F'_s = \frac{L}{M} F_s \quad (9.2.4.1)$$

hoặc chu kỳ lấy mẫu sẽ thay đổi $\frac{M}{L}$ lần:

$$T_s'' = \frac{M}{L} F_s \quad (9.2.4.2)$$



Chúng ta có thể dùng ký hiệu toán tử để biểu diễn phép biến đổi nháp lấy mẫu hệ số M/L như sau:

$$\uparrow \downarrow \frac{M}{L} [x(n)] = y \uparrow \downarrow_{M/L}(n) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{\uparrow \downarrow_{M/L}} y \uparrow \downarrow_{M/L}(n) \quad (9.2.4.3)$$

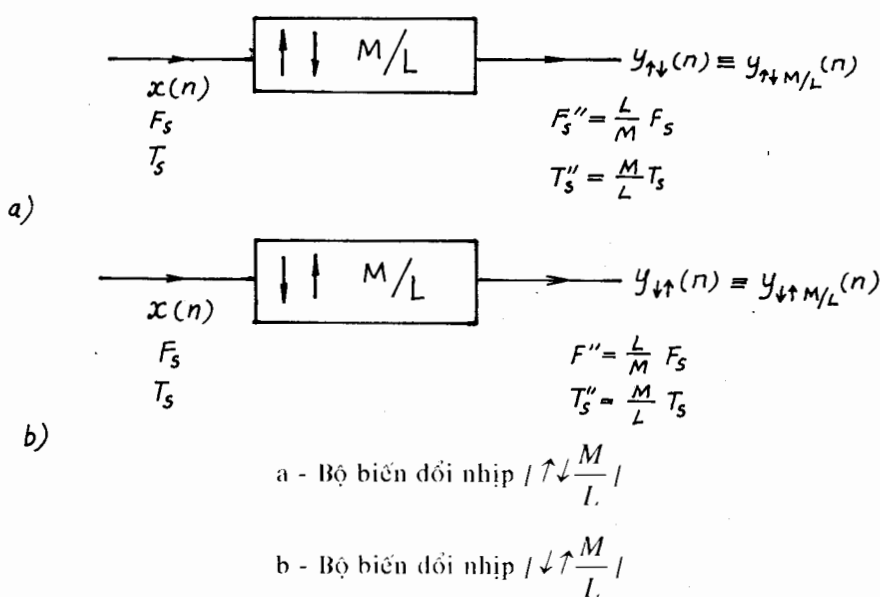
và:

$$\downarrow \uparrow \frac{M}{L} [x(n)] = y \downarrow \uparrow_{M/L}(n) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{\downarrow \uparrow_{M/L}} y \downarrow \uparrow_{M/L}(n) \quad (9.2.4.4)$$

Để thuận tiện ta ký hiệu lại bộ biến đổi nháp hệ số $\frac{M}{L}$ như hình 9.2.4.2. Nếu mũi tên lên \uparrow đặt trước mũi tên xuống \downarrow thì tức là bộ nội suy đặt trước bộ phân chia. Còn nếu mũi tên xuống \downarrow đặt trước mũi tên lên \uparrow thì tức là bộ phân chia đặt trước bộ nội suy. Trong hệ số $\frac{M}{L}$ thì tử số là hệ số của bộ phân chia, mẫu số là hệ số của bộ nội suy.

Sở dĩ ta phải phân biệt thứ tự trước sau giữa bộ phân chia và bộ nội suy bởi vì phép phân chia và nội suy không có tính chất giao hoán. Bộ phân chia, bộ nội suy và bộ biến đổi nháp là những hệ thống không phải là bất biến theo biến số n , tức là, chúng là các hệ thống thay đổi theo biến số n (nếu n là thời gian, thì là thay đổi theo thời gian).

Như vậy nói chung thì $y \uparrow \downarrow_{M/L}(n) \neq y \downarrow \uparrow_{M/L}(n)$ mặc dù tỷ lệ thay đổi nháp lấy mẫu đều là $\frac{M}{L}$. Tuy nhiên cũng có trường hợp $y \uparrow \downarrow_{M/L}(n) = y \downarrow \uparrow_{M/L}(n)$ nếu quan hệ giữa M và L thoả mãn một số điều kiện (ta sẽ xét sau).



Hình 9.2.4.2.

Nếu $M > L$ thì bộ thay đổi nhịp làm nhiệm vụ nén tín hiệu theo tỷ lệ $\frac{M}{L}$.

Nếu $M < L$ thì bộ thay đổi nhịp làm nhiệm vụ giãn tín hiệu theo tỷ lệ $\frac{L}{M}$.

Ví dụ 9.2.4.1

Cho $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{5} & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

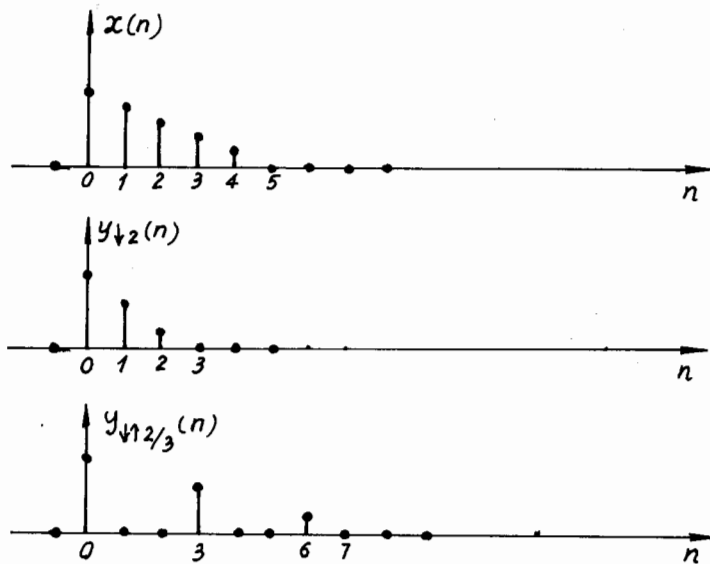
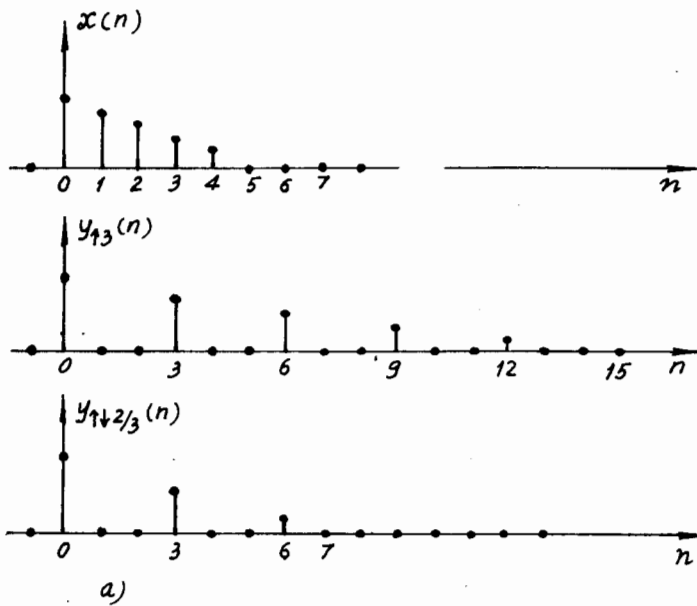
$x(n)$ đi qua bộ biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{2}{3}$. Hãy vẽ tín hiệu ra $y(n)$ với:

a) Bộ biến đổi nhịp $\uparrow\downarrow M/L$.

b) Bộ biến đổi nhịp $\downarrow\uparrow M/L$.

Giải

Ta giải bằng đồ thị, $x(n)$ được chuẩn hoá bởi T_s , $y(n)$ được chuẩn hoá bởi $T_s'' = \frac{2}{3} T_s$:



Hình 9.2.4.3.

Nhận xét:

- Trong trường hợp của ví dụ 9.2.4.1 ta thấy rằng nếu $M = 2$, $L = 3$ thì $y_{\downarrow M/L}(n)$ và ta có thể tổng quát hoá trường hợp này như sau:

Nếu:

$$n_0 L = n_1 M + 1 \quad n_0 \text{ và } n_1 \text{ là các số nguyên}$$

hoặc:

$$n_1 M = n_0 L + 1$$

thì

$$y_{\downarrow \uparrow M/L}(n) = y_{\uparrow \downarrow M/L}(n)$$

- Ta có thể ký hiệu sự tương đương này như sau:

$$\downarrow \uparrow M/L \equiv \uparrow \downarrow M/L \quad (9.2.4.5)$$

Nếu L và M thoả mãn điều kiện:

$$n_0 L - n_1 M = 1$$

hoặc:

$$n_1 M - n_0 L = 1 \quad (9.2.4.6)$$

ở đây n_0 và n_1 là các số nguyên.

(9.2.4.6) chính là nội dung của định lý Euclid.

b) Biểu diễn trong miền z

Trong phần này ta sẽ dùng biến đổi z để nghiên cứu quan hệ vào ra của các bộ biến đổi nhíp, và cũng từ đây chúng ta sẽ giải thích được nhiều tính chất của phép biến đổi nhíp lấy mẫu.

Trước tiên ta xét quan hệ vào ra của bộ biến đổi nhíp $\downarrow \uparrow M/L$, ta đã có phép biến đổi nhíp như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow \uparrow M/L} y_{\downarrow \uparrow M/L}(n)$$

Vậy trong miền z ta cũng có:

$$ZT[x(n)] = X(z) \xrightarrow{\downarrow \uparrow M/L} y_{\downarrow \uparrow M/L}(z) = ZT[y_{\downarrow \uparrow M/L}(n)] \quad (9.2.4.7)$$

với phép phân chia ta cũng có:

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow M}(z) = ZT[y_{\downarrow M}(n)]$$

$$y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l})$$

Sau đó $y_{\downarrow M}(n)$ đi qua bộ nội suy $\uparrow L$ ta có:

$$y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\downarrow \uparrow M/L}(z) = ZT[y_{\downarrow \uparrow M/L}(n)]$$

$$Y_{\downarrow \uparrow M/L}(z) = Y_{\downarrow M}(z^L)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) \quad (9.2.4.8)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^M W_M^l)^L$$

Bây giờ ta xét quan hệ vào ra của bộ biến đổi nhíp $\uparrow\downarrow M/L$, ta có phép biến đổi nhíp như sau:

$$X(n) \xrightarrow{\uparrow\downarrow M/L} Y^{\uparrow\downarrow M/L}(n)$$

Trong miền z ta có:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow\downarrow M/L} Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z) \quad (9.2.4.9)$$

với phép nội suy $\uparrow L$ ta có:

$$\begin{aligned} X(z) &\xrightarrow{\uparrow L} Y^{\uparrow L}(z) = ZT\{y^{\uparrow L}(n)\} \\ Y^{\uparrow L}(z) &= X(z^L) \end{aligned}$$

Sau đó $y^{\uparrow L}(n)$ đi qua bộ phân chia $\downarrow M$ ta có:

$$\begin{aligned} Y^{\uparrow L}(z) &\xrightarrow{\downarrow M} Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z) = ZT\{y^{\uparrow\downarrow M/L}(n)\} \\ Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y^{\uparrow L}(z^M e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) \\ Y^{\uparrow L}(z^M e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) &= X\left[(z^M e^{-j\frac{2\pi}{M}l})^L\right] \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^M e^{-j\frac{2\pi}{M}l})^L \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^M W_M^{Ll}) \end{aligned} \quad (9.2.4.10)$$

- Dựa vào biểu thức của $Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z)$ và $Y^{\downarrow M}(z)$ ta thấy rằng $Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z) \neq Y^{\downarrow M}(z)$, tức là nói chung $y^{\uparrow\downarrow M/L}(n) \neq y^{\downarrow M}(n)$, như mục trên chúng ta đã nhận xét.

- Nhưng cũng có những khả năng $Y^{\uparrow\downarrow M/L}(z) = Y^{\downarrow M}(z)$ nếu:

$$\sum_{l=0}^{M-1} X(z^M W_M^l)^L = \sum_{l=0}^{M-1} X(z^M W_M^{Ll})$$

điều này có thể xảy ra nếu và chỉ nếu $W_M^l = W_M^{Ll}$ hoặc tập hợp M số hạng W_M^{Ll} trùng với tập hợp M số hạng W_M^l với $0 \leq l \leq M-1$.

- Trong trường hợp $l = M$ ta có:

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M/M} Y_{\uparrow \downarrow M/M}(z)$$

Vậy:

$$Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(zW_M^l) \quad (9.2.4.11)$$

và:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow \downarrow M/M} Y_{\uparrow \downarrow M/M}(z)$$

Vậy:

$$Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(zW_M^{Ml})$$

bởi vì: $W_M^{Ml} = W^l = e^{-j2\pi l} = 1$

do đó:

$$Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z) = X(z) \quad (9.2.4.12)$$

Ví dụ 9.2.4.2

Một tín hiệu $x(n)$ có biến đổi z như sau:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6}$$

$x(n)$ đi qua bộ biến đổi nhíp $\downarrow \uparrow 2/3$ và $\uparrow \downarrow 2/3$ hãy tìm $Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z)$ và $Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z)$ và so sánh kết quả.

Giải

Từ biểu thức của $X(z)$ ta tính $Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z)$ như sau:

$$Y_{\downarrow 2}(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3}$$

$$Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z) = 1 + 3z^{-3} + 5z^{-6} + 7z^{-9}$$

Bây giờ ta tính $Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z)$:

$$Y_{\uparrow 3}(z) = 1 + 2z^{-3} + 3z^{-6} + 4z^{-9} + 5z^{-12} + 6z^{-15} + 7z^{-18}$$

$$Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z) = 1 + 3z^{-3} + 5z^{-6} + 7z^{-9}$$

So sánh kết quả ta thấy rằng $Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z) = Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z)$

c) Biểu diễn phép biến đổi nhíp trong miền tần số

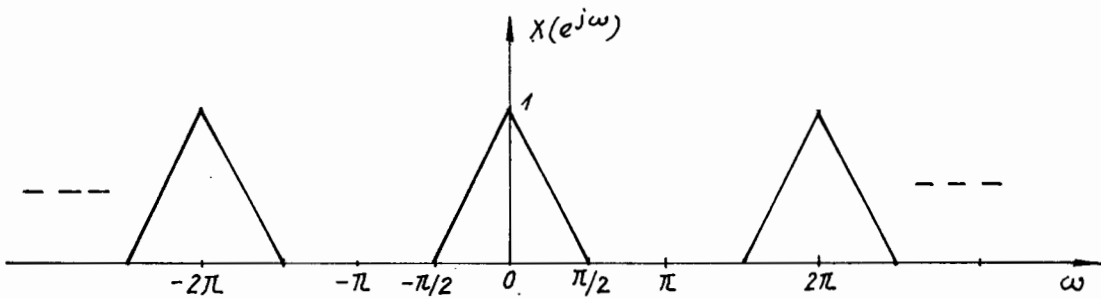
Đánh giá $X(z)$, $Y_{\downarrow \uparrow M/L}(z)$ và $Y_{\uparrow \downarrow M/L}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta có:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
 Y_{\downarrow M/L}(e^{j\omega}) &= Y_{\downarrow M/L}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left(e^{j\omega L - 2\pi l} \right)
 \end{aligned} \tag{9.2.4.13}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{\downarrow M/L}(e^{j\omega}) &= Y_{\downarrow M/L}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left(e^{j\omega L - 2\pi l} \right)
 \end{aligned} \tag{9.2.4.14}$$

Ví dụ 9.2.4.3

Cho tín hiệu $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ như trên hình 9.2.4.4 sau đây:



Hình 9.2.4.4.

Hãy tìm $Y_{\downarrow 2/3}(e^{j\omega})$ và $Y_{\downarrow 2/3}(e^{j\omega})$

Giải

Giải bằng đồ thị trên hình 9.2.4.5 sau đây:

Từ hình 9.2.4.5 ta thấy rằng $Y_{\downarrow 2/3}(e^{j\omega}) = Y_{\downarrow 2/3}(e^{j\omega})$.

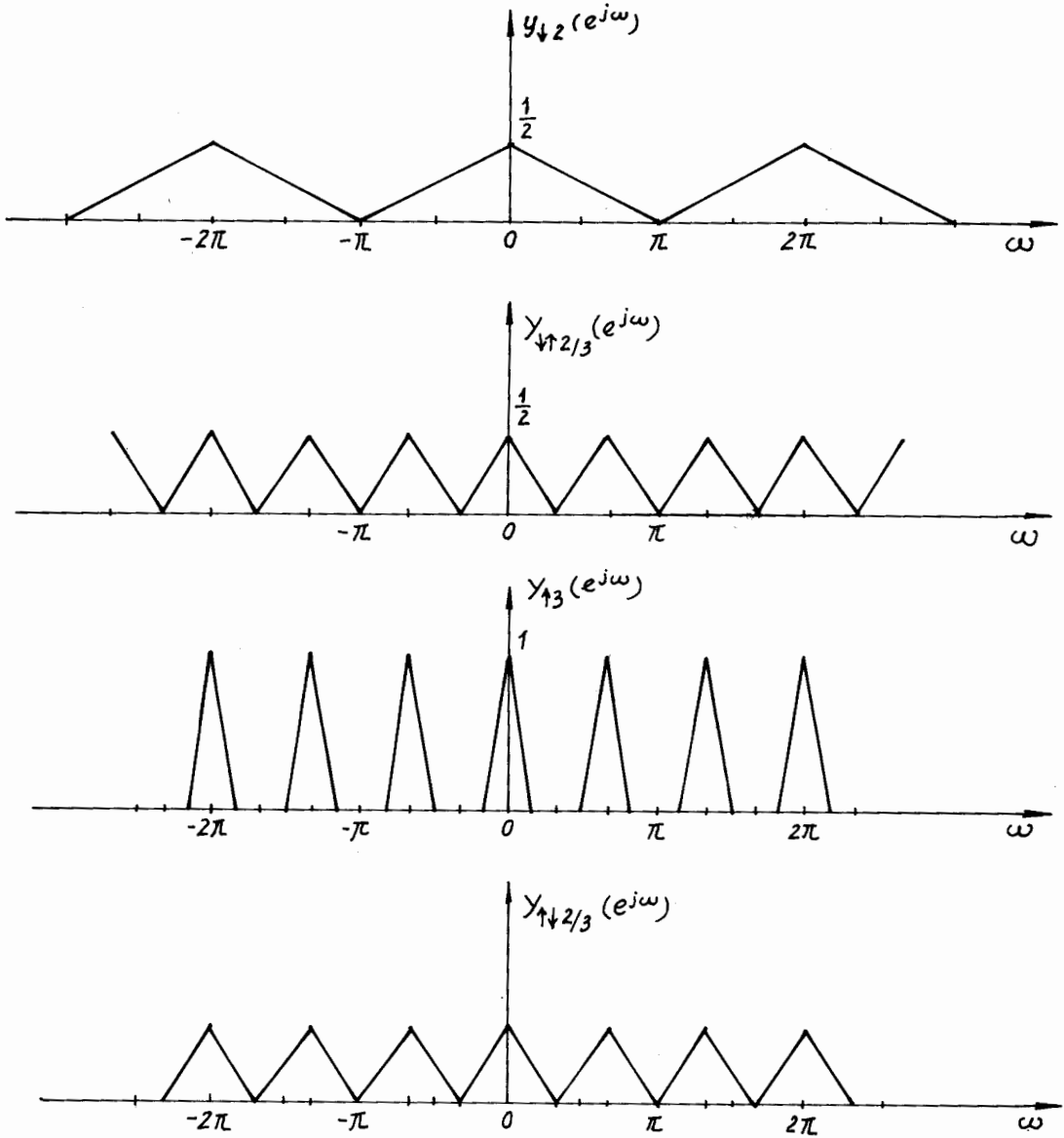
9.3. BỘ LỌC BIẾN ĐỔI NHỊP LẤY MẪU

9.3.1. BỘ LỌC PHÂN CHIA

a) Tổng quan

Ở phần trên ta đã nghiên cứu phép phân chia và bộ phân chia, kết quả cho thấy tín hiệu $x(n)$ khi đi qua bộ phân chia $\downarrow M$, trong miền tần số sẽ tạo ra $M - 1$ thành

phân hư danh (aliasing), các thành phần hư danh này sẽ gây hiện tượng chồng phổ. Nhưng nếu $x(n)$ có band tần nằm trong khoảng $-\frac{\pi}{M} < \omega < \frac{\pi}{M}$ tức là tần số giới hạn dải chặn (Stopband edge) $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ thì sẽ không gây hiện tượng chồng phổ.

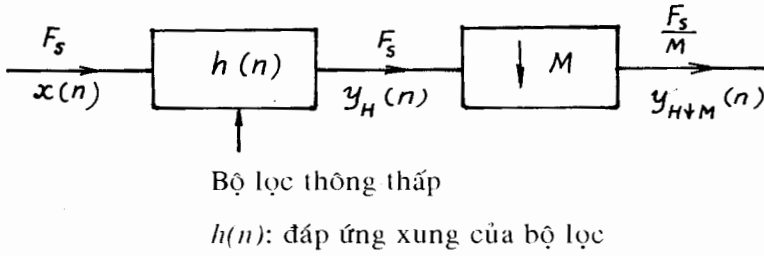


Hình 9.2.4.5.

Để làm điều này chúng ta có thể đặt trước bộ phân chia $\downarrow M$ một bộ lọc thông thấp (low pass filter) có $\omega_c = \frac{\pi}{M}$. Bộ lọc thông thấp này làm nhiệm vụ loại bỏ các

thành phần tần số $|\omega| > \frac{\pi}{M}$ chỉ giữ lại thành phần $|\omega| < \frac{\pi}{M}$ như vậy ta sẽ tránh được hiện tượng chồng phổ.

Sơ đồ tổng quát của bộ lọc phân chia cho trên hình 9.3.1.1



Hình 9.3.1.1

Để ngắn gọn ta có thể dùng cách biểu diễn toán tử như sau:

$$x(n) \xrightarrow{H \downarrow M} y_{H \downarrow M}(n) \quad (9.3.1.1)$$

$$x(n) \xrightarrow{H} y_H(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{H \downarrow M}(n) \quad (9.3.1.2)$$

b) Biểu diễn phép lọc phân chia trong miền biến số n

Các phép toán trong phép lọc phân chia xảy ra như sau trong miền biến số n

$$x(n) \xrightarrow{h(n)} y_H(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{H \downarrow M}(n) \quad (9.3.1.3)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} y_H(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ y_{H \downarrow M}(n) &= \downarrow M [x(n) * h(n)] = \downarrow M [y_H(n)] \end{aligned}$$

Cần lưu ý một điều là phép phân chia không có tính chất phân phối vào phép chập tức là:

$$\downarrow M [x(n) * h(n)] \neq \downarrow M [x(n)] * \downarrow M [h(n)],$$

bởi vì:

$$\begin{aligned} y_{H \downarrow M}(n) &= \downarrow M [x(n) * h(n)] = \downarrow M \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Mn-k) \\ \downarrow M [x(n)] * \downarrow M [h(n)] &= x(Mn) * h(Mn) \end{aligned} \quad (9.3.1.4)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(Mk)h(Mn - Mk)$$

Ví dụ 9.3.1.1

Cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \{1, 0,75, 0,5, 0,25\}$$

$$\downarrow 0$$

Hãy tìm $y_{H\downarrow 2}(n)$

Giải

$$x(n) = \{1, 1, 1\}$$

$$\downarrow 0$$

$$h(n) = \{1, 0,75, 0,5, 0,25\}$$

$$\downarrow 0$$

$$x(n) * h(n) = h(n) = \{1, 1,75, 2,25, 1,5, 0,75, 0,25\} = y_H(n)$$

$$\downarrow 0$$

$$\downarrow 2[y_H(n)] = y_{H\downarrow 2} = \{1, 2,55, 0,75, \}$$

$$\downarrow 0$$

Bây giờ ta thử tính $\downarrow 2[x(n)] * \downarrow 2[h(n)] = x_{\downarrow 2}(n) * h_{\downarrow 2}(n)$

$$x_{\downarrow 2}(n) = \{1, 1\}$$

$$\downarrow 0$$

$$h_{\downarrow 2}(n) = \{1, 0,5\}$$

$$\downarrow 0$$

$$x_{\downarrow 2}(n) * h_{\downarrow 2}(n) = \{1, 1,5, 0,5\}$$

$$\downarrow 0$$

Như vậy rõ ràng là:

$$\downarrow M [x(n) * h(n)] \neq \downarrow M [x(n)] * \downarrow M [h(n)]$$

c) Biểu diễn phép lọc phân chia trong miền z

Trong miền z phép lọc phân chia được mô tả như sau:

$$X(z) \xrightarrow{H(z)} Y_H(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H\downarrow M}(z) = \downarrow M[Y_H(z)] \quad (9.3.1.5)$$

ở đây:

$$X(z) = ZT[x(n)], Y_H(z) = ZT[y_H(n)]$$

$$H(z) = ZT[h(n)], Y_{H \downarrow M}(z) = ZT[Y_H(n)]$$

và:

$$Y_H(z) = X(z) \cdot H(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$\begin{aligned} Y_{H \downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(z^M W_M^l) \cdot \downarrow M[Y_H(z)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^M W_M^l) \cdot H(z^M W_M^l) \end{aligned} \quad (9.3.1.6)$$

Cũng như trong miền biến số n , ta lưu ý một điều là phép phân chia không có tính chất phân phối vào phép nhân trong miền z tức là:

$$\downarrow M[X(z) \cdot H(z)] \neq \downarrow M[X(z)] \cdot \downarrow M[H(z)]$$

Ví dụ 9.3.1.2

Cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \{1, 0,75, 0,5, 0,25\}$$

$$\downarrow_0$$

Hãy tìm $Y_{H \downarrow 2}(z)$.

Giải

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3}$$

$$X(z) \cdot H(z) = 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} +$$

$$+ z^{-1} + 0,75z^{-2} + 0,5z^{-3} + 0,25z^{-4} +$$

$$+ z^{-2} + 0,75z^{-3} + 0,5z^{-4} + 0,25z^{-5}$$

$$Y_H(z) = 1 + 1,75z^{-1} + 2,25z^{-2} + 1,5z^{-3} + 0,75z^{-4} + 0,25z^{-5}$$

$$\downarrow M[Y_H(z)] = Y_{H \downarrow 2}(z) = 1 + 2,25z^{-1} + 0,75z^{-2}$$

hoặc ta có thể tính theo công thức:

$$Y_{H \downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \left[X(z^{1/2})H(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})H(-z^{1/2}) \right]$$

Chú ý

- Xét phép lọc phân chia sau đây:

$$X(z) \xrightarrow{M(z^M)} Y_H(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H \downarrow M}(z) \quad (9.3.1.7)$$

ta có:

$$Y_H(z) = X(z) \cdot H(z^M)$$

$$\begin{aligned} Y_{H \downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \cdot H(z) \\ &= H(z) \cdot \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \end{aligned} \quad (9.3.1.8)$$

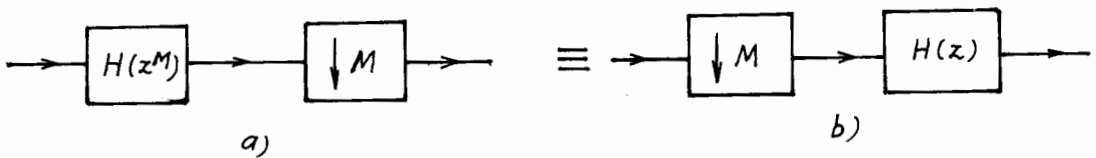
Bây giờ ta xét phép phân chia lọc sau đây:

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\downarrow MH}(z) \quad (9.3.1.9)$$

ta có:

$$\begin{aligned} Y_{\downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \\ Y_{\downarrow MH}(z) &= H(z) \cdot \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \end{aligned} \quad (9.3.1.10)$$

ta thấy rằng $Y_{H \downarrow M}(z) = Y_{\downarrow MH}(z)$ vậy hai phép này là tương đương nhau. Do đó hai sơ đồ thực hiện hai phép này là đồng nhất, xem hình 9.3.1.2.



Hình 9.3.1.2

- Sự đồng nhất hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 9.3.1.2 là rất có giá trị trong các ứng dụng thực tế để thực hiện các bộ lọc và các bank lọc.

- Để ngắn gọn ta ký hiệu phép lọc trên hình 9.3.1.2 (a) và (b) là $[H(z^M) \downarrow M]$ và $[\downarrow MH(z)]$. Vậy ta có thể viết:

$$H(z^M) \downarrow M \equiv \downarrow MH(z) \quad (9.3.1.11)$$

d) Biểu diễn phép lọc phân chia trong miền tần số

Đánh giá $X(z)$, $H(z)$, $Y_H(z)$ và $Y_{H \downarrow M}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta sẽ có cách biểu diễn phép lọc phân chia trong miền tần số như sau:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{jM\omega})} Y_H(e^{j\omega}) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H \downarrow M}(e^{j\omega}) \quad (9.3.1.12)$$

ở đây:

$$Y_H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} Y_{H \downarrow M}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}) \cdot H(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}) \end{aligned} \quad (9.3.1.13)$$

Nếu $Y_H(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng có $\omega_c = \frac{\pi}{M}$, thì các thành phần hư danh sẽ không gây hư thông tin, tức là không có hiện tượng chồng phổ. Do đó ta có thể tách riêng thành phần đầu tiên ($l = 0$) ra mà dạng của nó sẽ không bị méo:

$$Y_{H \downarrow M}(e^{j\omega}) \Big|_{l=0} = \frac{1}{M} X(e^{j\frac{\omega}{M}}) \cdot H(e^{j\frac{\omega}{M}}) \quad |\omega| \leq \pi$$

Và nếu $H(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp lý tưởng tức là ở dải thông $|H(e^{j\omega})| = 1$, dải chắn $|H(e^{j\omega})| = 0$ thì ta có thành phần đầu tiên ($l = 0$) như sau:

$$Y_{H \downarrow M}(e^{j\omega}) \Big|_{l=0} = \frac{1}{M} X(e^{j\frac{\omega}{M}}) \quad |\omega| \leq \pi$$

Ví dụ 9.3.1.3

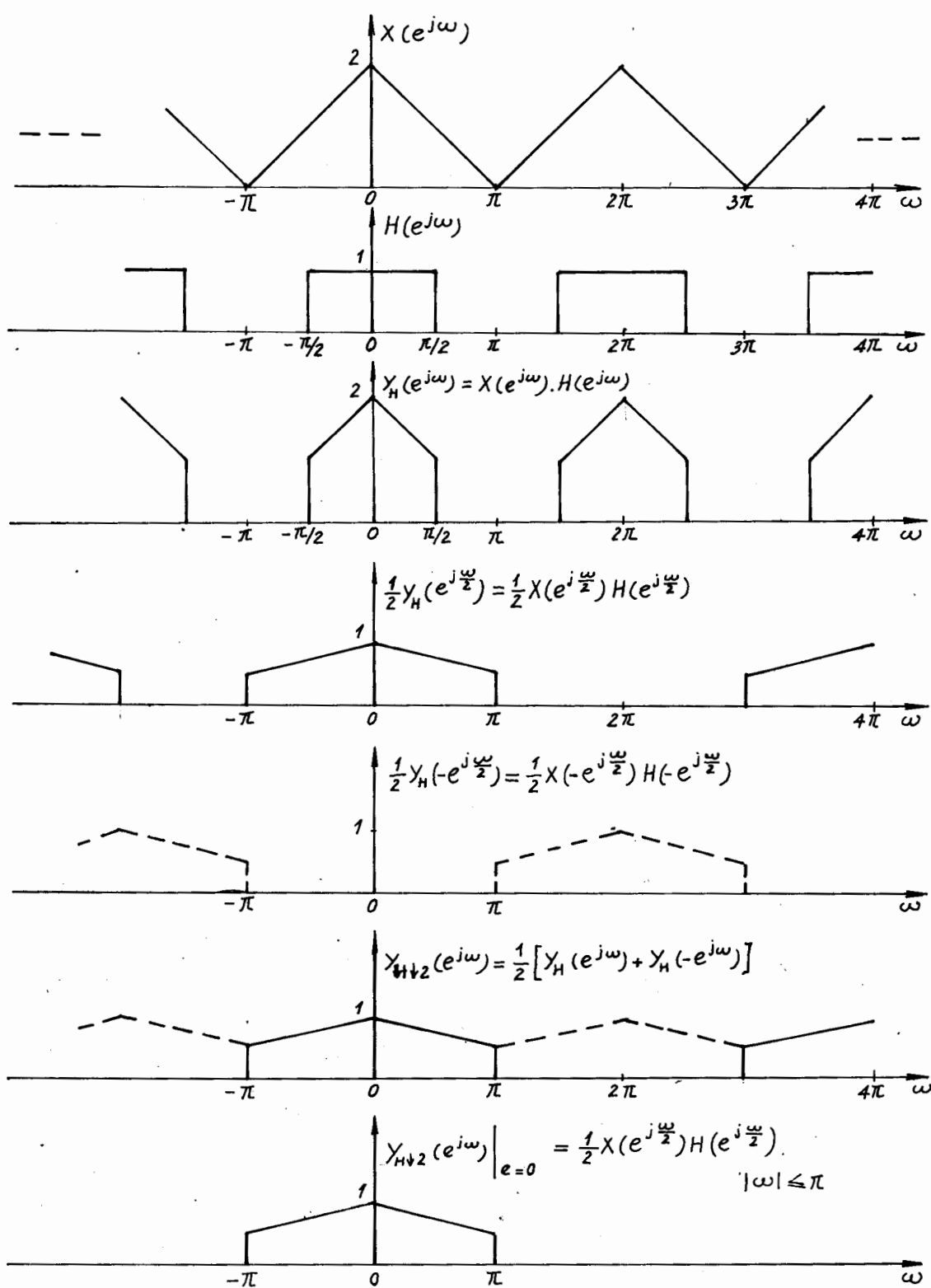
Cho tín hiệu $x(n)$, mà phổ của nó $X(e^{j\omega})$ có bề rộng $-\pi \leq \omega \leq \pi$, $x(n)$ đi qua bộ lọc thông thấp lý tưởng $H(e^{j\omega})$ có $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, sau đó qua bộ phân chia có $\downarrow M = 2$. Hãy tìm $Y_{H \downarrow 2}(e^{j\omega})$.

Giải

$$Y_H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} Y_{H \downarrow 2}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} \left[Y_H(e^{j\frac{\omega}{2}}) + Y_H(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) H(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}) H(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}) \right] \end{aligned}$$

Kết quả được giải thích trên hình 9.3.1.3.



Hình 9.3.1.3

Chú ý

Trong ví dụ ở trên bộ phân chia $\downarrow M = 2$ đã không gây hiện tượng chồng phổ, bởi vì tần số ω_s của bộ lọc thông thấp bằng $\frac{\pi}{2}$, nó đã cắt bỏ đi thành phần tần số cao $|\omega| > \frac{\pi}{2}$. Vậy nếu thông tin của chúng ta chỉ chứa trong thành phần phổ $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ thì bộ lọc sẽ không làm mất thông tin. Còn nếu thông tin của chúng ta có chứa cả trong các thành phần phổ có $|\omega| > \frac{\pi}{2}$ thì việc cắt bỏ thành phần tần số cao đã làm mất thông tin của chúng ta.

e) Tính chất của phép lọc phân chia

Nếu

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

thì

$$\begin{aligned} Y_H(z) &= Y(z) [H_1(z) + H_2(z)] \\ &= X(z)H_1(z) + X(z)H_2(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{H\downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) = \downarrow M[Y_H(z)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \left[X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) H_1(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) + X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) H_2(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \right] \\ &= \downarrow M[X(z)H_1(z)] + \downarrow M[X(z)H_2(z)] \end{aligned} \quad (9.3.1.14)$$

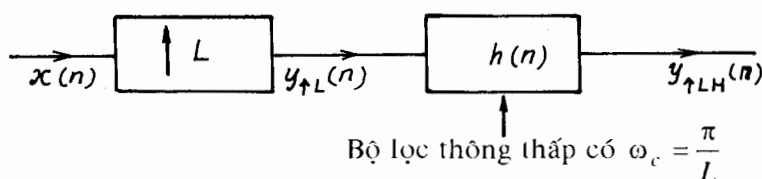
Vậy phép phân chia có tính phân phối vào phép cộng.

9.3.2. BỘ LỌC NỘI SUY

a) Tổng quan

Chúng ta đã nghiên cứu phép nội suy và bộ nội suy, kết quả phép nội suy đã chèn thêm $L - 1$ mẫu biên độ 0 vào giữa hai mẫu của tín hiệu vào $x(n)$ trong miền biến số n . Và tương ứng trong miền tần số sẽ tạo ra $L - 1$ ảnh phụ của phổ cơ bản sau khi đã co hẹp lại L lần để nhường chỗ cho $L - 1$ ảnh phụ mà không gây hiện tượng chồng phổ. Như vậy phép nội suy $\uparrow L$ không làm hư thông tin. Nhưng để nội suy ra các mẫu có biên độ 0 ta phải đặt sau bộ nội suy một bộ lọc có $\omega_c = \frac{\pi}{L}$. Trong miền biến số n bộ lọc này làm nhiệm vụ nội suy ra các mẫu biên độ 0, còn trong miền tần số nó làm nhiệm vụ loại bỏ các ảnh phụ của phổ cơ bản.

Sơ đồ tổng quát của bộ lọc nội suy cho trên hình 9.3.2.1.



$h(n)$: đáp ứng xung của bộ lọc.

Hình 9.3.2.1.

Chúng ta có thể dùng cách biểu diễn toán tử sau đây để biểu diễn một cách ngắn gọn phép lọc nội suy.

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow LH} y_{\uparrow LH}(n) \quad (9.3.2.1)$$

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{\uparrow H} y_{\uparrow LH}(n) \quad (9.3.2.2)$$

b) Biểu diễn phép lọc nội suy trong miền biến số n

Quá trình lọc nội suy được biểu diễn trong miền biến số n như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{h(n)} y_{\uparrow LH}(n) \quad (9.3.2.3)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} y_{\uparrow L}(n) &= \uparrow L[x(n)] \\ &= \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\uparrow LH}(n) &= y_{\uparrow L}(n) * h(n) = h(n) * y_{\uparrow L}(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(k) h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{L}\right) h(n-k) \quad k = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \end{aligned}$$

đổi biến số: $r = \frac{k}{L}$, vậy $k = rL$

ta có:

$$y_{\uparrow LH}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(r) h(n - rL) \quad (9.3.2.4)$$

Ví dụ 9.3.2.1

Cho: $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

Hãy tìm $y_{\uparrow 2H}(n)$.

Giải

$$x(n) = \{1, 1, 1\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$y_{\uparrow 2}(k) = \{1, 0, 1, 0, 1\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$h(-k) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$y_{\uparrow 2H}(n) = y_{\uparrow 2}(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow 2}(k) h(n-k)$$

$$= \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{4}, 1, \frac{6}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

c) Biểu diễn phép lọc nội suy trong miền z

Chúng ta mô tả phép lọc nội suy trong miền z bằng cách sau đây:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z) \quad (9.3.2.5)$$

ở đây:

$$X(z) = ZT[x(n)]; \quad Y_{\uparrow L}(z) = ZT[y_{\uparrow L}(n)]$$

$$X(z) = ZT[h(n)]; \quad Y_{\uparrow LH}(z) = ZT[y_{\uparrow LH}(n)]$$

Ta đã có:

$$Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L); \quad Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{\uparrow L}(z) \cdot H(z)$$

vậy:

$$Y_{\uparrow LH}(z) = X(z^L) \cdot H(z) \quad (9.3.2.6)$$

Ví dụ 9.3.2.2

Cho

$$x(n) = \text{rect}_3(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $y_{\uparrow 2H}(z)$.

Giải

$$X(z^2) = 1 + z^{-2} + z^{-4} = Y_{\uparrow 2}(z)$$

$$H(z) = 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3}$$

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow 2}(z)H(z) &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} + \\ &\quad + z^{-2} + 0,75z^{-3} + 0,5z^{-4} + 0,25z^{-5} + \\ &\quad + z^{-4} + 0,75z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \end{aligned}$$

$$Y_{\uparrow 2H}(z) = 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 1z^{-3} + 1,5z^{-4} + 1z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7}$$

Chú ý

- Xét phép lọc nội suy sau:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z^L)} Y_{\uparrow LH}(z) \quad (9.3.2.7)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow LH}(z) &= Y_{\uparrow L}(z).H(z^L) \\ &= X(z^L).H(z^L) \end{aligned} \quad (9.3.2.8)$$

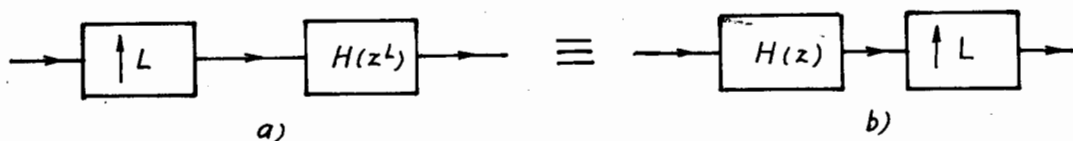
- Bây giờ ta xét phép lọc nội suy sau:

$$X(z) \xrightarrow{H(z)} Y_H(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{L\uparrow H}(z) \quad (9.3.2.9)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} Y_H(z) &= X(z).H(z) = H(z).X(z) \\ Y_{L\uparrow H}(z) &= Y_H(z^L) \\ &= X(z^L).H(z^L) \end{aligned} \quad (9.3.2.10)$$

Ta thấy rằng $Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{L\uparrow H}(z)$. Vậy hai phép lọc nội suy này là tương đương, do đó sơ đồ thực hiện hai phép này cũng tương đương nhau, ta muốn dùng sơ đồ nào cũng được, xem hình 9.3.2.2.



Hình 9.3.2.2.

- Cũng giống như trong phân lọc phân chia, sự tương đương giữa hai sơ đồ này rất quan trọng trong các ứng dụng thực tế để xây dựng các bộ lọc cũng như các bank lọc.

Để ngắn gọn ta ký hiệu phép lọc trên hình 9.3.2.2 (a) và (b) là $\uparrow LH(z^L)$ và $H(z)\uparrow L$, vậy ta có thể viết:

$$\uparrow LH(z^L) \equiv H(z)\uparrow L \quad (9.3.2.11)$$

d) Biểu diễn phép nội suy trong miền tần số

Đánh giá $X(z)$, $H(z)$, $Y_{\uparrow L}(z)$ và $Y_{\uparrow LH}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z (tức là thay $z = e^{j\omega}$) ta có biểu diễn phép lọc nội suy trong miền tần số như sau;

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{j\omega})} Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) \quad (9.3.2.12)$$

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (9.3.2.13)$$

Ví dụ 9.3.2.3

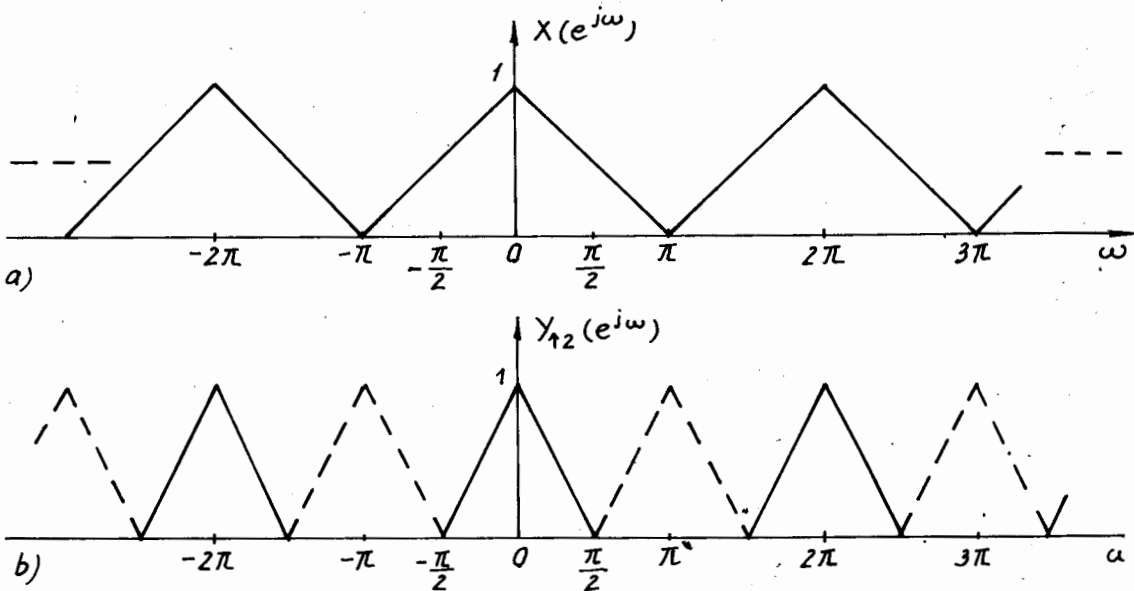
Cho tín hiệu $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$, bề rộng phổ là $-\pi \leq \omega \leq \pi$ (xem hình 9.3.2.3a), $x(n)$ đi qua bộ nội suy $\uparrow L = 2$, sau đó đi qua bộ lọc thông thấp có $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Hãy tính $Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega})$.

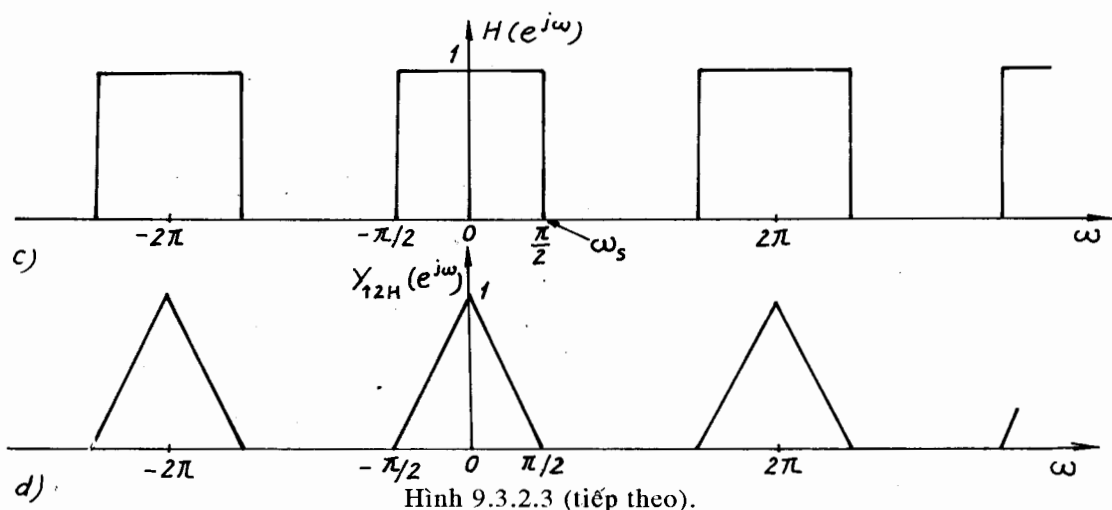
Giải

$$Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}); \quad Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

Cụ thể giải bằng đồ thị cho trên hình 9.3.2.3.



Hình 9.3.2.3.



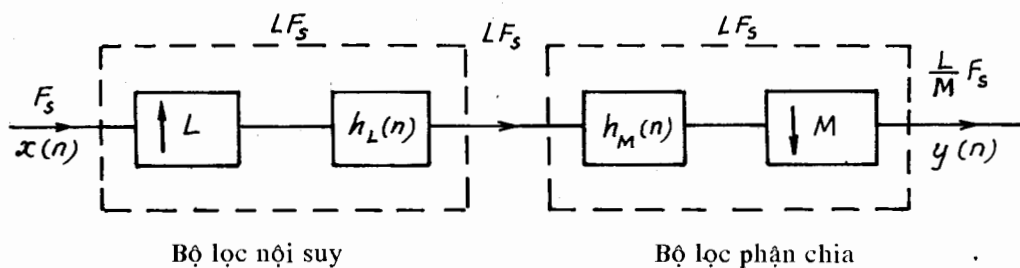
Hình 9.3.2.3 (tiếp theo).

9.3.3. BỘ LỌC BIẾN ĐỔI NHỊP LẤY MẪU VỚI HỆ SỐ M/L KHÔNG NGUYÊN

a) Tổng quan

Chúng ta đã nghiên cứu bộ lọc phân chia và bộ lọc nội suy và chúng ta đã nghiên cứu bộ biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số M/L . Từ đây chúng ta có thể xây dựng bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số không nguyên M/L . Bộ lọc biến đổi nhịp này có thể đảm bảo biến đổi nhịp theo hệ số không nguyên M/L nhưng không gây hiện tượng chồng phổ tức là không làm hư thông tin của chúng ta.

Bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L được xây dựng bằng cách ghép nối tiếp hai bộ lọc nội suy và bộ lọc phân chia như trên hình 9.3.3.1.



Hình 9.3.3.1.

Do cách ghép nối tiếp bộ lọc nội suy trước bộ lọc phân chia như hình 9.3.3.1 cho ta thấy rằng bộ lọc $h_L(n)$ được ghép nối tiếp với bộ lọc $h_M(n)$, vậy ta có thể kết hợp hai bộ lọc này làm một bộ lọc chung có đáp ứng xung $h(n)$. Bộ lọc $h(n)$ này phải làm cả hai nhiệm vụ đối với phép nội suy và phép phân chia, do đó ta phải chọn bộ lọc $h(n)$ sao cho cùng một lúc nó thực hiện được cả hai nhiệm vụ này.

Hai bộ lọc này ghép nối tiếp vì vậy đáp ứng tần số $H(e^{j\omega}) = FT[h(n)]$ sẽ là:

$$H(e^{j\omega}) = H_L(e^{j\omega}) \cdot H_M(e^{j\omega}) \quad (9.3.3.1)$$

ở đây:

$$H_L(e^{j\omega}) = FT[h_L(n)] \text{ và } H_M(e^{j\omega}) = FT[h_M(n)]$$

Vậy ta cũng có:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_L(e^{j\omega})| |H_M(e^{j\omega})| \quad (9.3.3.2)$$

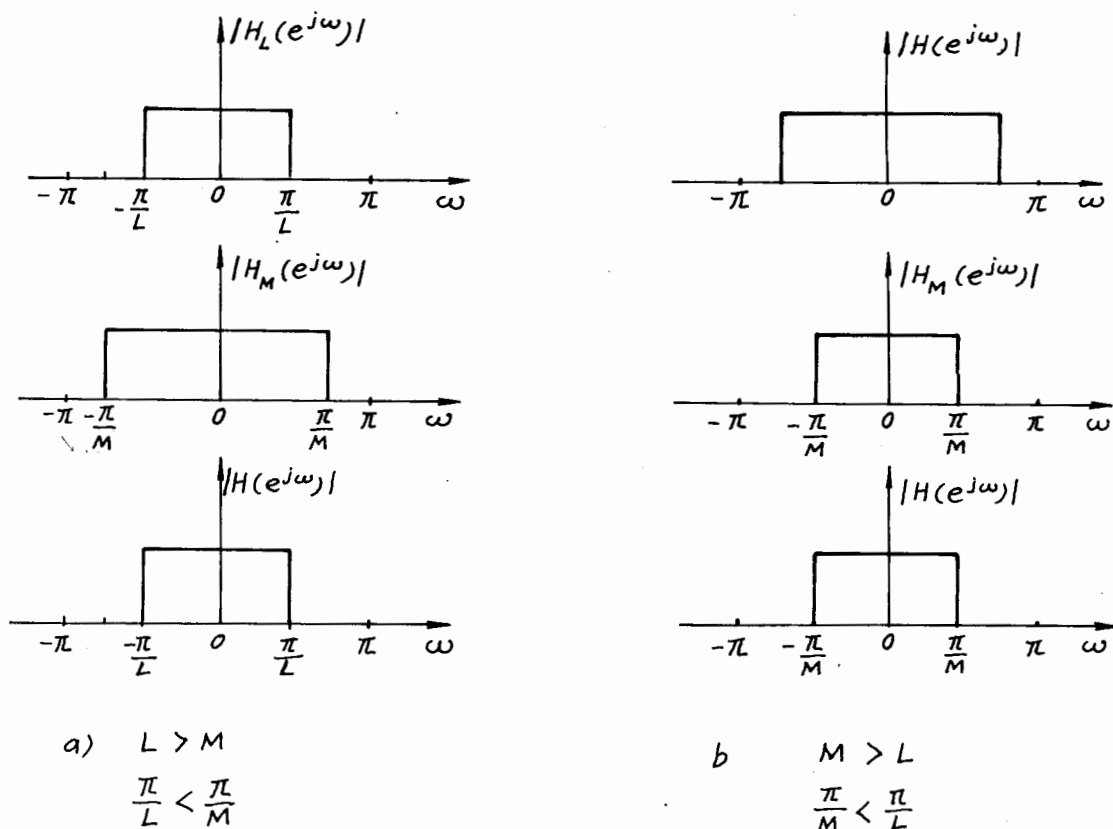
Ta biết rằng $H_L(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp (giả sử là lý tưởng) có $\omega_c = \frac{\pi}{L}$, còn $H_M(e^{j\omega})$ cũng là bộ lọc thông thấp (giả sử là lý tưởng) có $\omega_c = \frac{\pi}{M}$, vậy $H(e^{j\omega})$ cần được chọn như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right) \\ 0 & \text{ω còn lại} \end{cases} \quad (9.3.3.3)$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

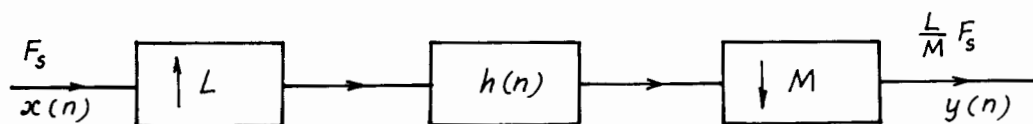
ở đây C là hằng số.

Hình 9.3.3.2 minh hoạ cách chọn ω_c của $H(e^{j\omega})$.



Hình 9.3.3.2.

Kết quả cho ta bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L với chỉ một bộ lọc thông thấp có đáp ứng xung $h(n)$ và đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$. Hình 9.3.3.3 cho ta sơ đồ khối của bộ lọc nhịp này.



Hình 9.3.3.3

Để ngắn gọn chúng ta có thể dùng cách biểu diễn toán tử như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{h(n)} y_{\uparrow LH}(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) \quad (9.3.3.4)$$

hoặc ngắn gọn hơn:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow H \downarrow M/L} y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) \quad (9.3.3.5)$$

b) Biểu diễn phép lọc biến đổi nhịp trong miền biến số n

Trong miền biến số n , các phép toán của phép lọc biến đổi nhịp được mô tả như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{h(n)} y_{\uparrow LH}(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) \quad (9.3.3.6)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} y_{\uparrow L}(n) &= \uparrow L[x(n)] \\ &= \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} y_{\uparrow LH}(n) &= y_{\uparrow L}(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(k) h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-kL) \\ y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) &= \downarrow M[y_{\uparrow LH}(n) * h(n)] \\ &= \downarrow M \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-kL) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(nM - kL) \end{aligned} \quad (9.3.3.7)$$

Ví dụ 9.3.3.1

Cho

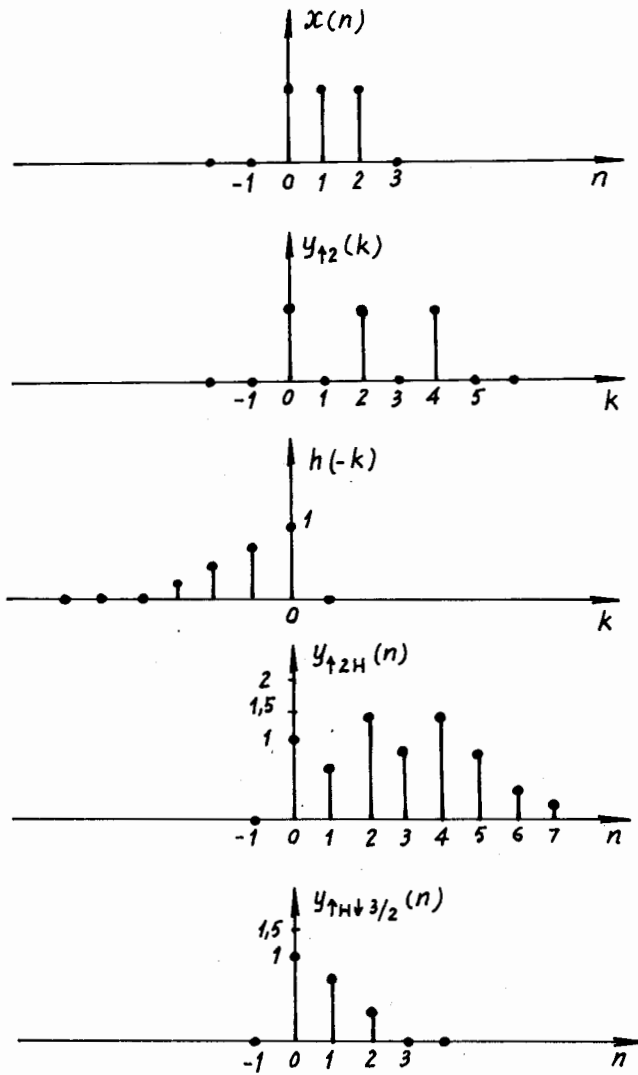
$$x(n) = \text{rect}_3(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$$

Hãy tìm $y_{\uparrow H \downarrow 3/2}(n)$.

Giải

Giải bằng đồ thị cho trên hình 9.3.3.4.



Hình 9.3.3.4.

c) Biểu diễn phép lọc biến đổi nhíp trong miền z

Trong miền z , phép lọc biến đổi nhíp được mô tả như sau:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\uparrow H \downarrow M/L}(z) \quad (9.3.3.8)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)] & H(z) &= ZT[h(n)] \\ Y_{\uparrow LH}(z) &= ZT[y_{\uparrow L}(n)] & Y_{\uparrow LH}(z) &= ZT[y_{\uparrow LH}(n)] \\ Y_{\uparrow H \downarrow M/L}(z) &= ZT[y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n)] \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow L}(z) &= X(z^L) \\ Y_{\uparrow LH}(z) &= X(z^L).H(z) \\ Y_{\uparrow H \downarrow M/L}(z) &= \downarrow M[X(z^L).H(z)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow LH}(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X[(z^{\frac{1}{M}} W_M^l)^L].H(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{L}{M}} W_M^L).H(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \end{aligned} \quad (9.3.3.9)$$

Ví dụ 9.3.3.2

Cho

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ H(z) &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} \end{aligned}$$

Hãy tìm $Y_{\uparrow H \downarrow 3/2}(z)$.

Giải

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow 2}(z) &= X(z^2) = 1 + z^{-2} + z^{-4} \\ Y_{\uparrow 2H}(z) &= X(z^2).H(z) = (1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3})(1 + z^{-2} + z^{-4}) \\ &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} + \\ &\quad + z^{-2} + 0,75z^{-3} + 0,5z^{-4} + 0,25z^{-5} + \\ &\quad + z^{-4} + 0,75z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \\ &= 1 + 0,75z^{-1} + 1,5z^{-2} + z^{-3} + 1,5z^{-4} + z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \\ Y_{\uparrow H \downarrow 3/2}(z) &= \downarrow 3[Y_{\uparrow 2H}(z)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 Y_{\uparrow 2H}(z^{\frac{1}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}l})$$

$$= 1 + z^{-1} + 0,5z^{-2}$$

d) Biểu diễn phép lọc biến đổi nháp trong miền tần số

Đánh giá $X(z)$, $H(z)$, $Y_{\uparrow LH}(z)$ và $Y_{\uparrow H\downarrow M/L}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta sẽ có biểu diễn phép lọc biến đổi nháp trong miền tần số như sau:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{j\omega})} Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\uparrow H\downarrow M/L}(e^{j\omega}) \quad (9.3.3.10)$$

Ta có:

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$Y_{\uparrow H\downarrow M/L}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow LH}(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}})$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega L-2\pi Ll}{M}}) \cdot H(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}) \quad (9.3.3.11)$$

Ví dụ 9.3.3.3

Cho tín hiệu $x(n)$ có $X(e^{j\omega})$ cho trên hình 9.3.3.5 (a). Hãy tìm cách giảm nháp lấy mẫu đi 3/2 lần, tức là nén tín hiệu $x(n)$ lại 3/2 lần nhưng không được làm mất thông tin chứa trong $x(n)$

Giải

Vì phổ $X(e^{j\omega})$ có bề rộng $-\frac{2\pi}{3} < \omega < \frac{2\pi}{3}$ vậy ta có thể dùng bộ lọc biến đổi nháp

$\uparrow H\downarrow 3/2$, $M = 3$, $L = 2$, ta chọn tần số cắt ω_c của bộ lọc $H(e^{j\omega})$ là $\frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{3}$ có như vậy sẽ không làm mất thông tin của $x(n)$. Hình 9.3.3.5 sẽ minh hoạ cho ta rõ.

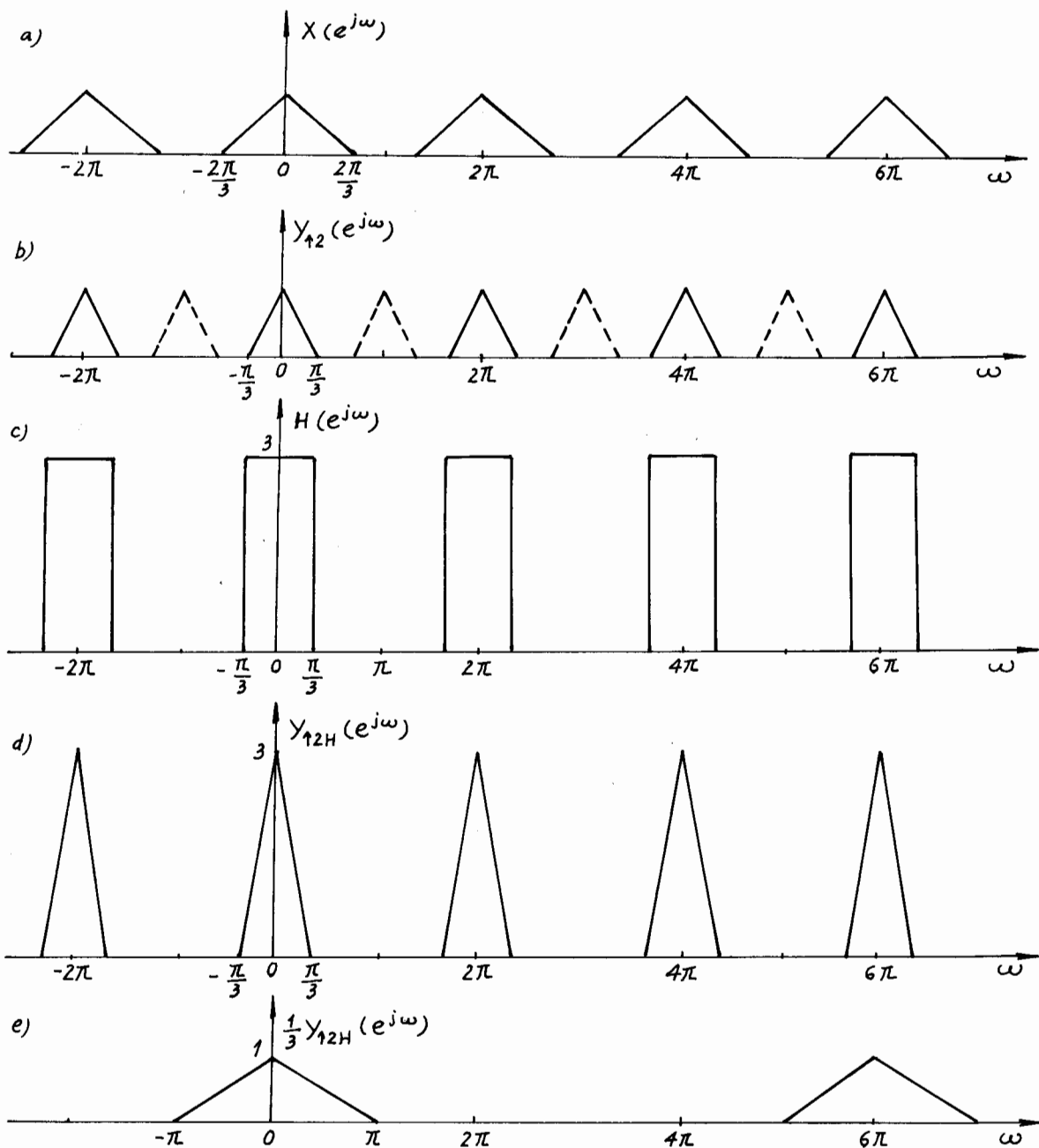
$$Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 3 & 0 \leq |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

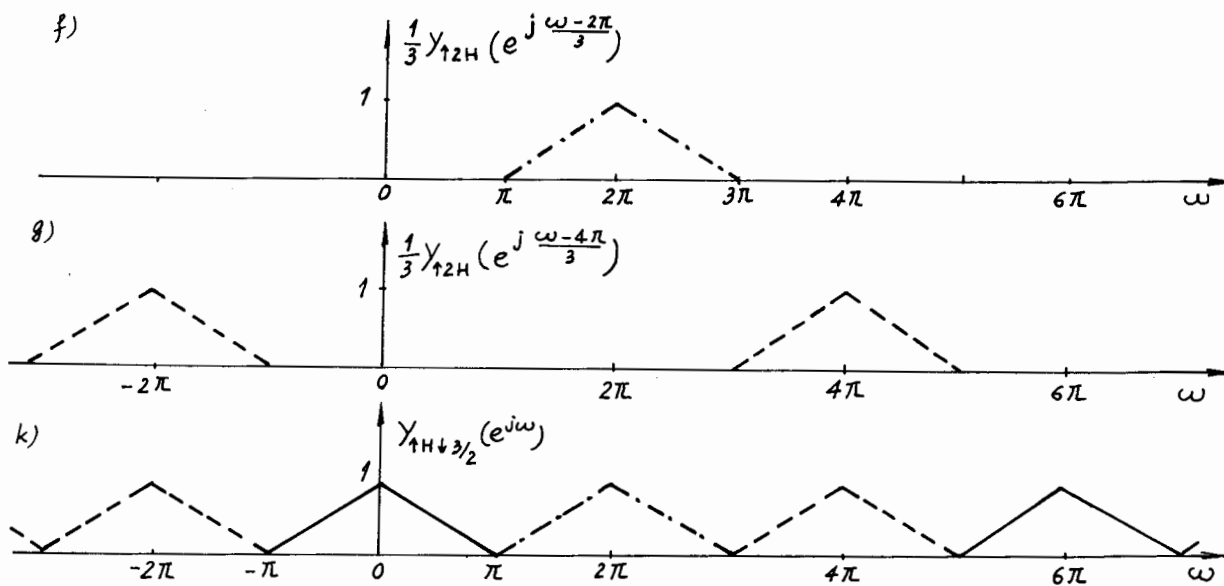
$$Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$= \begin{cases} 3X(e^{j2\omega}) & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{H,3/2}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 Y_{\uparrow 2H}(e^{j(\omega-2\pi l/3)}) \\
 &= \frac{1}{3} Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega/3}) + \frac{1}{3} Y_{\uparrow 2H}(e^{j(\omega-2\pi)/3}) + \frac{1}{3} Y_{\uparrow 2H}(e^{j(\omega-4\pi)/3})
 \end{aligned}$$



Hình 9.3.3.5.



Hình 9.3.3.5 (tiếp theo).

9.4. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA (POLYPHASE DECOMPOSITION)

9.4.1. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA HAI THÀNH PHẦN

a) Phân hoạch hàm truyền đạt $H(z)$

Ta biết một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là:

$$h(n) \quad n = -\infty, \dots, +\infty$$

và có hàm truyền đạt là $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

Bây giờ ta phân dãy $h(n)$ làm hai phần ứng với n chẵn và n lẻ, vậy ta có:

$$h(n) \rightarrow h(2r) \quad \text{và} \quad h(2r+1)$$

Vậy:

$$H(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r)z^{-2r} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r+1)z^{-(2r+1)}$$

$$H(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r)z^{-2r} + z^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r+1)z^{-2r}$$

gọi $e_0(r) = h(2r)$ và $e_1(r) = h(2r+1)$

và đặt:

$$\begin{aligned}\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r)z^{-2r} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r)z^{-2r} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r)(z^2)^{-r} = E_0(z^2) \\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r+1)z^{-2r} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_1(r)z^{-2r} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_1(r)(z^2)^{-r} = E_1(z^2)\end{aligned}$$

Cuối cùng ta có:

$$\begin{aligned}H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \\ &= \sum_{m=0}^{2-1} z^{-m} E_m(z^2)\end{aligned}\tag{9.4.1.1}$$

Việc biểu diễn $H(z)$ dưới dạng (9.4.1.1) này gọi là phân hoạch nhiều pha hai thành phần của $H(z)$. Hay nói cách khác, chúng ta đã biểu diễn $H(z)$ ở dạng nhiều pha hai thành phần.

$E_0(z^2)$ và $E_1(z^2)$ được gọi là các thành phần nhiều pha của $H(z)$ và ta cũng có:

$$\begin{aligned}E_0(z) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r)z^{-r} \\ E_1(z) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_1(r)z^{-r}\end{aligned}$$

$E_0(z)$ và $E_1(z)$ cũng được gọi là các thành phần nhiều pha của $H(z)$.

Một tính chất quan trọng của phân hoạch nhiều pha hai thành phần đó là:

$$\begin{aligned}H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \\ H(-z) &= E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2)\end{aligned}$$

Vậy:

$$H(z) + H(-z) = 2E_0(z^2)\tag{9.4.1.2}$$

hay:

$$\begin{aligned}E_0(z^2) &= \frac{1}{2} [H(z) + H(-z)] \\ E_0(z) &= \frac{1}{2} [H(z^{\frac{1}{2}}) + H(-z^{\frac{1}{2}})]\end{aligned}$$

$$E_1(z^2) = \frac{1}{2} z [H(z) - H(-z)]$$

$$E_1(z) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} [H(z^{\frac{1}{2}}) - H(-z^{\frac{1}{2}})]$$

Ví dụ 9.4.1.1

Cho bộ lọc số IIR có đáp ứng xung như sau:

$$h(n) = a^n u(n)$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha hai thành phần của $H(z)$.

Giải

Ta phân $h(n)$ thành hai thành phần ứng với n chẵn và n lẻ, sau đó lấy biến đổi z ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} h(2r)z^{-2r} + \sum_{r=0}^{\infty} h(2r+1)z^{-(2r+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r} z^{-2r} + \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r+1} z^{-(2r+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (a^2 z^{-2})^r + az^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} (a^2 z^{-2})^r \\ &= \frac{1}{1-a^2 z^{-2}} + \frac{az^{-1}}{1-a^2 z^{-2}} \\ H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2) \end{aligned}$$

Vậy:

$$E_0(z^2) = \frac{1}{1-a^2 z^{-2}} \quad \text{và} \quad E_1(z^2) = \frac{a}{1-a^2 z^{-2}}$$

Từ đây ta có:

$$E_0(z) = \frac{1}{1-a^2 z^{-1}} \quad \text{và} \quad E_1(z) = \frac{a}{1-a^2 z^{-1}}$$

Ví dụ 9.4.1.2

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có đáp ứng xung như sau:

$$h(n) = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha hai thành phần của $H(z)$.

Giải

Phân $h(n)$ thành hai thành phần ứng với n chẵn và n lẻ và lấy biến đổi Z ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} \\ &= 1 + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6} + z^{-1}(2 + 4z^{-2} + 2z^{-4}) \\ &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \end{aligned}$$

ở đây:

$$E_0(z^2) = 1 + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6}$$

$$E_1(z^2) = 2 + 4z^{-2} + 2z^{-4}$$

Vậy ta cũng có:

$$E_0(z) = 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}$$

$$E_1(z) = 2 + 4z^{-1} + 2z^{-2}$$

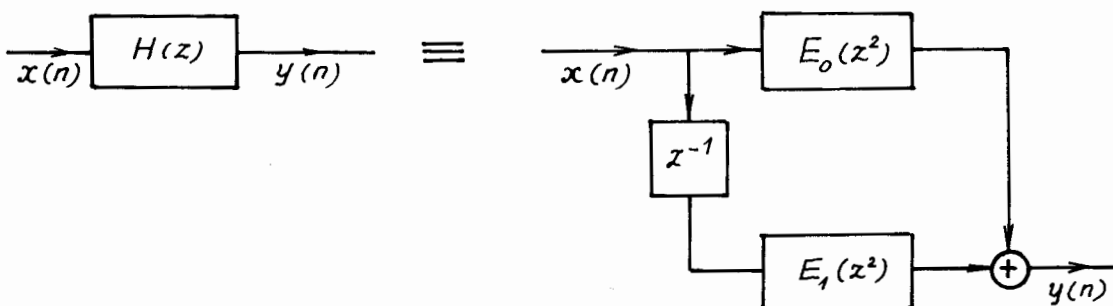
b) Cấu trúc nhiều pha hai thành phần

Định nghĩa: Cấu trúc thực hiện biểu thức của $H(z)$ dưới dạng phân hoạch nhiều pha được gọi là cấu trúc nhiều pha của hệ thống số.

Ta đã có dạng nhiều pha hai thành phần của $H(z)$ như sau:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

Từ đây ta có thể vẽ sơ đồ cấu trúc nhiều pha tổng quát như trên hình 9.4.1.1.



Hình 9.4.1.1

Ví dụ 9.4.1.3

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có hàm truyền đạt $H(z)$ ở dạng phân hoạch nhiều pha hai thành phần sau:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

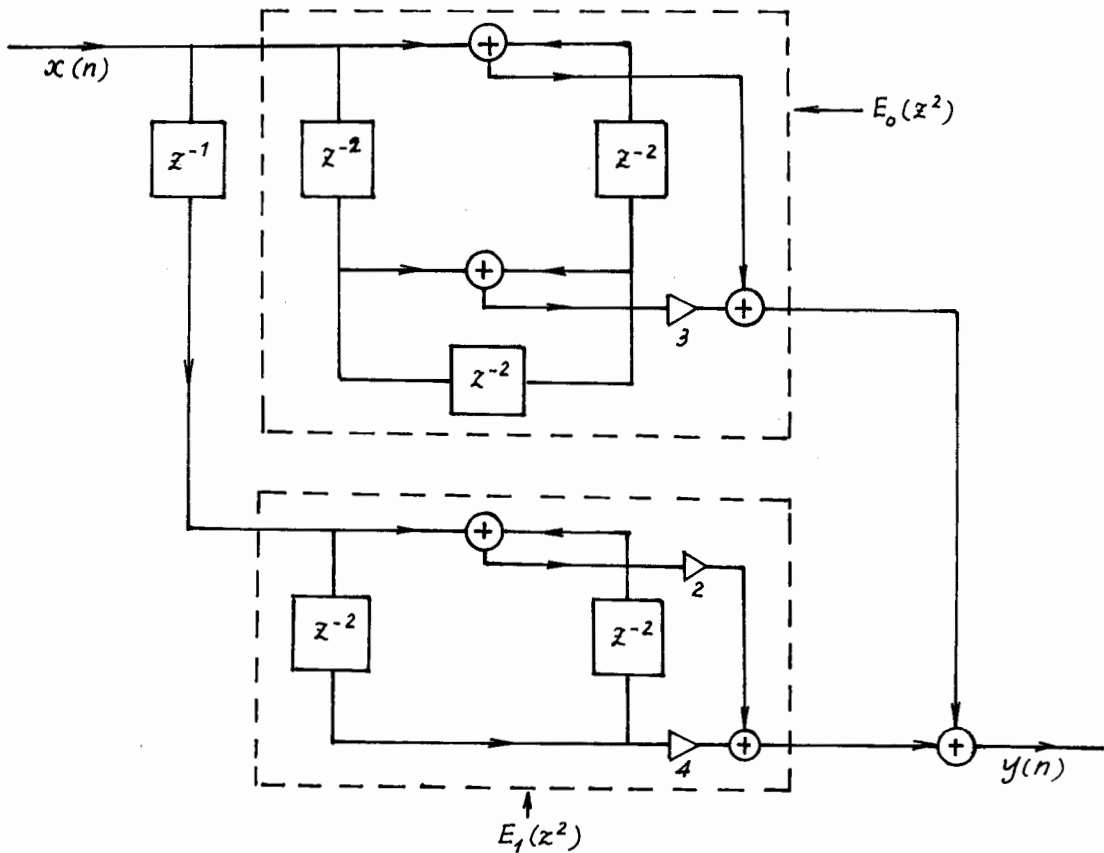
$$E_0(z^2) = 1 + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6}$$

$$E_1(z^2) = 2 + 4z^{-2} + 2z^{-4}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha của $H(z)$.

Giải

Vì là pha tuyến tính nên $e_0(r)$ và $e_1(r)$ là đối xứng, cấu trúc nhiều pha của $H(z)$ pha tuyến tính được cho bởi hình 9.4.1.2.



Hình 9.4.1.2.

9.4.2. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA M THÀNH PHẦN

a) Phân hoạch hàm truyền đạt $H(z)$

Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát tức là biểu diễn $H(z)$ ở dạng nhiều pha M thành phần.

Tương tự như trên ta cũng có thể phân $h(n)$ thành M thành phần như sau ...

$$h(n) \rightarrow h(Mr), h(Mr + 1), \dots, h[Mr + (M - 1)]$$

Vậy hàm truyền đạt $H(z)$ sẽ có dạng sau:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr)z^{-Mr} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr+1)z^{-(Mr+1)} + \dots + \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[Mr+M-1]z^{-[Mr+(M-1)]} \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr+m)z^{-(Mr+m)}
 \end{aligned}$$

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr+m)z^{-Mr}$$

Đặt:

$$e_m(r) = h(Mr + m) \quad 0 \leq m \leq M - 1$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_m(r)(z^M)^{-r} \\
 H(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M) \quad (9.4.2.1)
 \end{aligned}$$

ở đây:

$$E_m(z^M) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_m(r)(z^M)^{-r} \quad 0 \leq m \leq M - 1 \quad (9.4.2.2)$$

$E_m(z^M)$ được gọi là các thành phần nhiều pha của $H(z)$. Ta cũng rút ra được biểu thức sau:

$$E_m(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_m(r)z^{-r} \quad 0 \leq m \leq M - 1 \quad (9.4.2.3)$$

Việc biểu diễn $H(z)$ dưới dạng (9.4.2.3), gọi là phân hoạch nhiều pha M thành phần của $H(z)$.

Ví dụ 9.4.2.1

Cho bộ lọc số IIR có đáp ứng xung như sau:

$$h(n) = a^n u(n)$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha $M = 3$ thành phần của $H(z)$.

Giải

Phân $h(n)$ thành 3 thành phần ứng với $n = 3r$, $n = 3r + 1$ và $n = 3r + 2$, và lấy biến đổi Z $h(n)$ ta có:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} h(3r)z^{-3r} + \sum_{r=0}^{\infty} h(3r+1)z^{-(3r+1)} + \sum_{r=0}^{\infty} h(3r+2)z^{-(3r+2)} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} a^{3r} z^{-3r} + \sum_{r=0}^{\infty} a^{3r+1} z^{-(3r+1)} + \sum_{r=0}^{\infty} a^{3r+2} z^{-(3r+2)} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (a^3 z^{-3})^r + az^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} (a^3 z^{-3})^r + a^2 z^{-2} \sum_{r=0}^{\infty} (a^3 z^{-3})^r \\
&= \frac{1}{1-a^3 z^{-3}} + z^{-1} \frac{a}{1-a^3 z^{-3}} + z^{-2} \frac{a^2}{1-a^3 z^{-3}} \\
H(z) &= E_0(z^3) + z^{-1} E_1(z^3) + z^{-2} E_2(z^3)
\end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
E_0(z^3) &= \frac{1}{1-a^3 z^{-3}} ; E_1(z^3) = \frac{a}{1-a^3 z^{-3}} \text{ và } E_2(z^3) = \frac{a^2}{1-a^3 z^{-3}} \\
E_0(z) &= \frac{1}{1-a^3 z^{-1}} ; E_1(z) = \frac{a}{1-a^3 z^{-1}} \text{ và } E_2(z) = \frac{a^2}{1-a^3 z^{-1}}
\end{aligned}$$

Ví dụ 9.4.2.2

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có đáp ứng xung như sau:

$$\begin{aligned}
h(n) &= \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\} \\
&\quad \downarrow \\
&\quad 0
\end{aligned}$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha $M = 3$ thành phần của $H(z)$.

Giải

Phân $h(n)$ thành 3 thành phần ứng với $n = 3r$, $n = 3r + 1$ và $n = 3r + 2$ và lấy biến đổi z ta có:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \\
&= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} \\
&= 1 + 4z^{-3} + z^{-6} + z^{-1}(2 + 3z^{-3}) + z^{-2}(3 + 2z^{-3}) \\
H(z) &= E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)
\end{aligned}$$

ở đây:

$$\begin{aligned}
E_0(z^3) &= 1 + 4z^{-3} + z^{-6} \text{ và } E_0(z) = 1 + 4z^{-1} + z^{-2} \\
E_1(z^3) &= 2 + 3z^{-3} & E_1(z) &= 2 + 3z^{-1} \\
E_2(z^3) &= 3 + 2z^{-3} & E_2(z) &= 3 + 2z^{-1}
\end{aligned}$$

Từ cách biểu diễn $H(z)$ ở dạng nhiều pha M thành phần chúng ta có thể rút ra một tính chất quan trọng sau đây:

Ta đã có:

$$e_0(r) = h(Mr)$$

lấy biến đổi Z^M hai vế ta có:

$$Z^M T[e_0(r)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r) z^{-Mr} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr) z^{-Mr} = E_0(z^M)$$

đổi biến số:

$$m = Mr \quad \text{và} \quad r = \frac{m}{M}$$

$$E_0(z^M) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}$$

với $m = Mr$, r : nguyên

Ta đã có định nghĩa dãy $p(m)$ như sau:

$$\begin{aligned} p(m) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{+j \frac{2\pi}{M} lm} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{với } m = M.n, n : \text{nguyên} \\ 0 & \text{với } m \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} E_0(z^M) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) p(m) z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{+j \frac{2\pi}{M} lm} h(m) z^{-m} \end{aligned}$$

$$ME_0(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) [z e^{-j \frac{2\pi}{M} l}] z^{-m}$$

$$ME_0(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} H(z e^{-j \frac{2\pi}{M} l}) \quad (9.4.2.4)$$

hoặc:

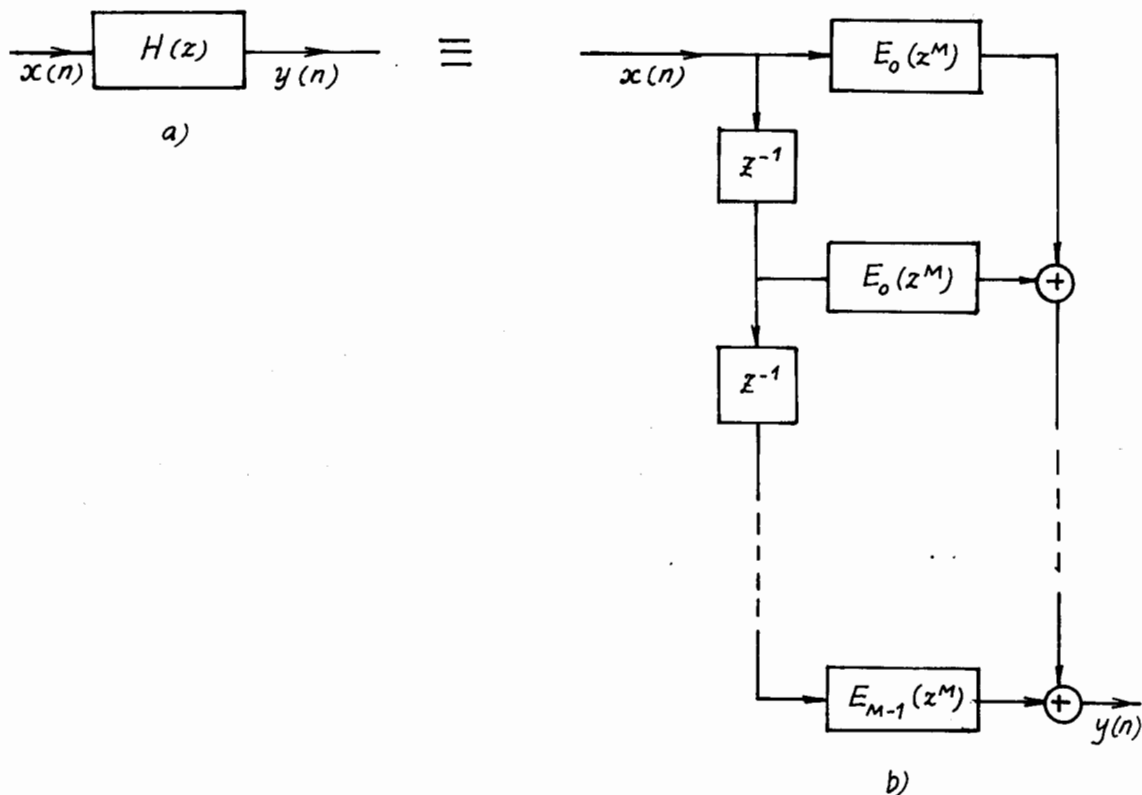
$$E_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H(z^{\frac{1}{M}} e^{-j \frac{2\pi}{M} l}) \quad (9.4.2.5)$$

b) Cấu trúc nhiều pha M thành phần

Phân hoạch nhiều pha M thành phần của $H(z)$ là cơ sở để xây dựng cấu trúc nhiều pha M thành phần, mà hàm truyền đạt của cấu trúc này là $H(z)$.

Hình 9.4.2.1 minh hoạ cấu trúc nhiều pha M thành phần tổng quát để thực hiện hàm $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M)$$



Hình 9.4.2.1

Ví dụ 9.4.2.3

Cho bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt $H(z)$ cho ở dạng phân hoạch nhiều pha 3 thành phần như sau:

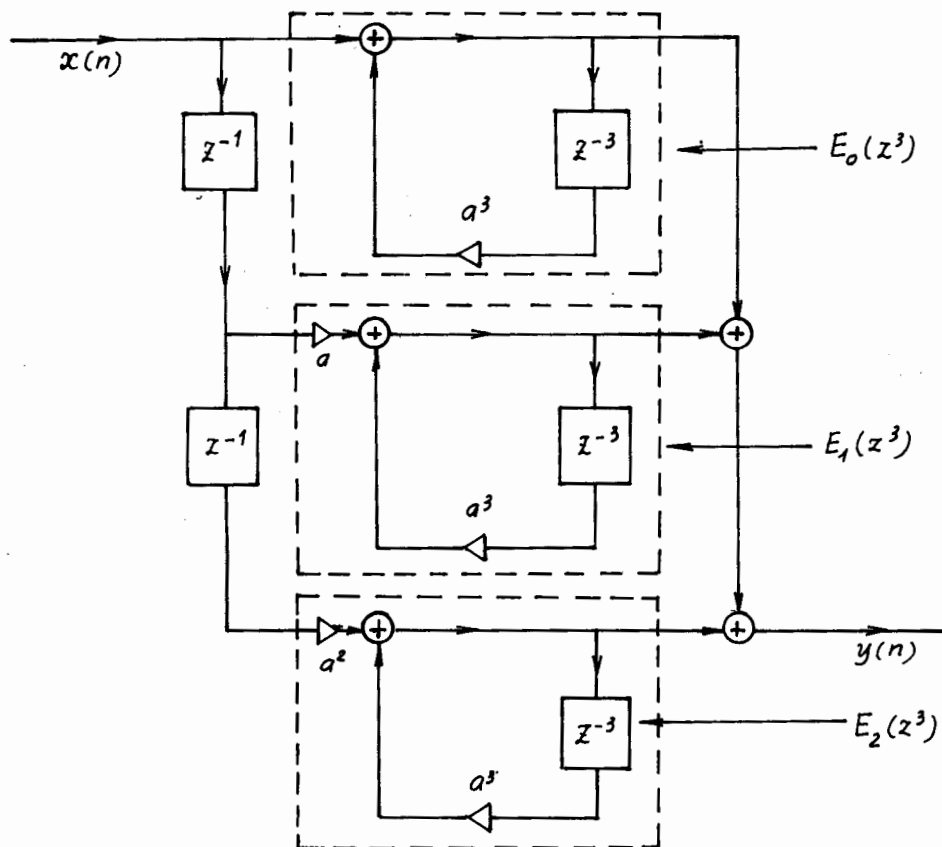
$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)$$

$$E_0(z^3) = \frac{1}{1-a^3z^{-3}}; \quad E_1(z^3) = \frac{a}{1-a^3z^{-3}} \quad \text{và} \quad E_2(z^3) = \frac{a^2}{1-a^3z^{-3}}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha 3 thành phần của $H(z)$.

Giải

Cấu trúc nhiều pha 3 thành phần của $H(z)$ được cho trên hình 9.4.2.2.



Hình 9.4.2.2

9.4.3. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA LOẠI HAI

a) Phân hoạch nhiều pha loại hai hàm $H(z)$

Trong mục nhỏ này chúng ta đưa vào khái niệm phân hoạch nhiều pha loại hai, trong một số trường hợp cách phân hoạch này sẽ thuận lợi hơn.

Từ biểu thức của phân hoạch nhiều pha loại 1 ta có:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \quad 0 \leq l \leq M-1$$

đổi biến số: $l = M-1-m$

ta có:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} E_{M-1-m}(z^M)$$

gọi:

$$E_{M-1-m}(z^M) \equiv F_m(z^M) \quad (9.4.3.1)$$

Vậy:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_m(z^M) \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (9.4.3.2)$$

Biểu thức (9.4.3.2) là biểu diễn của $H(z)$ dưới dạng phân hoạch nhiều pha M thành phần loại 2.

Nhận xét

- Ta thấy rằng $F_m(z^M) \equiv E_{M-1-m}(z^M)$ vậy quan hệ giữa $F_m(z^M)$ và $E_m(z^M)$ chỉ là việc đánh số lại các thành phần mà thôi. Vì vậy về mặt bản chất thì phân hoạch nhiều pha loại 2 và loại 1 không có gì khác nhau, chúng chỉ khác nhau về mặt hình thức.

- Phân hoạch nhiều pha loại hai rất có lợi khi thực hiện bộ lọc nội suy.

Ví dụ 9.4.3.1

Cho bộ lọc FIR pha tuyến tính, hàm $H(z)$ có phân hoạch pha loại 1 như sau:

$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)$$

$$E_0(z^3) = 1 + 4z^{-3} + z^{-6}$$

$$E_1(z^3) = 2 + 3z^{-3}$$

$$E_2(z^3) = 3 + 2z^{-3}$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha loại 2 của $H(z)$.

Giải

Áp dụng hệ thức (9.4.3.1) và (9.4.3.2) ta có:

$$F_0(z^3) = E_2(z^3) = 3 + 2z^{-3}$$

$$F_1(z^3) = E_1(z^3) = 2 + 3z^{-3}$$

$$F_2(z^3) = E_0(z^3) = 1 + 4z^{-3} + z^{-6}$$

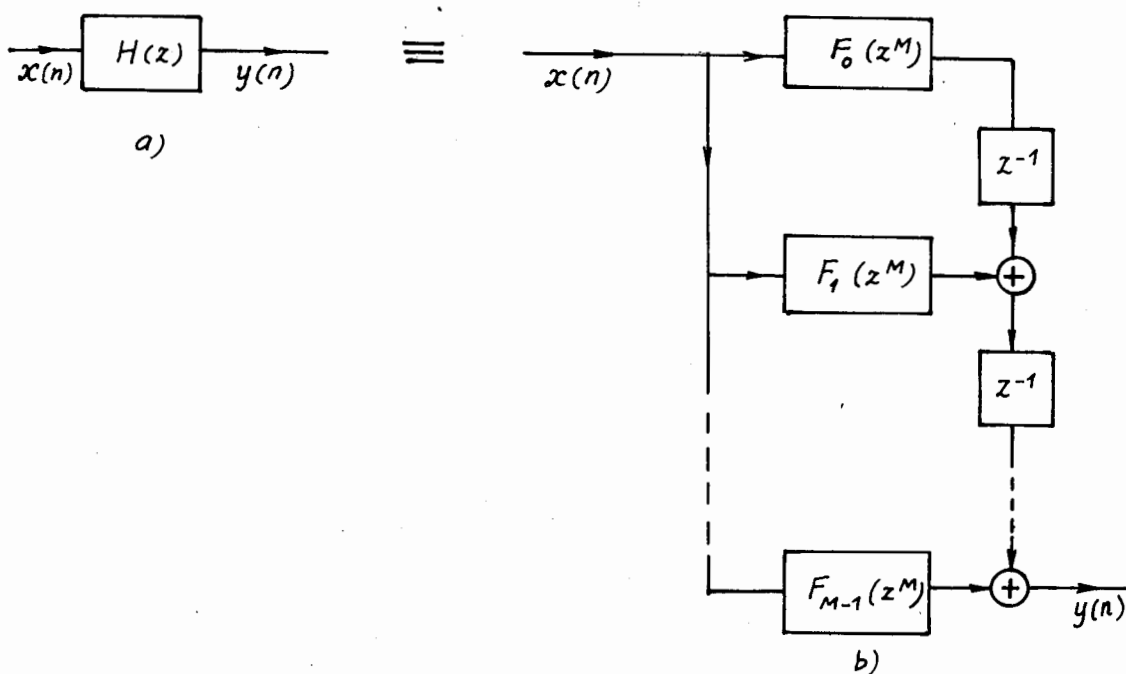
$$H(z) = z^{-2}F_0(z^3) + z^{-1}F_1(z^3) + F_2(z^3)$$

b) Cấu trúc nhiều pha loại 2

Trên cơ sở biểu thức (9.4.3.2) của phân hoạch nhiều pha loại 2 của hàm $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_m(z^M)$$

Chúng ta xây dựng được sơ đồ cấu trúc của phân hoạch nhiều pha loại 2 M thành phần gọi là cấu trúc nhiều pha loại 2 M thành phần, xem hình 9.4.3.1.



Hình 9.4.3.1

Nhận xét

- Thực chất cấu trúc nhiều pha loại 2 chính là cấu trúc chuyển vị của cấu trúc nhiều pha loại 1, tức là nếu ta coi cấu trúc loại 1 là một graph có hướng, nếu ta đổi hướng giữa đầu vào và đầu ra, nút cộng sẽ trở thành nút phân tán, nút phân tán trở thành nút cộng thì hàm truyền đạt $H(z)$ của cấu trúc sẽ không thay đổi, lúc đó ta sẽ thu được cấu trúc loại 2, gọi là cấu trúc chuyển vị.

- Cấu trúc nhiều pha loại 2 rất thuận lợi cho việc xây dựng bộ lọc nội suy.

9.5. CẤU TRÚC NHIỀU PHA CỦA BỘ LỌC BIẾN ĐỔI NHỊP LẤY MẪU

9.5.1. CẤU TRÚC NHIỀU PHA CỦA BỘ LỌC PHÂN CHIA

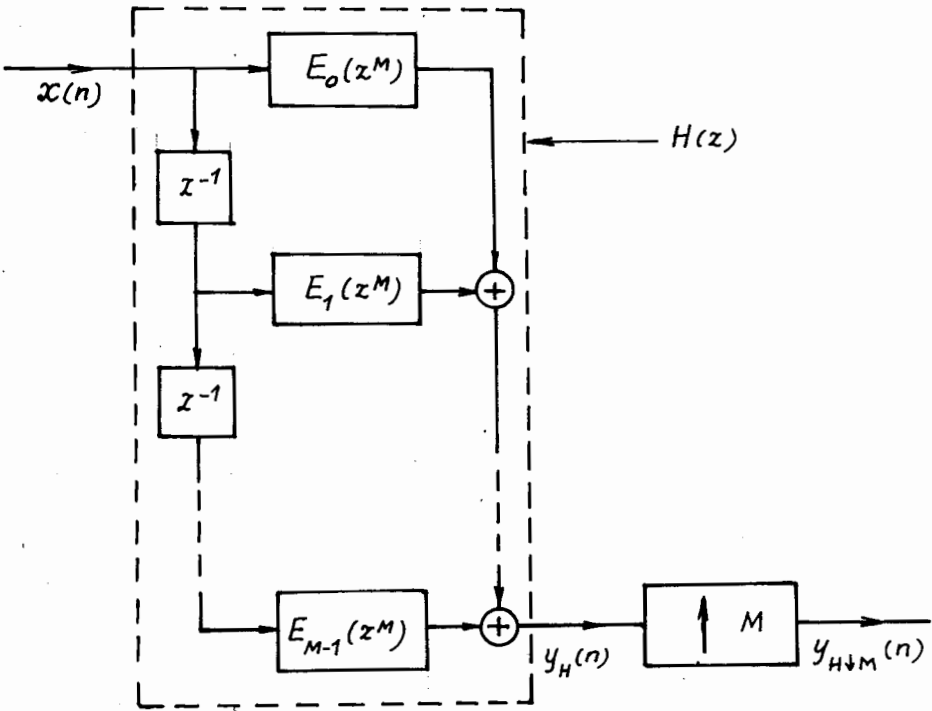
Từ hình 9.3.1.1 và hình 9.4.2.1, ta có thể thực hiện bộ lọc phân chia có cấu trúc nhiều pha như hình 9.5.1.1.

Nhận xét

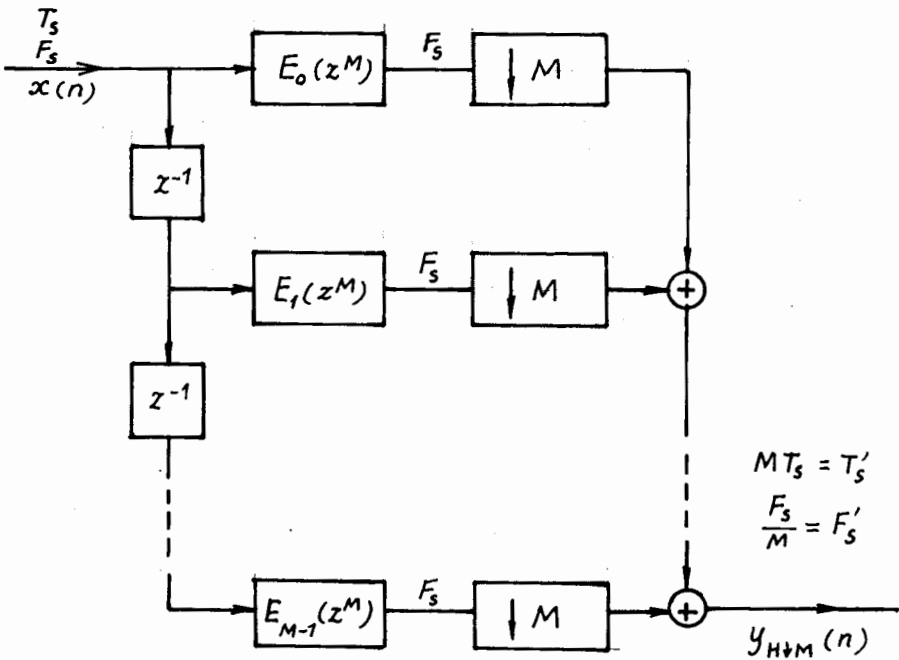
- Thực chất cấu trúc trên hình 9.5.1.1 này là dựa trên cơ sở của cấu trúc trên hình 9.3.1.1, vì vậy nó không nói lên được tính ưu việt của cấu trúc nhiều pha.

- Nói chung bộ lọc phân chia hệ số M sẽ được thực hiện trên cơ sở sử dụng cấu trúc nhiều pha M thành phần, có như vậy ta sẽ lợi dụng được sự đồng nhất của 2 sơ đồ (a) và (b) trên hình 9.3.1.2.

- Vì phép phân chia có tính phân phối vào phép cộng nên ta có thể chuyển cấu trúc hình 9.5.1.1 thành cấu trúc hình 9.5.1.2 mà kết quả vẫn như nhau.

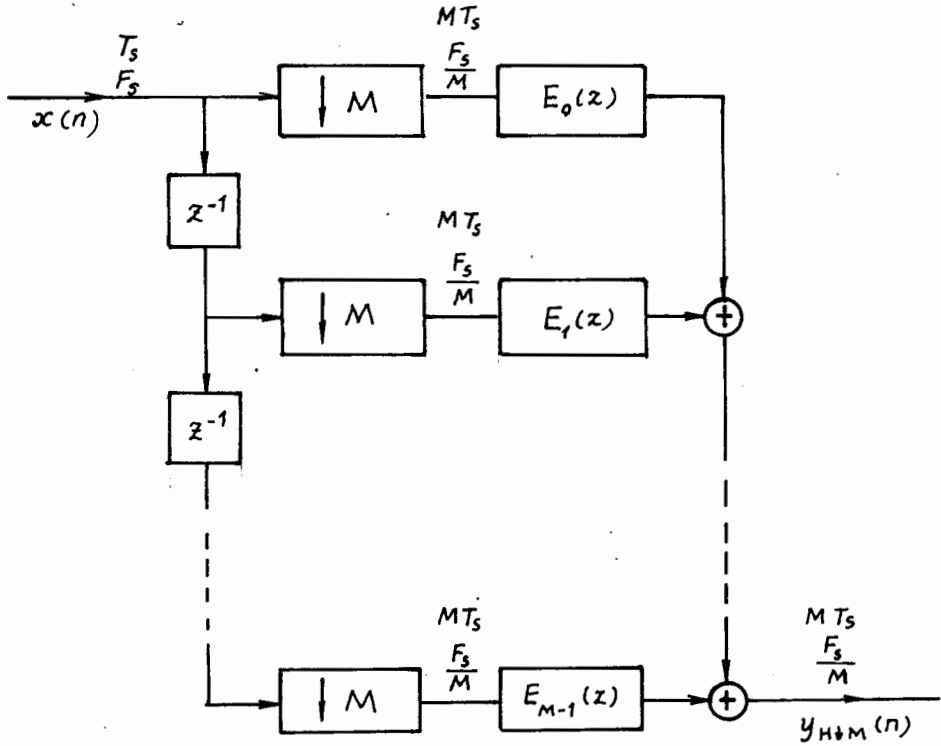


Hình 9.5.1.1.



Hình 9.5.1.2.

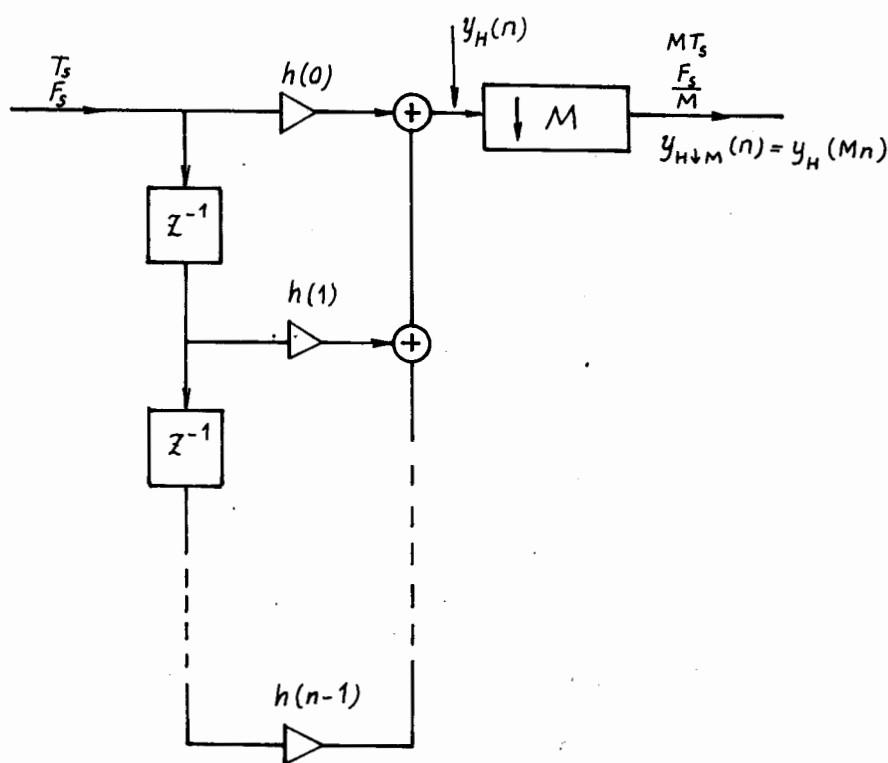
Sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 9.3.1.2 ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 9.5.1.2 thành cấu trúc trên hình 9.5.1.3.



Hình 9.5.1.3.

Cấu trúc trên hình 9.5.1.3 là cấu trúc ưu việt nhất, nó chính là cấu trúc nhiều pha M thành phần của bộ lọc phân chia hệ số M . Để thấy được những ưu điểm nổi bật của cấu trúc nhiều pha như trên hình chúng ta hãy tiến hành so sánh với cấu trúc trực tiếp của bộ lọc phân chia $H \downarrow M$. Giả sử chúng ta dùng bộ lọc FIR có chiều dài N , cấu trúc trực tiếp của $H \downarrow M$ được cho trên hình 9.5.1.4. Ta viết tắt bộ lọc phân chia FIR là $FIRH \downarrow M$. Bây giờ ta tiến hành so sánh.

Ta thấy rằng đối với $FIRH \downarrow M$ trực tiếp, để tính mỗi một mẫu đầu ra $y_{H+M}(n)$ chúng ta cần N phép nhân và $(N - 1)$ phép cộng. Trong sơ đồ hình 9.5.1.4 ta thấy rằng tín hiệu vào $x(n)$ qua các bộ trễ z^{-1} rồi được nhân với các hệ số $h(n)$, sau đó cộng lại ta được một giá trị của $y_H(n)$. Còn trong thời gian thực (in real time) các bộ trễ z^{-1} chính là bộ ghi dịch, $x(n)$ đi vào các bộ ghi dịch theo từng thời điểm của xung đồng bộ, ta gọi là xung nhịp, khoảng cách thời gian giữa 2 xung nhịp liên tiếp nhau là T_s , vậy sau mỗi một nhịp ta phải thực hiện xong N phép nhân và $N - 1$ phép cộng trước khi nhịp mới xuất hiện, tức là phải thực hiện trong khoảng thời gian T_s . Hơn nữa $y_{H+M}(n) = y_H(Mn)$, tức là $FIRH \downarrow M$ trực tiếp chỉ tính giá trị $y(Mn)$ chứ không cần tính cả $y_H(n)$, vậy hệ thống sẽ nghỉ trong thời khoảng $(M - 1)T_s$, sau đó bộ ghi dịch sẽ dịch một bước dài M nhịp để tính giá trị tiếp theo của $y_H(n)$ như vậy rõ ràng là rất bất tiện.



Hình 9.5.1.4.

Còn đối với $\text{FIRH}\downarrow M$ nhiều pha M thành phần thì trước khi đi vào các khối lọc $E_m(z)$ thì các mẫu nằm giữa hai mẫu Mn và $M(n+1)$ không còn nữa, tức là nhịp lấy mẫu đã được giảm đi M lần, thời khoảng giữa hai mẫu trước khi đi vào $E_m(z)$ bây giờ là MT_s . Như vậy các phép tính nhân và cộng sẽ được thực hiện trong khoảng thời gian MT_s . Hơn nữa chiều dài của các bộ lọc $E_m(z)$ bây giờ trung bình là $\frac{N}{M}$, vậy số phép nhân và cộng phải thực hiện trong thời khoảng MT_s chỉ còn trung bình là $\frac{N}{M}$ và $\frac{N}{M} - 1$.

Như vậy $\text{FIRH}\downarrow M$ nhiều pha M thành phần ưu việt hơn hẳn $\text{FIRH}\downarrow M$ trực tiếp.

Ví dụ 9.5.1.1

Cho bộ lọc phân chia FIR $\text{FIRH}\downarrow 2$ với $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \left\{ 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6} \right\}$$

\downarrow
0

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha tối ưu nhất của $\text{FIR}/\downarrow 2$.

Giải

Ta tìm $H(z)$ sau đó tìm $E_0(z)$ và $E_1(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{3}{6}z^{-3} + \frac{2}{6}z^{-4} + \frac{1}{6}z^{-5} \\ &= 1 + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{2}{6}z^{-4} + z^{-1}\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{6}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-4}\right) \\ H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \end{aligned}$$

Vậy:

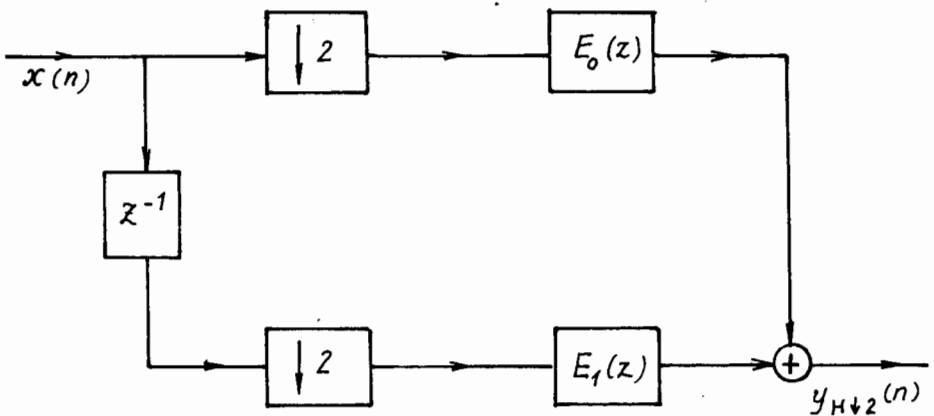
$$E_0(z^2) = 1 + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{2}{6}z^{-4};$$

$$E_1(z^2) = \frac{5}{6} + \frac{3}{6}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-4}$$

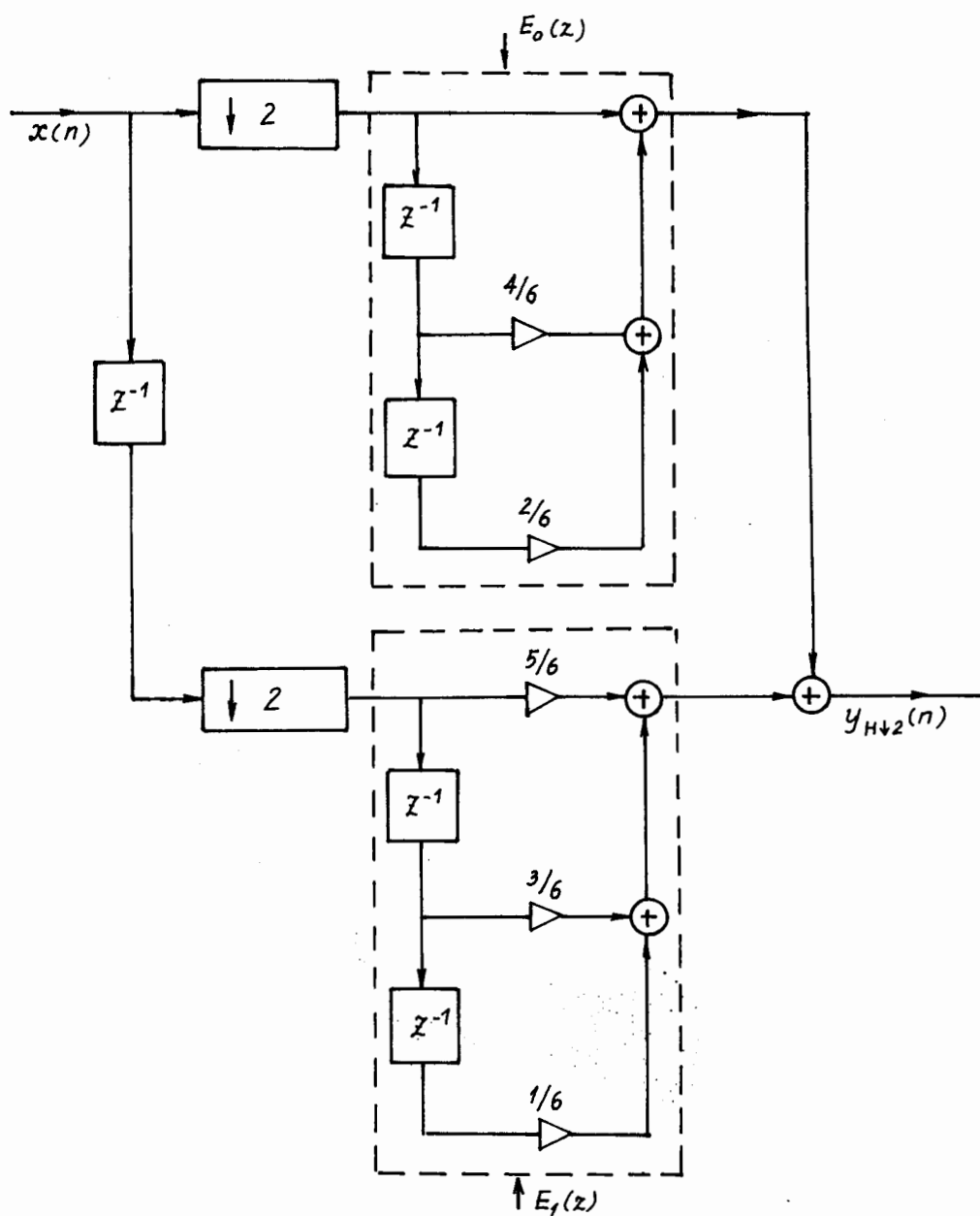
$$E_0(z) = 1 + \frac{4}{6}z^{-1} + \frac{2}{6}z^{-2}$$

$$E_1(z) = \frac{5}{6} + \frac{3}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}$$

Từ đây ta có cấu trúc nhiều pha 2 thành phần tối ưu nhất của $\text{FIR}/\downarrow 2$ minh hoạ trên hình 9.5.1.5 (a) và 9.5.1.5 (b).



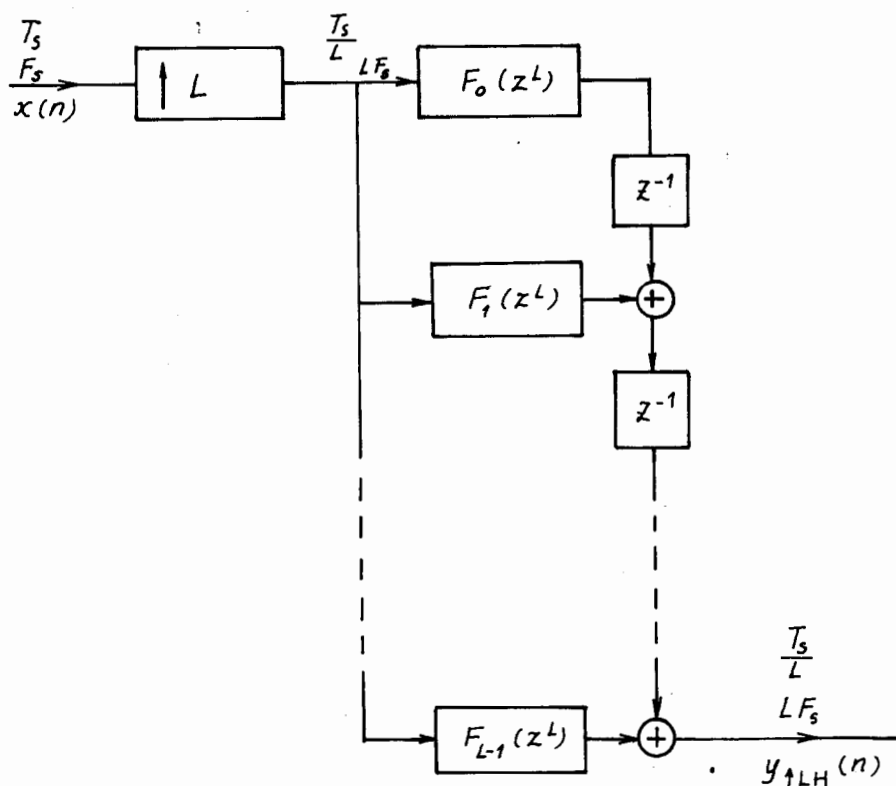
Hình 9.5.1.5 (a).



Hình 9.5.1.5 (b).

9.5.2. CẤU TRÚC NHIỀU PHA CỦA BỘ LỌC NỘI SUY

Chúng ta sẽ dùng cấu trúc nhiều pha loại 2 cho trên hình 9.4.3.1 để xây dựng cấu trúc nhiều pha L thành phần của bộ lọc nội suy hệ số L . Kết hợp với hình 9.3.2.1 ta nhận được bộ lọc nội suy có cấu trúc nhiều pha L thành phần được minh hoạ trên hình 9.5.2.1.



Hình 9.5.2.1.

Nhận xét:

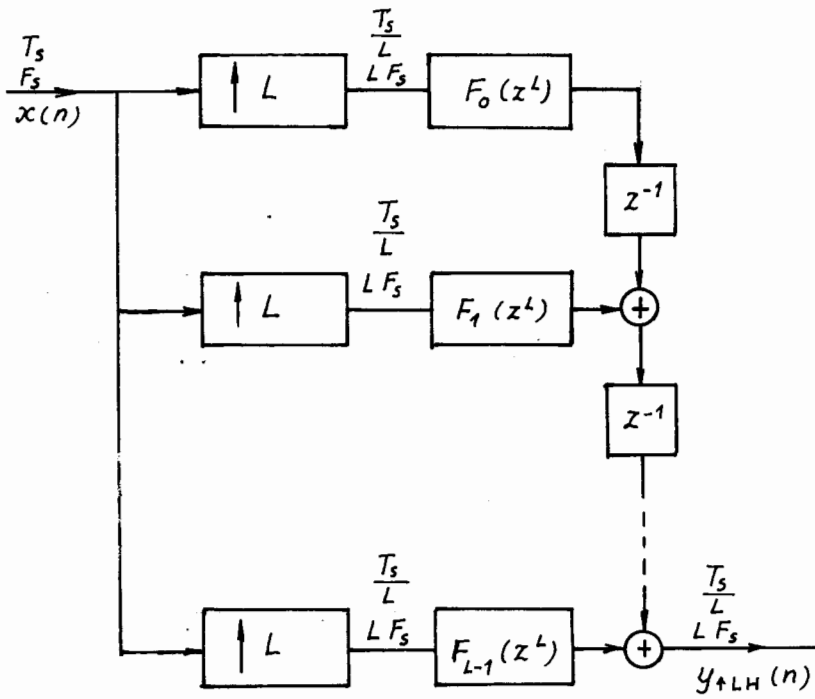
- Cấu trúc trên hình 9.5.2.1 không nói lên được sự ưu việt của cấu trúc nhiều pha vì nó dựa trên cơ sở của cấu trúc trên hình 9.3.2.1.

- Bộ lọc nội suy hệ số $L \uparrow LH$ sẽ được xây dựng trên cơ sở cấu trúc nhiều pha L thành phần, như vậy nó sẽ lợi dụng được sự đồng nhất của 2 sơ đồ (a) và (b) trên hình 9.3.2.2.

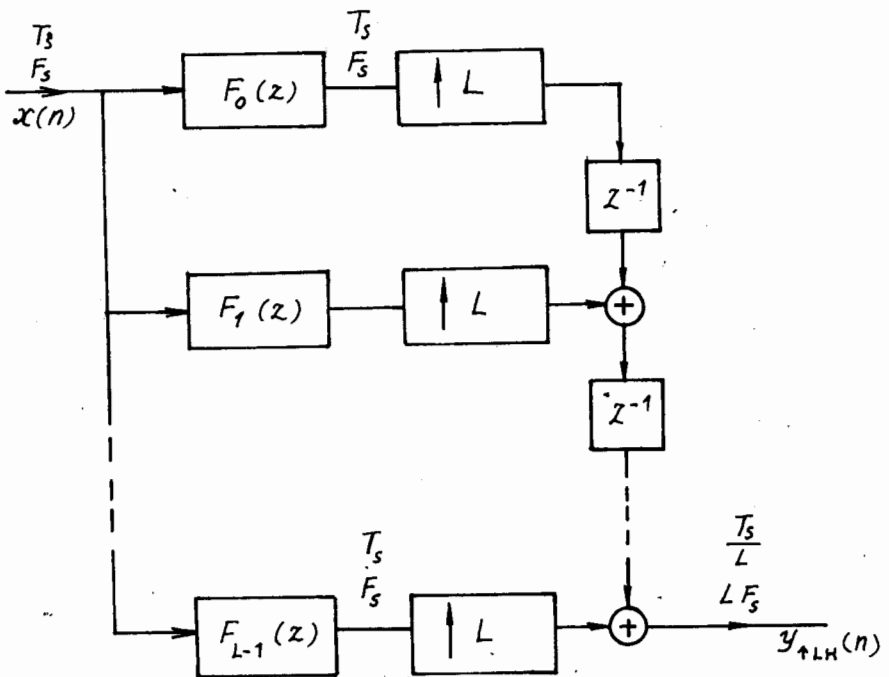
Do phép nội suy có tính chất phân phối vào phép cộng nên ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 9.5.2.1 thành cấu trúc trên hình 9.5.2.2 mà kết quả vẫn như nhau.

Sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 9-3-2-2 ta sẽ chuyển cấu trúc trên hình 9.5.2.2 thành cấu trúc trên hình 9.5.2.3.

Cấu trúc nhiều pha L thành phần của bộ lọc nội suy $\downarrow LH$ cho trên hình 9.5.2.3 là cấu trúc ưu việt nhất. Để thấy được những ưu điểm của cấu trúc nhiều pha loại này chúng ta hãy so sánh với cấu trúc trực tiếp của bộ lọc nội suy $\uparrow LH$. Chúng ta lấy bộ lọc FIR có chiều dài N làm ví dụ minh họa. Cấu trúc trực tiếp của $\uparrow LH$ cho trên hình 9.5.2.4. Ta viết tắt bộ lọc nội suy FIR là $\text{FIR} \uparrow LH$. Bây giờ ta tiến hành so sánh.

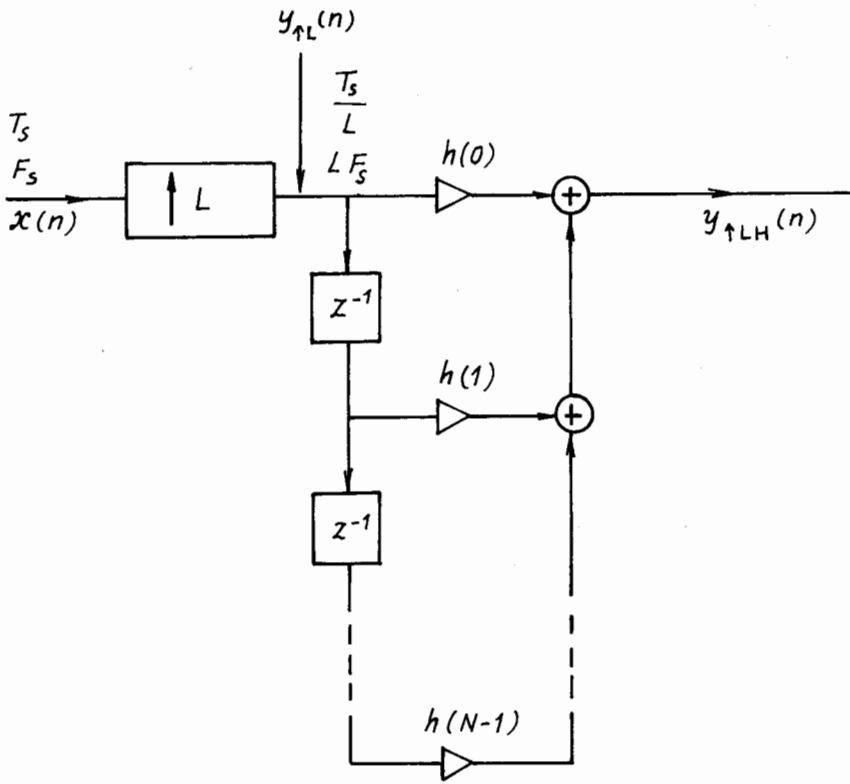


Hình 9.5.2.2.



Hình 9.5.2.3.

Ta thấy rằng tín hiệu vào $x(n)$ trước khi vào bộ lọc FIR đối với $\text{FIR}\uparrow LH$ trực tiếp, phải đi qua bộ nội suy $\uparrow L$, chiều dài của $x(n)$ tăng lên L lần, và cứ L mẫu thì có $L - 1$ mẫu giá trị không, khoảng thời gian giữa hai mẫu của $y_{\uparrow L}(n)$ bây giờ là $\frac{T_s}{L}$.



Hình 9.5.2.4

Hơn nữa chiều dài của bộ lọc FIR là N . Vậy để có một giá trị của $y_{\uparrow LH}(n)$ trong thời gian T_s/L ta phải hoàn thành N phép nhân và $N - 1$ phép cộng. Như vậy ta không tận dụng được các nhân tố để giảm các tính toán yêu cầu trong một đơn vị thời gian.

Còn đối với $\text{FIR}\uparrow LH$ nhiều pha L thành phần thì $x(n)$ đi trực tiếp vào các khối lọc $F_m(z)$ với chu kỳ lấy mẫu là T_s , và chiều dài của $F_m(z)$ trung bình bây giờ là N/L . Vậy trong khoảng thời gian T_s ta chỉ hoàn thành số phép nhân và phép cộng trung bình là N/L và $N/L - 1$.

Vậy rõ ràng là $\text{FIR}\uparrow LH$ nhiều pha L thành phần ưu việt hơn hẳn $\text{FIR}\uparrow L$ trực tiếp.

Ví dụ 9.5.2.1

Cho bộ lọc nội suy FIR $\text{FIR}\uparrow 3H$ với $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \left\{ 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha tối ưu nhất của $\text{FIR} \uparrow 3H$.

Giải

Ta tìm $H(z)$ sau đó tìm $E_0(z^3); E_1(z^3); E_2(z^3)$ rồi tìm $F_0(z^3) = E_2(z^3); F_1(z^3) = E_1(z^3); F_2(z^3) = E_0(z^3)$.

$$H(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{3}{6}z^{-3} + \frac{2}{6}z^{-4} + \frac{1}{6}z^{-5}$$

$$= 1 + \frac{3}{6}z^{-3} + z^{-1}\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}z^{-3}\right) + z^{-2}\left(\frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-3}\right)$$

$$= E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)$$

Vậy:

$$F_2(z^3) = E_0(z^3) = 1 + \frac{3}{6}z^{-3} \quad \text{và} \quad E_0(z) = 1 + \frac{3}{6}z^{-1} = F_2(z)$$

$$F_1(z^3) = E_1(z^3) = \frac{5}{6} + \frac{2}{6}z^{-3} \quad \text{và} \quad E_1(z) = \frac{5}{6} + \frac{2}{6}z^{-1} = F_1(z)$$

$$F_0(z^3) = E_2(z^3) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-3} \quad \text{và} \quad E_2(z) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-1} = F_0(z)$$

Từ đây ta có thể xây dựng cấu trúc nhiều pha 3 thành phần tối ưu nhất của $\text{FIR} \uparrow 3H$, minh hoạ trên hình 9.5.2.5.

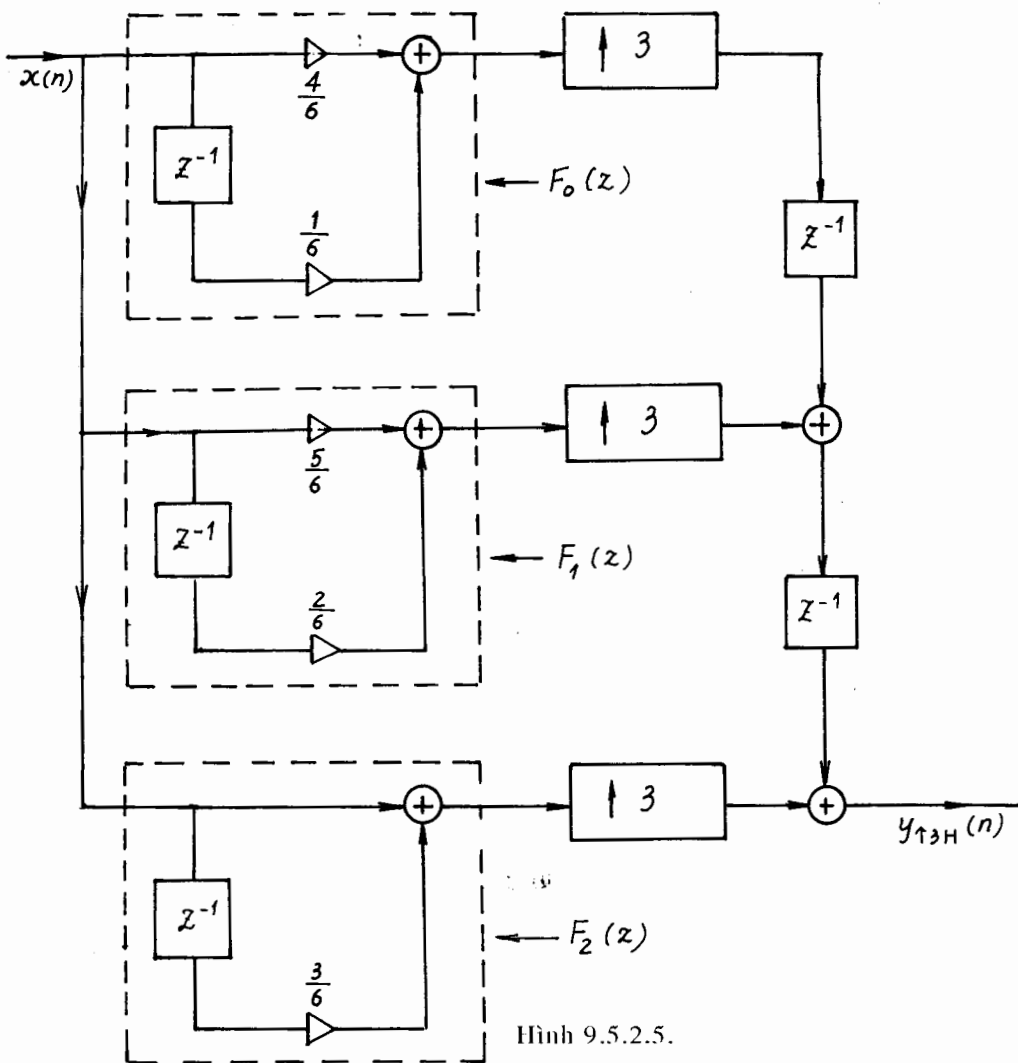
9.5.3. CẤU TRÚC NHIỀU PHA CỦA CÁC BỘ LỌC BIẾN ĐỔI NHỊP HỆ SỐ M/L KHÔNG NGUYÊN

a) Tổng quan

Trên hình 9.3.3.3 chúng ta đã có sơ đồ khối của các bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L với chỉ một bộ lọc số có đáp ứng xung $h(n)$, đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ và tần số cắt

$\omega_c = \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right)$. Nếu chúng ta tiến hành thực hiện bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L

$\uparrow H \downarrow M/L$ bằng cấu trúc trực tiếp của bộ lọc số $h(n)$ thì ta không khai thác được những nhân tố để làm giảm khối lượng tính toán đòi hỏi trong một đơn vị thời gian và những phức tạp khác. Hình 9.5.3.1 minh hoạ bộ lọc biến đổi nhịp FIR có cấu trúc trực tiếp, gọi tắt là $\text{FIR} \uparrow H \downarrow M/L$ trực tiếp.



Để thu được sự thực hiện bộ lọc biến đổi nhịp $\uparrow H \downarrow M/L$ ưu việt chúng ta sẽ dùng cấu trúc nhiều pha L hoặc M thành phần phụ thuộc vào ta dùng phân hoạch nhiều pha loại 1 hay loại 2.

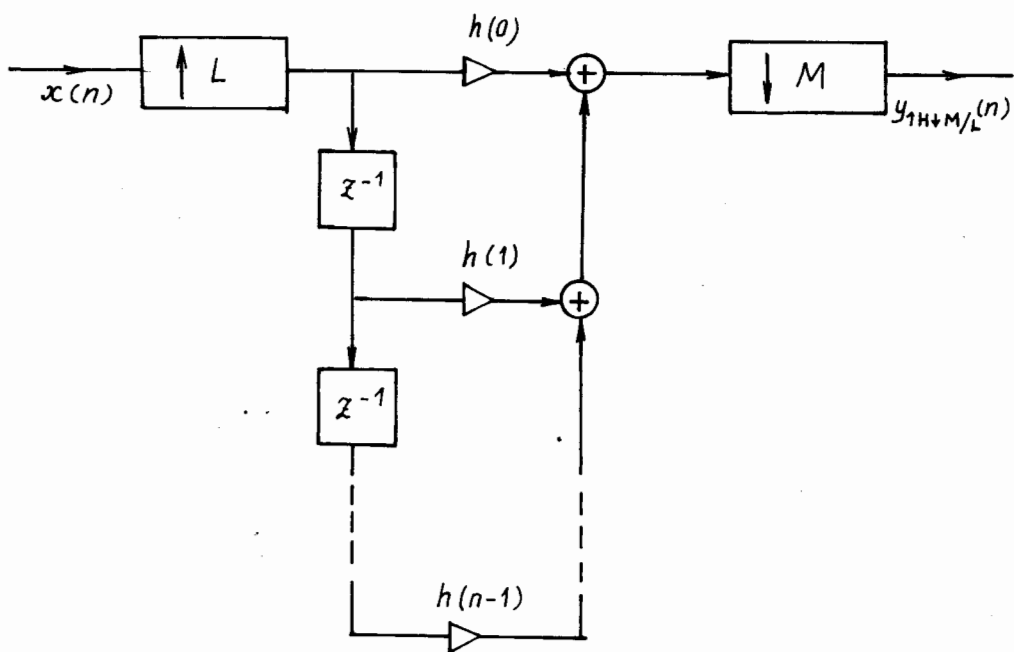
b) Cấu trúc nhiều pha loại 1 của bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L không nguyên

Cấu trúc nhiều pha loại 1 của bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L cho bởi hình 9.5.3.2.

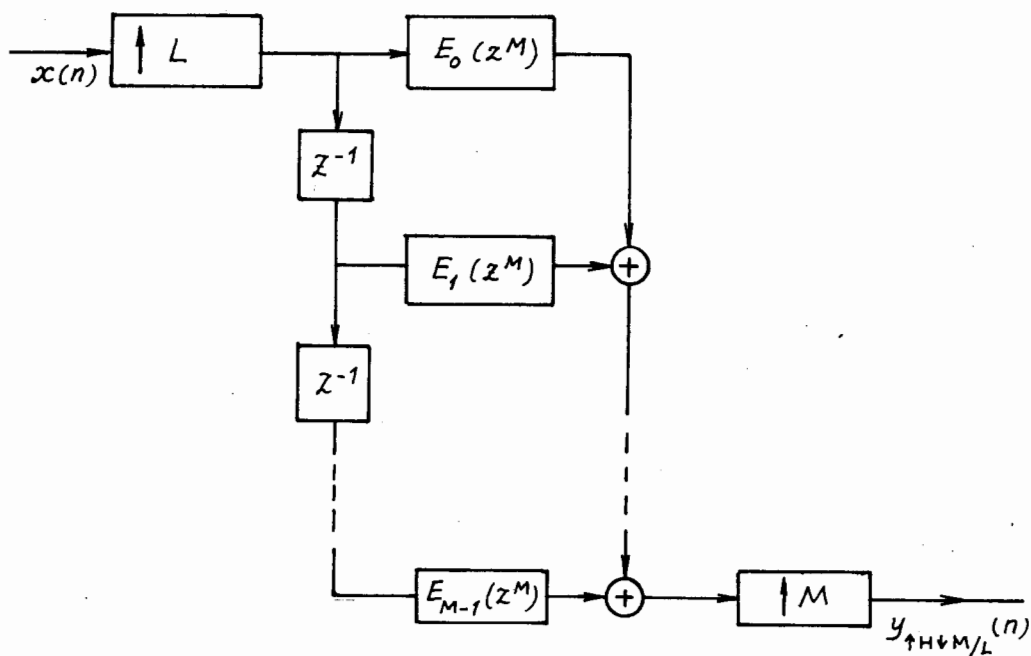
Nhận xét

- Cấu trúc trên hình 9.5.3.2 là cấu trúc nhiều pha loại 1 M thành phần của $\uparrow H \downarrow M/L$, gọi tắt là $\uparrow H \downarrow M/L$ nhiều pha M thành phần.

- Cấu trúc nhiều pha loại này không nói lên được những ưu việt của cấu trúc nhiều pha, vì vậy chúng ta phải biến đổi sơ đồ này đi.

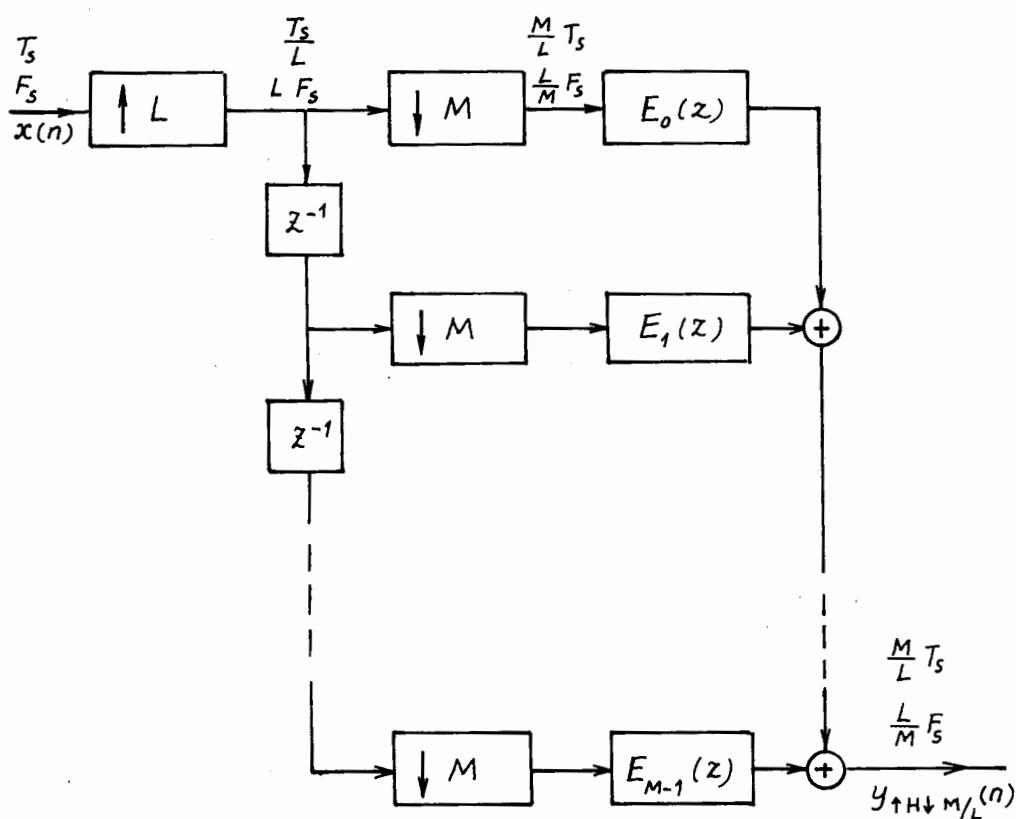


Hình 9.5.3.1.



Hình 9.5.3.2.

Áp dụng tính phân phối vào phép cộng của phép phân chia và sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 9.3.1.2 ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 9.5.3.2 thành cấu trúc trên hình 9.5.3.3.



Hình 9.5.3.3.

Rõ ràng cấu trúc trên hình 9.5.3.3 hơn hẳn cấu trúc trên hình 9.5.3.2 vì chúng ta đã tận dụng được hết những khả năng ưu việt có thể khai thác được.

c) Cấu trúc nhiều pha loại 2 của bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L không nguyên

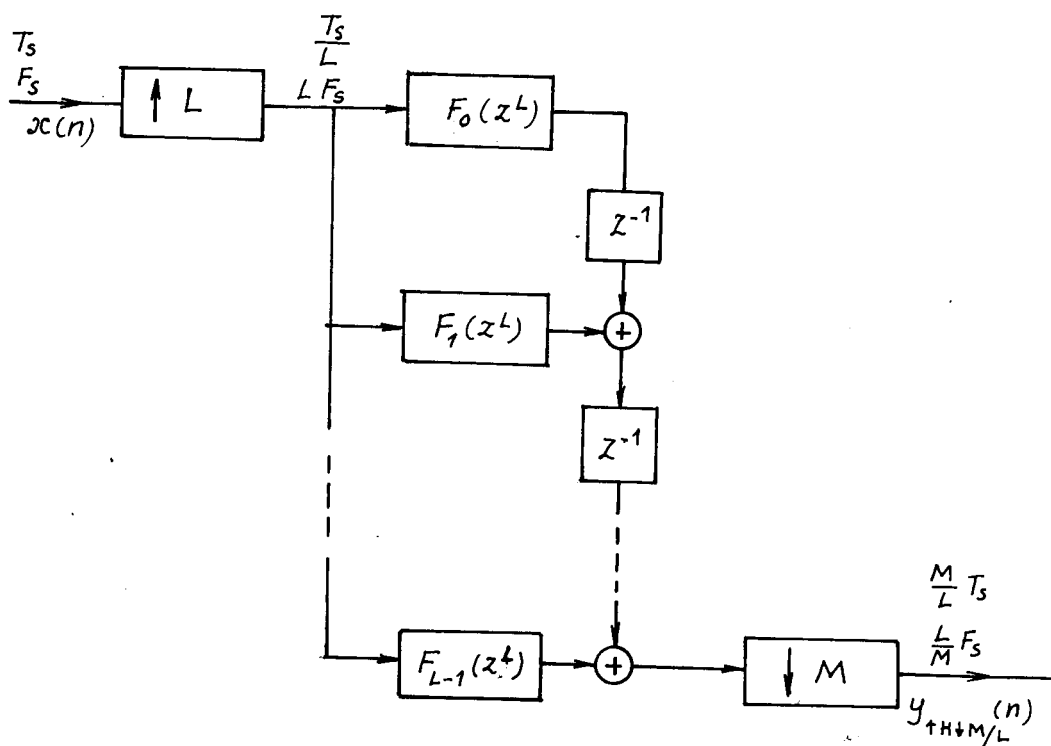
Cấu trúc nhiều pha loại 2 của bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L cho trên hình 9.5.3.4.

Nhận xét

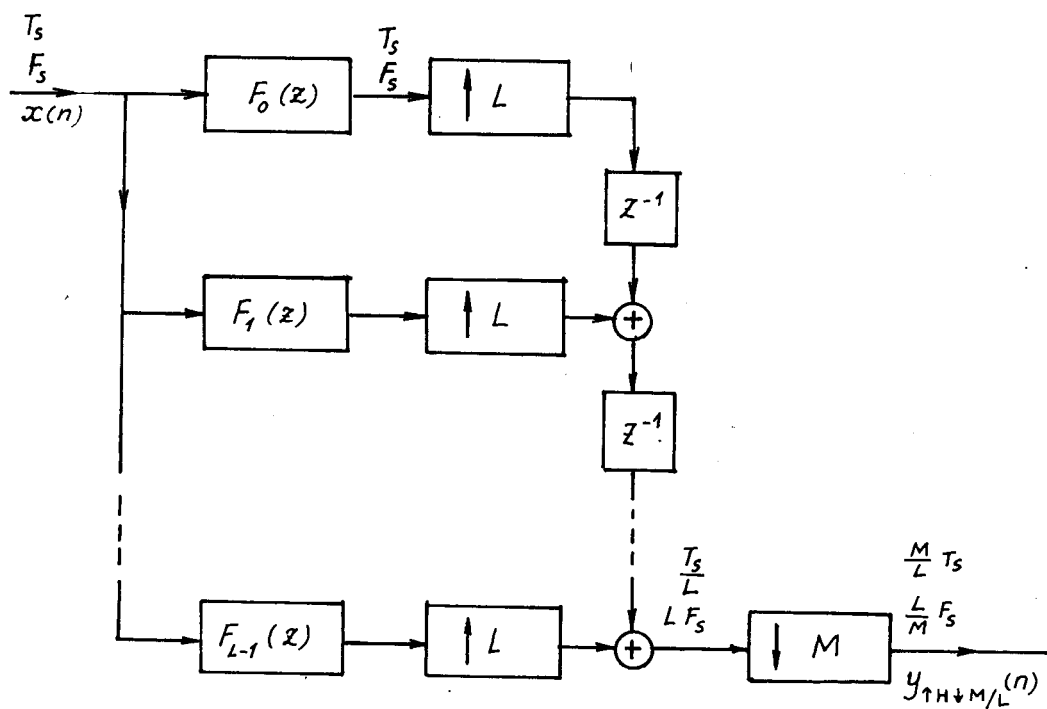
- Cấu trúc trên hình 9.5.3.4 là cấu trúc nhiều pha loại 2 L thành phần của $\uparrow L \downarrow M/L$ gọi tắt là $\uparrow L \downarrow M/L$ nhiều pha L thành phần.

- Cấu trúc nhiều pha loại 2 này không cho ta những ưu việt của cấu trúc nhiều pha, vì vậy chúng ta phải biến đổi sơ đồ này đi.

Áp dụng tính phân phối vào phép cộng của phép nội suy và sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 9.3.2.2 ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 9.5.3.4 thành cấu trúc trên hình 9.5.3.5 mà kết quả ở đầu ra cũng vẫn không có gì thay đổi.



Hình 9.5.3.4.



Hình 9.5.3.5.

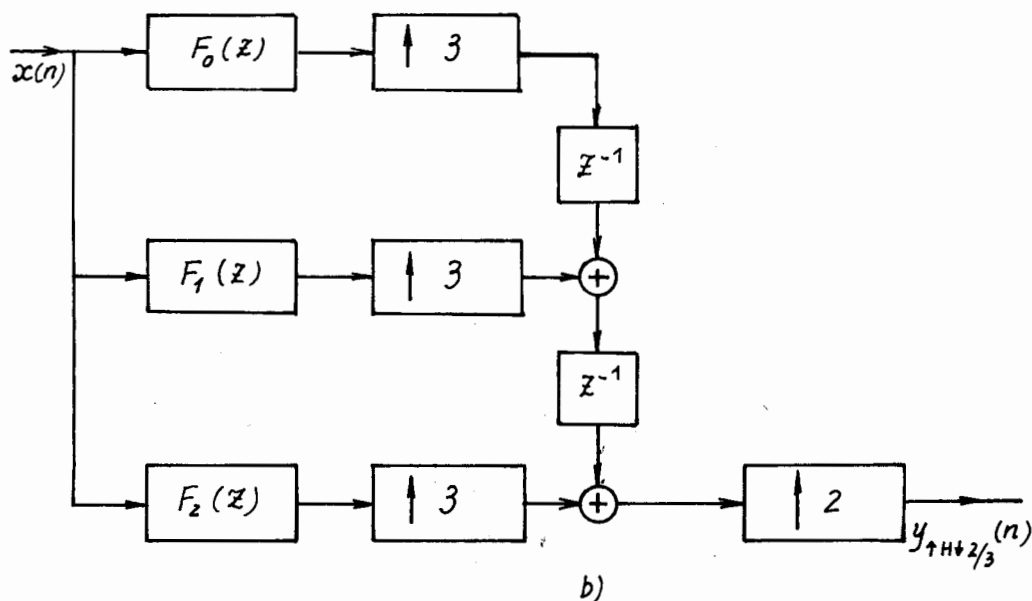
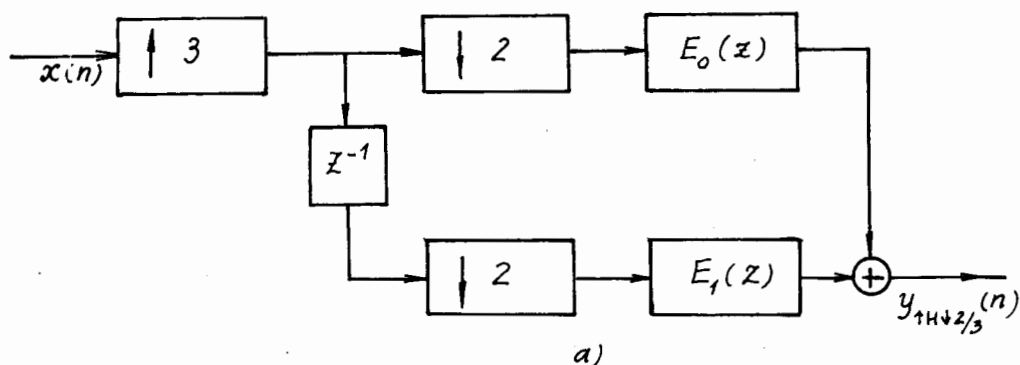
Ta thấy rằng cấu trúc trên hình 9.5.3.5 hơn hẳn cấu trúc trên hình 9.5.3.4 vì chúng ta đã tận dụng được hết những khả năng ưu việt có thể khai thác được.

Ví dụ 9.5.3.1

Hãy tìm cấu trúc nhiều pha loại 1 hai thành phần và loại 2 ba thành phần của bộ lọc biến đổi nhịp $\uparrow H \downarrow 2/3$.

Giải

Dựa vào cấu trúc cho trên hình 9.5.3.3 và hình 9.5.3.5 chúng ta có kết quả cho trên hình 9.5.3.6.

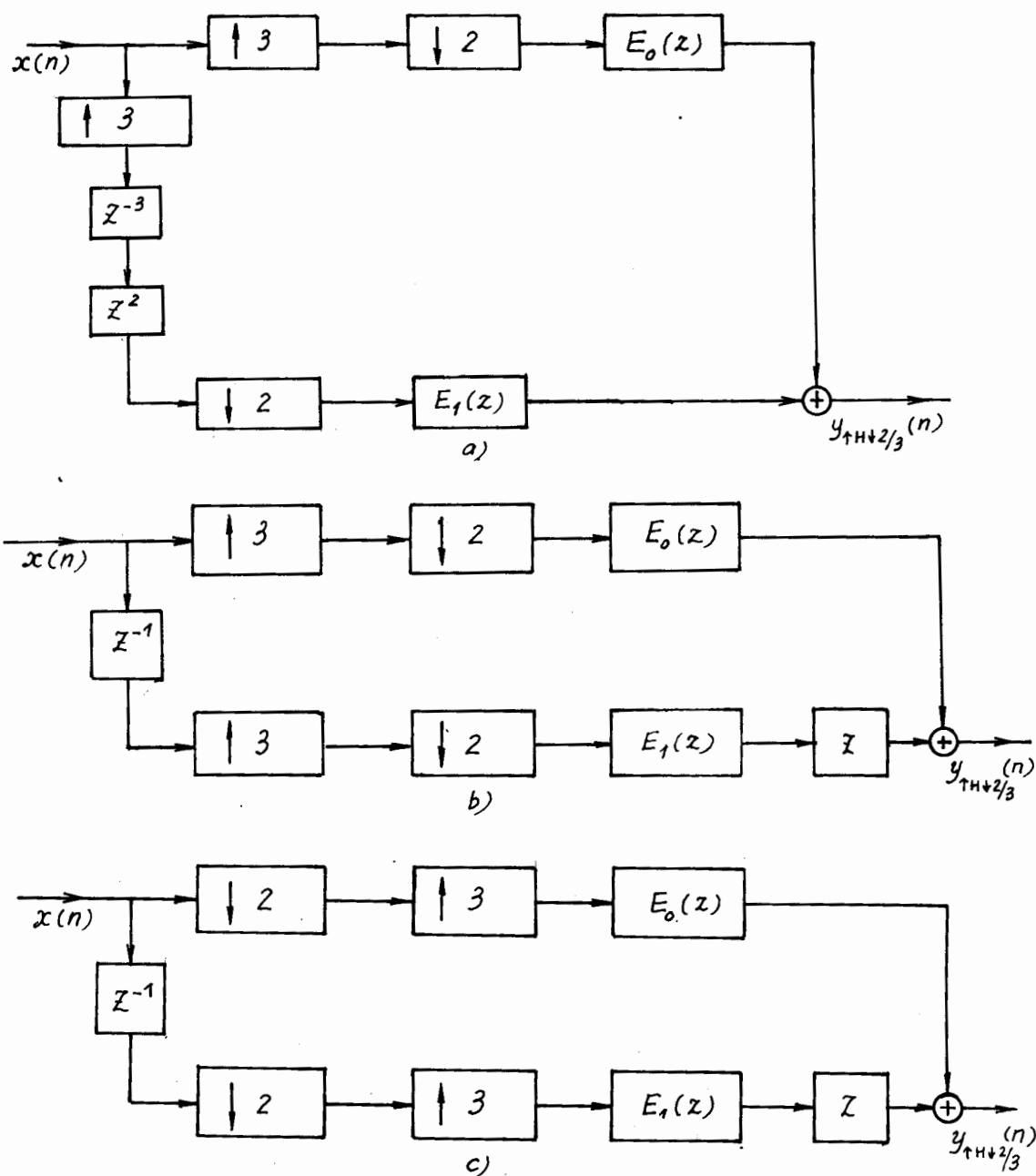


(a) cấu trúc nhiều pha loại 1 hai thành phần; (b) cấu trúc nhiều pha loại 2 ba thành phần.

Hình 9.5.3.6.

Ta thấy rằng kết quả của hai cấu trúc trên hình 9.5.3.6 (a) và (b) là như nhau, ta có thể dùng cấu trúc nào cũng được. Nhưng đối với hình 9.5.3.6 (a) nếu ta dùng

thêm một thủ thuật nhỏ là $z^{-1} = z^{-3}z^2$ thì ta sẽ có kết quả khả quan hơn. Cụ thể nếu ta dùng thủ thuật này sau đó lợi dụng sự đồng nhất (9.3.2.11) và (9.3.1.11) sau đó lợi dụng sự tương đương (9.2.4.5) tức là đổi chỗ $\uparrow L$ và $\downarrow M$ thì kết quả là tương đương nhau, kết quả ta thu được như cấu trúc trên hình 9.5.3.7 (a), (b) và (c).



(a) Cấu trúc thực hiện thủ tục $z^{-1} = z^{-3} \cdot z^2$ và đưa bộ $\uparrow 3$ vào 2 nhánh theo tính chất phân bố vào phép cộng của phép nội suy; (b) Cấu trúc thực hiện sự đồng nhất (9.3.2.11) và (9.3.1.11) tức là $\uparrow 3z^{-3} \equiv z^{-1}\uparrow 3$ và $z^2\downarrow 2 \equiv \downarrow 2z$; (c) Cấu trúc thực hiện sự tương đương (9.2.4.5) tức là $\uparrow\downarrow 2/3 \equiv \downarrow\uparrow 2/3$.

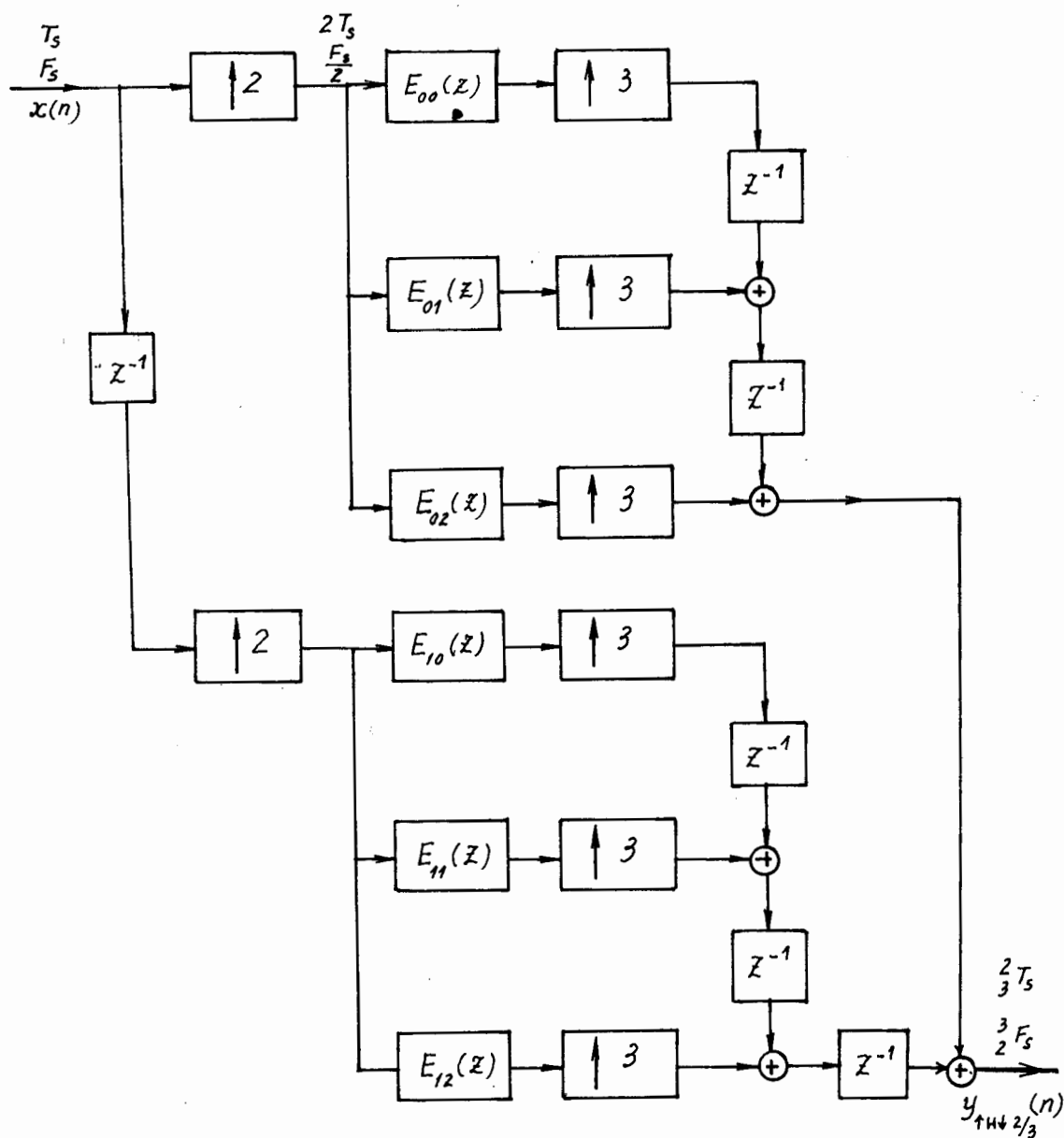
Hình 9.5.3.7.

Đối với hình 9.5.3.7 (c) ta lại dùng phân hoạch nhiều pha loại 2 cho các thành phần nhiều pha $E_0(z)$ và $E_1(z)$ như sau:

$$E_0(z) = z^{-2}E_{00}(z^3) + z^{-1}E_{01}(z^3) + E_{02}(z^3)$$

$$E_1(z) = z^{-2}E_{10}(z^3) + z^{-1}E_{11}(z^3) + E_{12}(z^3)$$

Sau đó sử dụng sự đồng nhất (9.3.2.11) chúng ta sẽ có cấu trúc trên hình 9.5.3.8.



Hình 9.5.3.8.

Rõ ràng là cấu trúc trên hình 9.5.3.8 là cấu trúc ưu việt nhất, chúng ta không thể cải tiến thêm được nữa. Với cấu trúc này nhịp của tín hiệu vào $x(n)$ trước khi

vào các bộ lọc sẽ giảm đi 2 lần (tổng quát là M lần) tức là chu kỳ lấy mẫu tăng 2 lần: $2T_s$. Nếu giả sử $h(n)$ là bộ lọc FIR có chiều dài N : $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$ thì các bộ lọc con $E_{01}(z)$ và $E_{11}(z)$ sẽ có chiều dài giảm đi $2 \times 3 = 6$ lần (tổng quát là $M \times L$ lần).

9.6. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA HỆ THỐNG LỌC SỐ NHIỀU NHỊP

Bây giờ chúng ta sẽ nêu một số ứng dụng tiêu biểu của các hệ thống lọc số nhiều nhịp.

9.6.1. BANK LỌC SỐ

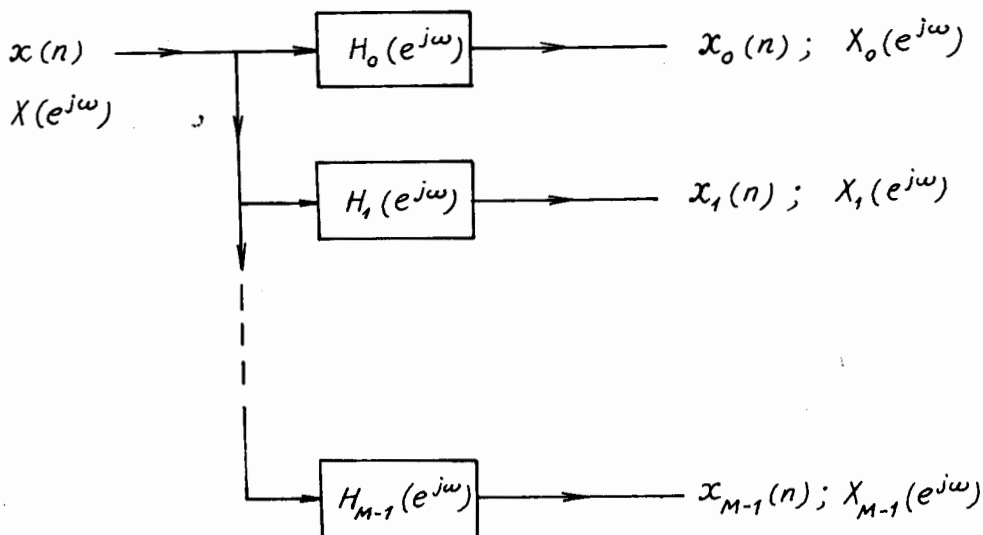
a) Định nghĩa bank lọc số

Bank lọc số là một tập hợp các bộ lọc số với cùng chung một đầu vào và nhiều đầu ra hoặc với nhiều đầu vào và chung một đầu ra.

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng có hai loại bank lọc số là bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp.

b) Định nghĩa bank lọc số phân tích

Bank lọc số phân tích là tập hợp các bộ lọc số có đáp ứng tần số là $H_k(e^{j\omega})$ được nối với nhau theo kiểu một đầu vào và nhiều đầu ra, cấu trúc của bank lọc số phân tích được minh hoạ trên hình 9.6.1.1.



Hình 9.6.1.1.

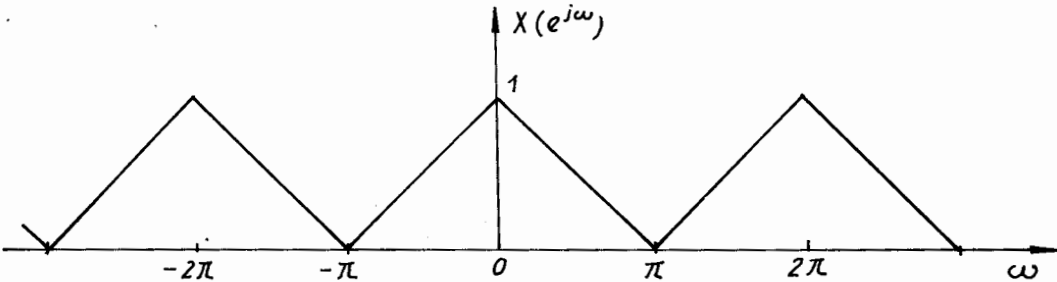
Theo hình 9.6.1.1 ta thấy rằng tín hiệu $x(n)$ đưa vào đầu vào và được phân tích thành M tín hiệu ở đầu ra là $x_k(n)$ ($0 \leq k \leq M - 1$), như vậy trong miền tần số mỗi tín

hiệu $x_k(n)$ sẽ chiếm một dải tần số con trong dải tần của $x(n)$ nên M tín hiệu $x_k(n)$ được gọi là tín hiệu dải con (Subband).

Còn các bộ lọc số, $H_0(e^{j\omega})$ sẽ là bộ lọc số thông thấp, $H_1(e^{j\omega})$ đến $H_{M-2}(e^{j\omega})$ sẽ là các bộ lọc số thông dải còn $H_{M-1}(e^{j\omega})$ sẽ là bộ lọc số thông cao, mà các tần số cắt của các bộ lọc số này sẽ kế tiếp nhau. Như vậy các bộ lọc $H_0(e^{j\omega}), H_1(e^{j\omega}), \dots, H_{m-1}(e^{j\omega})$ được gọi là các bộ lọc phân tích, còn tập hợp các bộ lọc hay $\{H_0(e^{j\omega}), H_1(e^{j\omega}), \dots, H_{M-1}(e^{j\omega})\}$ được gọi là bank lọc phân tích.

Ví dụ 9.6.1.1

Cho bank lọc số phân tích lý tưởng với hệ số $M = 2$, tín hiệu vào bank lọc là $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ được cho trên hình 9.6.1.2 sau đây.

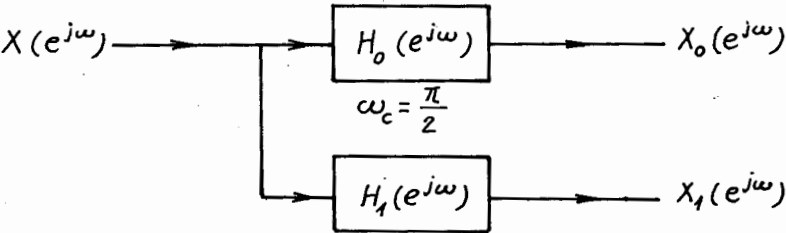


Hình 9.6.1.2.

- + Hãy vẽ sơ đồ bank lọc số phân tích này.
- + Hãy dùng đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu ra.

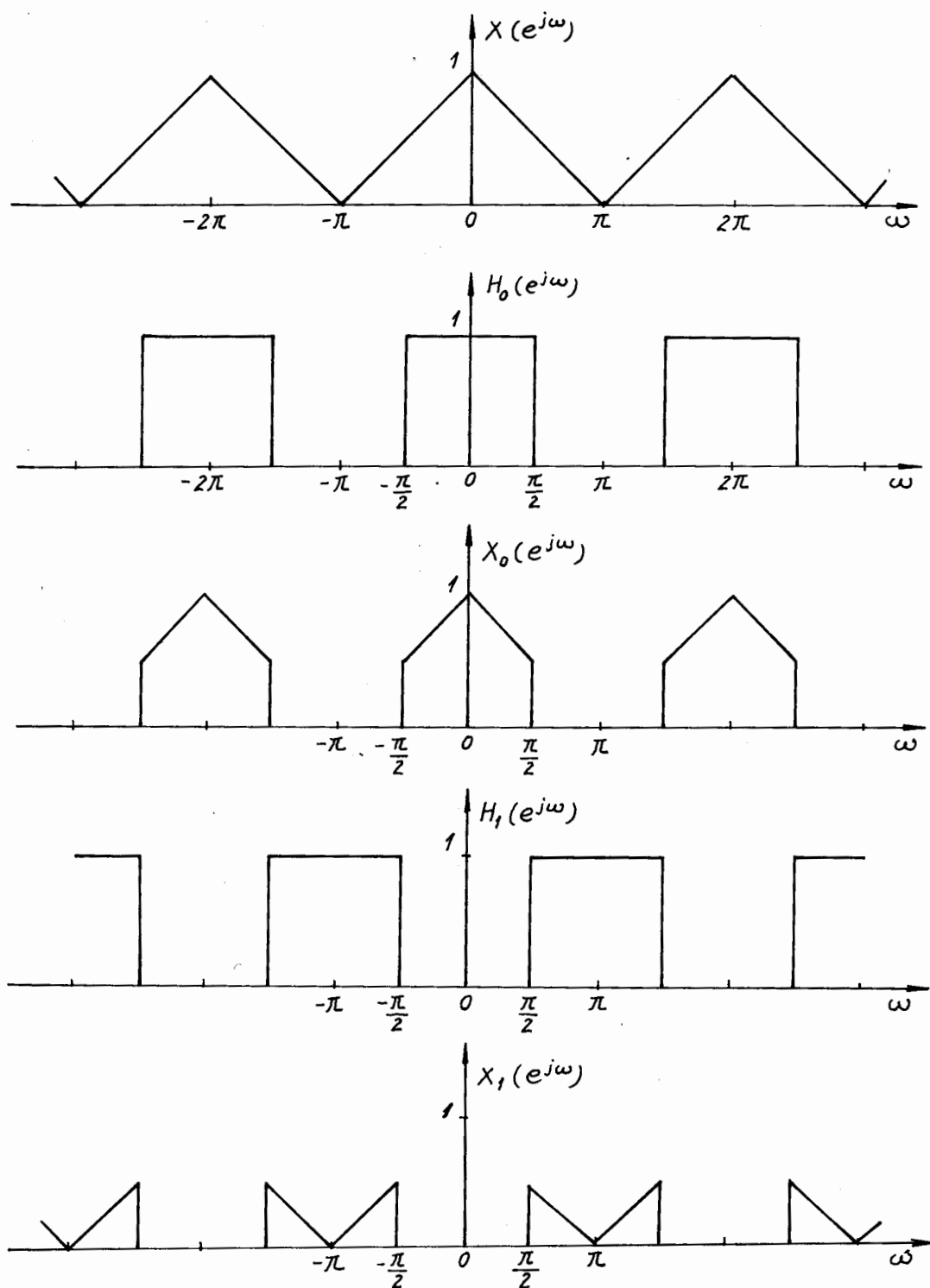
Giải

Theo sơ đồ tổng quát của bank lọc phân tích cho trên hình 9.6.1.1 thay $M = 2$ ta sẽ có bank lọc phân tích 2 kênh được minh hoạ trên hình 9.6.1.3, trong đó có hai bộ lọc số lý tưởng; $H_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp lý tưởng với tần số cắt là $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, $H_1(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông cao lý tưởng cũng với tần số cắt $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.



Hình 9.6.1.3.

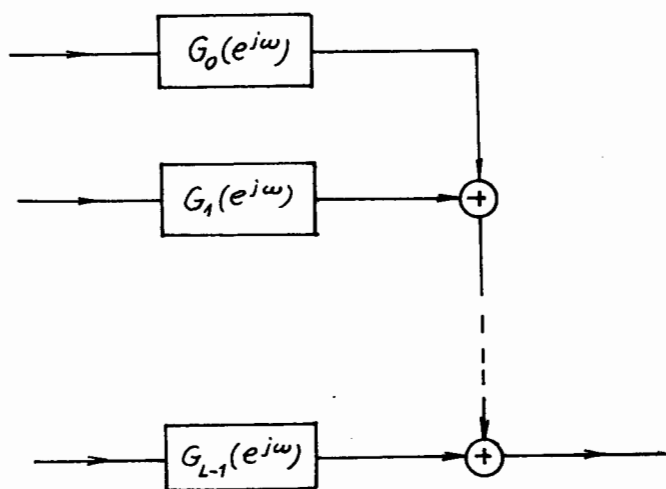
Đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu ra là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$ được cho trên hình 9.6.1.4 sau đây.



Hình 9.6.1.4.

c) Định nghĩa bank lọc số tổng hợp

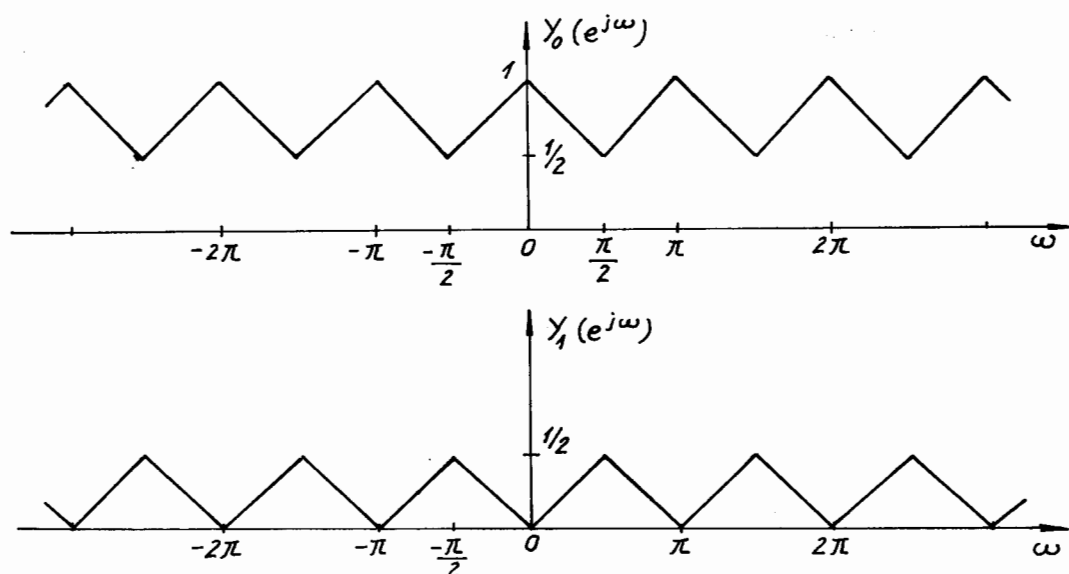
Bank lọc số tổng hợp là tập hợp các bộ lọc số có đáp ứng tần số là $G_k(e^{j\omega})$ được nối với nhau theo kiểu nhiều đầu vào và một đầu ra, cấu trúc của bank lọc số tổng hợp được minh họa trên hình 9.6.1.5.



Hình 9.6.1.5.

Ví dụ 9.6.1.2

Cho bank lọc số tổng hợp lý tưởng với hệ số $M = 2$, có hai tín hiệu vào bank lọc số này có phổ tần là $Y_0(e^{j\omega})$ và $Y_1(e^{j\omega})$ có dạng cho trên hình 9.6.1.6 cần tổng hợp với nhau để được tín hiệu có phổ là $Y(e^{j\omega})$.



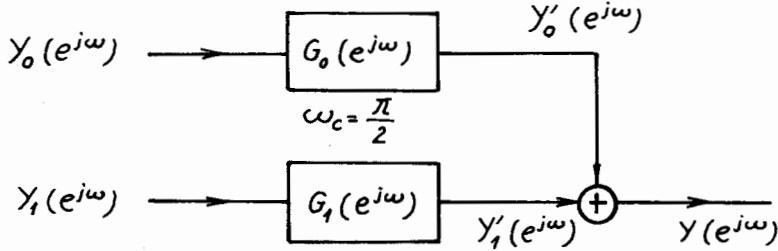
Hình 9.6.1.6.

+ Hãy vẽ sơ đồ bank lọc số tổng hợp

+ Hãy dùng đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu đầu ra.

Giải

Theo sơ đồ tổng quát của bank lọc số tổng hợp cho trên hình 9.6.1.5 thay $M = 2$ ta có bank lọc tổng hợp 2 kênh được minh họa trên hình 9.6.1.7, trong đó $G_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông thấp lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, $G_1(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông cao lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.



Hình 9.6.1.7.

Đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu ra được cho trên hình 9.6.1.8.

d) Bank lọc số DFT

Trong chương 4 chúng ta đã nghiên cứu biến đổi Fourier rời rạc (DFT) và chúng ta đã biểu diễn DFT dưới dạng ma trận như sau:

$$\underline{\mathbf{X}}(k)_M = \underline{\mathbf{W}}_M \underline{\mathbf{x}}(m)_M \quad (9.6.1.1)$$

$\underline{\mathbf{W}}_M$ là ma trận vuông $M \times M$ gồm các phần tử W_M^{km} . Ở đây $W_M^{km} = e^{j \frac{2\pi}{M} km}$

Tương tự ta có biến đổi Fourier rời rạc ngược (IDFT)

$$\underline{\mathbf{x}}(m)_M \frac{1}{M} \underline{\mathbf{W}}_M^* = (\mathbf{X})(k)_M \quad (9.6.1.2)$$

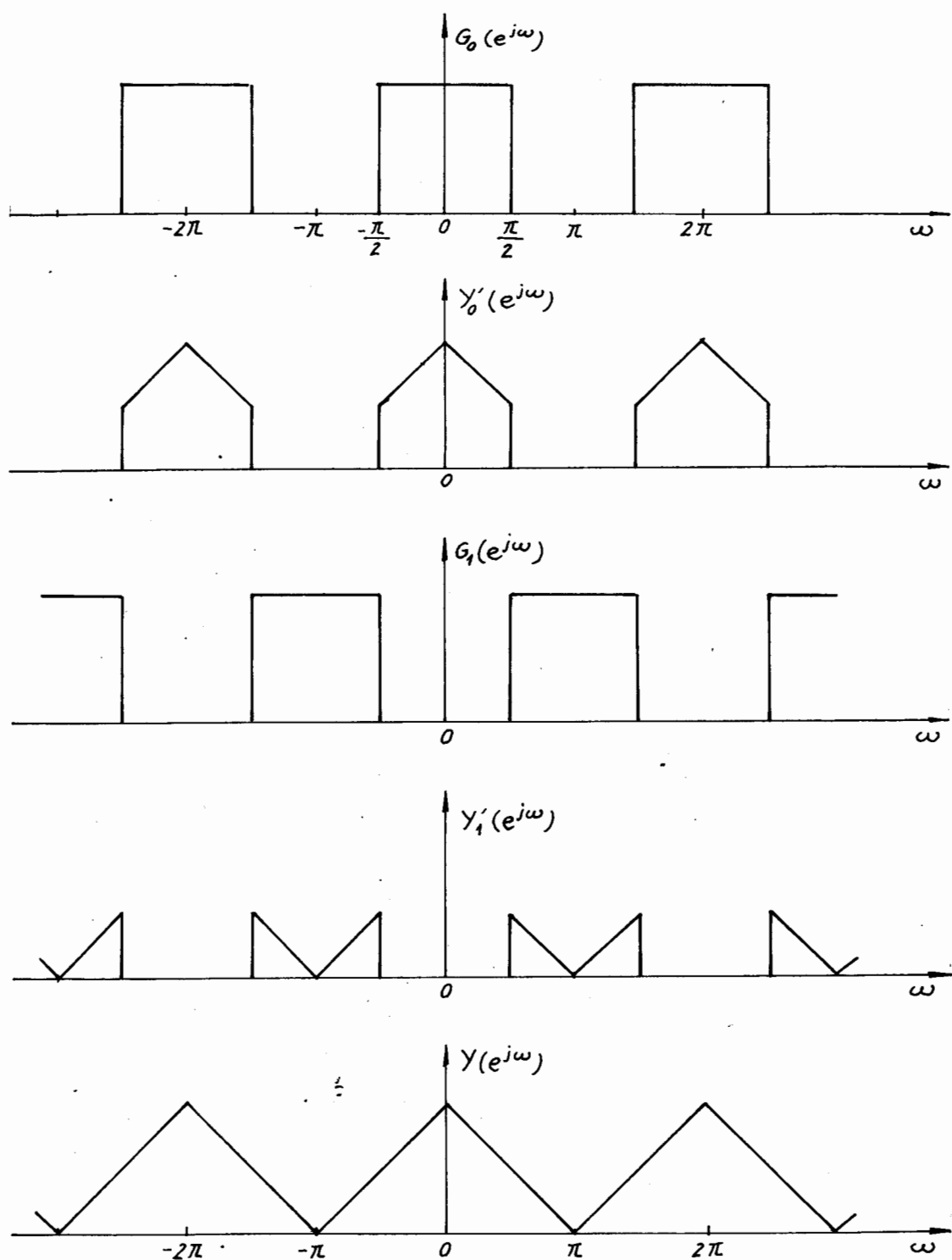
Ở đây $\underline{\mathbf{W}}_M^*$ là liên hợp phức của ma trận $\underline{\mathbf{W}}_M$.

Để hình thành bank lọc số DFT, giả sử ta có dãy $x(n)$ là dãy vào, từ dãy $x(n)$ này chúng ta tạo ra M dãy $g_i(n)$ bằng cách cho dãy $x(n)$ qua một đường dây trễ, cụ thể ta có:

$$g_i(n) = x(n - i) \quad (9.6.1.3)$$

Đầu ra của bank lọc số DFT này sẽ là các tín hiệu $x_k(n)$ có dạng như sau:

$$\begin{aligned} x_k(n) &= \sum_{i=0}^{M-1} g_i(n) W_M^{-ki} \\ x_k(n) &= \sum_{i=0}^{M-1} (n-i) W_M^{-ki} \end{aligned} \quad (9.6.1.4)$$



Hình 9.6.1.8.

Biểu diễn dưới dạng ma trận ta có:

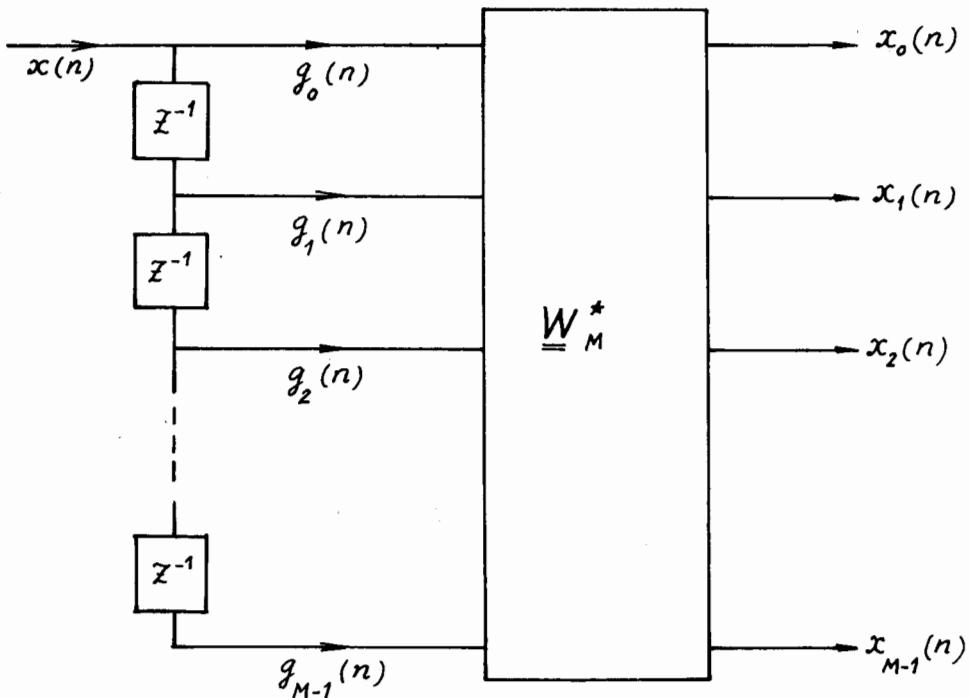
$$\underline{x}_k(n) = \underline{\underline{W}}_M^* \underline{g}_k(n) \quad (9.6.1.4)$$

ở đây:

$$\underline{x}_k(n) = \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_{M-1}(n) \end{bmatrix}; \quad \underline{g}_k(n) = \begin{bmatrix} g_0(n) \\ g_1(n) \\ \vdots \\ g_{M-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x[n-(M-1)] \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{W}}_M^* = \begin{bmatrix} W_M^{-0} & W_M^{-0} & W_M^{-0} & \dots & W_M^{-0} \\ W_M^{-0} & W_M^{-1} & W_M^{-2} & \dots & W_M^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_M^{-0} & W_M^{-(M-1)} & W_M^{-2(M-1)} & \dots & W_M^{-(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}$$

Từ đây hình thành bank lọc DFT cho trên hình 9.6.1.9 như sau:



Hình 9.6.1.9.

Lấy biến đổi z biểu thức (9.6.1.4) ta có:

$$ZT[x_k(n)] = ZT \left[\sum_{i=0}^{M-1} x(n-i) W_M^{-ki} \right]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow X_k(z) &= \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} X(z) W_M^{-ki} \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} (z W_M^k)^{-i} X(z) \\
&= X(z) \sum_{i=0}^{M-1} (z W_M^k)^{-i}
\end{aligned}$$

Ta gọi:

$$H_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} (z W_M^k)^{-i}, \quad (0 \leq k \leq M-1) \quad (9.6.1.6)$$

$$\Rightarrow X_k(z) = X(z) \cdot H_k(z) \quad (9.6.1.7)$$

Vậy ta có thể viết:

$$H_0(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \quad (9.6.1.8)$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(M-1)}$$

$$h_0(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (9.6.1.9)$$

$$\begin{aligned}
H_0(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{M-1}{2}}
\end{aligned} \quad (9.6.1.10)$$

Từ đây ta có thể viết quan hệ giữa $H_0(z)$ và $H_k(z)$ như sau:

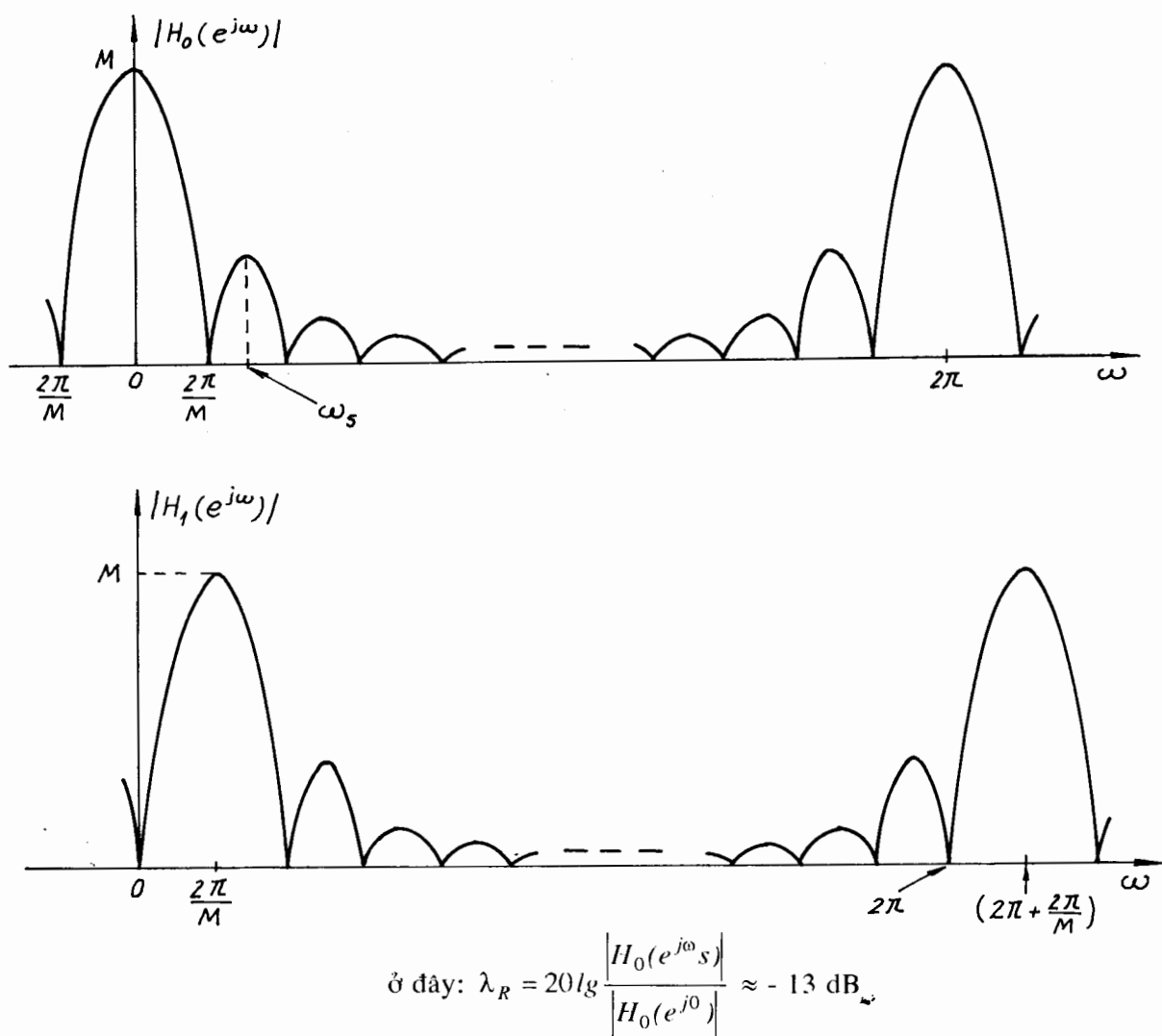
$$H_k(z) = H_0(z W_M^k) \quad (9.6.1.11)$$

và:

$$H_k(e^{j\omega}) = H_0\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{M}k\right)}\right) \quad (9.6.1.12)$$

Vậy $H_k(e^{j\omega})$ chính là phiên bản trễ tần số đi một lượng $\frac{2\pi}{M}k$ của $H_0(e^{j\omega})$.

Hình 9.6.1.10 sẽ minh họa cho ta rõ quan hệ giữa $H_0(e^{j\omega})$ và $H_1(e^{j\omega})$. Từ đây chúng ta có thể suy ra quan hệ giữa các $H_k(e^{j\omega})$ với $0 \leq k \leq M-1$.



Hình 9.6.1.10.

e) Biểu diễn nhiều pha bank lọc số

* Biểu diễn nhiều pha loại 1 đối với bank lọc phân tích

Trong biểu thức (9.4.2.1) chúng ta đã có biểu diễn nhiều pha loại 1 M thành phần đối với hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M)$$

Đối với bank lọc số phân tích gồm M bộ lọc có hàm truyền đạt là $H_0(z)$, $H_1(z)$, ..., $H_{M-1}(z)$, vậy đối với mỗi hàm truyền đạt $H_k(z)$ chúng ta có thể biểu diễn dưới dạng phân hoạch nhiều pha như sau:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_{km}(z^M) \quad (9.6.1.13)$$

Chúng ta có thể viết biểu thức (9.6.1.13) dưới dạng sau đây đối với từng $H_k(z)$:

$$H_0(z) = 1.E_{00}(z^M) + z^{-1}.E_{01}(z^M) + \dots + z^{-(M-1)}.E_{0,M-1}(z^M)$$

$$H_1(z) = 1.E_{10}(z^M) + z^{-1}.E_{11}(z^M) + \dots + z^{-(M-1)}.E_{1,M-1}(z^M)$$

\vdots

$$H_{M-1}(z) = 1.E_{M-1,0}(z^M) + z^{-1}.E_{M-1,1}(z^M) + \dots + z^{-(M-1)}.E_{M-1,M-1}(z^M)$$

Từ đây chúng ta có thể biểu diễn biểu thức (9.6.1.13) dưới dạng ma trận sau đây:

$$\underline{\mathbf{H}}(z) = \underline{\mathbf{E}}(z^M) \cdot \underline{\mathbf{z}}^{-m} \quad (9.6.1.14)$$

với:

$$\underline{\mathbf{H}}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{z}}^{-m} = \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{E}}(z^M) = \begin{bmatrix} E_{00}(z^M) & E_{01}(z^M) & \dots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{10}(z^M) & E_{11}(z^M) & \dots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \dots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

Ma trận $\underline{\mathbf{E}}(z^M)$ gọi là ma trận nhiều pha loại 1 M thành phần đối với bank lọc phân tích.

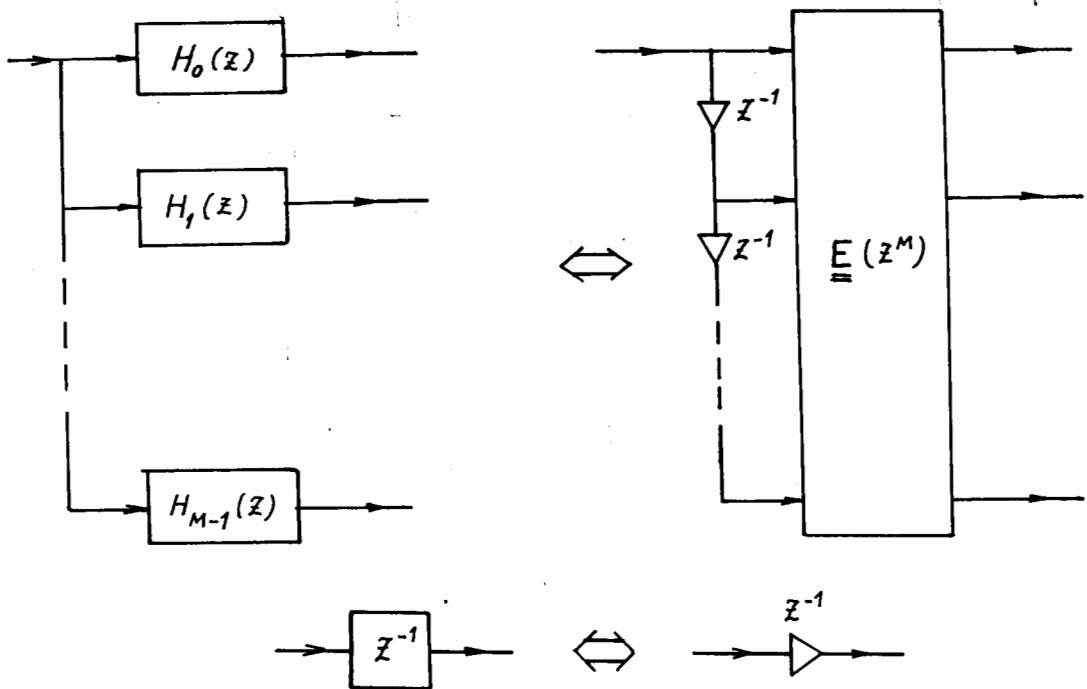
Hình 9.6.1.11 sẽ minh hoạ cấu trúc nhiều pha loại 1 M thành phần đối với bank lọc phân tích.

** Biểu diễn nhiều pha loại 2 đối với bank lọc tổng hợp*

Trong biểu thức (9.4.3.2) chúng ta đã có biểu diễn nhiều pha loại 2 M thành phần đối với một hàm truyền đạt $G(z)$ như sau:

$$G(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_m(z^M) \quad 0 \leq m \leq M-1$$

Đối với bank lọc số tổng hợp gồm M bộ lọc có hàm truyền đạt là $G_0(z)$, $G_1(z)$, ..., $G_{M-1}(z)$. Vậy đối với mỗi hàm truyền đạt $G_k(z)$ chúng ta có thể biểu diễn dưới dạng phân hoạch nhiều pha loại 2 M thành phần như sau:



Hình 9.6.1.11.

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_{mk}(z^M) \quad (9.6.1.15)$$

Khai triển biểu thức (9.6.1.15) đối với từng hàm truyền đạt $G_k(z)$ chúng ta có các biểu thức sau đây:

$$G_0(z) = z^{-(M-1)} F_{00}(z^M) + z^{-(M-2)} F_{10}(z^M) + \dots + 1 \cdot F_{M-1,0}(z^M)$$

$$G_1(z) = z^{-(M-1)} F_{01}(z^M) + z^{-(M-2)} F_{11}(z^M) + \dots + 1 \cdot F_{M-1,1}(z^M)$$

⋮

$$G_{M-1}(z) = z^{-(M-1)} F_{0,M-1}(z^M) + z^{-(M-2)} F_{1,M-1}(z^M) + \dots + 1 \cdot F_{M-1,M-1}(z^M)$$

Từ đây chúng ta có thể biểu diễn biểu thức (9.6.1.15) dưới dạng ma trận sau đây:

$$\underline{G}^t(z) = z^{-(M-1)} \cdot \underline{z}^{mt} \cdot \underline{F}(z^M) \quad (9.6.1.16)$$

Với:

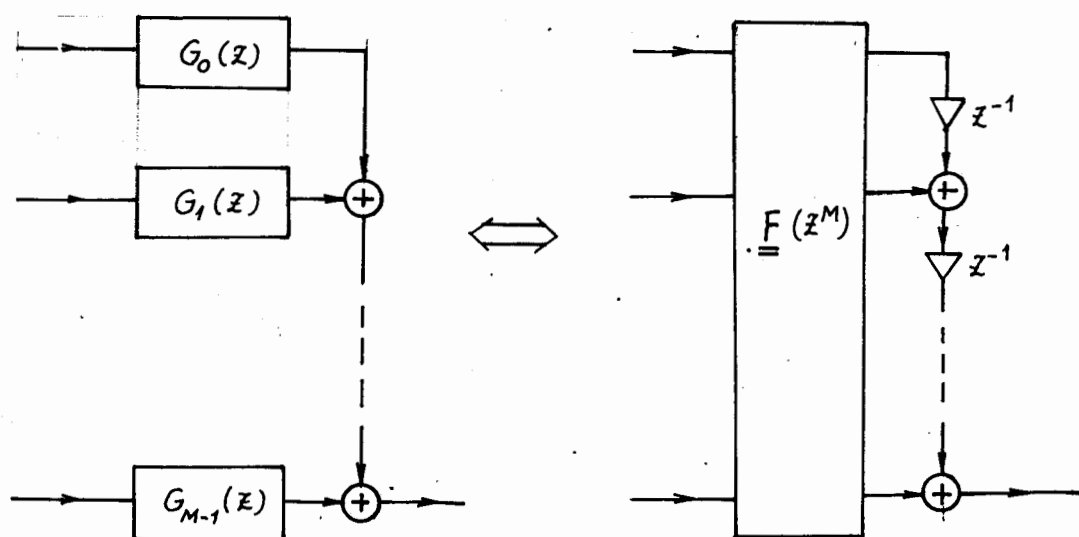
$$\underline{G}^t(z) = [G_0(z) \quad G_1(z) \quad \dots \quad G_{M-1}(z)]$$

$$\underline{z}^{mt} = [1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^{M-1}]$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}(z^M) = \begin{bmatrix} F_{00}(z^M) & F_{01}(z^M) & \cdots & F_{0,M-1}(z^M) \\ F_{10}(z^M) & F_{11}(z^M) & \cdots & F_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{M-1,0}(z^M) & F_{M-1,1}(z^M) & \cdots & F_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

Ma trận $\underline{\underline{\mathbf{F}}}(z^M)$ là ma trận nhiều pha loại $2M$ thành phần đối với bank lọc tổng hợp.

Hình 9.6.1.12 sẽ minh họa cấu trúc nhiều pha loại $2M$ thành phần đối với bank lọc tổng hợp.



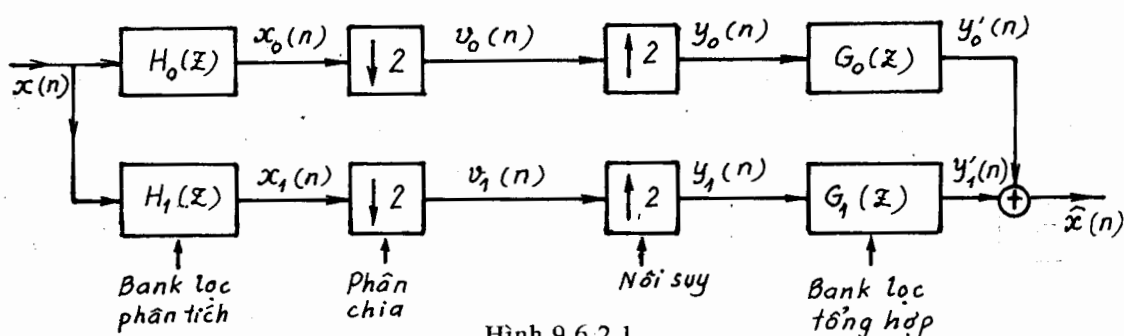
Hình 9.6.1.12.

9.6.2. BANK LỌC SỐ NHIỀU NHỊP HAI KÊNH

a) Bank lọc số nhiều nhịp hai kênh và bank lọc gương cầu phương QMF

Trong phần trên, khi xét bank lọc số, sau khi qua bank lọc phân tích chúng ta sẽ thu được các tín hiệu dải con (Subband) $x_k(n)$ ($0 \leq k \leq M-1$). Sau đó chúng ta đã nghiên cứu bank lọc số tổng hợp. Bây giờ chúng ta sẽ kết hợp bank lọc số phân tích và bank lọc số tổng hợp với các bộ phân chia và nội suy để tạo ra bank lọc số nhiều nhịp. Trước hết ta nghiên cứu trường hợp $M=2$, ta gọi là bank lọc số nhiều nhịp hai kênh, bank lọc số nhiều nhịp này được minh họa trên hình 9.6.2.1.

Trong bank lọc số phân tích cho trên hình 9.6.2.1 ta thấy rằng $H_0(z)$ là bộ lọc số thông thấp, còn $H_1(z)$ là bộ lọc số thông cao. Khi thiết kế các bộ lọc số này sẽ không thể đạt được lý tưởng, tất nhiên đối với cả các bộ lọc số $G_0(z)$ và $G_1(z)$ ở bank lọc tổng hợp, nên tín hiệu ra $\hat{x}(n)$ của bank lọc số nhiều nhịp này sẽ khác với tín hiệu vào $x(n)$.



Hình 9.6.2.1.

Hình 9.6.2.2 sẽ minh họa một vài trường hợp của đáp ứng biên độ $|H_0(e^{j\omega})|$ và $|H_1(e^{j\omega})|$.

Nhìn vào hình 9.6.2.2 ta thấy rằng $|H_0(e^{j\omega})|$ và $|H_1(e^{j\omega})|$ có quan hệ sau đây:

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi - \omega)})| \quad (9.6.2.1)$$

và nếu ta tưởng tượng đặt một gương phẳng vào vị trí $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ trên trục tần số ω thì $|H_1(e^{j\omega})|$ sẽ là ảnh gương của $|H_0(e^{j\omega})|$, và theo thang tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì $\frac{\pi}{2}$ chính là một phần tư tần số lấy mẫu. Chính vì vậy băng số lọc nhiều nhịp cho trên hình 9.6.2.1 được gọi là bank lọc số gương cầu phương (Quadrature mirror filter bank: QMF), và chúng ta ký hiệu bộ lọc này bằng 3 chữ đầu của tiếng Anh: QMF.

Trong bank lọc QMF này có 3 loại sai số có thể sinh ra là: sai số do thành phần hư danh (aliasing) của $|H_1(e^{j\omega})|$ và $|H_0(e^{j\omega})|$, sai số do méo biên độ và sai số độ méo pha.

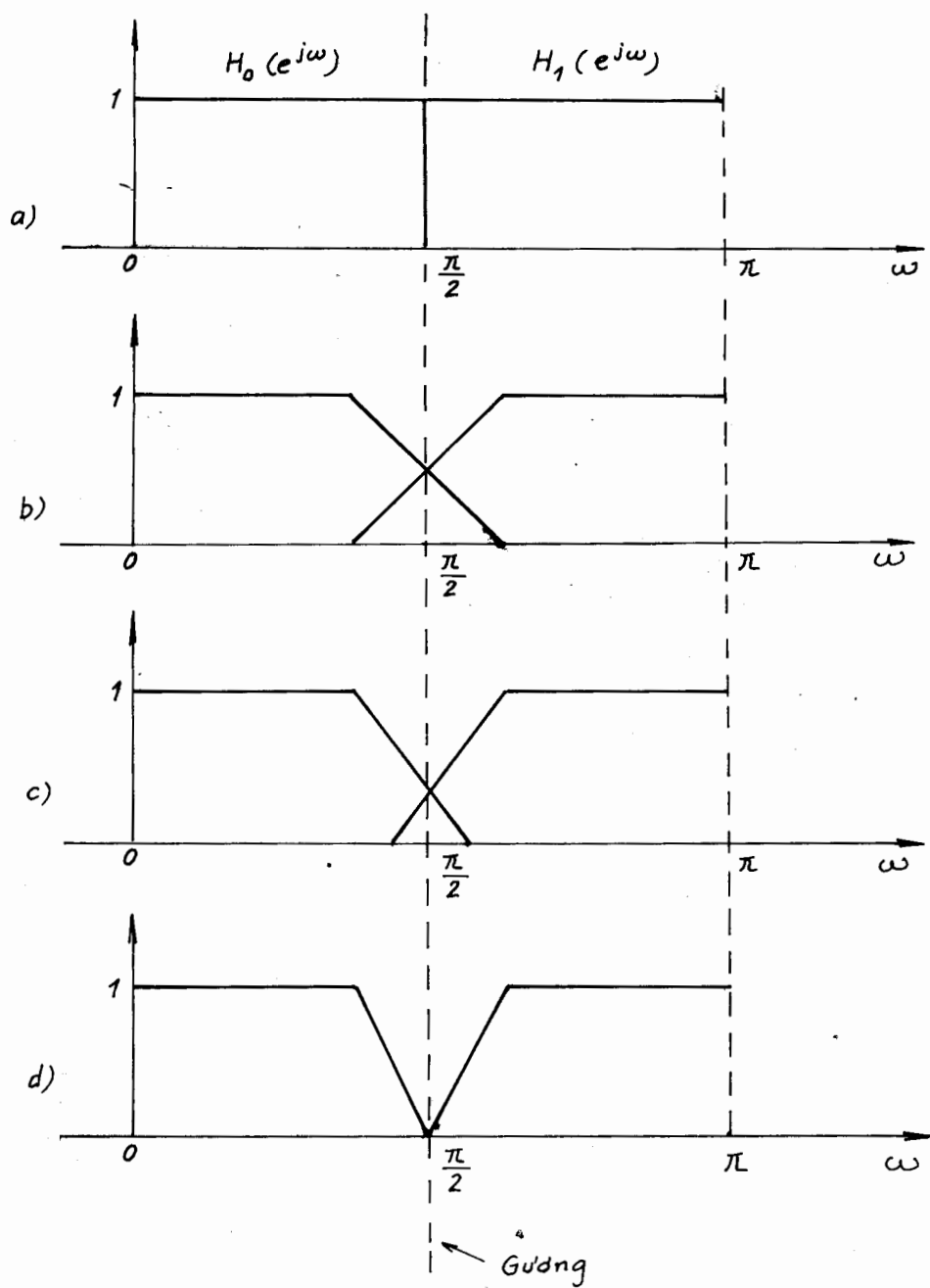
Còn nếu dạng của tín hiệu ra $\hat{x}(n)$ giống hoàn toàn dạng của tín hiệu vào $x(n)$, tức là:

$$\hat{x}(n) = c \cdot x(n - n_0) \quad (9.6.2.2)$$

c là hằng số

thì bank lọc QMF này được gọi là bank lọc QMF khôi phục hoàn hảo (Perfect Reconstruction: PR) và ký hiệu là PR QMF.

Chú ý rằng thuật ngữ bank lọc số gương cầu phương (QMF) được giải thích đối với bank lọc số 2 kênh, nhưng sau này ta cũng dùng thuật ngữ này đối với bank lọc số M kênh.



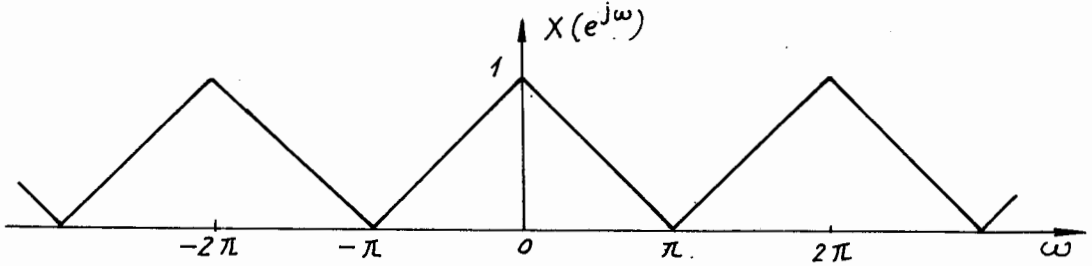
(a): trường hợp bộ lọc số lý tưởng,

(b); (c); (d): các trường hợp bộ lọc số không lý tưởng.

Hình 9.6.2.2.

Ví dụ 9.6.2.1

Giả sử chúng ta có bank lọc số QMF cho trên hình 9.6.2.1, $H_0(z) = G_0(z)$ là các bộ lọc số thông thấp lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \pi/2$, $H_1(z) = G_1(z)$ là các bộ lọc số thông cao lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \pi/2$. Cho phổ của tín hiệu vào $x(n)$ là $X(e^{j\omega})$ có dạng như trên hình 9.6.2.3 sau đây:



Hình 9.6.2.3.

+ Hãy vẽ $X_0(e^{j\omega})$, $V_0(e^{j\omega})$, $Y_0(e^{j\omega})$, $Y'_0(e^{j\omega})$

+ Hãy vẽ $X_1(e^{j\omega})$, $V_1(e^{j\omega})$, $Y_1(e^{j\omega})$, $Y'_1(e^{j\omega})$

+ Hãy vẽ $\hat{X}(e^{j\omega})$.

(/)

Giải

Đồ thị tần số yêu cầu vẽ được cho trên hình 9.6.2.4.

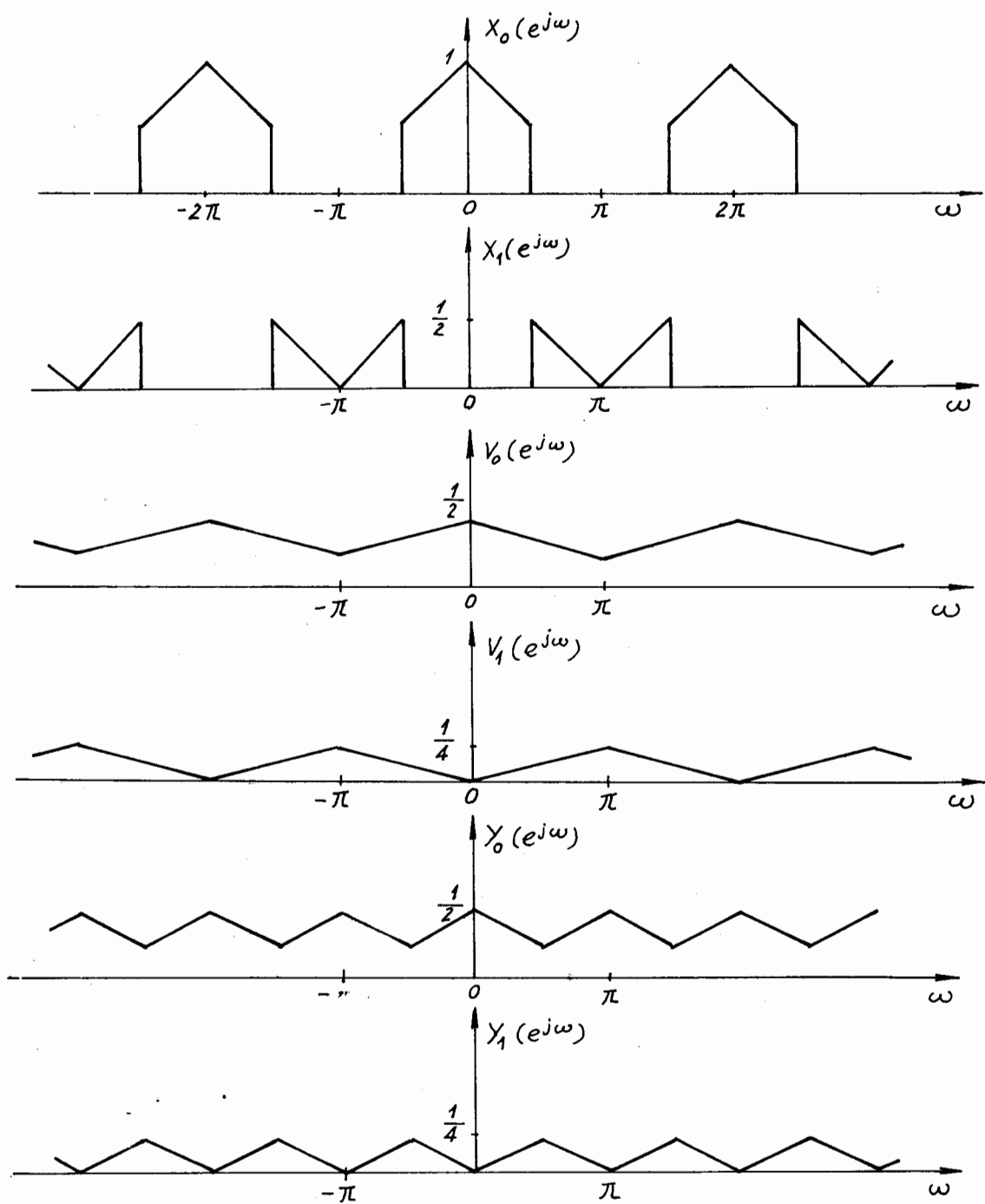
Trên hình 9.6.2.4 ta thấy rằng nếu các bộ lọc số của hai bank lọc phân tích và tổng hợp đều là các bộ lọc số lý tưởng thì sẽ không gây ra các thành phần hư danh (aliasing), vậy ta thấy dạng của tín hiệu ra khỏi bank lọc QMF này $X(e^{j\omega})$ giống hoàn toàn dạng của tín hiệu vào bank lọc $\hat{X}(e^{j\omega})$, chỉ khác nhau hệ số $1/2$.

b) Phân tích các sai số trong bank lọc số nhiều nhịp

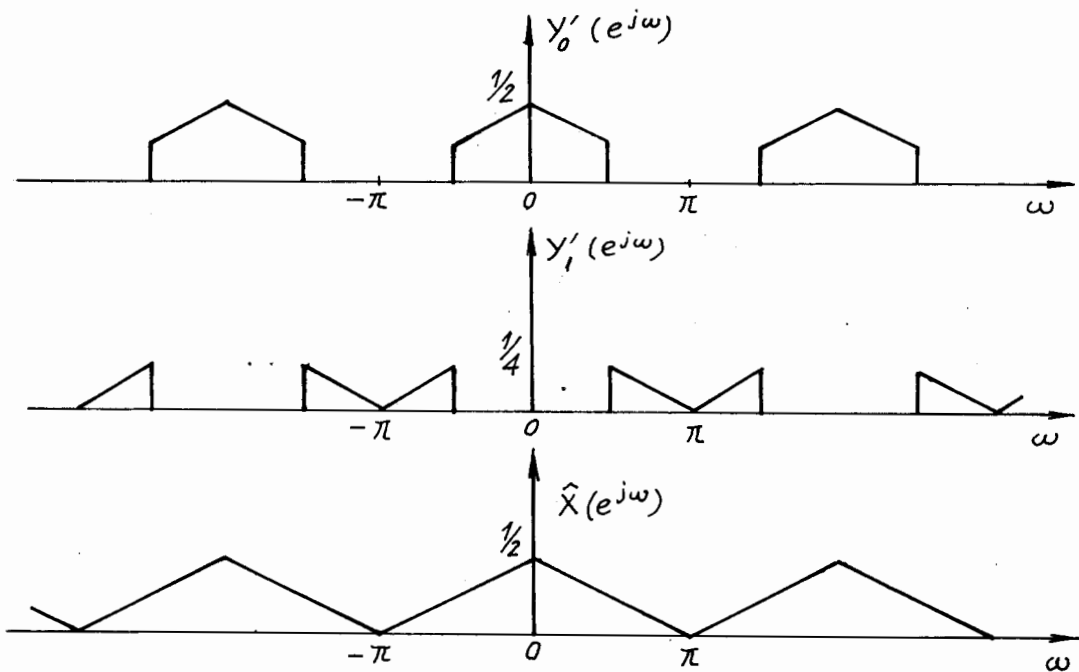
* Sai số do thành phần hư danh

Trên thực tế ta thấy rằng các bộ lọc số $H_0(z)$ và $H_1(z)$ không thể đạt lý tưởng như trên hình 9.6.2.2. Trên hình 9.6.2.2 (a) là trường hợp lý tưởng thì sẽ không gây ra sai số hư danh tức là sẽ không gây ra chồng phổ đối với tín hiệu ra khỏi bộ phân chia $\downarrow 2$ là $V_0(e^{j\omega})$ và $V_1(e^{j\omega})$ theo sơ đồ trên hình 9.6.1.1 và bề rộng của dải thông và dải chặn trong trường hợp lý tưởng đúng bằng $\pi/2$ và bề rộng của dải quá độ $\Delta\omega = 0$. Còn trên hình 9.6.2.2 (d) là trường hợp các bộ lọc không lý tưởng nhưng cũng không gây chồng phổ đối với $V_0(e^{j\omega})$ và $V_1(e^{j\omega})$, tức là thành phần hư danh không xuất hiện. Nhưng bề rộng của dải thông sẽ nhỏ hơn $\pi/2$ và bề rộng của dải chặn sẽ lớn hơn $\pi/2$, trong trường hợp hình 9.6.2.2 (d) này nếu ta chọn bề rộng của dải quá độ rất hẹp thì sẽ gần đạt lý tưởng và không gây chồng phổ, nhưng các bộ lọc số sẽ rất đắt tiền.

Trong trường hợp hình 9.6.2.2 (b) và (c) sẽ gây hiện tượng chồng phổ, tức là có thành phần hư danh xuất hiện với tín hiệu $V_0(e^{j\omega})$ và $V_1(e^{j\omega})$. Nhưng thành phần hư danh (aliasing) có thể khử được nếu ta thiết kế cẩn thận bank lọc tổng hợp để bù lại thành phần hư danh do bank lọc phân tích gây ra.



Hình 9.6.2.4.



Hình 9.6.2.4 (tiếp).

* Biểu thức của tín hiệu ra được khôi phục $\hat{x}(n)$

Trên hình 9.6.2.1 chúng ta có 2 tín hiệu ra khỏi bank lọc phân tích là $x_k(n)$ với $k = 0$ và 1. Vậy ta có thể viết trong miền n như sau:

$$x_k(n) = h_k(n) * x(n) \quad \text{với } k = 0; 1 \quad (9.6.2.3)$$

Trong miền z ta có:

$$X_k(z) = H_k(z).X(z) \quad (9.6.2.4)$$

Từ đây áp dụng biểu thức (9.2.2.5) với hệ số phân chia $M = 2$ đối với tín hiệu được phân chia $V_k(n)$ trong miền z ta có:

$$V_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 X_K(z^2 \cdot e^{-j\pi l}) = \frac{1}{2} [X_K(z^2) + X_K(-z^2)] \quad (9.6.2.5)$$

Thay $X_k(z)$ từ biểu thức (9.6.2.4) ta có:

$$V_k(z) = \frac{1}{2} [H_K(z^2).X(z^2) + H_K(-z^2).X(-z^2)] \quad (9.6.2.6)$$

Ta thấy rằng thành phần thứ 2 trong biểu thức (9.6.2.5) cũng như (9.6.2.6) chính là thành phần hư danh mà chúng ta cần phải khử đi.

Để tính biến đổi z của các tín hiệu $y_k(n)$ sau khi ra khỏi bộ nội suy, áp dụng biểu thức (9-2-3-4) chúng ta có thể viết với $M = 2$ như sau:

$$\begin{aligned}
 Y_k(z) &= V_k(z^2) = \frac{1}{2} [X_k(z) + X_k(-z)] \\
 &= \frac{1}{2} [H_k(z).X_k(z) + H_k(-z).X(-z)]
 \end{aligned} \tag{9.6.2.7}$$

Sau khi ra khỏi các bộ lọc tổng hợp $G_0(z)$ và $G_1(z)$ chúng ta thu được tín hiệu ra được khôi phục như sau:

$$\hat{X}(z) = G_0(z).Y_0(z) + G_1(z).Y_1(z) \tag{9.6.2.8}$$

Thay vào biểu thức (9.6.2.7) ta có:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} \{ G_0(z)[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)] + \\
 &\quad + G_1(z)[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)] \} \\
 \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)]X(z) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)]X(-z)
 \end{aligned} \tag{9.6.2.9}$$

Chúng ta có thể biểu diễn dưới dạng ma trận sau:

$$2\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} X(z) & X(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} \tag{9.6.2.10}$$

Gọi:

$$\underline{X}(z) = \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}; \quad \underline{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix}; \quad \underline{G}(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$2\hat{X}(z) = \underline{X}'(z).\underline{H}(z).\underline{G}(z) \tag{9.6.2.11}$$

Ma trận $\underline{H}(z)$ được gọi là ma trận thành phần hư danh. Trong mục 9.2.2 chúng ta đã xét thành phần hư danh (aliasing) là do bộ phận chia sinh ra, còn trong mục 9.2.3 chúng ta đã xét phổ phụ (imaging) là do bộ nội suy sinh ra.

* Khử thành phần hư danh

Trong mục 9.2.2 ta biết rằng thành phần hư danh chính là $X(-z)$ vậy muốn khử thành phần hư danh chúng ta chỉ việc cho triệt tiêu đại lượng đứng trước $X(-z)$ trong biểu thức (9.6.2.9), tức là:

$$\begin{aligned}
 &G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z) = 0 \\
 \Rightarrow &\begin{cases} G_0(z) = H_1(-z) \\ G_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.6.2.12}$$

Chúng ta có thể viết lại biểu thức (9.6.2.9) như sau:

$$\widehat{X}(z) = T_0(z)X(z) + T_1(z)X(-z) \quad (9.6.2.13)$$

với
$$T_0(z) = \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)]$$

$$T_1(z) = \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)]$$

Để khử thành phần hư danh theo (9.6.2.12) thì $T_1(z) = 0$ vậy có thể viết $\widehat{X}(z)$ như sau:

$$\begin{aligned} \widehat{X}(z) &= T_0(z).X(z) \\ &= \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] .X(z) \end{aligned} \quad (9.6.2.14)$$

* Nhận xét

Để khử thành phần hư danh, tức là phải thiết kế các bộ lọc số lý tưởng, thì điều này rất là khó khăn và nếu có tạo được các bộ lọc số gần lý tưởng thì rất là tốn kém. Vậy trong kỹ thuật bank lọc số nhiều nhịp QMF, người ta cho phép có thành phần hư danh nhưng trong bank lọc phân tích thì $H_0(z)$ có thể bù $H_1(z)$ sau đó chọn bank lọc tổng hợp sao cho thành phần hư danh của nhánh trên bù cho thành phần hư danh của nhánh dưới.

* Méo biên độ và méo pha

Theo biểu thức (9.6.2.14) ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{X}(z) &= T_0(z)X(z) \\ T_0(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)] \end{aligned}$$

Điều kiện khử thành phần hư danh được cho trong biểu thức (9.2.6.12), thay vào $T_0(z)$ ta có:

$$T_0(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)H_1(-z) + H_1(z)H_0(-z)]$$

Trong miền tần số ω ta có:

$$\widehat{X}(e^{j\omega}) = T_0(e^{j\omega}).X(e^{j\omega}) \quad (9.6.2.15)$$

Nếu biểu diễn $T_0(e^{j\omega})$ dưới dạng modul và argument ta có:

$$\begin{aligned} T_0(e^{j\omega}) &= |T_0(e^{j\omega})| . e^{i\varphi(\omega)} \\ \Rightarrow \widehat{X}(e^{j\omega}) &= |T_0(e^{j\omega})| e^{i\varphi(\omega)} X(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (9.6.2.16)$$

Theo biểu thức (9.6.2.16) ta thấy rằng nếu $T_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông tốt (Allpass) pha tuyến tính, tức là $T_0(e^{j\omega})$ có dạng sau đây:

$$|T_0(e^{j\omega})| = c \quad \text{với mọi } \omega \quad (c: \text{hằng số})$$

và:

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega \quad (9.6.2.17)$$

thì bank lọc QMF sẽ không gây méo biên độ và méo pha.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) &= c \cdot e^{-j\alpha\omega} X(e^{j\omega}) \\ \hat{X}(z) &= c \cdot z^{-\alpha} X(z)\end{aligned}\quad (9.6.2.18)$$

Vậy trong miền n ta có:

$$\hat{x}(n) = c \cdot x(n - \alpha) \quad (9.6.2.19)$$

Lúc ấy ta nói rằng bank lọc số QMF là bank lọc số khôi phục hoàn hảo (Perfect Reconstruction: PR) tín hiệu vì tín hiệu ra $\hat{x}(n)$ chỉ sai khác với tín hiệu vào $x(n)$ theo hệ số tỷ lệ c và bị trễ đi một lượng là α .

c) Bank lọc QMF 2 kênh không có hư danh

Chúng ta thấy rằng đối với bank lọc số QMF cho trên hình 9.6.2.1 quan hệ giữa $H_0(z)$ và $H_1(z)$ phải tuân theo biểu thức sau đây:

$$H_1(z) = H_0(-z) \quad (9.6.2.20)$$

hoặc
$$H_0(z) = H_1(-z)$$

Đối với bank lọc QMF thực hiện được về vật lý thì các hệ số của các bộ lọc số trong bank lọc phải là thực, tức là:

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\omega - \pi)})| = |H_0(e^{j(\omega - \pi)})| = |H_0(e^{j(\pi - \omega)})| \quad (9.6.2.21)$$

Thay biểu thức (9.6.2.20) vào biểu thức (9.6.2.12) ta có điều kiện triệt tiêu thành phần hư danh như sau:

$$G_0(z) = H_0(z)$$

và
$$G_1(z) = -H_1(z) \quad (9.6.2.22)$$

Nhìn vào các biểu thức (9.6.2.20) và (9.6.2.22) ta thấy rằng cả 4 loại bộ lọc số $H_0(z)$, $H_1(z)$, $G_0(z)$ và $G_1(z)$ trong bank lọc số QMF 2 kênh đều được xác định chỉ bởi một bộ lọc số $H_0(z)$. Như vậy để hình thành bank lọc số QMF 2 kênh chúng ta chỉ cần thiết kế một bộ lọc số $H_0(z)$ là đủ.

Thay vào biểu thức (9.6.2.14) ta có:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_1^2(z)] \cdot X(z) \\ &= \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_0^2(-z)] \cdot X(z)\end{aligned}\quad (9.6.2.23)$$

ở đây:

$$T_0(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_0^2(-z)]$$

Vậy trong miền tần số ω ta có:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega - \pi)})] \cdot X(e^{j\omega})$$

d) Biểu diễn theo phân hoạch nhiều pha bank lọc số QMF

Chúng ta có thể biểu diễn bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp theo phân hoạch nhiều pha hàm truyền đạt $H_0(z)$.

Theo phân hoạch nhiều pha loại 1 hai thành phần ta có:

$$H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \quad (9.6.2.24)$$

mà theo biểu thức (9.6.2.20) ta có $H_1(z) = H_0(-z)$ vậy với $H_1(z)$ ta có thể viết như sau:

$$H_1(z) = E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2) \quad (9.6.2.25)$$

Có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0(z^2) \\ z^{-1}E_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (9.6.2.26)$$

Đối với bank lọc tổng hợp $G_0(z)$ và $G_1(z)$, theo biểu thức (9.6.2.22) ta có thể viết:

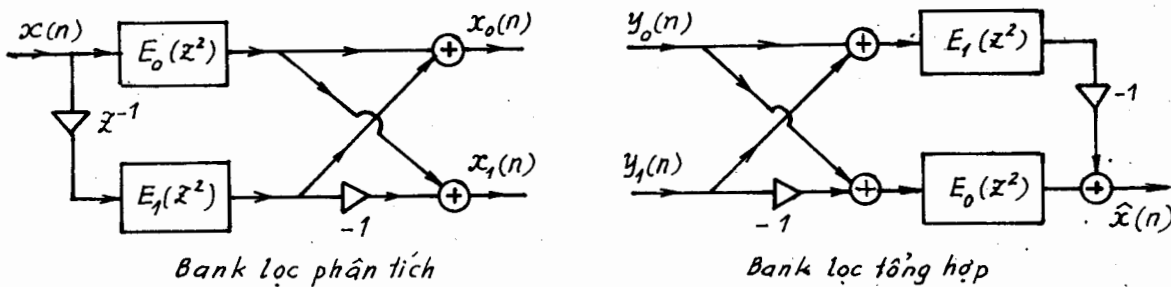
$$G_0(z) = z^{-1}E_1(z^2) + E_0(z^2)$$

$$G_1(z) = z^{-1}E_1(z^2) - E_0(z^2)$$

Có thể viết dưới dạng ma trận sau đây:

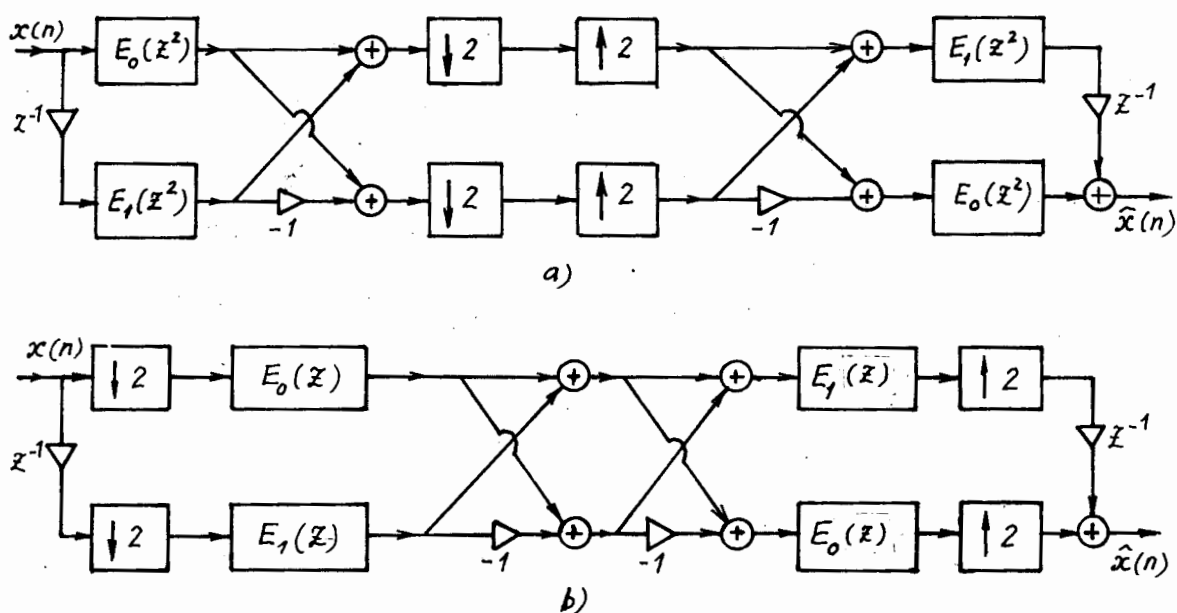
$$\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}E_1(z^2) & E_0(z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.6.2.27)$$

Dựa vào các biểu thức (9.6.2.24) và (9.6.2.25) chúng ta sẽ vẽ được cấu trúc nhiều pha của bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp, các cấu trúc này được minh hoạ trên hình 9.6.2.5.



Hình 9.6.2.5.

Từ hai bank lọc số phân tích và tổng hợp trên hình 9.6.2.5 kết hợp với các hệ thống phân chia và nội suy sẽ cho ta bank lọc số QMF hai kênh dưới dạng cấu trúc nhiều pha được cho trên hình 9.6.2.6 (a) và (b).



Hình 9.6.2.6.

9.6.3. BANK LỌC SỐ NHIỀU NHỊP M KÊNH

a) Bank lọc số QMF M kênh

Phần trên chúng ta đã nghiên cứu bank lọc số nhiều nhị phân hai kênh QMF. Trong phần này chúng ta tổng quát hoá cho trường hợp bank lọc số nhiều nhị phân M kênh và chúng ta cũng vẫn gọi là bank lọc số QMF M kênh.

Sơ đồ tổng quát của bank lọc số QMF M kênh được cho trên hình 9.6.3.1 sau đây.

b) Biểu thức của tín hiệu được khôi phục $\hat{x}(n)$

Nhìn vào hình 9.6.3.1, chúng ta có thể viết trong miền n như sau:

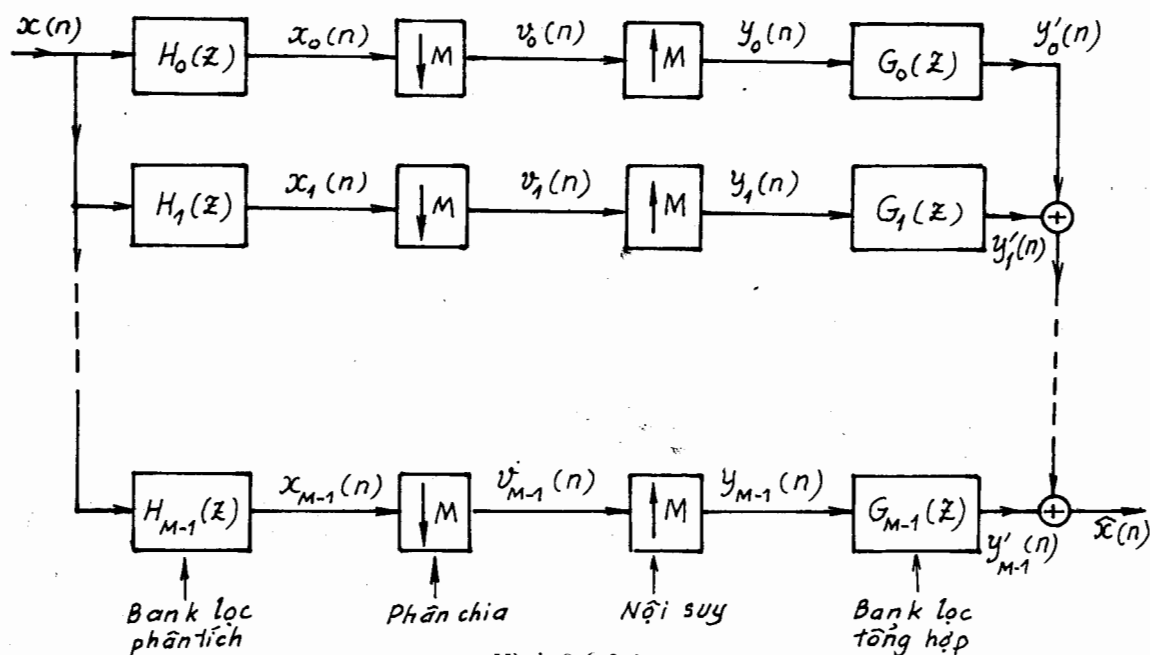
$$\begin{aligned} x_k(n) &= x(n) * h_k(n) \\ &= h_k(n) * x(n) \end{aligned} \quad (9.6.3.1)$$

Tương ứng trong miền z ta có:

$$\begin{aligned} X_k(z) &= X(z) H_k(z) \\ &= H_k(z) X(z) \end{aligned} \quad (9.6.3.2)$$

Theo biểu thức (9.3.1.6) ta có biểu thức của tín hiệu sau khi ra khỏi bộ phân chia trong miền z như sau:

$$\begin{aligned}
 V_k(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X_k(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \quad (9.6.3.3)
 \end{aligned}$$



Hình 9.6.3.1.

Theo biểu thức (9.2.3.4) ta có biểu thức của tín hiệu sau khi ra khỏi bộ nội suy trong miền z như sau:

$$\begin{aligned}
 Y_k(z) &= V_k(z^M) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X_k(z W_M^l) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z W_M^l) X(z W_M^l) \quad (9.6.3.4)
 \end{aligned}$$

Và cuối cùng chúng ta có tín hiệu được khôi phục ở đầu ra của bank lọc số M kênh này như sau:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(z) &= \sum_{k=0}^M Y'_k(z) \\
 Y'_k &= Y_k(z) \cdot G_k(z) = G_k(z) \cdot Y_k(z) \\
 \Rightarrow \hat{X}(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} Y_k(z) G_k(z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(zW_M^l) X(zW_M^l) \cdot G_k(z) \\
\Rightarrow \quad \hat{X}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(zW_M^l) \sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW_M^l) \cdot G_k(z)
\end{aligned} \tag{9.6.3.5}$$

Chúng ta có thể viết lại dưới dạng sau đây:

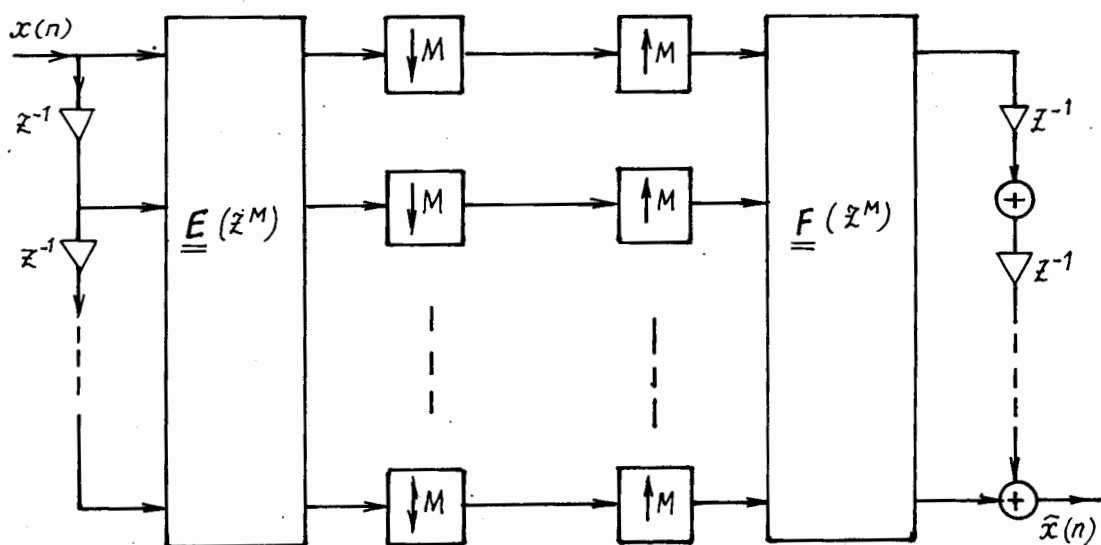
$$\hat{X}(z) = \sum_{l=0}^{M-1} T_l(z) X(zW_M^l) \tag{9.6.3.6}$$

với

$$T_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW_M^l) \cdot G_k(z) \tag{9.6.3.7}$$

c) Biểu diễn nhiều pha bank lọc số nhiều nhịp M kênh

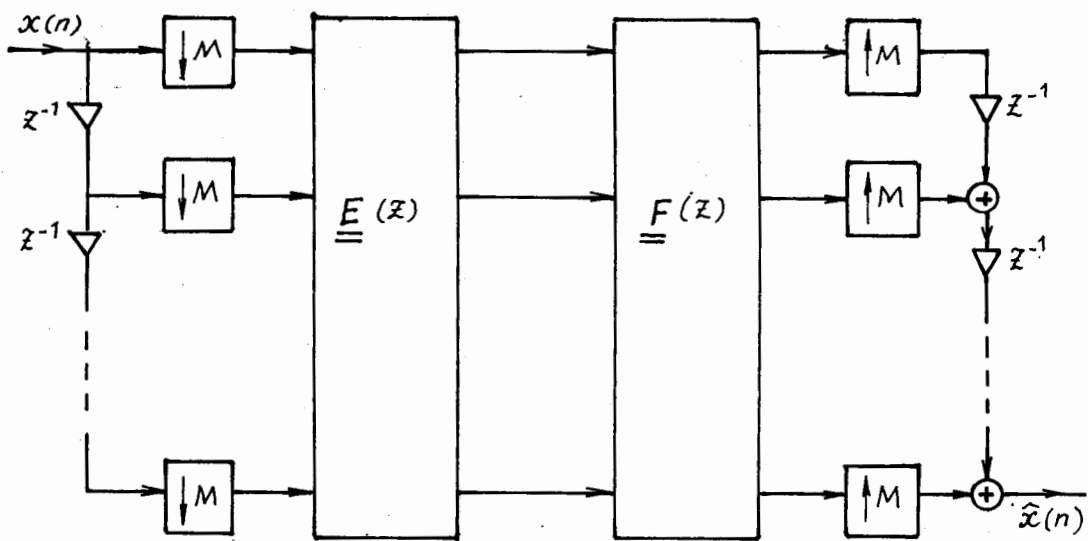
Trong phần trên chúng ta đã xét biểu diễn nhiều pha bank lọc số, kết hợp với các hệ thống phân chia và nội suy chúng ta có sơ đồ biểu diễn nhiều pha bank lọc số nhiều nhịp QMF M kênh được minh họa trên hình 9.6.3.2 sau đây:



Hình 9.6.3.2.

Chúng ta có thể chuyển sơ đồ trên hình 9.6.3.2 thành sơ đồ hiệu quả hơn để thực hiện cấu trúc nhiều pha bank lọc số nhiều nhịp QMF M kênh, cấu trúc hiệu quả này được minh họa trên hình 9.6.3.3 sau đây.

Trong cấu trúc nhiều pha hiệu quả trên hình 9.6.3.3 ta thấy rằng các hệ số của các bộ lọc số (hệ số của các ma trận $\underline{E}(z)$ và $\underline{F}(z)$) sẽ thao tác với nhịp lấy mẫu thấp hơn (tức là tần số lấy mẫu thấp hơn và chu kỳ lấy mẫu lớn hơn).



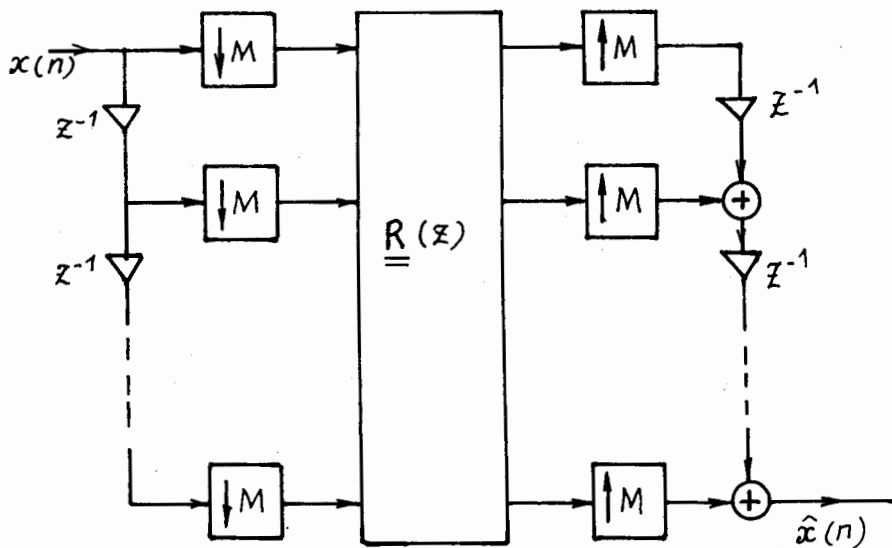
Hình 9.6.3.3.

Nhìn vào sơ đồ trên hình 9.6.3.3 ta thấy rằng ta có thể kết hợp ma trận $\underline{\underline{E}}(z)$ và $\underline{\underline{F}}(z)$ tạo thành ma trận $\underline{\underline{R}}(z)$ $M \times M$ sau đây:

$$\underline{\underline{R}}(z) = \underline{\underline{F}}(z) \underline{\underline{E}}(z) \quad (9.6.3.8)$$

Ma trận $\underline{\underline{R}}(z)$ được gọi là ma trận nhiều pha.

Vậy chúng ta có thể đơn giản hoá sơ đồ trên hình 9.6.3.3 thành sơ đồ trên hình 9.6.3.4 sau đây.



Hình 9.6.3.4.

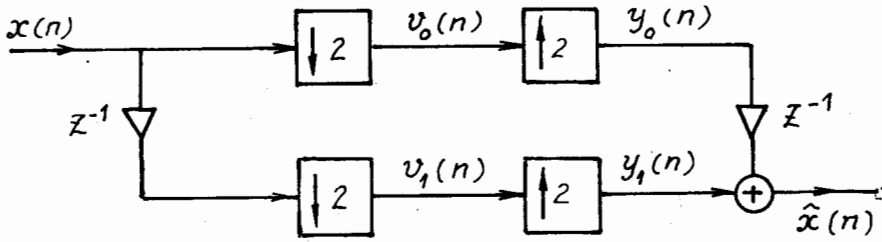
9.6.4. HỆ THỐNG KHÔI PHỤC HOÀN HẢO (PERFECT RECONSTRUCTION)

a) Hệ thống khôi phục hoàn hảo đơn giản

Trong các mục trên chúng ta đã nói đến hệ thống khôi phục hoàn hảo (PR), tức là tín hiệu ra chỉ sai khác tín hiệu vào một hệ số tỷ lệ và hệ số trễ. Giả sử $x(n]$ là tín hiệu ra, $x(n]$ là tín hiệu vào, ta có quan hệ sau đây:

$$\hat{x}(n) = c.x(n - n_0) \quad (9.6.4.1)$$

Hình 9.6.4.1 cho ta một ví dụ về bank lọc số khôi phục hoàn hảo 2 kênh rất đơn giản, chỉ dùng các bộ trễ.



Hình 9.6.4.1.

So sánh sơ đồ trên hình 9.6.2.1 của bank lọc số nhiều nhịp QMF 2 kênh với sơ đồ trên hình 9.6.4.1 ta thấy rằng:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1; \quad H_1(z) = z^{-1} \\ G_0(z) &= z^{-1}; \quad G_1(z) = 1 \end{aligned} \quad (9.6.4.2)$$

Theo biểu thức (9.6.2.13) ta có:

$$\begin{aligned} T_0(z) &= \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(z) + G_1(z).H_1(z)] \\ &= \frac{1}{2} [z^{-1} + z^{-1}] = z^{-1} \end{aligned} \quad (9.6.4.4)$$

$$\begin{aligned} T_1(z) &= \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(-z) + G_1(z).H_1(-z)] \\ &= \frac{1}{2} [z^{-1} - z^{-1}] = 0 \end{aligned} \quad (9.6.4.5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \hat{X}(z) &= T_0(z).X(z) = z^{-1}X(z) \\ \hat{x}(m) &= x(n - 1) \end{aligned} \quad (9.6.4.6)$$

Ví dụ 9.6.4.1

Cho tín hiệu $x(n]$ có dạng sau đây:

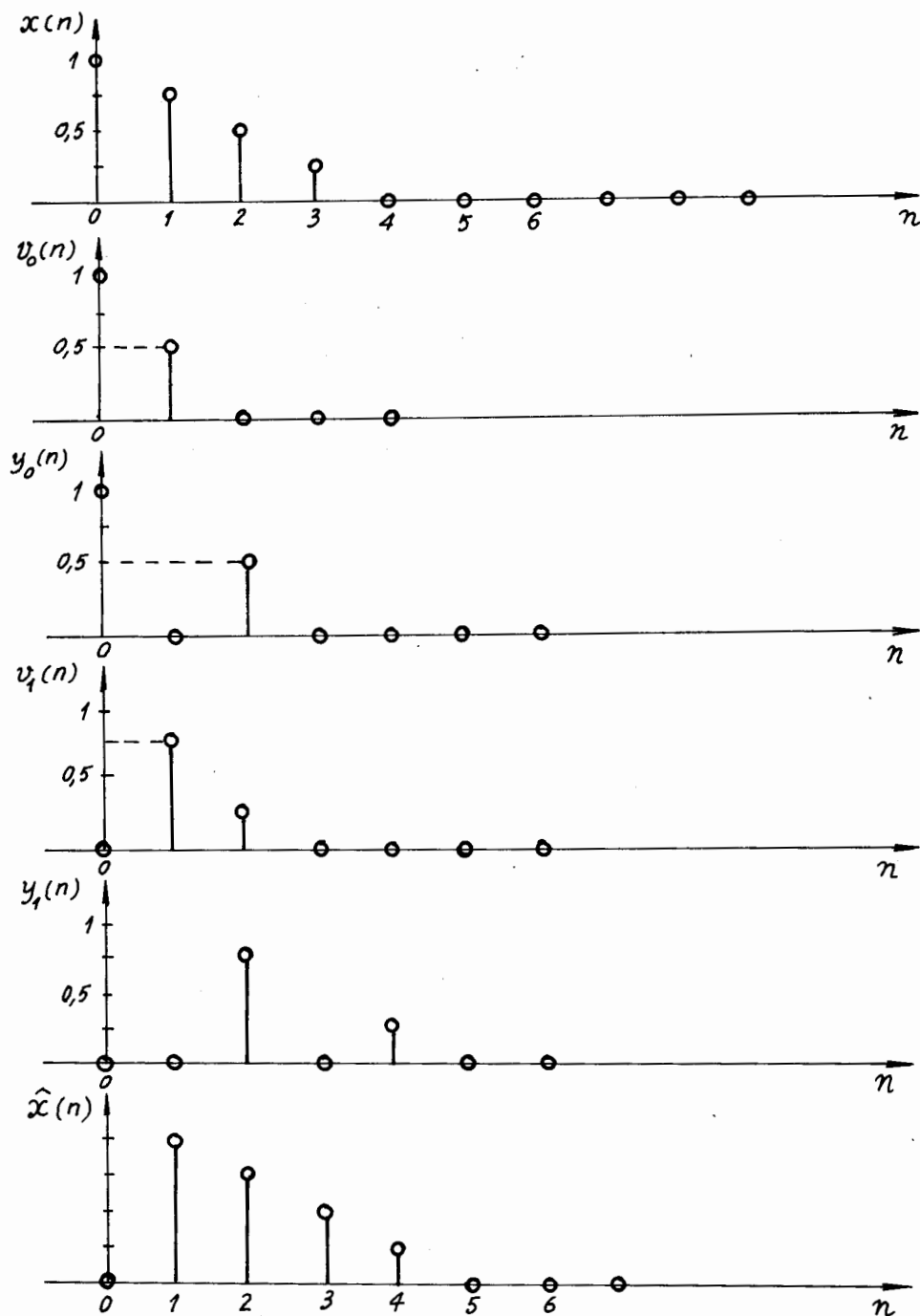
$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

tín hiệu này đi vào hệ thống khôi phục hoàn hảo 2 kênh cho trên hình 9.6.4.1.

Hãy dùng đồ thị thời gian giải thích dạng của tín hiệu ra $\hat{x}(n)$.

Giải

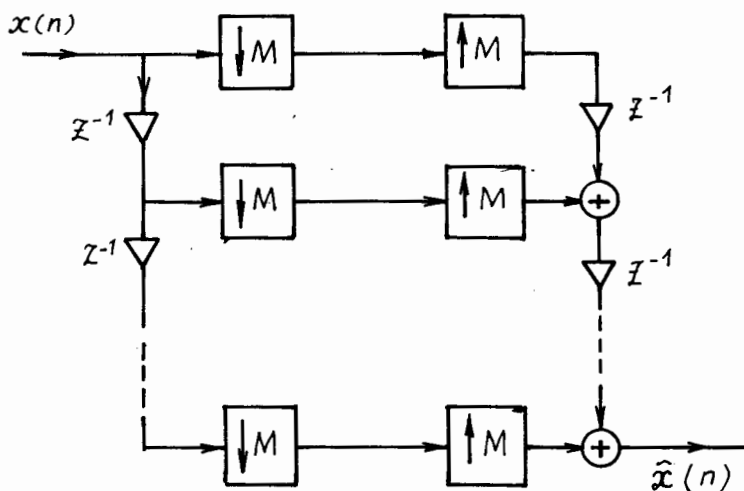
Để giải thích dạng của tín hiệu ra $\hat{x}(n)$, chúng ta dùng đồ thị thời gian cho trên hình 9.6.4.2.



Hình 9.6.4.2.

b) Hệ thống khôi phục hoàn hảo đơn giản M kênh

Phân trên chúng ta đã xét hệ thống khôi phục hoàn hảo 2 kênh. Trong phần này chúng ta tổng quát hoá cho trường hợp M kênh. Hình 9.6.4.3 cho ta sơ đồ tổng quát của bank lọc khôi phục hoàn hảo đơn giản M kênh.



Hình 9.6.4.3.

Dựa vào hình 9.6.4.3 ta thấy rằng các bộ lọc phân tích và tổng hợp sẽ có dạng sau đây:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= z^{-k} \\ G_k(z) &= z^{-(M-1-k)} \quad 0 \leq k \leq M-1 \end{aligned} \quad (9.6.4.7)$$

và:

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-(M-1)} X(z) \\ x(n) &= x[n - (M-1)] \end{aligned} \quad (9.6.4.8)$$

c) Hệ thống khôi phục hoàn hảo tổng quát

Chúng ta vừa xét sang các hệ thống khôi phục hoàn hảo đơn giản chỉ dùng các dây trễ, vậy theo hình 9.6.3.4 và biểu thức (9.6.3.8) thì rõ ràng ta có quan hệ sau đây:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}(z)}} = \underline{\underline{\mathbf{F}(z)}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}(z)}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (9.6.4.9)$$

$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$: ma trận đơn vị $M \times M$

Nếu $\underline{\underline{\mathbf{R}(z)}}$ thoả mãn điều kiện (9.6.4.9) ở trên thì sơ đồ trên hình (9.6.4.3) sẽ tương ứng với sơ đồ trên hình (9.6.3.4).

Nhưng trong thực tế điều kiện cần và đủ đối với một hệ thống khôi phục hoàn hảo là chúng ta sẽ dùng các bộ lọc FIR hoặc IIR, vậy rõ ràng là điều kiện (9.4.6.9) sẽ được thay bằng điều kiện thực hiện trong thực tế như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}(z)}} = \underline{\underline{\mathbf{F}(z)}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}(z)}} = c \cdot z^{-m_0} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (9.6.4.10)$$

hoặc:

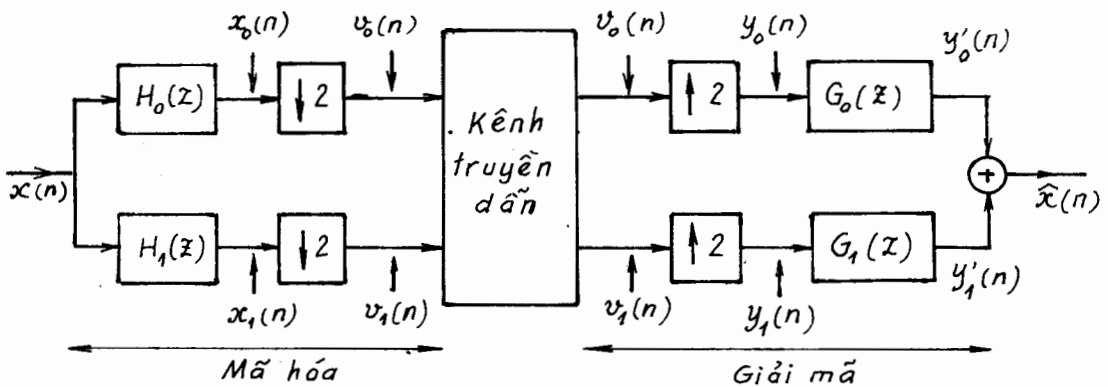
$$\underline{\underline{\mathbf{F}(z)}} = c \cdot z^{-m_0} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}^{-1}(z)}} \quad (9.6.4.11)$$

Điều kiện (9.6.4.11) chính là quan hệ giữa bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp của bank lọc số QMF khôi phục hoàn hảo.

9.6.5. MÃ HOÁ DẢI CON VÀ CẤU TRÚC DẠNG CÂY CỦA BANK LỌC SỐ QMF

a) Mã hoá dải con

Trong các phần trên chúng ta đã nghiên cứu các bank lọc số nhiều nhịp. Một ứng dụng rất quan trọng của bank lọc số nhiều nhịp này là dùng mã hoá dải con và giải mã dải con. Đơn giản nhất là dùng bank lọc số 2 kênh để mã hoá làm 2 dải con được minh hoạ trên hình 9.6.5.1 sau đây:



Hình 9.6.5.1

Mã hoá dải con rất thuận tiện cho việc nén tín hiệu tiếng nói bởi vì đối với tín hiệu tiếng nói thông thường năng lượng của phổ tín hiệu phân bố không đều, năng lượng phổ tiếng nói chủ yếu tập trung ở miền tần số thấp, còn ở miền tần số cao năng lượng của phổ tiếng nói rất nhỏ. Vậy sau khi qua bank lọc số QMF trên hình 9.6.5.1 ta có 2 tín hiệu dải con, $X_0(e^{j\omega})$ là phổ tần số thấp sẽ có năng lượng lớn vậy ta mã hoá tín hiệu dải con $x_0(n)$ với số bit lớn, còn $X_1(e^{j\omega})$ là phổ tần số cao có năng lượng nhỏ vậy ta mã hoá tín hiệu dải con $x_1(n)$ với số bit ít hơn. Vậy tính tổng cộng số bit để mã hoá tín hiệu $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ sẽ nhỏ hơn nếu ta mã hoá số bit lớn đối với toàn bộ dải phổ của $X(e^{j\omega})$.

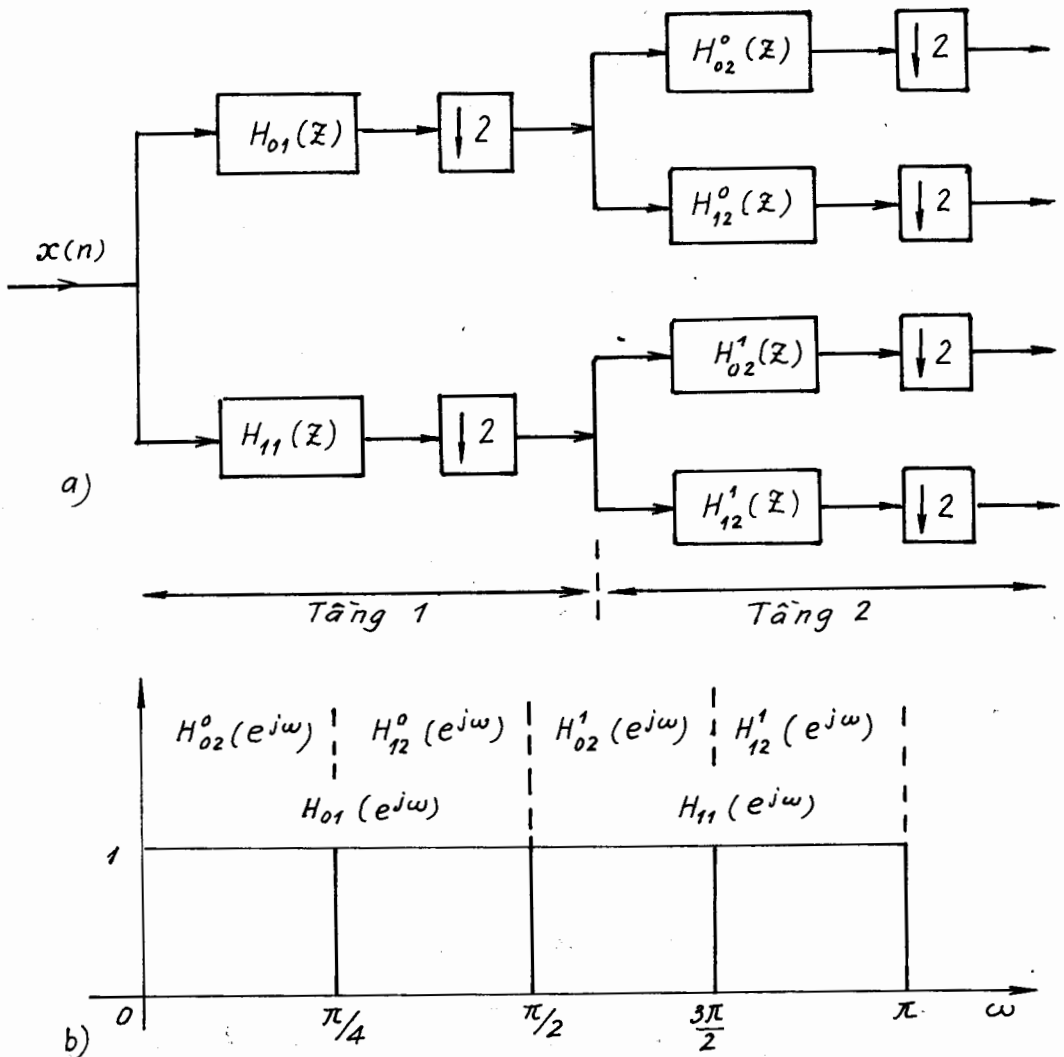
Đối với tín hiệu hình ảnh, mã hoá dải con cũng rất hiệu quả cho việc nén tín hiệu hình ảnh bởi vì phổ năng lượng của tín hiệu ảnh cũng phân bố không đều nhau vì vậy mỗi dải phổ sẽ có năng lượng khác nhau, dải phổ nào có năng lượng lớn sẽ được mã hoá với số bit lớn còn dải phổ nào có năng lượng nhỏ sẽ được mã hoá với số bit ít hơn. Hiện nay thế giới đã đạt được việc mã hoá tín hiệu ảnh chỉ với 0,48bit/pixel mà vẫn khôi phục hoàn hảo được tín hiệu ảnh (gọi là hệ thống PR 1 bit). Lưu ý rằng thông thường trước đây phải mã hoá với 8 bit/pixel.

Nói chung các tín hiệu trong thực tế có phân bố năng lượng là không đều nhau vì vậy mã hoá dải con là rất thuận lợi cho việc nén tín hiệu.

b) Cấu trúc dạng cây đơn phân giải (uniform Resolution)

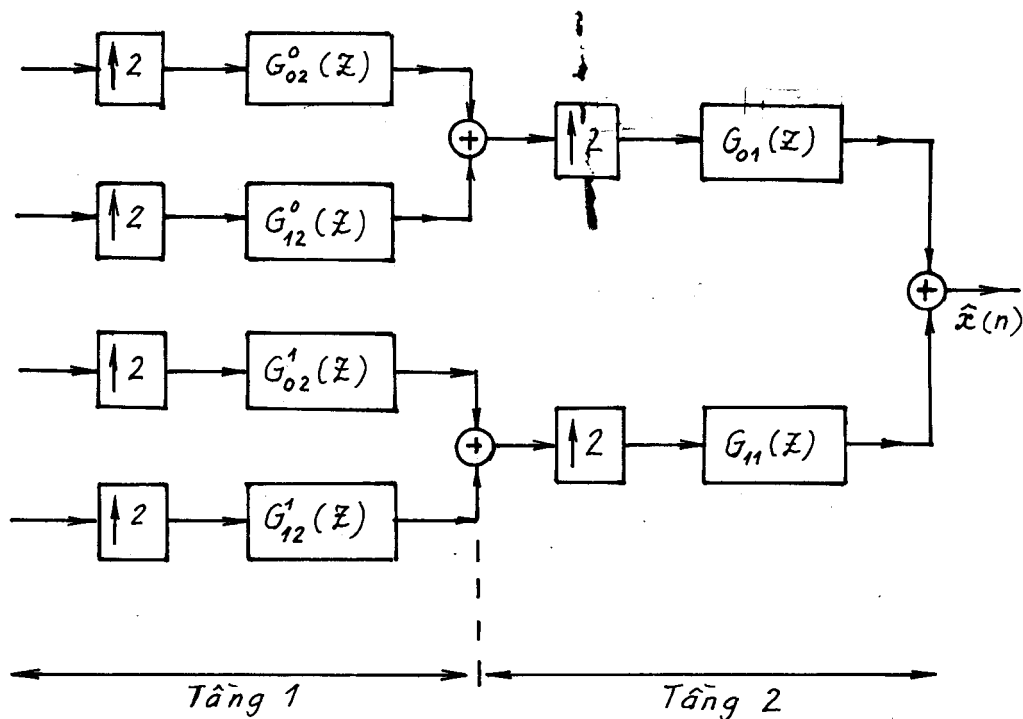
Vì năng lượng của phổ tín hiệu thường phân bố rất không đồng đều trên toàn bộ dải tần số, vậy để mã hoá dải con hiệu quả cao chúng ta sẽ mã hoá làm nhiều tầng, tức là tầng thứ nhất chia thành 2 dải con đều nhau (mỗi dải có bề rộng là $\pi/2$) đến tầng thứ hai ta lại phân 2 dải con của tầng thứ nhất thành các dải con có bề rộng bằng nửa của tầng thứ nhất (mỗi dải có bề rộng là $\pi/4$) và cứ tiếp tục như vậy chúng ta sẽ phân dải phổ của tín hiệu vào làm rất nhiều các dải và sau khi ra khỏi bank lọc phân tích bề rộng phổ của mỗi tín hiệu dải con là bằng nhau nên ta gọi là phân giải.

Hình 9.6.5.2 cho ta cấu trúc dạng cây đơn phân giải của bank lọc phân tích 4 kênh (hình (a)) và đồ thị tần số để giải thích đáp ứng tần số của các bộ lọc số có trong bank lọc số 4 kênh (hình (b)).



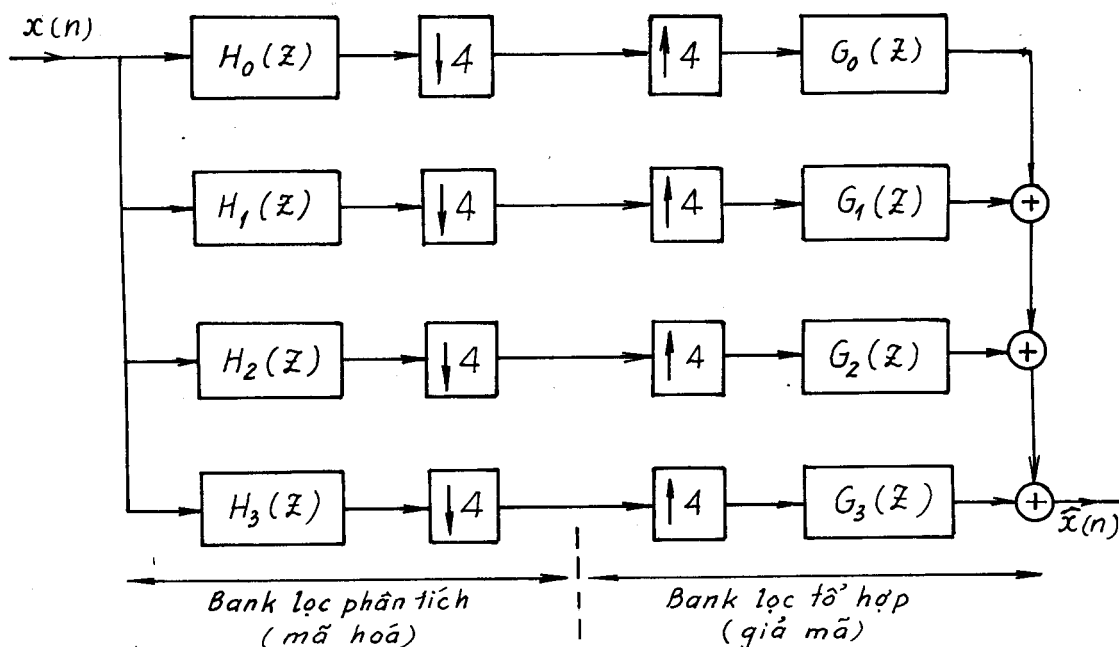
Hình 9.6.5.2.

Hình 9.6.5.2 cho ta cấu trúc dạng cây đơn giản phân giải của bank lọc số tổng hợp 4 kênh.



Hình 9.6.5.3.

Từ hình 9.6.5.2 và 9.6.5.3 ta có cấu trúc tương đương của bank lọc số 4 kênh phân tích và tổng hợp như trên hình 9.6.5.4.

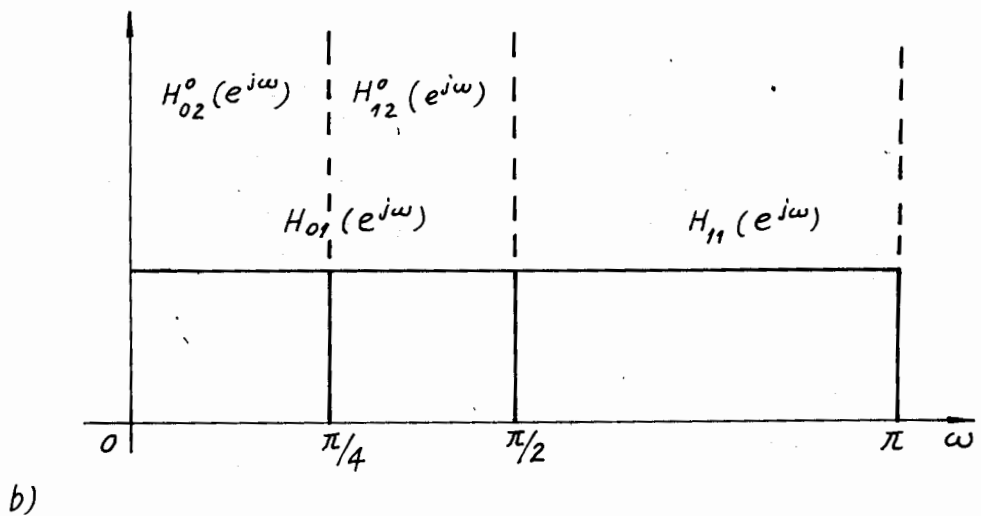
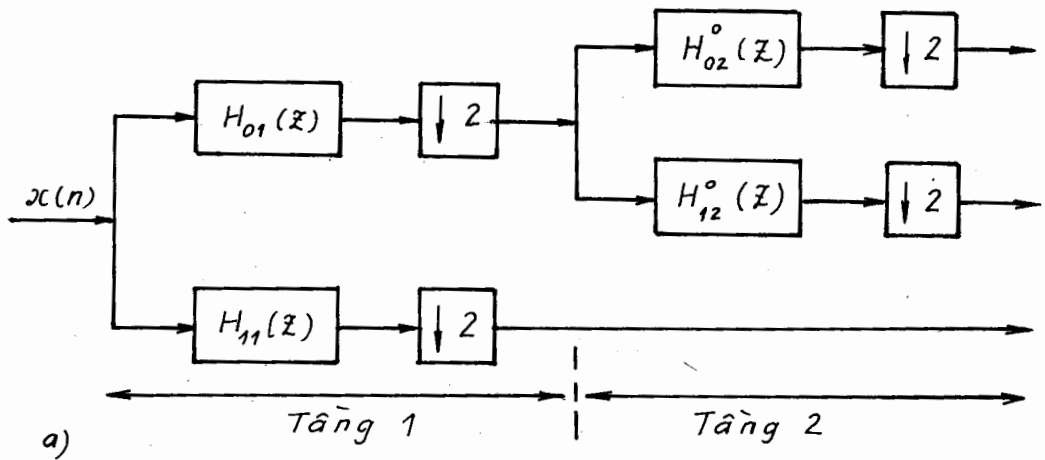


Hình 9.6.5.4.

c) Cấu trúc dạng cây đa phân giải (multiresolution)

Cấu trúc dạng cây đa phân giải được dùng trong trường hợp chúng ta phân tín hiệu thành các tín hiệu dải con có bề rộng phổ không bằng nhau, vì vậy ta gọi là đa phân giải.

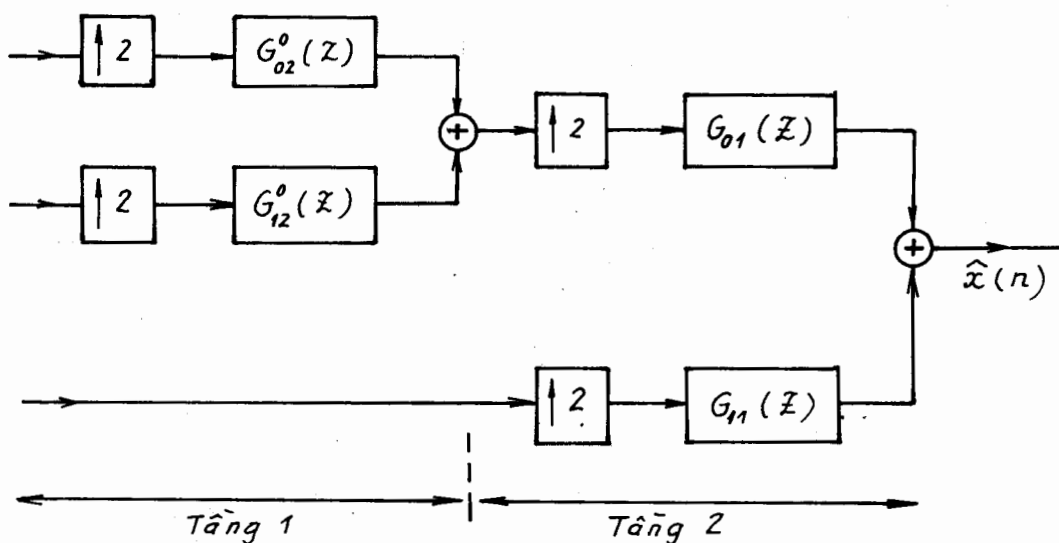
Hình 9.6.5.5 sẽ cho ta cấu trúc dạng cây đa phân giải của bank lọc số phân tích 2 tầng (hình (a)) và đồ thị tần số giải thích đáp ứng tần số của các bộ lọc số có trong bank lọc số phân tích 2 tầng này (hình (b)).



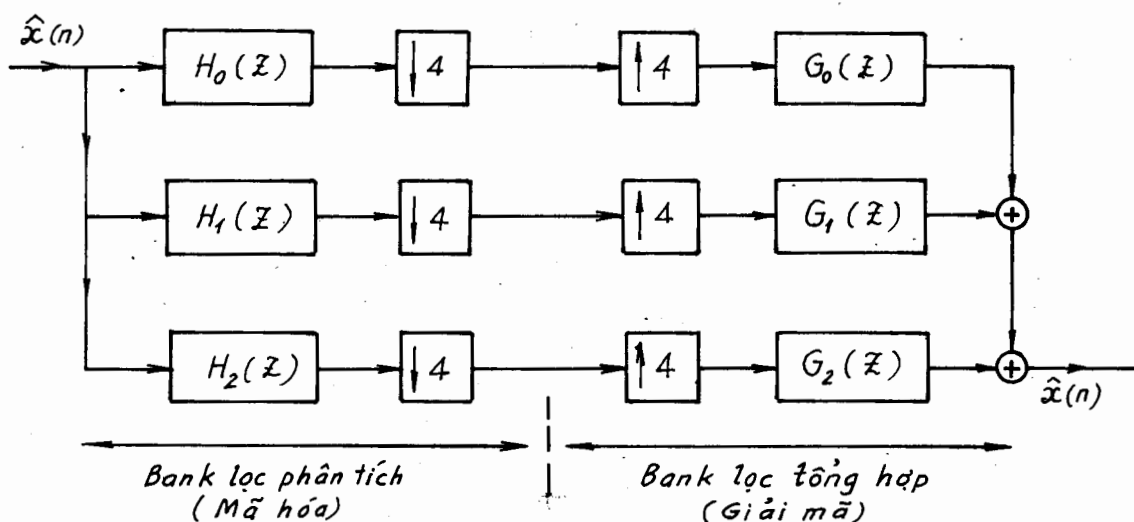
Hình 9.6.5.5.

Cấu trúc dạng cây đa phân giải của bank lọc số tổng hợp 2 tầng được minh họa trên hình 9.6.5.5.

Kết hợp hình 9.6.5.5 (a) với hình 9.6.5.6 ta suy ra cấu trúc tương đương của bank lọc số 2 tầng phân tích và tổng hợp được minh họa trên hình 9.6.5.7.



Hình 9.6.5.6.

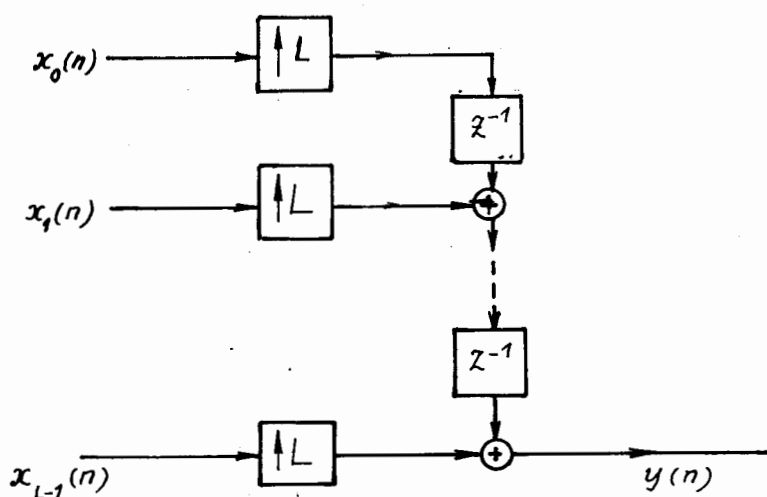


Hình 9.6.5.7.

9.6.6. KỸ THUẬT GHEP KÊNH

a) Ghep kênh phân thời gian (Time Division Multiplex: TDM)

Để mô tả kỹ thuật ghép kênh phân thời gian chúng ta giả sử có L tín hiệu $x_0(n)$, $x_1(n)$, ..., $x_{L-1}(n)$ cần ghép kênh với nhau theo kiểu ghép kênh phân thời gian. Để ghép được kênh phân thời gian, chúng ta cần phải cho các tín hiệu này qua các bộ tăng tần số lấy mẫu (bộ nội suy), sau đó qua các bộ trễ rồi cộng lại chúng ta sẽ được một dãy tín hiệu ghép kênh phân thời gian. Sơ đồ hình 9.6.6.1 sẽ mô tả bộ ghép kênh phân thời gian.



Hình 9.6.6.1.

Chúng ta sẽ giải thích nguyên lý hoạt động của bộ ghép kênh phân thời gian thông qua ví dụ cụ thể 9.6.6.1.

Ví dụ 9.6.6.1

Giả sử ta có hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ như sau:

$$x_0(n) = 2 \text{ rect}_5(n)$$

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

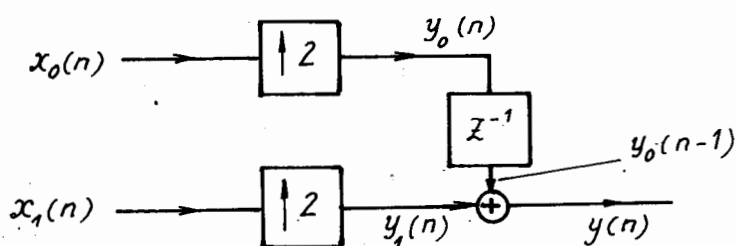
Hai tín hiệu này cần ghép kênh theo kiểu TDM.

+ Hãy vẽ sơ đồ bộ ghép kênh TDM.

+ Hãy giải thích nguyên lý ghép kênh TDM bằng đồ thị thời gian

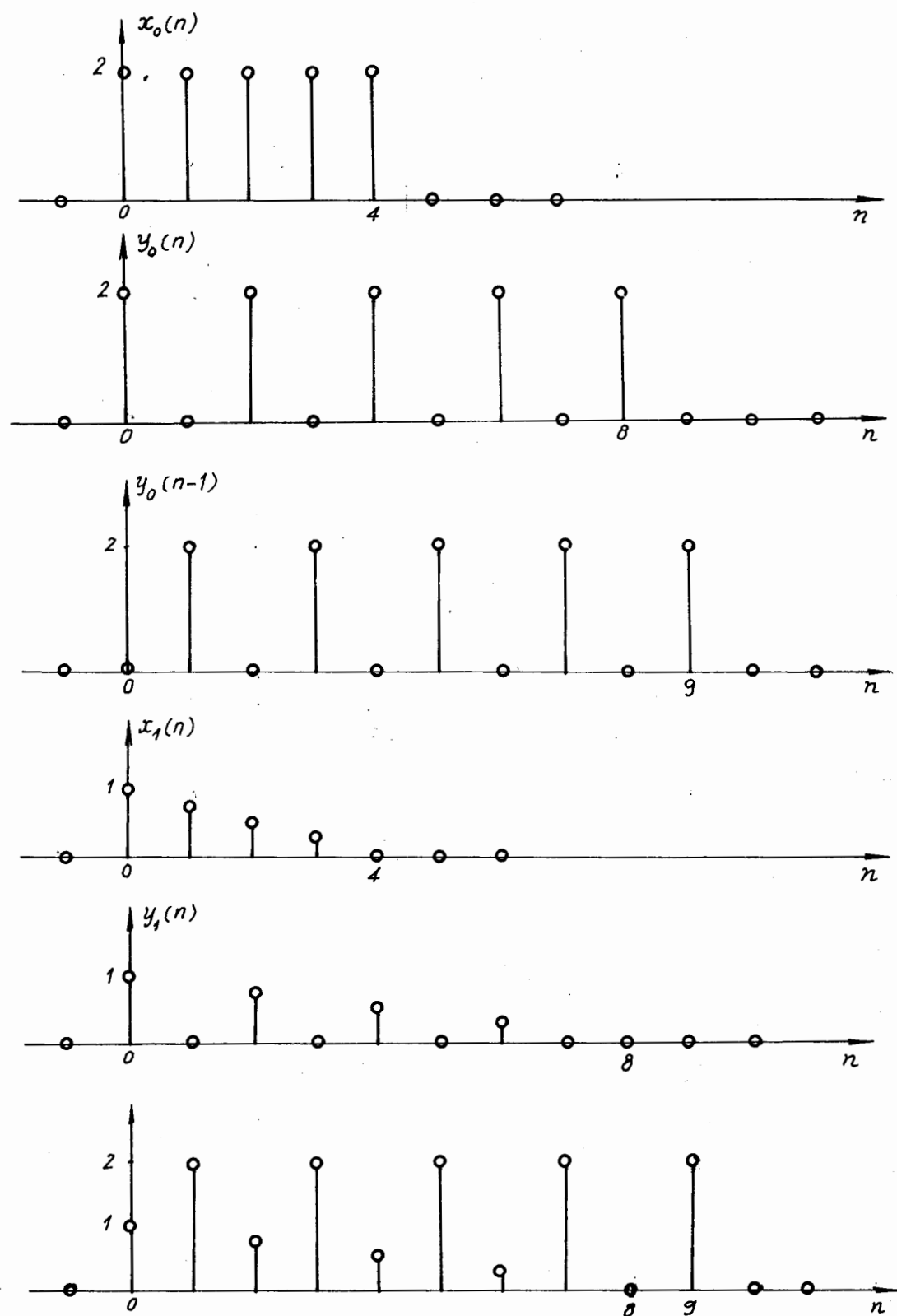
Giải

Theo hình 9.6.6.1 thay $L = 2$ ta có bộ ghép kênh TDM để ghép hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$, sơ đồ của bộ ghép kênh này được minh họa trên hình 9.6.6.2.



Hình 9.6.6.2.

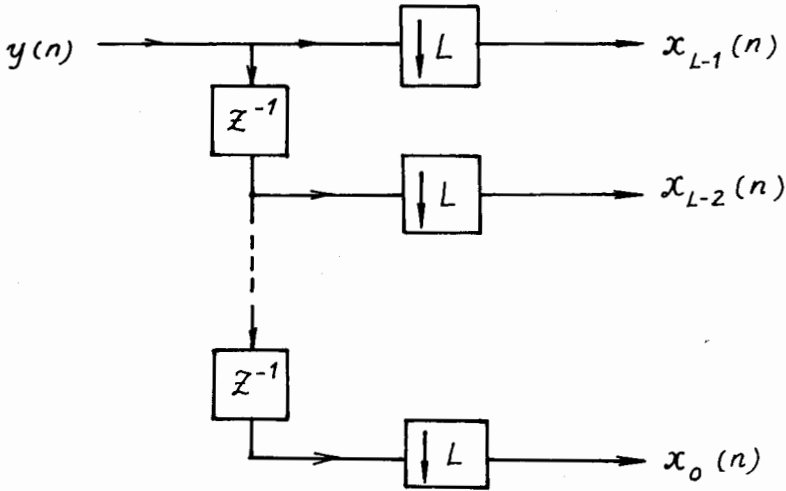
Đồ thị thời gian giải thích nguyên lý ghép kênh TDM của sơ đồ trên hình 9.6.6.2 được minh hoạ trên hình 9.6.6.3.



Hình 9.6.6.3.

b) Tách kênh phân thời gian

Ngược lại với kỹ thuật ghép kênh phân thời gian. Giả sử ta có tín hiệu ghép L kênh phân thời gian là $y(n)$, chúng ta cần phải tách thành L kênh phân thời gian là $x_0(n), x_1(n), \dots, x_{L-1}(n)$. Để tách được kênh theo kiểu phân thời gian, chúng ta phải cho tín hiệu $y(n)$ qua các bộ trễ sau đó cho qua các bộ phân chia. Sơ đồ tổng quát của bộ tách kênh phân thời gian được mô tả trên hình 9.6.6.4.



Hình 9.6.6.4.

Sau đây chúng ta sẽ giải thích nguyên lý hoạt động của bộ tách kênh phân thời gian thông qua ví dụ đơn giản với $L = 2$.

Ví dụ 9.6.6.2

Chúng ta quay lại ví dụ 9.6.6.2, chúng ta có tín hiệu $y(n)$ là tín hiệu ghép kênh phân thời gian của hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ (xem hình 9.6.6.3), bây giờ chúng ta cần tách tín hiệu $y(n)$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$.

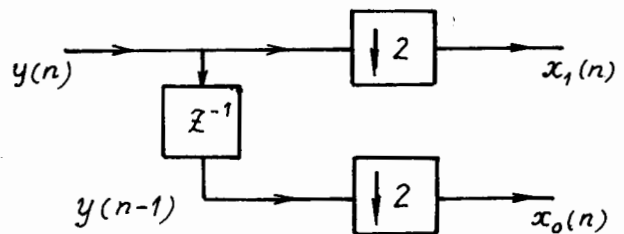
+ Hãy vẽ sơ đồ bộ tách kênh.

+ Hãy giải thích nguyên lý tách kênh bằng sơ đồ thời gian.

Giải

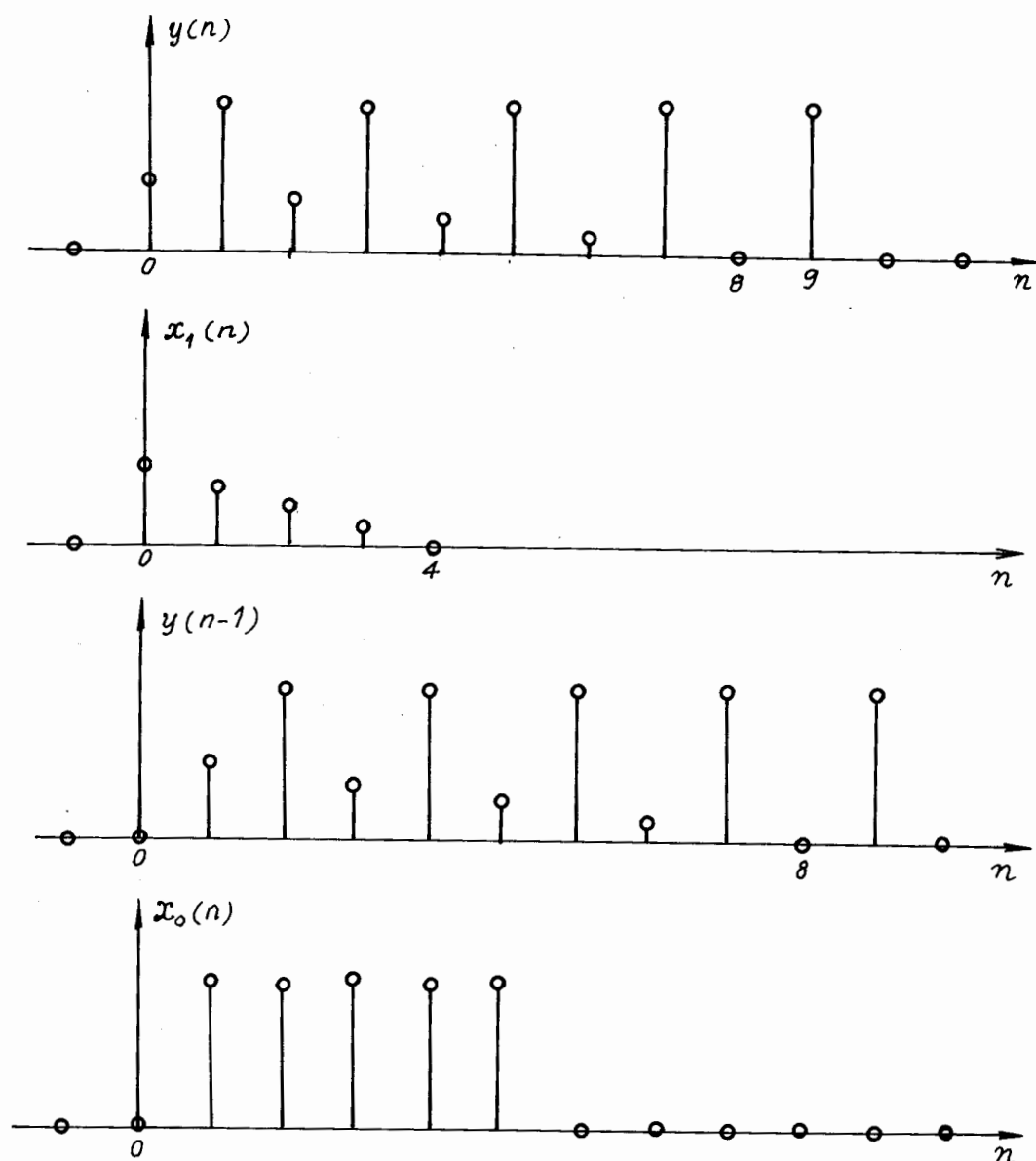
Theo sơ đồ nguyên lý tổng quát của bộ tách kênh phân thời gian cho trên hình 9.6.6.4, thay $L = 2$, ta có bộ tách kênh để tách tín hiệu $y(n)$ thành 2 tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$. Sơ đồ của bộ tách kênh này được mô tả trên hình 9.6.6.5.

Đồ thị thời gian để giải thích nguyên lý làm việc của bộ tách kênh phân thời gian cho trên hình



Hình 9.6.6.5.

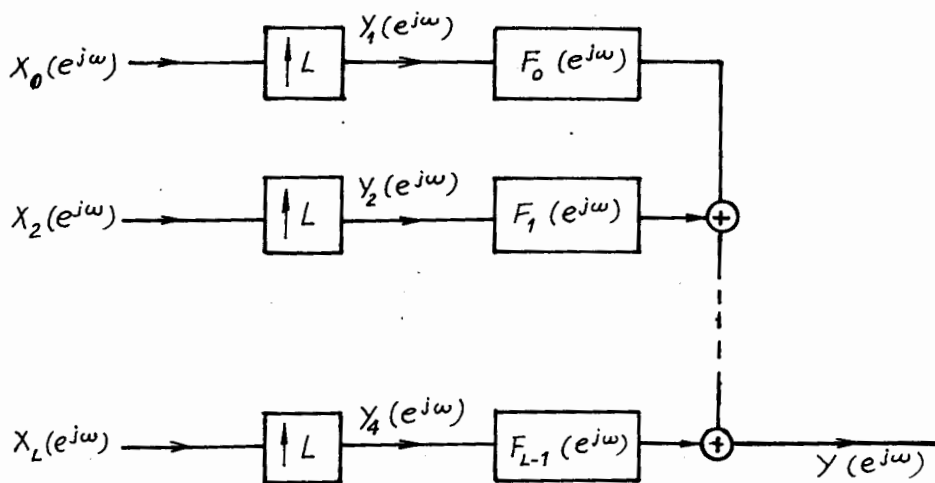
9.6.2.5 được minh họa trên hình 9.6.6.6.



Hình 9.6.6.6.

c) Ghép kênh phân tần số (Frequency Division Multiplex: FDM)

Giả sử chúng ta có L tín hiệu là $x_0(n)$, $x_1(n)$, ..., $x_{L-1}(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega})$, $X_1(e^{j\omega})$, ..., $X_{L-1}(e^{j\omega})$. Các tín hiệu này cần ghép kênh theo tần số. Để thực hiện ghép kênh theo tần số chúng ta có thể dùng các bộ lọc nội suy với hệ số nội suy L , còn gọi là bank lọc tổng hợp. Hình 9.6.6.7 sẽ mô tả cấu trúc của bộ ghép

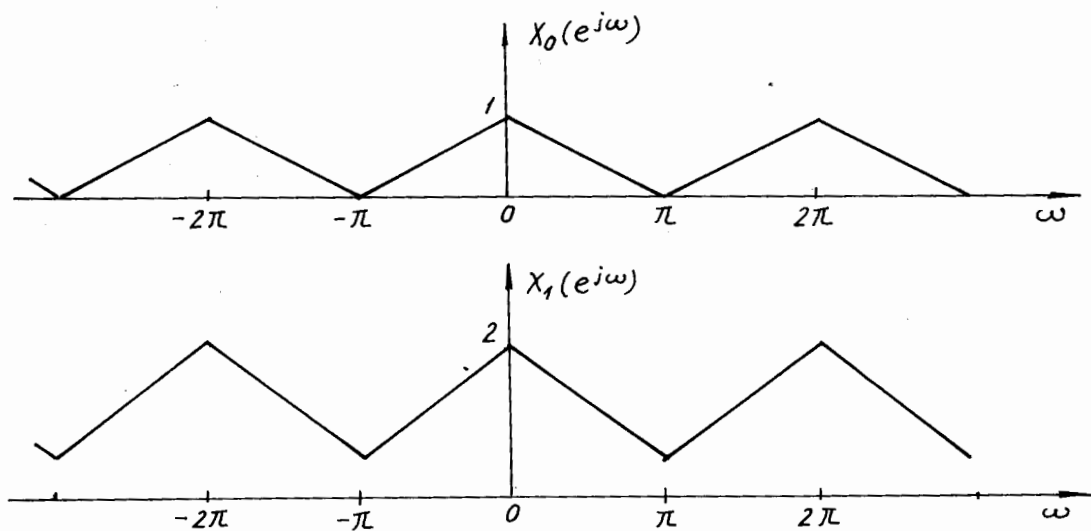


Hình 9.6.6.7.

Nguyên lý hoạt động của bộ ghép kênh phân tần số được giải thích thông qua ví dụ 9.6.6.3.

Ví dụ 9.6.6.3

Giả sử cho hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$ có dạng như trên hình 9.6.2.8 sau đây:



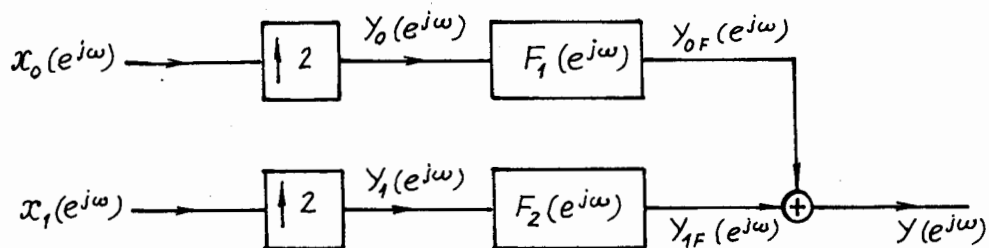
Hình 9.6.6.8.

Hai tín hiệu này cần ghép kênh theo kiểu FDM.

- + Hãy vẽ sơ đồ bộ ghép kênh,
- + Hãy giải thích nguyên lý ghép kênh FDM bằng đồ thị tần số.

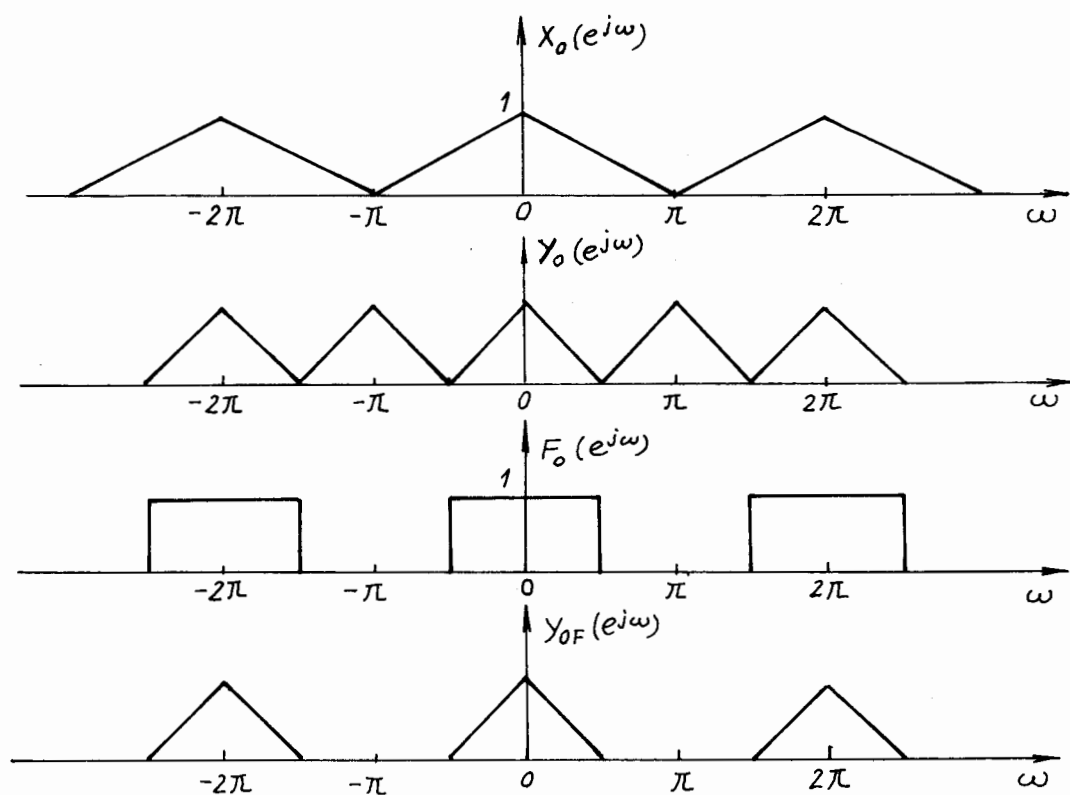
Giải

Theo sơ đồ tổng quát trên hình 9.6.6.7, thay $L = 2$ ta có bộ ghép kênh FDM để ghép hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$. Sơ đồ của bộ ghép kênh FDM này được minh họa trên hình 9.6.6.9.

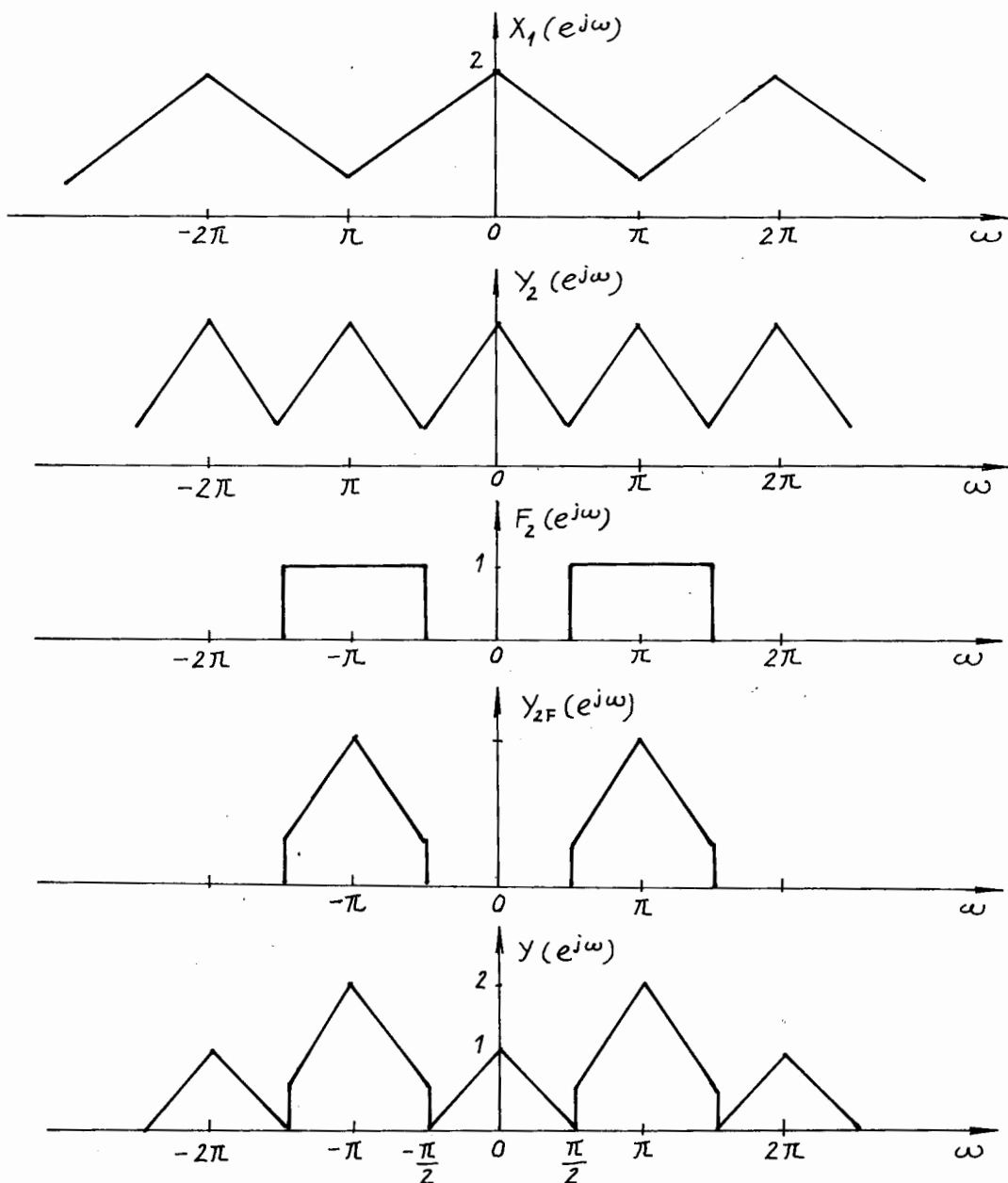


Hình 9.6.6.9

Đồ thị tần số giải thích nguyên lý ghép kênh FDM của sơ đồ trên hình 9.6.6.9 được minh họa trên hình 9.6.6.10.



Hình 9.6.6.10.

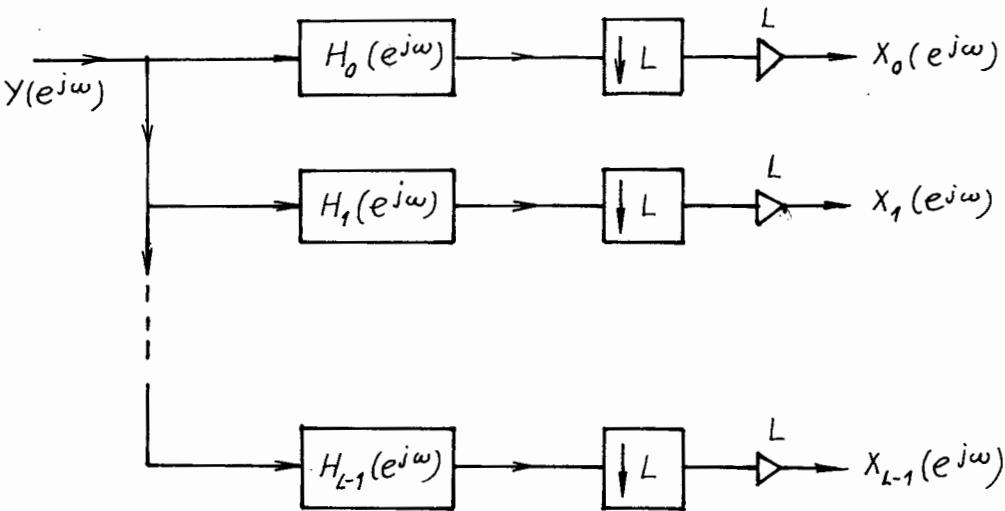


Hình 9.6.6.10 (tiếp theo).

d) Tách kênh phân tần số

Ngược lại với kỹ thuật ghép kênh phân tần số, chúng ta giả sử có tín hiệu ghép L kênh phân tần số là $y(n)$ có phổ là $Y(e^{j\omega})$, chúng ta cần phải tách thành L kênh là $x_0(n), x_1(n), \dots, x_{L-1}(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega}), X_1(e^{j\omega}), \dots, X_{L-1}(e^{j\omega})$. Để tách chúng ra được chúng ta phải dùng các bộ lọc phân chia với hệ số phân chia L , còn

gọi là bank lọc phân tích. Sơ đồ tổng quát của bộ tách kênh phân tần số được cho trên hình 9.6.6.11.



Hình 9.6.6.11.

Ví dụ 9.6.6.4 sẽ trình bày cho chúng ta rõ nguyên lý hoạt động của bộ tách kênh phân tần số.

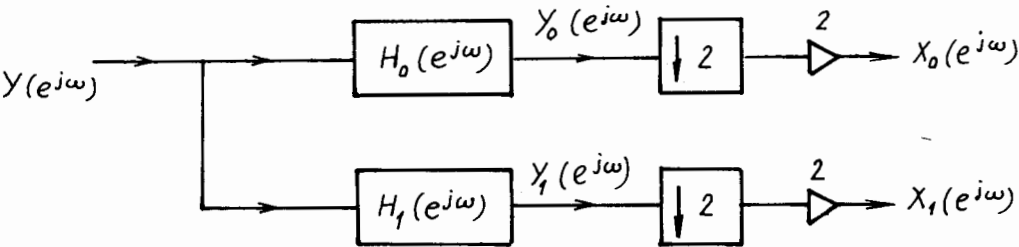
Ví dụ 9.6.6.4

Chúng ta quay lại ví dụ 9.6.6.3, chúng ta có tín hiệu $y(n)$ có phổ là $Y(e^{j\omega})$ là tín hiệu ghép kênh phân tần số của hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$ (xem hình 9.6.6.10), bây giờ chúng ta cần tách tín hiệu $y(n)$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$.

- + Hãy vẽ sơ đồ bộ tách kênh phân tần số.
- + Hãy giải thích nguyên lý tách kênh phân tần số bằng đồ thị tần số.

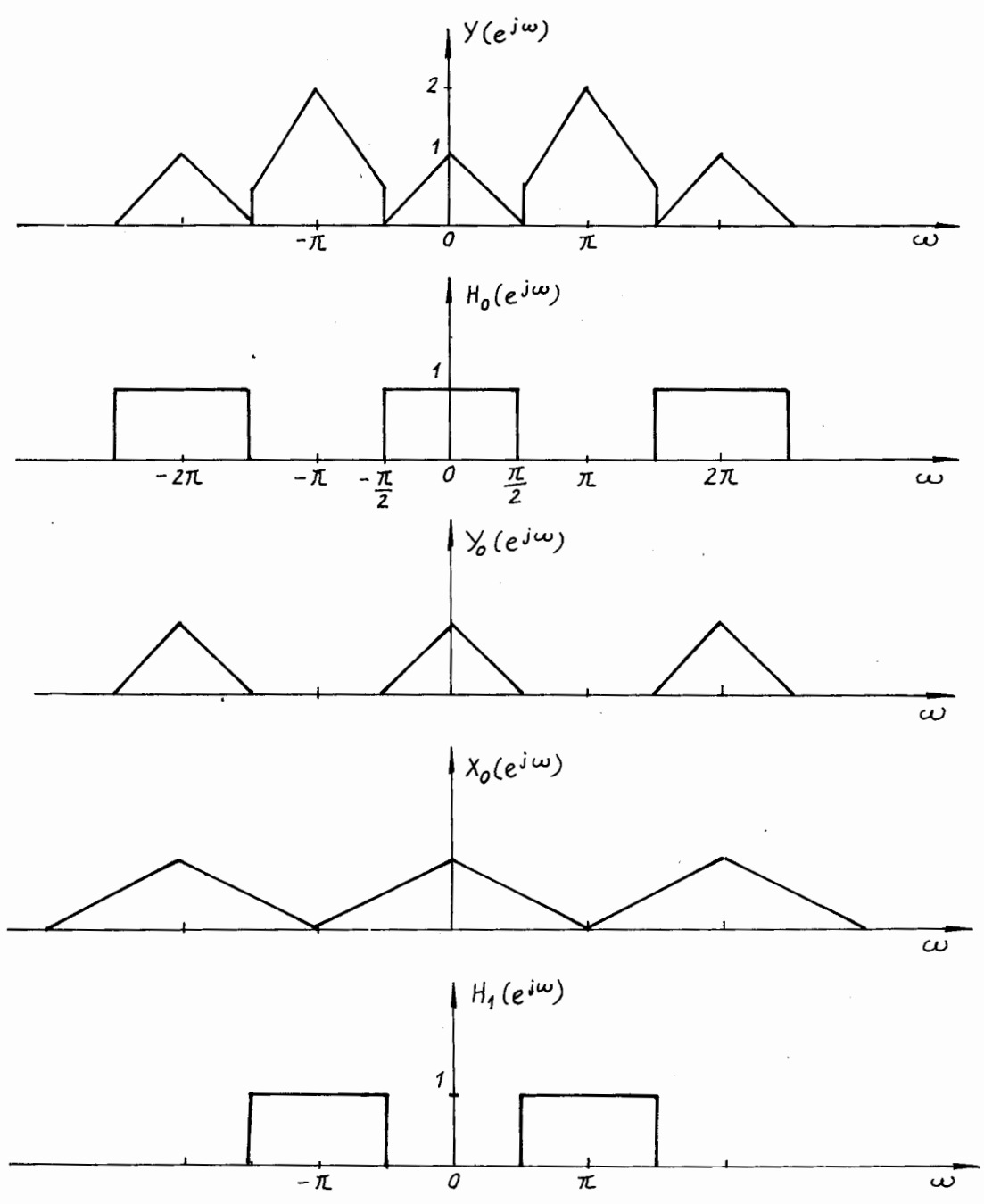
Giải

Theo sơ đồ nguyên lý tổng quát của bộ tách kênh phân tần số cho trên hình 9.6.6.11, thay $L = 2$ ta có bộ tách kênh để tách tín hiệu $y(n)$ có phổ là $Y(e^{j\omega})$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$. Sơ đồ của bộ tách kênh với $L = 2$ này được cho trên hình 9.6.6.12.

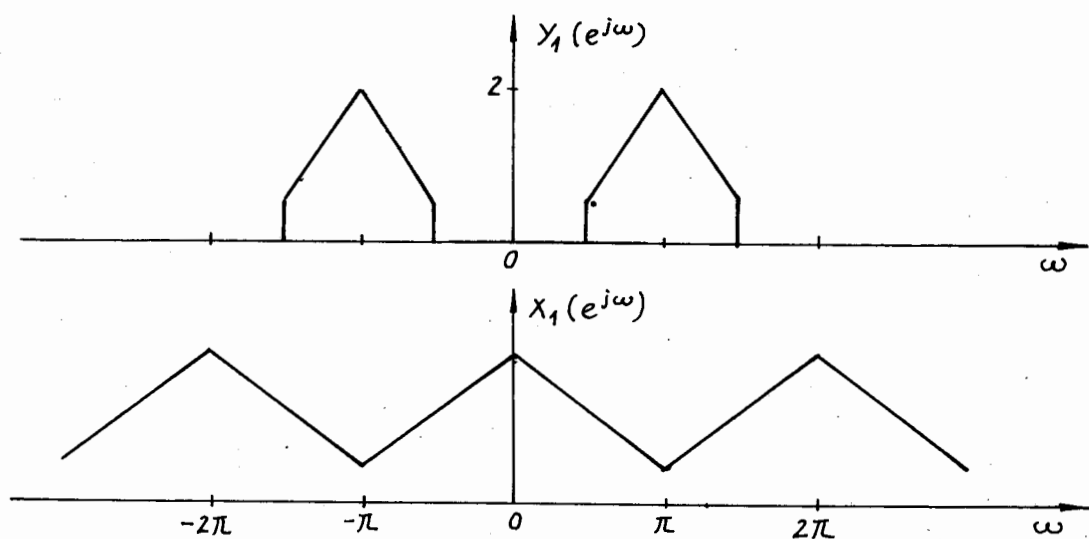


Hình 9.6.6.12.

Đồ thị tần số giải thích nguyên lý tách kênh FDM phân tần số của sơ đồ trên hình 9.6.6.12 được minh hoạ trên hình 9.6.6.13.



Hình 9.6.6.13.

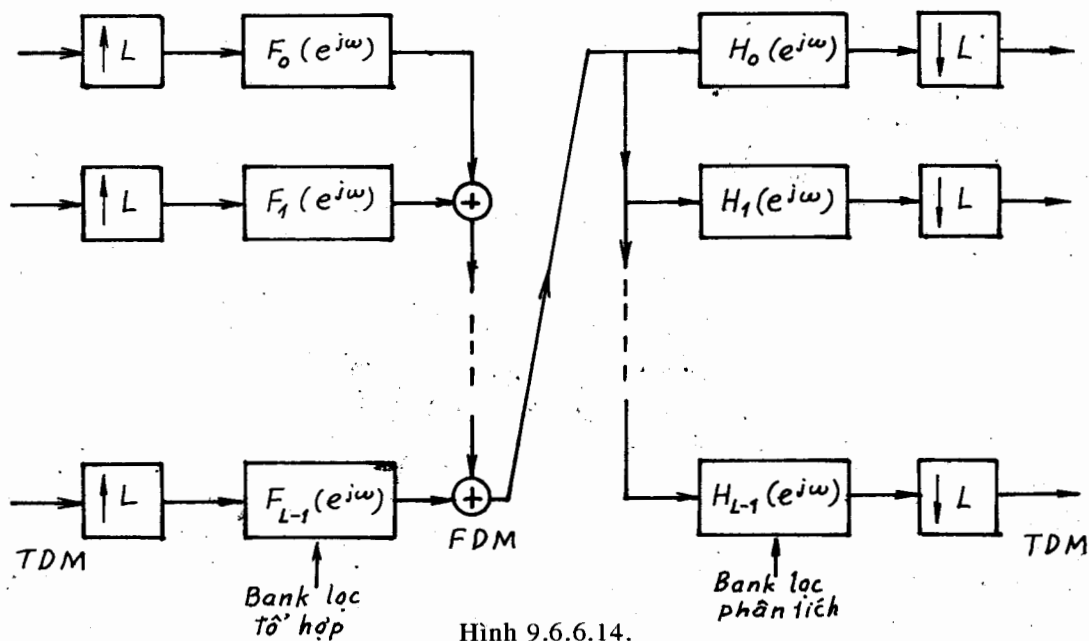


Hình 9.6.6.13 (tiếp theo).

e) Chuyển đổi ghép kênh (transmultiplexer)

Trong các phần trên chúng ta đã tiến hành nghiên cứu kỹ thuật ghép kênh trong miền thời gian (TDM) và trong miền tần số (FDM).

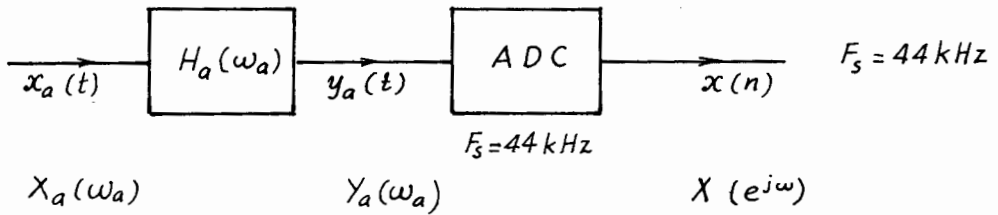
Còn hình 9.6.6.14 sẽ mô tả bộ chuyển đổi ghép kênh TDM \rightarrow FDM \rightarrow TDM.



Hình 9.6.6.14.

9.6.7. CÁC HỆ THỐNG AUDIO SỐ

Chúng ta biết rằng tín hiệu audio là tín hiệu tương tự, ta ký hiệu là $x_a(t)$, sau đó chúng ta phải số hoá ký hiệu tương tự này. Để tránh nhiễu ngoài dải tần mong muốn (out - of band noise) thì trước khi lấy mẫu, tín hiệu audio $x_a(t)$ sẽ được cho qua bộ lọc tương tự, nhưng để tránh hoàn toàn nhiễu ngoài dải tần này thì bộ lọc tương tự phải gần với lý tưởng, điều này rất khó làm đối với bộ lọc tương tự. Dải tần số mong muốn (tai con người có thể cảm nhận được) cao nhất là 22 kHz (với đĩa CD là 22,05 kHz). Như vậy theo định lý lấy mẫu thì tần số lấy mẫu nhỏ nhất là 44 kHz. Nhưng nếu lấy mẫu với tần số này mà bộ lọc tương tự không đạt tới lý tưởng thì sẽ gây nhiễu ngoài dải tần mong muốn, tức là gây hiện tượng chồng phổ khi lấy mẫu trong bộ biến đổi tương tự số (ADC). Quá trình này được minh hoạ trên hình 9.6.7.1 và đồ thị tần số được trình bày trên hình 9.6.7.2 theo thang tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu $F_s = 44$ kHz.

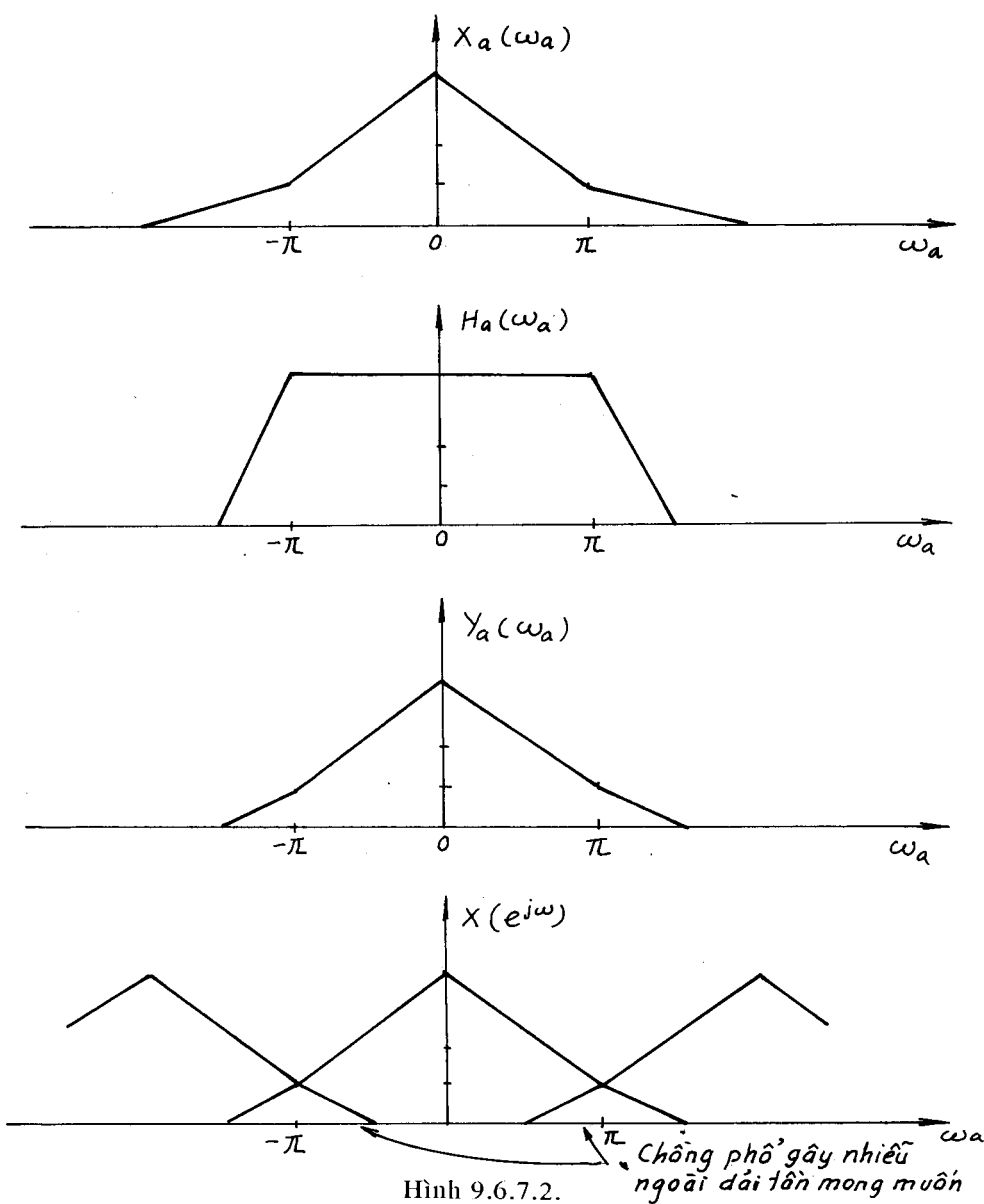


$H_a(\omega_a)$: Bộ lọc tương tự thông thấp không lý tưởng với tần số cắt $f_{ac} = 22$ kHz

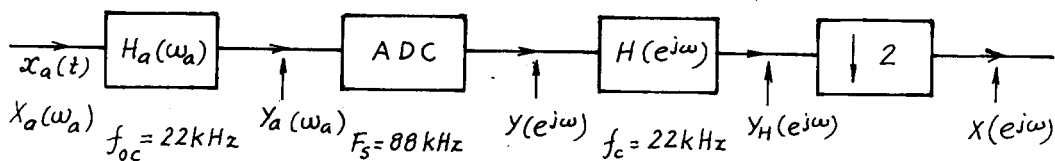
ADC: Bộ biến đổi tương tự số với tần số lấy mẫu $F_s = 44$ kHz.

Hình 9.6.7.1.

Để tránh hiện tượng chồng phổ mà vẫn đảm bảo tần số lấy mẫu của tín hiệu số ra $x(n)$ là 44 kHz, chúng ta sẽ thực hiện như sau: tín hiệu tương tự $x_a(t)$ sau khi qua bộ lọc tương tự thông thấp không lý tưởng với $f_{ac} = 22$ kHz được tín hiệu $y_a(t)$ chúng ta sẽ cho tín hiệu $y_a(t)$ qua bộ biến đổi tương tự số (ADC) với tần số lấy mẫu $F_s = 2F_{SNY} = 88$ kHz, sau đó cho tín hiệu qua bộ lọc số thông thấp (ví dụ qua bộ lọc số FIR pha tuyến tính) với tần số cắt $f_{ac} = 22$ kHz, vì bộ lọc số gần với lý tưởng dễ thực hiện được hơn là bộ lọc tương tự. Sau đó cho tín hiệu qua bộ phân chia với hệ số $M = 2$, đầu ra sẽ thu được tín hiệu $x(n)$ cũng với tần số lấy mẫu $F_s = 44$ kHz. Vậy chúng ta có thể nói rằng chúng ta có bộ biến đổi tương tự số kiểu mới dùng lọc số nhiều nhịp để tránh nhiễu ngoài dải tần. Quá trình này được minh hoạ trên hình 9.6.7.3 và đồ thị tần số được trình bày trên hình 9.6.7.4 theo thang tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu $F_s = 88$ kHz.

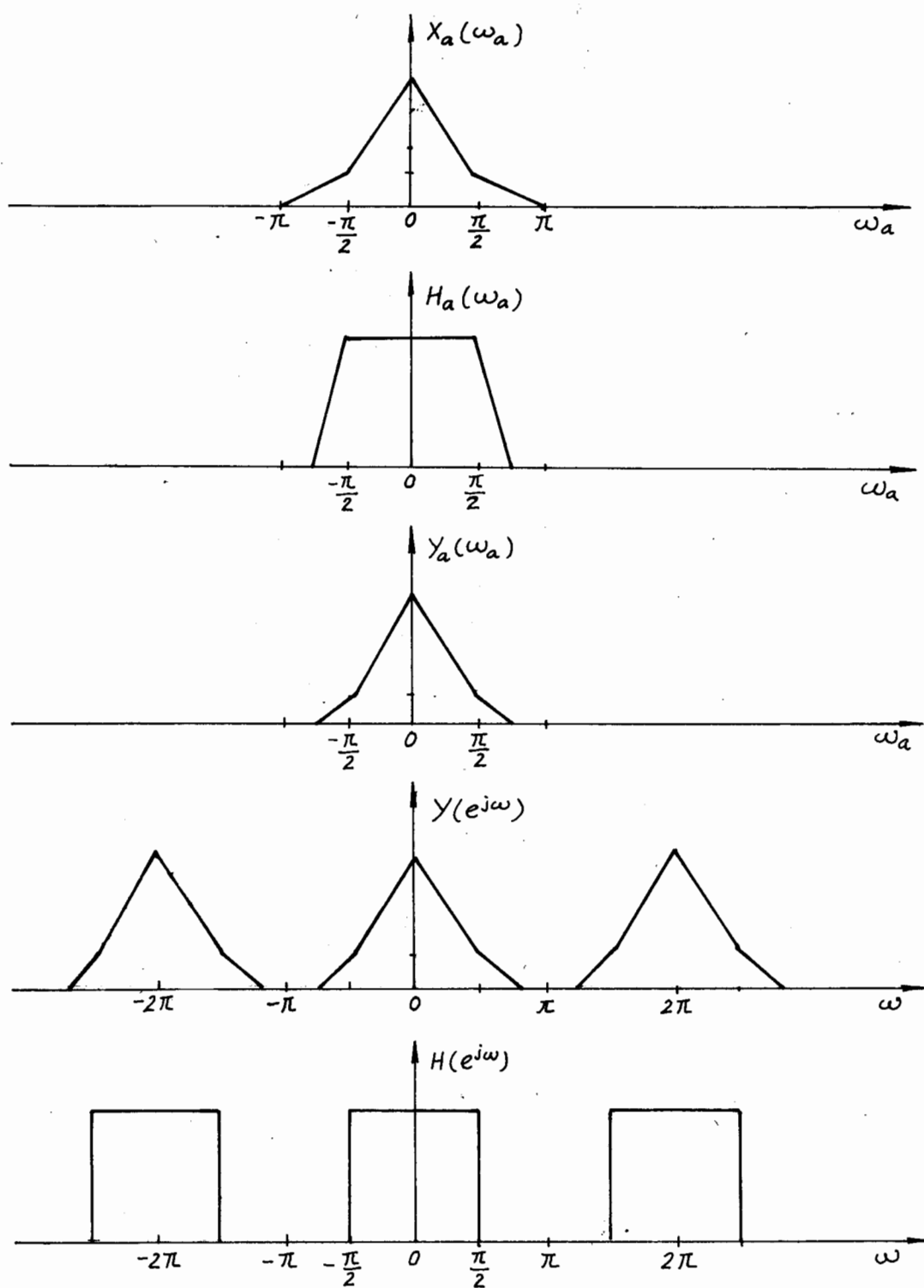


Hình 9.6.7.2.

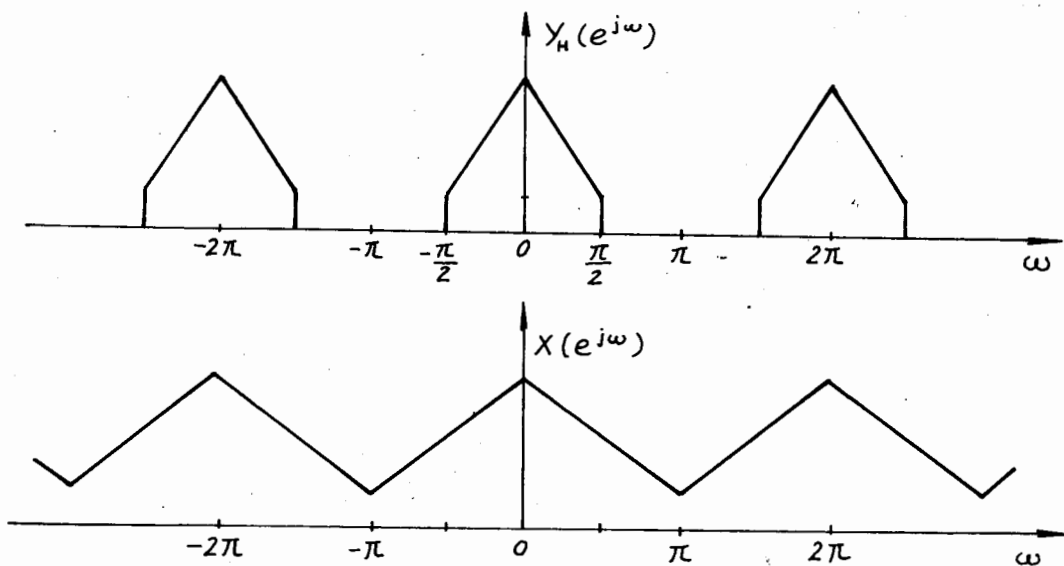


(ω_a): Bộ lọc tương tự thông thấp không lý tưởng với tần số cắt $f_{ac} = 22 \text{ kHz}$; ADC: Bộ chuyển đổi tương tự số với tần số lấy mẫu $F_s = 88 \text{ kHz}$; $H(e^{j\omega})$: Bộ lọc số thông thấp gần lý tưởng với tần số cắt $f_c = 22 \text{ kHz}$; $\downarrow 2$: Bộ phân chia với hệ số $M = 2$.

Hình 9.6.7.3.



Hình 9.6.7.4.



Hình 9.6.7.4 (tiếp theo).

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

Bài tập 9.1

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{6} & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tín hiệu này đi qua bộ phân chia với $M = 3$. Hãy vẽ tín hiệu ra $Y_{\downarrow 3}(n)$.

Bài tập 9.2

Cho tín hiệu ra rời rạc $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tín hiệu này qua bộ nội suy với $L = 3$. Hãy vẽ tín hiệu ra $Y_{\uparrow 3}(n)$.

Bài tập 9.3

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ như sau:

$$x(n) = a^n u(n)$$

Tín hiệu này đi qua bộ phân chia với $M = 4$. Hãy tính tín hiệu ra trong miền z : $Y_{\downarrow 4}(z)$.

Bài tập 9.4

Cho tín hiệu rời rạc $x(n]$ như sau:

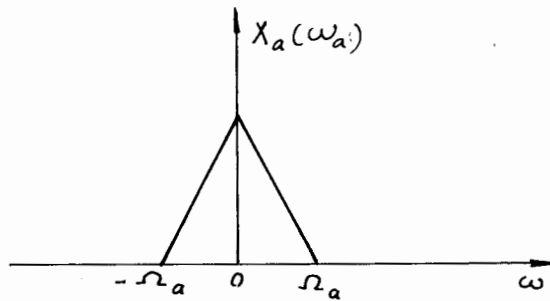
$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n - 1) + 3\delta(n - 2) + 4\delta(n - 3) + 5\delta(n - 4)$$

Tín hiệu này đi qua bộ nội suy với $L = 5$. Hãy tính tín hiệu ra trong miền z : $Y_{\uparrow 5}(z)$.

Bài tập 9.5

Cho tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có phổ là $X_a(\omega_a)$ cho trên hình BT 7.5. Tín hiệu này được lấy mẫu với tần số lấy mẫu bằng 2 lần tần số Nyquist ($F_s = 2F_{\text{SNy}}$). Sau khi lấy mẫu chúng ta có tín hiệu rời rạc $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$. Sau đó cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ đi qua bộ phân chia với $M = 3$.

Hãy vẽ dạng phổ của tín hiệu vào và tín hiệu ra: $X(e^{j\omega})$ và $Y_{\downarrow 3}(e^{j\omega})$.



Hình BT 7.5.

Bài tập 9.6

Cho tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có phổ là $X_a(\omega_a)$ cho trên hình BT 7.5. Tín hiệu này được lấy mẫu với tần số lấy mẫu bằng 2 lần tần số Nyquist. Sau khi lấy mẫu ta có tín hiệu rời rạc $x(n)$, có phổ là $X(e^{j\omega})$. Sau đó cho tín hiệu qua bộ nội suy với $L = 3$.

Hãy vẽ dạng phổ của tín hiệu vào và tín hiệu ra: $X(e^{j\omega})$ và $Y_{\uparrow 3}(e^{j\omega})$.

Bài tập 9.7

Cho biến đổi z của $x(n)$ như sau:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5}$$

$x(n)$ đi qua bộ phân chia với $M = 3$.

Hãy tìm tín hiệu ra trong miền z : $Y_{\downarrow 3}(z)$.

Bài tập 9.8

Cho biến đổi z của $x(n)$ như sau:

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 4z^{-3} + 5z^{-7}$$

$x(n)$ đi qua bộ nội suy với $L = 3$.

Hãy tìm tín hiệu ra trong miền z : $Y_{\uparrow 3}(z)$.

Bài tập 9.9

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{7} & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tín hiệu này đi qua bộ biến đổi nhíp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{2}{5}$.

Hãy tìm tín hiệu ra $y_{\downarrow 2/5}(n)$ và $y_{\uparrow 2/5}(n)$.

Bài tập 9.10

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ có $X(z)$ như sau:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6}$$

Tín hiệu này đi qua bộ biến đổi nhíp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{3}{5}$.

Hãy tìm tín hiệu ra trong miền z : $Y_{\downarrow 3/5}(z)$ và $Y_{\uparrow 3/5}(z)$. So sánh kết quả.

Bài tập 9.11

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ có $X(z)$ như sau:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6} + 8z^{-7} + 9z^{-8}$$

Tín hiệu này đi qua bộ biến đổi nhíp lấy mẫu:

a) Với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{7}{5}$

Hãy tính $Y_{\downarrow 7/5}(z)$ và $Y_{\uparrow 7/5}(z)$ và so sánh kết quả.

b) Với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{8}{5}$

Hãy tính $Y_{\downarrow 8/5}(z)$ và $Y_{\uparrow 8/5}(z)$ và so sánh kết quả.

Bài tập 9.12

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ có $X(z)$ như sau:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6} + 8z^{-7} + 9z^{-8}$$

Tín hiệu này đi qua các bộ biến đổi nhíp lấy mẫu

a) Với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{8}{6}$

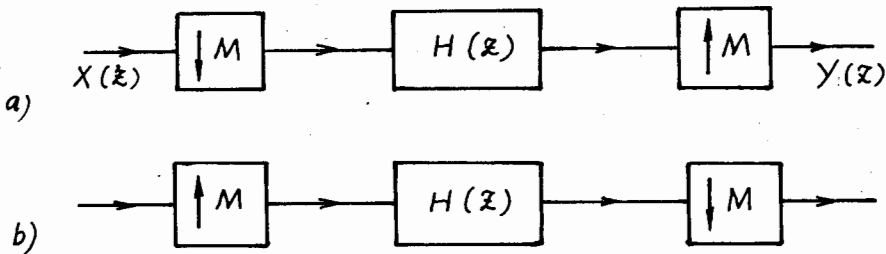
Hãy tính $Y_{\downarrow 8/6}(z)$ và $Y_{\uparrow 8/6}(z)$ và so sánh kết quả.

b) Với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{6}{8}$

Hãy tính $Y_{\downarrow 6/8}(z)$ và $Y_{\uparrow 6/8}(z)$ và so sánh kết quả.

Bài tập 9.13

Cho hai mạch trên hình BT 9.13 sau đây:

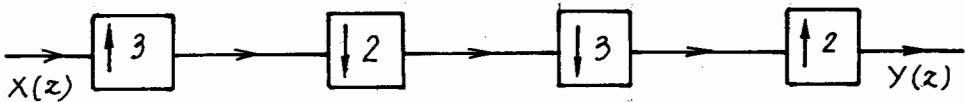


Hình BT 9.13.

Hãy tìm quan hệ giữa $Y(z)$ và $X(z)$ theo hệ số M và $H(z)$.

Bài tập 9.14

Cho mạch số được biểu diễn trên hình BT 9.14 sau đây:



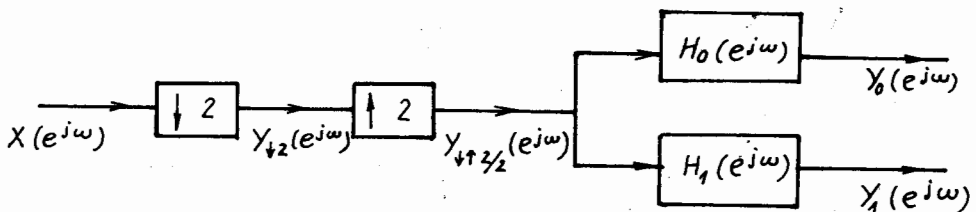
Hình BT 9.14.

- Hãy tìm biểu thức của $Y_1(z)$, $Y_2(z)$, $Y_3(z)$ và $Y(z)$ theo $X(z)$,

- Sau đó rút ra kết luận xem có thể đơn giản hoá sơ đồ này được không?

Bài tập 9.15

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 9-15a sau đây:

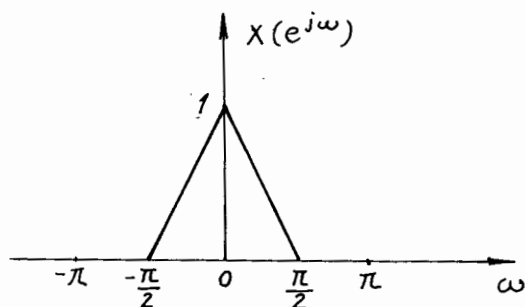


Hình BT 9.15 a.

$H_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

$H_1(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông cao lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

$X(e^{j\omega})$ có dạng cho trên hình BT 9.15 b.

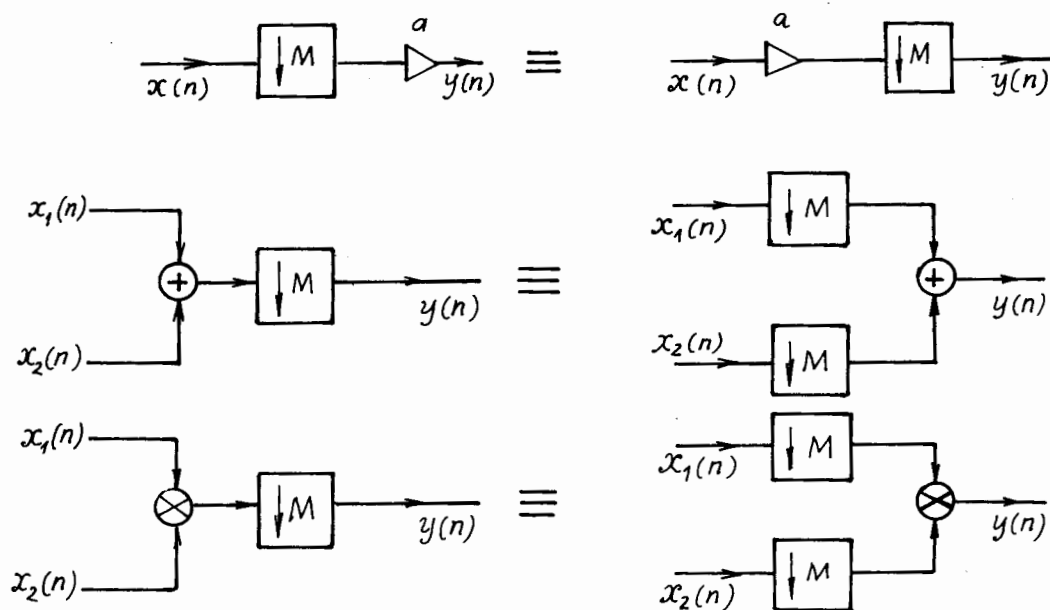


Hình BT 9.15 b.

Hãy vẽ dạng của $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$; $Y_{\uparrow 2/2}(e^{j\omega})$; $Y_0(e^{j\omega})$ và $Y_1(e^{j\omega})$.

Bài tập 9.16

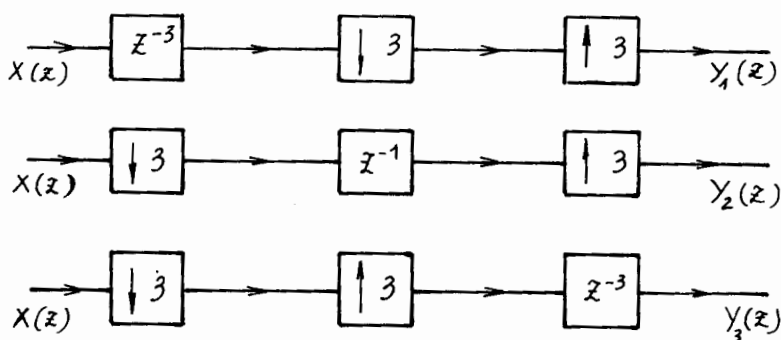
Hãy chứng minh rằng các sơ đồ cho trên hình BT 9.16 sau đây là tương đương.



Hình BT 9.16.

Bài tập 9.17

Giả sử chúng ta có 3 sơ đồ mạch số cho trên hình BT 9.17 sau đây:

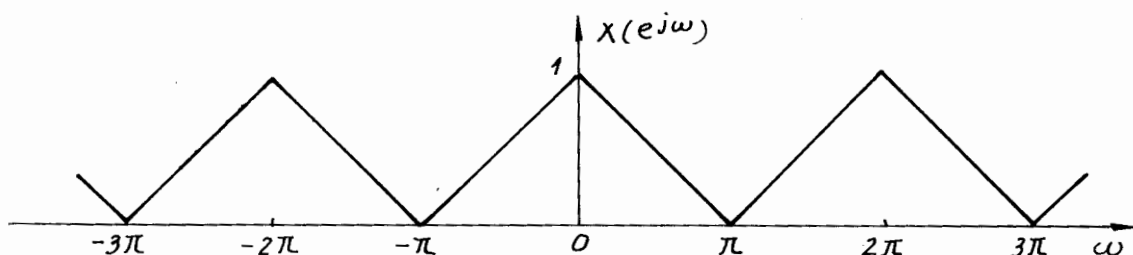


Hình BT 9.17.

Hãy tìm các đầu ra $Y_1(z)$, $Y_2(z)$ và $Y_3(z)$ theo hàm của $X(z)$. Sau đó so sánh các kết quả thu được.

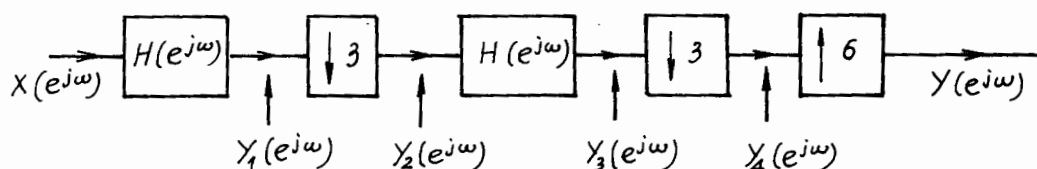
Bài tập 9.18

Cho dãy $x(n]$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ được biểu diễn trên hình 9.18 a sau đây:



Hình BT 9.18 a.

Tín hiệu $x(n]$ này đi qua một mạch số có sơ đồ cho trên hình BT 9.18 b sau đây:



Hình BT 9.18 b.

Giả sử $H(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông thấp lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \frac{\pi}{3}$.

Hãy vẽ đồ thị $Y_1(e^{j\omega})$, $Y_2(e^{j\omega})$, $Y_3(e^{j\omega})$, $Y_4(e^{j\omega})$ và $Y(e^{j\omega})$

Bài tập 9.19

Cho đáp ứng xung $h(n]$ của một bộ lọc số như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{9} & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha 2 thành phần loại 1 của hàm truyền đạt $H(z)$.

Bài tập 9.20

Cho hệ thống số có đáp ứng xung $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \leq n \leq 12 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha 3 thành phần loại 1 của hàm truyền đạt $H(z)$.

Bài tập 9.21

Cho hệ thống IIR có đáp ứng xung như sau:

$$h(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{b}\right)^n u(n-3)$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha 2 thành phần loại 1 của hàm truyền đạt $H(z)$.

Bài tập 9.22

Cho hệ thống số có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 5z^{-6} + 4z^{-7} + 3z^{-8} + 2z^{-9} + z^{-10}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha 3 thành phần loại 1.

Bài tập 9.23

Cho hệ thống có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} + 3z^{-6} + 2z^{-7} + z^{-8}$$

- Hãy tìm phân hoạch nhiều pha 3 thành phần loại 1 và loại 2,
- Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha 3 thành phần loại 1 và loại 2.

Bài tập 9.24

Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc phân chia với hệ số phân chia $M = 3$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{6} & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha tối ưu nhất của bộ lọc phân chia này.

Bài tập 9.25

Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc nội suy với hệ số nội suy $L = 3$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{5} & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha tối ưu nhất của bộ lọc nội suy này.

Bài tập 9.26

Hãy tìm cấu trúc nhiều pha loại 1 ba thành phần và loại 2 hai thành phần của bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu $\uparrow H \downarrow \frac{3}{2}$. Sau đó hãy so sánh hai loại cấu trúc này và cải tiến nó cho ưu việt hơn.

Bài tập 9.27

Hãy cho một ví dụ về bank lọc số phân tích 3 kênh, sau đó dùng đồ thị tần số để giải thích.

Bài tập 9.28

Hãy cho một ví dụ về bank lọc số tổng hợp 3 kênh, sau đó dùng đồ thị tần số để giải thích.

Bài tập 9.29

Hãy cho một ví dụ về bank lọc DFT với $M = 3$.

Bài tập 9.30

Hãy biểu diễn bank lọc số phân tích và tổng hợp dưới dạng nhiều pha 3 thành phần.

Bài tập 9.31

Cho bank lọc số nhiều nhịp 2 kênh trên hình 9.6.2.1, tín hiệu vào bank lọc này có phổ là $X(e^{j\omega})$ cho trên hình 9.6.2.3. Đáp ứng tần số của các bộ lọc số $H_0(z)$ và $G_0(z)$, $H_1(z)$ và $G_1(z)$ cho trên hình 9.6.2.2 (b) (c) (d). Hãy giải thích và vẽ phổ của tín hiệu ra $X(e^{j\omega})$ trong từng trường hợp.

Bài tập 9.32

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{6} & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tín hiệu này đi qua bank lọc khôi phục hoàn hảo chc trên hình 9.6.4.3 với $M = 3$.

Hãy dùng đồ thị thời gian để giải thích dạng của tín hiệu ra $x(n)$.

Bài tập 9.33

Giả sử cho tín hiệu tương tự $x_0(t)$ có bề rộng phổ là 20 kHz, tín hiệu này được lấy mẫu với tần số lấy mẫu bằng tần số Nyquist. Sau khi lấy mẫu tín hiệu này được mã hoá với số bit là 8 bit/1 mẫu một cách thông thường.

Giả sử rằng tín hiệu này qua bộ mã hoá dải con 2 kênh, sau khi qua bank lọc số phân tích 2 kênh ta có 2 tín hiệu dải con là $x_0(n)$ và $x_1(n)$. Nhưng do phổ năng lượng của tín hiệu dải con $x_0(n)$ rất lớn hơn của $x_1(n)$ vậy ta mã hoá tín hiệu dải con $x_0(n)$ với số bit là 8 bit, còn đối với tín hiệu dải con $x_1(n)$ ta mã hoá với số bit là 4 bit.

Hãy tính tốc độ bit trong hai trường hợp này. Sau đó tính hệ số nén tín hiệu.

Bài tập 9.34

Hãy vẽ cấu trúc dạng cây đơn phân giải của bank lọc số 8 kênh (3 tầng). Sau đó vẽ cấu trúc tương đương và vẽ đáp ứng tần số của các bộ lọc trong bank lọc số.

Bài tập 9.35

Hãy vẽ cấu trúc dạng cây đa phân giải của bank lọc số 3 tầng. Sau đó vẽ cấu trúc tương đương và vẽ đáp ứng tần số của các bộ lọc số có trong bank lọc số này.

Bài tập 9.36

Giả sử cho các tín hiệu $x_0(n)$, $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x(n) = 2\delta(n) + 1,5\delta(n - 1) + \delta(n - 2) + 0,5\delta(n - 3)$$

$$x_2(n) = 3\text{rect}_6(n)$$

Ba tín hiệu này cần được ghép kênh theo kiểu TDM.

+ Hãy vẽ sơ đồ bộ ghép kênh TDM

+ Hãy dùng đồ thị thời gian để giải thích nguyên lý làm việc của bộ ghép kênh

Bài tập 9.37

Cho tín hiệu $y(n)$ là tín hiệu ra của bộ ghép kênh trong bài tập 9-36, chúng ta cần tách tín hiệu $y(n)$ này thành 3 tín hiệu $x_0(n)$, $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

+ Hãy vẽ sơ đồ bộ tách kênh TDM,

+ Hãy dùng đồ thị thời gian để giải thích nguyên lý hoạt động của bộ tách kênh này.

Chương 10

BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH

10.1. MỞ ĐẦU

Lợi ích của xử lý số tín hiệu càng ngày càng được khẳng định rõ ràng. Nó được ứng dụng ở nhiều dạng ngày càng khác nhau với những hiệu quả to lớn đặc biệt trong các lĩnh vực thông tin, truyền dẫn, nhận dạng, ... Ngày nay xử lý tín hiệu đã trở thành một ngành khoa học chứ không phải là một môn học. Với mức độ phát triển ngày càng cao về cơ bản, về các phương pháp và về khả năng ứng dụng nó đã lôi cuốn được các kỹ sư, các nhà vật lý cũng như các nhà toán học dồn hết tâm lực vào để nghiên cứu nó.

Trong lĩnh vực xử lý số tín hiệu, biến đổi Fourier chiếm một vị trí hàng đầu nhờ sự tồn tại các thuật toán hiệu quả biến đổi Fourier rời rạc đóng một vai trò rất quan trọng trong xử lý số tín hiệu.

Từ khi Cooley phát hiện ra thuật toán tính nhanh biến đổi Fourier rời rạc vào năm 1965 (người ta quen gọi là biến đổi Fourier, tiếng anh là Fast Fourier Transform viết tắt là FFT), các thuật toán này ngày càng khẳng định vai trò của mình trong xử lý số tín hiệu.

Tầm quan trọng của FFT là rất lớn vì những lý do sau đây:

- FFT đã nâng cao tốc độ, độ mềm dẻo, độ chính xác của xử lý số tín hiệu.
- FFT đã mở ra một lĩnh vực ứng dụng rất rộng lớn của phân tích phổ: Viễn thông, thiên văn, chẩn đoán y học...
- FFT đã khơi lại lợi ích của nhiều ngành toán học mà trước đây người ta chưa khai thác hết.
- FFT đã đặt nền móng cho việc tính toán nhanh các biến đổi khác như: Biến đổi Walsh, biến đổi Hadamard, biến đổi Haar, biến đổi Wavelet.

10.2. BẢN CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

10.2.1. ĐÁNH GIÁ CÁCH TÍNH TRỰC TIẾP DFT

Trong chương 4 chúng ta đã nghiên cứu khá chi tiết biến đổi Fourier rời rạc, bây giờ chúng ta sẽ đánh giá hiệu quả của cách tính trực tiếp thông qua việc tính số lượng phép tính cần thực hiện.

Trong chương 4 chúng ta đã có cặp biến đổi Fourier rời rạc sau đây:

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.2.1.1)$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{IDFT}[X(k)] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.2.1.2)$$

Theo các biểu thức (10.2.1.1) và (10.2.1.2) ở trên chúng ta có những nhận xét sau đây:

- $x(n)$ và $X(k)$ là phức (về tổng quát),
- Cả hai biểu thức trên chỉ khác nhau bởi một hệ số nhân tỷ lệ $\frac{1}{N}$ và dấu của hàm mũ W_N .

Để thấy rõ điều này chúng ta thử xây dựng thủ tục tính trực tiếp DFT ngược như sau:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{kn} \right]^* \end{aligned}$$

($*$: là dấu hiệu liên hợp phức)

dẫn đến:

$$N \cdot x^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{kn} \quad (10.2.1.3)$$

So sánh hai biểu thức (10.2.1.1) và (10.2.1.3) thấy rằng chúng gần như giống nhau. Như thế ta có thể thấy rằng các thuật toán FFT được sử dụng cho cả biến đổi

Fourier rời rạc thuận và ngược. Vì thế chúng ta chỉ nghiên cứu các thuật toán biến đổi Fourier rời rạc thuận.

Sau đây chúng ta tiến hành nghiên cứu hiệu quả của cách tính trực tiếp DFT thuận thông qua việc tính số lượng phép nhân và cộng phức và thực.

- Tính toán số lượng phép nhân và cộng phức

Nhìn vào biểu thức (10.2.1.1) ta thấy ngay rằng đối với mỗi giá trị của k , cách tính trực tiếp DFT phải thực hiện N phép nhân phức và $N - 1$ phép cộng phức. Nhưng k lấy N giá trị từ 0 đến $N - 1$:

$$X(0), X(1), \dots, X(N - 1)$$

Vậy cách tính trực tiếp DFT phải thực hiện:

$$N^2 \text{ phép nhân phức}$$

$$\text{và } N(N - 1) \text{ phép cộng phức}$$

$$(\text{khi } N \gg \Rightarrow N(N - 1) \approx N^2).$$

- Tính toán số lượng phép nhân và cộng số thực

Tổng quát ta thấy rằng $x(n)$ là phức và W_N^{kn} là phức

$$\Rightarrow x(n) = \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)]$$

$$W_N^{kn} = \text{Re}[W_N^{kn}] + j\text{Im}[W_N^{kn}]$$

Vậy ta có thể viết DFT như sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \{ \text{Re}[x(n)] \cdot \text{Re}[W_N^{kn}] - \text{Im}[x(n)] \cdot \text{Im}[W_N^{kn}] + \\ + j\text{Re}[x(n)] \cdot \text{Im}[W_N^{kn}] + j\text{Im}[x(n)] \cdot \text{Re}[W_N^{kn}] \}$$

Từ đây ta thấy rằng số lượng phép nhân và phép cộng số thực sẽ được tính như sau:

$$4N^2 \text{ phép nhân số thực}$$

$$N[4(N - 1) + 3] = N(4N - 1) \text{ phép cộng số thực}$$

$$(\text{khi } N \gg \Rightarrow N(4N - 1) \approx 4N^2)$$

Nhận xét

- Việc tính toán trực tiếp N mẫu của $X(k)_N$ đòi hỏi số lượng các phép toán cỡ N^2 phép.

- Khi N rất lớn thì N^2 sẽ là con số quá lớn như vậy thời gian tính toán sẽ quá dài và dung lượng nhớ của máy tính phải rất lớn (xem bảng 10.2.1.1).

Bảng 10.2.1.1

$\frac{N}{2}$	$\frac{N^2}{4}$
4	16
8	64
16	256
32	1024
64	4096
128	16384
256	65536
512	262144
1024	1048576
2048	4194904
4096	16777216
8192	67000000

- Nhìn vào bảng 10.2.1.1 ta thấy rằng phải tìm ra các phương pháp tính nhanh DFT thì ta mới có thể sử dụng DFT một cách hiệu quả trong quá trình xử lý tín hiệu.

10.2.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA W_N^{kn}

Hầu như tất cả các phương pháp tính DFT một cách hiệu quả đều phải dựa trên hai tính chất của W_N^{kn} , đó là tính tuần hoàn và tính đối xứng.

Sau đây chúng ta sẽ xét hai tính chất này:

* Tính tuần hoàn

$$W_N^{kn} = W_N^{(k'n' + iN)} = W_N^{k'n'}$$

(hoặc ta có thể viết: $kn = k'n'$ theo modulo N)

Bởi vì:

$$n: 0 \div N - 1$$

$$k: 0 \div N - 1$$

Vậy: $(kn)_{\min} = 0$

$$(kn)_{\max} = (N - 1)(N - 1)$$

$$\Rightarrow kn = 0 \div (N - 1)(N - 1)$$

$$kn = k'n' + iN$$

$$(kn)_{\max} = (k'n' + iN)_{\max} = (N - 1) + (N - 2)N$$

Ví dụ 10.2.2.1

Cho DFT với $N = 8$. Hãy dùng tính chất tuần hoàn để tính $X(7)$.

Giải

Với $N = 8$ ta có thể tính $X(7)$ như sau:

$$\begin{aligned} X(7) &= x(0)W_8^{7 \cdot 0} + x(1)W_8^{7 \cdot 1} + x(2)W_8^{7 \cdot 2} + x(3)W_8^{7 \cdot 3} + x(4)W_8^{7 \cdot 4} + \\ &\quad + x(5)W_8^{7 \cdot 5} + x(6)W_8^{7 \cdot 6} + x(7)W_8^{7 \cdot 7} \\ &= x(0)W_8^0 + x(1)W_8^7 + x(2)W_8^{14} + x(3)W_8^{21} + x(4)W_8^{28} + \\ &\quad + x(5)W_8^{35} + x(6)W_8^{42} + x(7)W_8^{49} \end{aligned}$$

Nhưng do tính chất tuần hoàn của W_8^{kn} ta có:

$$W_8^0 = W_8^0$$

$$W_8^7 = W_8^7$$

$$W_8^{14} = W_8^{(6+8)} = W_8^6$$

$$W_8^{21} = W_8^{(5+2 \cdot 8)} = W_8^5$$

$$W_8^{28} = W_8^{(4+3 \cdot 8)} = W_8^4$$

$$W_8^{35} = W_8^{(3+4 \cdot 8)} = W_8^3$$

$$W_8^{42} = W_8^{(2+5 \cdot 8)} = W_8^2$$

$$W_8^{49} = W_8^{(1+6 \cdot 8)} = W_8^1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(7) &= x(0)W_8^0 + x(1)W_8^7 + x(2)W_8^6 + x(3)W_8^5 + x(4)W_8^4 + \\ &\quad + x(5)W_8^3 + x(6)W_8^2 + x(7)W_8^1 \end{aligned}$$

* Tính đối xứng

$$W_N^{kn} = W_N^{(N-k''n'')} = \underbrace{W_N^N W_N^{-k''n''}}_{=1} = 1$$

$$W_N^{k'n'} = W_N^{-k''n''} = \left(W_N^{k''n''}\right)^*$$

Ví dụ 10.2.2.2

Tiếp theo ví dụ 10.2.2.1. Hãy dùng tính chất đối xứng để tính $X(7)$.

Giải

$$W_8^7 = W_8^{(8-1)} = W_8^{-1} = (W_8^1)^*$$

$$W_8^6 = W_8^{(8-2)} = W_8^{-2} = (W_8^2)^*$$

$$W_8^5 = W_8^{(8-3)} = W_8^{-3} = (W_8^3)^*$$

$$W_8^4 = W_8^{(8-4)} = W_8^{-4} = (W_8^4)^*$$

$$W_8^4 = -1$$

$$W_8^0 = 1$$

Từ đây ta có giá trị của $X(7)$ như sau:

$$\begin{aligned} X(7) = x(0) + x(1)(W_8^1)^* + x(2)(W_8^2)^* + x(3)(W_8^3)^* + x(4) + \\ + x(5)W_8^3 + x(6)W_8^2 + x(7)W_8^1 \end{aligned}$$

Nhận xét

- Tất cả các thuật toán tính nhanh DFT đều dựa trên cùng một nguyên tắc là phân việc tính toán DFT của một dãy có chiều dài N thành nhiều DFT có chiều dài nhỏ hơn bằng cách khai thác các tính chất đối xứng và tính chất tuần hoàn của hàm

mũ phức $W_N^{-kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

- Việc đưa nguyên tắc này vào tính DFT sẽ dẫn đến một số phương pháp khác nhau mà hiệu quả của các phương pháp đó có thể so sánh với nhau được.

10.3. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH PHÂN THỜI GIAN (FFT)

10.3.1. ĐỊNH NGHĨA

Thuật toán tính nhanh biến đổi Fourier rời rạc dựa trên việc phân dãy $x(n)$ thành các dãy con có chiều dài ngắn hơn được gọi là thuật toán biến đổi Fourier nhanh phân thời gian.

Để minh họa thuật toán này trước hết chúng ta nghiên cứu trường hợp đặc biệt mà $N = 2^l$ (N là chiều dài của dãy $x(n)$).

10.3.2. THUẬT TOÁN FFT PHÂN THỜI GIAN TRONG TẦNG HỢP $N = 2^l$

a) Thủ tục tổng quát

Nếu $N = 2^l$, thì N sẽ là một số nguyên chẵn.

Vậy chúng ta có thể phân chia dãy $x(n)_N$ thành hai dãy có chiều dài $\frac{N}{2}$ là hai dãy $x(n)_{\frac{N}{2}}$ như sau:

- Dãy thứ nhất được hình thành bởi các giá trị chẵn,
- Dãy thứ hai được hình thành bởi các giá trị lẻ.

Về mặt toán học ta có thể viết hai dãy này như sau:

$$x(2r)_{\frac{N}{2}} \text{ và } x(2r+1)_{\frac{N}{2}}$$

Vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)_{\frac{N}{2}} W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)_{\frac{N}{2}} W_N^{(2r+1)k} & 0 \leq n \leq N-1 \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} W_N^k \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} \end{aligned}$$

Chúng ta đặt:

$$\begin{aligned} G(k)_{\frac{N}{2}} &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \\ H(k)_{\frac{N}{2}} &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rk} & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \end{aligned}$$

Ở đây:

$$x(2r) = g(r)$$

$$x(2r+1) = h(r)$$

$$\Rightarrow X(k)_N = \begin{cases} G(k)_N + W_N^k H(k)_N & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (10.3.2.1)$$

Hoặc ta có thể viết:

$$X(k)_N = \tilde{G}(k)_N \text{rect}_N(k) + W_N^k \tilde{H}(k)_N \text{rect}_N(k) \quad (10.3.2.2)$$

Ở đây:

$G(k)_N$ là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài $\frac{N}{2}$

$H(k)_N$ là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài $\frac{N}{2}$

và:

$G(k)_N$ là biến đổi Fourier rời rạc của các mẫu lẻ của $x(n)$

$H(k)_N$ là biến đổi Fourier rời rạc của các mẫu chẵn của $x(n)$

Nhận xét

+ Như vậy các phép toán được tiến hành với $G(k)_N$ và $H(k)_N$ chỉ trong khoảng

$0 \leq k \leq (\frac{N}{2} - 1)$, tức là:

$$G(k)_N = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ = 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$H(k)_N = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ = 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k)_N = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq k \leq N-1 \\ = 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Như thế thực chất là ta đã phân một DFT có chiều N thành hai DFT có chiều dài $\frac{N}{2}$. Để thuận lợi cho việc theo dõi cuốn sách này chúng ta có ký hiệu sau đây:

$(\text{DFT})_N$: là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài N .

$(\text{DFT})_{\frac{N}{2}}$: là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài $\frac{N}{2}$.

Ví dụ 10.3.2.1

Giả sử cho chiều dài của DFT $N = 8$, hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian để phân đôi DFT này. Sau đó dùng đồ hình có hướng để minh họa thuật toán này cho rõ ràng hơn.

Giải

Áp dụng biểu thức (10.3.2.1) trong trường hợp $N = 8$ chúng ta có thể viết:

$$X(0)_8 = G(0)_4 + W_8^0 H(0)_4$$

$$X(1)_8 = G(1)_4 + W_8^1 H(1)_4$$

$$X(2)_8 = G(2)_4 + W_8^2 H(2)_4$$

$$X(3)_8 = G(3)_4 + W_8^3 H(3)_4$$

$$X(4)_8 = G(4)_4 + W_8^4 H(0)_4$$

$$X(5)_8 = G(5)_4 + W_8^5 H(1)_4$$

$$X(6)_8 = G(6)_4 + W_8^6 H(2)_4$$

$$X(7)_8 = G(7)_4 + W_8^7 H(3)_4$$

Chú ý rằng nếu thay các giá trị của k từ 0 đến 7 vào biểu thức (10.3.2.1) ta sẽ thấy xuất hiện các giá trị $G(4)_4$, $G(5)_4$, $G(6)_4$, $G(7)_4$, $H(4)_4$, $H(5)_4$, $H(6)_4$, $H(7)_4$, nhưng các giá trị này không tồn tại vì chiều dài của $G(k)_4$ và $H(k)_4$ chỉ từ 0 đến 3. Vậy các giá trị sẽ vòng vào trong khoảng từ 0 đến 3 như sau:

$$G(4)_4 \rightarrow G(0)_4 \qquad H(4)_4 \rightarrow H(0)_4$$

$$G(5)_4 \rightarrow G(1)_4 \qquad H(5)_4 \rightarrow H(1)_4$$

$$G(6)_4 \rightarrow G(2)_4 \qquad H(6)_4 \rightarrow H(2)_4$$

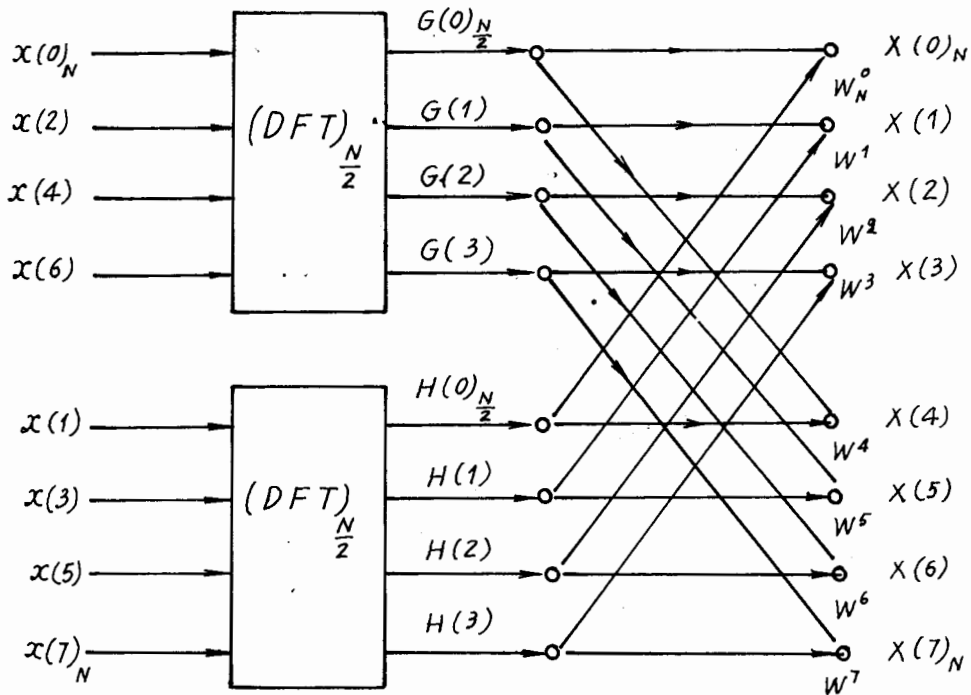
$$G(7)_4 \rightarrow G(3)_4 \qquad H(7)_4 \rightarrow H(3)_4$$

Đồ hình có hướng để minh họa thuật toán này được cho trên hình 10.3.2.2 sau đây.

Bây giờ chúng ta sẽ đánh giá hiệu quả của phép phân một DFT có chiều dài là N thành hai DFT có chiều dài là $\frac{N}{2}$.

Việc đánh giá hiệu quả này dựa trên cơ sở việc so sánh số lượng các phép tính số học cần phải thực hiện của cách tính trực tiếp $(DFT)_N$ và phân thành hai $(DFT)_{\frac{N}{2}}$.

Chúng ta đã biết rằng để tính toán N mẫu của $x(k)_N$ đòi hỏi số lượng các phép toán có N^2 phép tính thức (tức là có N^2 phép nhân phức và N^2 phép cộng phức).



Hình 10.3.2.2.

Như vậy để tính $G(k)_{\frac{N}{2}}$ chúng ta phải đòi hỏi $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ phép nhân phức và $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ phép cộng phức. Để tính toán $H(k)_{\frac{N}{2}}$, tương tự chúng ta cũng phải đòi hỏi $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ phép tính phức.

Để kết hợp $G(k)_{\frac{N}{2}}$ và $H(k)_{\frac{N}{2}}$, theo biểu thức (10.3.2.1), chúng ta phải thực hiện phép toán nhân phức $W_N^k H(k)_{\frac{N}{2}}$ (k chạy từ 0 đến $N-1$), tức là chúng ta cần phải thực hiện N phép nhân phức. Ngoài ra chúng ta còn cần phải thực hiện phép toán: $G(k)_{\frac{N}{2}} + H(k)_{\frac{N}{2}}$, tức là đòi hỏi N phép cộng phức.

Tóm lại để tính toán $x(k)_N$ bằng cách phân thành $G(k)_{\frac{N}{2}}$ và $H(k)_{\frac{N}{2}}$, theo biểu thức (10.3.2.1) chúng ta cần số lượng các phép tính phức như sau:

$$N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \text{ phép nhân phức} \quad (10.3.2.1)$$

$$N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \text{ phép cộng phức.}$$

Cuối cùng ta có thể nói rằng để tính toán N mẫu của $x(k)_N$ thì số lượng phép tính phức cần thực hiện là $\left[N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \right]$ phép.

Ví dụ 10.3.2.2

Hãy tính hiệu quả của FFT với $N = 8$. Khi phân $(\text{DFT})_8$ thành hai $(\text{DFT})_4$.

Giải

Nếu tính trực tiếp $x(k)_8$ ta cần thực hiện số phép tính là N^2 phép:

$$N = 8 \Rightarrow N^2 = 64 \text{ phép.}$$

Nếu phân $x(k)_8$ thành $G(k)_4$ và $H(k)_4$ thì số phép tính cần thực hiện là

$$\left[N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \right] \text{ phép:}$$

$$N = 8 \Rightarrow N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = 8 + 2(4)^2 = 40$$

Vậy số phép tính tiết kiệm được là:

$$64 - 40 = 24 \text{ phép.}$$

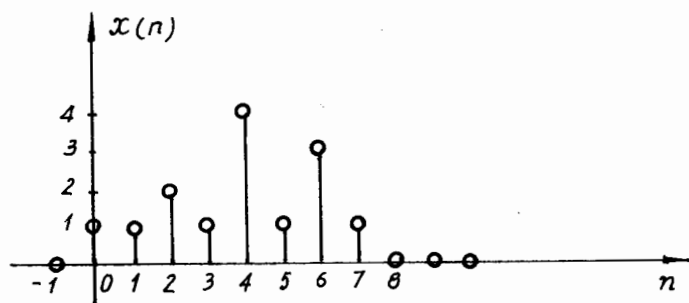
Nhận xét

+ Khi N rất lớn thì $\left[N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \right] \approx 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \approx \frac{N^2}{2}$, tức là khi N rất lớn thì số phép toán cần thực hiện sẽ giảm rõ rệt.

+ Bởi vì $N = 2^r \Rightarrow \frac{N}{2} = 2^{r-1} \Rightarrow$ Để nâng cao hiệu quả hơn nữa, chúng ta lại chia $(\text{DFT})_{\frac{N}{2}}$ thành hai $(\text{DFT})_{\frac{N}{4}}$.

Ví dụ 10.3.2.3

Cho dãy $x(n)$ có dạng như trên hình 10.3.2.3.



Hình 10.3.2.3.

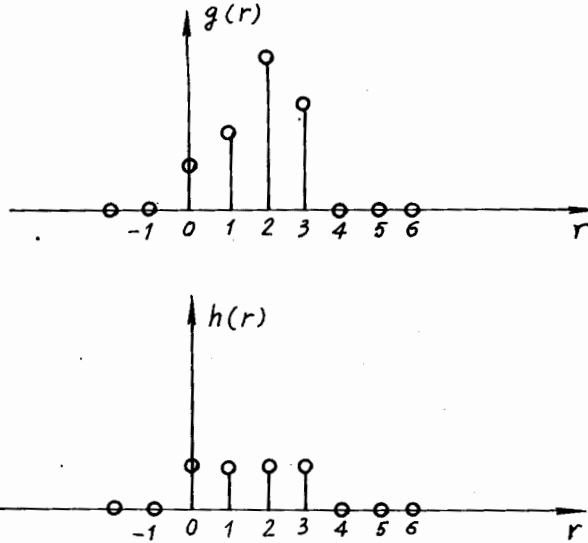
Hãy minh họa cách tính $X(k)_8$ bằng cách phân $x(n)_8$ thành hai dãy $g(r)_4$ và $h(r)_4$.

Giải

Ta biết rằng: $g(r) = x(2r)$

$$h(r) = x(2r + 1)$$

Vậy từ hình 10.3.2.3 ta có dạng của $g(r)$ và $h(r)$ cho trên hình 10.3.2.4 như sau:



Hình 10.3.2.4.

Từ đây ta tính được $G(k)_4$ và $H(k)_4$ như sau:

$$G(k)_4 = \sum_{r=0}^3 g(r)W_4^{kr}$$

$$G(0)_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$G(1)_4 = 1 - (-j)^0 + 2(-j)^1 + 4(-j)^2 + 3(-j)^3 = -3 + j$$

$$G(2)_4 = 1 - (-j)^0 + 2(-j)^2 + 4(-j)^4 + 3(-j)^6 = 0$$

$$G(3)_4 = 1 - (-j)^0 + 2(-j)^3 + 4(-j)^6 + 3(-j)^9 = -3 - j$$

$$H(k)_4 = \sum_{r=0}^3 h(r)W_4^{kr}$$

$$H(0)_4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$H(1)_4 = 1 - (-j)^0 + 1(-j)^1 + 1(-j)^2 + 1(-j)^3 = 0$$

$$H(2)_4 = 1 - (-j)^0 + 1(-j)^1 + 1(-j)^2 + 1(-j)^3 = 0$$

$$H(3)_4 = 1 - (-j)^0 + 1(-j)^1 + 1(-j)^2 + 1(-j)^3 = 0$$

Từ đây ta tính được $X(k)_8$ như sau:

$$X(k)_8 = \begin{cases} G(k)_4 + W_8^k H(k)_4 & 0 \leq k \leq 7 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy ta có giá trị của $X(k)_8$ như sau:

$$X(0)_8 = G(0)_4 + W_8^0 H(0)_4 = 10 + W_8^0 \cdot 4 = 14$$

$$X(1) = G(1) + W_8^1 H(1) = -3 + j + W_8^1 \cdot 0 = -3 + j$$

$$X(2) = G(2) + W_8^2 H(2) = 0 + W_8^2 \cdot 0 = 0$$

$$X(3) = G(3) + W_8^3 H(3) = -3 + j + W_8^3 \cdot 0 = -3 + j$$

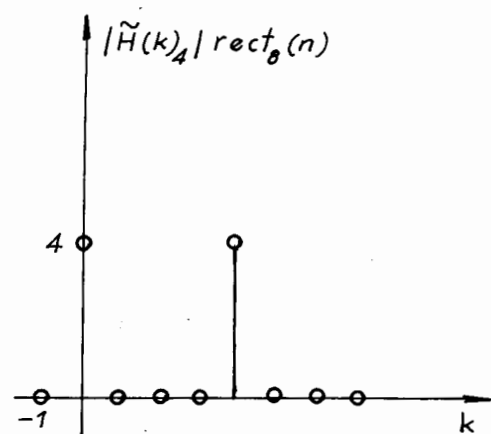
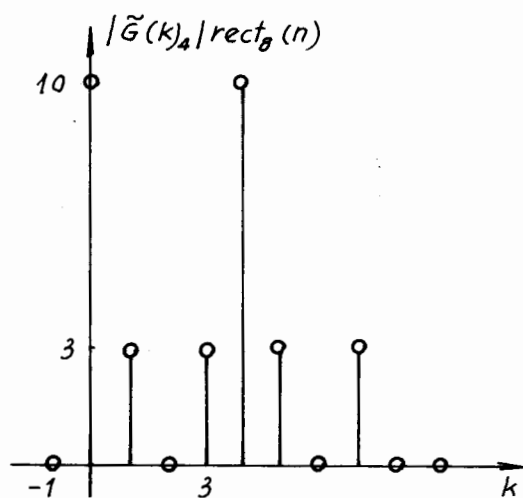
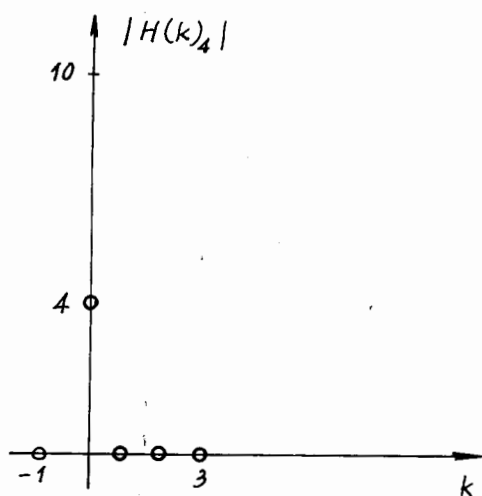
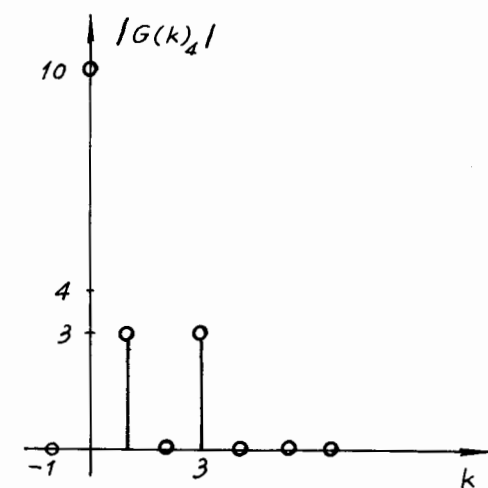
$$X(4) = G(0) + W_8^4 H(0) = 10 + W_8^4 \cdot 4 = 10 - 4 = 6$$

$$X(5) = G(1) + W_8^5 H(1) = -3 + j + W_8^5 \cdot 0 = -3 + j$$

$$X(6) = G(2) + W_8^6 H(2) = 0 + W_8^6 \cdot 0 = 0$$

$$X(7) = G(3) + W_8^7 H(3) = -3 - j + W_8^7 \cdot 0 = -3 - j$$

Đồ thị của $|G(k)_4|$; $|\tilde{G}(k)_4| \text{rect}_8(n)$, $|H(k)_4|$ và $|\tilde{H}(k)_4| \text{rect}_8(n)$ được cho trên hình 10.3.2.5.



Hình 10.3.2.5.

Tiếp tục bằng cách tương tự, chúng ta lại chia dãy $g(r)_{\frac{N}{2}}$ và $h(r)_{\frac{N}{2}}$ thành dãy có

chiều dài là $\frac{N}{4}$, và chúng ta có:

$$\begin{aligned} G(k)_{\frac{N}{2}} &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + W_{\frac{N}{2}}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} \end{aligned}$$

Chúng ta đặt:

$$\begin{aligned} A(k)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} a(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} \\ B(k)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{\frac{N}{4}}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} b(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} \end{aligned}$$

Vậy $G(k)_{\frac{N}{2}}$ được tính như sau:

$$G(k)_{\frac{N}{2}} = \begin{cases} A(k)_{\frac{N}{4}} + W_{\frac{N}{4}}^k B(k)_{\frac{N}{4}}, & 0 \leq k \leq \frac{N}{4}-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

hoặc:

$$G(k)_{\frac{N}{2}} = \tilde{A}(k)_{\frac{N}{4}} \text{rect}_{\frac{N}{2}}(k) + W_{\frac{N}{4}}^k B(k)_{\frac{N}{4}} \text{rect}_{\frac{N}{2}}(k)$$

Ta thấy rằng $W_{\frac{N}{2}}^k = W_{\frac{N}{4}}^{2k}$, vậy ta có thể viết:

$$G(k)_{\frac{N}{2}} = \begin{cases} A(k)_{\frac{N}{4}} + W_{\frac{N}{4}}^{2k} B(k)_{\frac{N}{4}}, & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (10.3.2.4)$$

hoặc:

$$G(k)_{\frac{N}{2}} = \tilde{A}(k)_{\frac{N}{4}} \text{rect}_{\frac{N}{2}}(k) + W_{\frac{N}{4}}^{2k} \tilde{B}(k)_{\frac{N}{4}} \text{rect}_{\frac{N}{2}}(k) \quad (10.3.2.5)$$

Đối với $H(k)_{\frac{N}{2}}$ ta cũng có:

$$\begin{aligned}
 H(k)_{\frac{N}{2}} &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \\
 &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{(2l+1)k} \\
 &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + W_{\frac{N}{2}}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{2lk}
 \end{aligned}$$

Chúng ta đặt:

$$\begin{aligned}
 C(k)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} c(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} \\
 D(k)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1) W_{\frac{N}{4}}^{lk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} d(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk}
 \end{aligned}$$

Vậy $H(k)_{\frac{N}{2}}$ được tính như sau:

$$H(k)_{\frac{N}{2}} = \begin{cases} c(k)_{\frac{N}{4}} + W_{\frac{N}{2}}^{2k} D(k)_{\frac{N}{4}} & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (10.3.2.6)$$

hoặc:

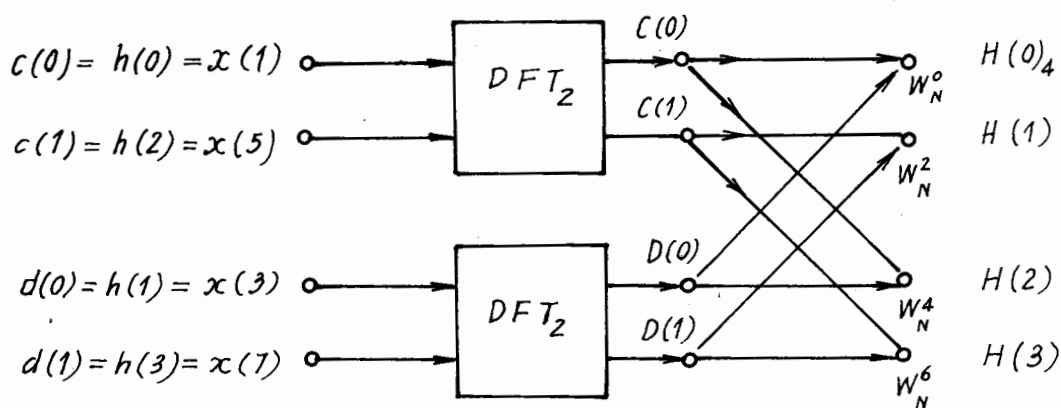
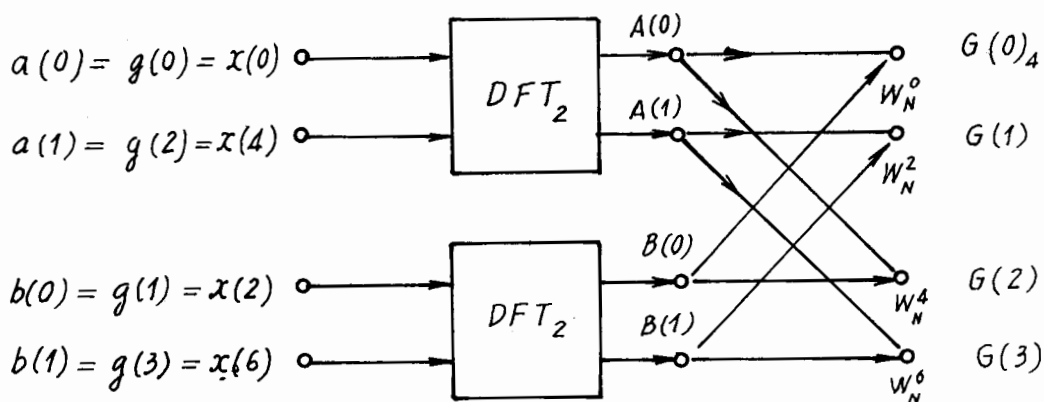
$$H(k)_{\frac{N}{2}} = \tilde{C}(k)_{\frac{N}{4}} \text{rect}_{\frac{N}{2}}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{2k} \tilde{D}(k)_{\frac{N}{4}} \text{rect}_{\frac{N}{2}}(k). \quad (10.3.2.7)$$

Ví dụ 10.3.2.3

Chúng ta quay lại ví dụ 10.3.2.1 với DFT có chiều dài $N = 8$. Hãy dùng graphe có hướng để minh họa thuật toán tính $G(h)_4$ và $H(k)_4$, sau đó kết hợp để thành thủ tục tính $X(k)_8$.

Giải

Thuật toán tính $G(h)_4$ và $H(k)_4$ được minh họa trên hình 10.3.2.6 thông qua graphe có hướng dạng cánh bướm.



Hình 10.3.2.6.

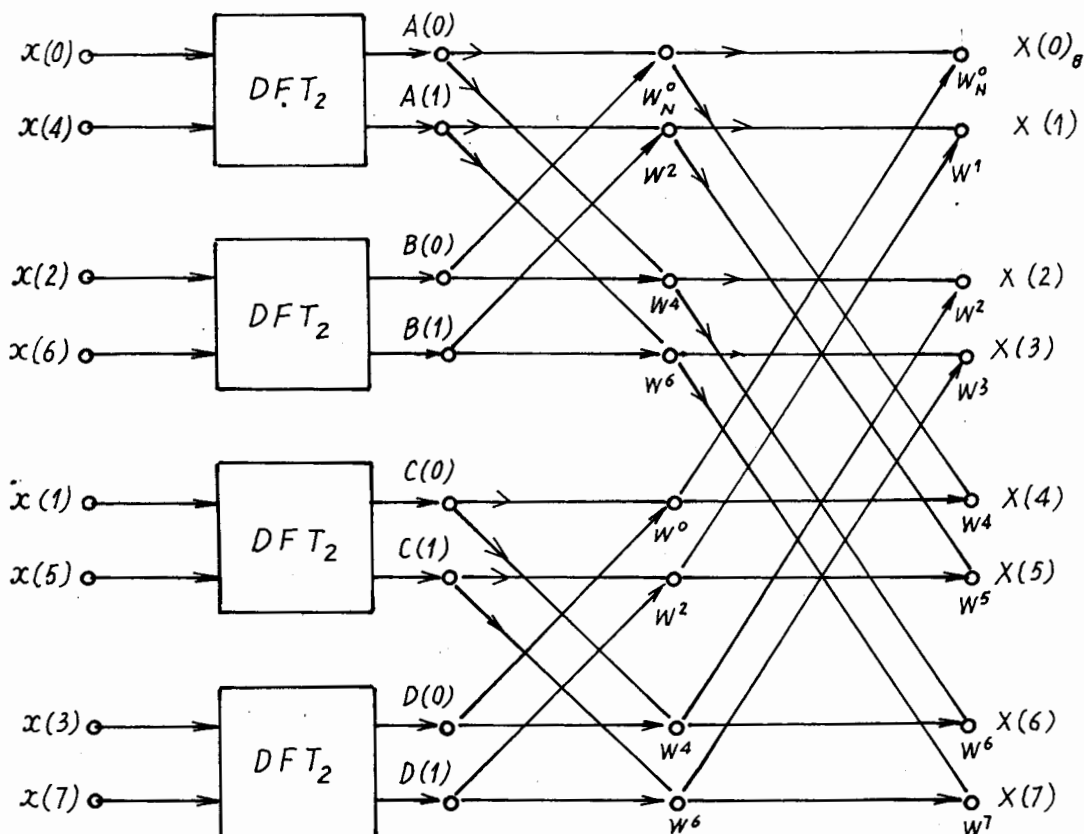
Kết hợp hình 10.3.2.2 và hình 10.3.2.4 chúng ta có thuật toán tính $X(k)_8$ và được minh họa trên hình 10.3.2.7.

Bằng cách tương tự chúng ta lại tiếp tục phân các dãy $a(l)_{\frac{N}{4}}$; $b(l)_{\frac{N}{4}}$; $c(l)_{\frac{N}{4}}$ và $d(l)_{\frac{N}{4}}$ thành các dãy có chiều dài là $\frac{N}{8}$, ..., và quá trình cứ thế tiếp tục cho đến khi nào chỉ còn tính DFT hai điểm.

Ví dụ 10.3.2.4

Chúng ta quay lại ví dụ 10.3.2.3 với DFT có chiều dài $N = 8$.

Hãy dùng graphe có hướng dạng cánh bướm để minh họa thuật toán tính $A(k)_2$, $B(k)_2$, $C(k)_2$ và $D(k)_2$, sau đó kết hợp lại để minh họa toàn bộ thuật toán tính $X(k)_8$.



Hình 10.3.2.7.

Giải

Vì $\frac{N}{4} = 2$, nên đây là bước cuối cùng để xây dựng thuật toán FFT với chiều dài $N = 8$. Tương tự như các ví dụ trên ta có cách tính $A(k)_2$ như sau:

$$A(k)_2 = \sum_{l=0}^1 a(l)W_2^{lk}$$

$$\Rightarrow A(0)_2 = a(0)W_2^0 + a(1)W_2^0$$

$$A(1)_2 = a(0)W_2^0 + a(1)W_2^1$$

vì $W_2^0 = 1$ nên ta có thể viết một cách đối xứng như sau:

$$A(0)_2 = a(0) + a(1)W_2^0$$

$$A(1)_2 = a(0) + a(1)W_2^1$$

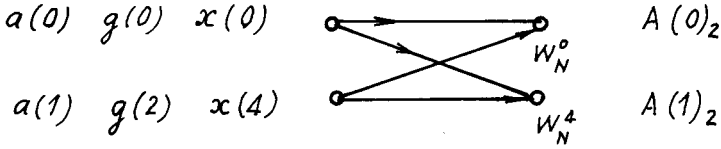
Nhưng $W_2^0 = W_N^0 = 1$; $W_2^1 = W_2^{\frac{N}{2}} = -1$.

Vậy có thể viết:

$$A(0) = a(0) + a(1)W_N^0$$

$$A(1) = a(0) + a(1)W_N^4$$

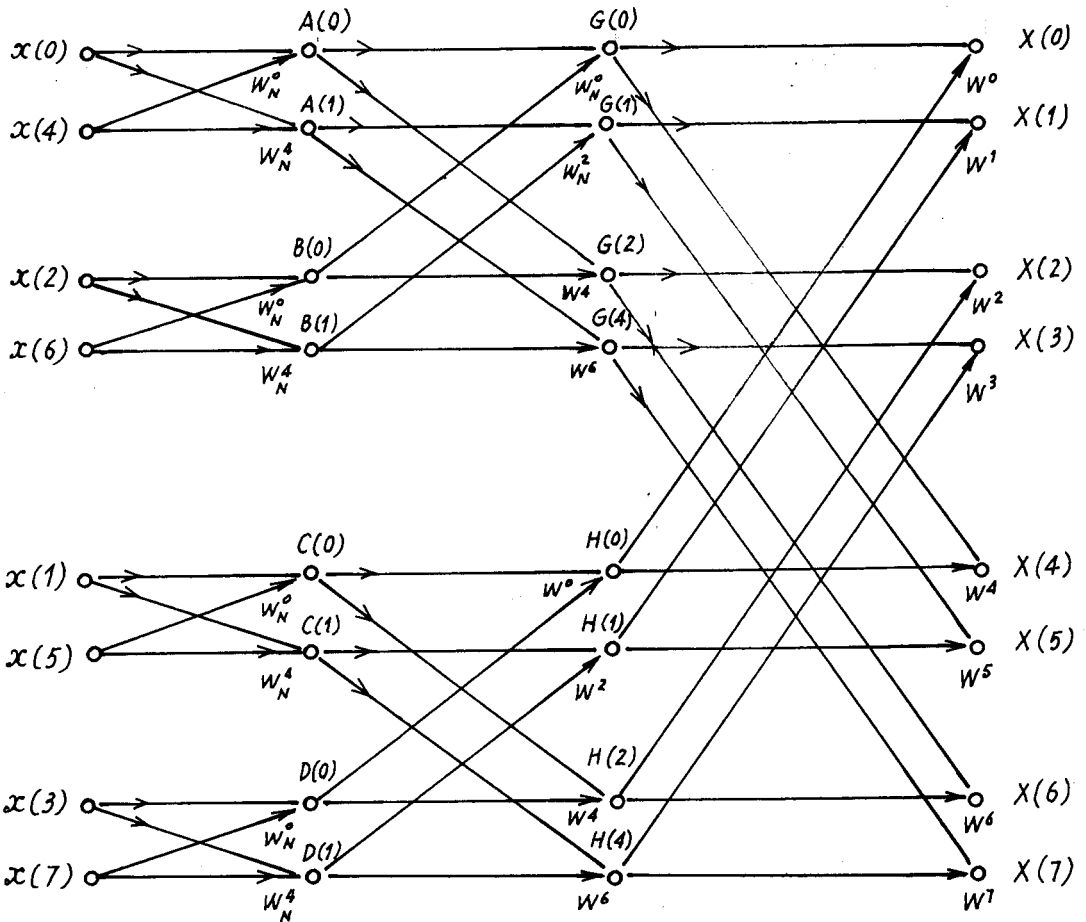
Từ đây ta thu được graphe có hướng dạng cánh bướm được minh họa trên hình 10.3.2.8.



Hình 10.3.2.8.

Bằng cách tương tự chúng ta có thể tính và vẽ graphe có hướng dạng cánh bướm đối với $B(k)_2$, $C(k)_2$ và $D(k)_2$.

Kết hợp các giai đoạn tính $A(k)_2$, $B(k)_2$, $C(k)_2$, và $D(k)_2$ rồi đến $G(k)_4$ và $H(k)_4$ chúng ta thu được kết quả cuối cùng của toàn bộ thuật toán tính $X(k)_8$ được minh họa bằng graphe có hướng dạng cánh bướm được cho trên hình 10.3.2.9.



Hình 10.3.2.9.

b) Tính toán hiệu quả

Trong phần trên chúng ta biết rằng nếu chúng ta tính toán trực tiếp dãy $X(k)_N$ theo định nghĩa của DFT thì để tính toán tất cả N điểm của DFT chúng ta cần phải đòi hỏi số phép tính cỡ N^2 . Còn nếu chúng ta thực hiện tính DFT gián tiếp theo thuật toán FFT thì chúng ta sẽ thu được hiệu quả rất cao, cụ thể là chúng ta sẽ đánh giá hiệu quả theo số phép tính cần phải thực hiện để tính N điểm của $X(k)_N$.

Bước đầu tiên chúng ta phân DFT_N thành hai $DFT_{\frac{N}{2}}$, khi đó số phép tính (nhân hoặc cộng) đòi hỏi phải thực hiện là:

$$N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = N + 2(2^{\gamma-1})^2$$

Bước thứ hai chúng ta phân mỗi $DFT_{\frac{N}{2}}$ thành hai $DFT_{\frac{N}{4}}$, khi đó số phép tính đòi hỏi phải thực hiện là:

$$\begin{aligned} N + 2\left[\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2\right] &= N + N + 4\left(\frac{N}{4}\right)^2 \\ &= N + N + 2^2(2^{\gamma-2})^2 \end{aligned}$$

bởi vì để tính mỗi $DFT_{\frac{N}{2}}$ trực tiếp, yêu cầu số phép tính là $\left(\frac{N}{2}\right)^2$, còn để tính mỗi $DFT_{\frac{N}{2}}$ gián tiếp qua hai $DFT_{\frac{N}{4}}$ đòi hỏi số phép tính là: $\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2$.

Bước thứ ba chúng ta lại phân mỗi $DFT_{\frac{N}{4}}$ thành hai $DFT_{\frac{N}{8}}$, khi đó số phép tính đòi hỏi phải thực hiện là:

$$\begin{aligned} N + N + 4\left[\frac{N}{4} + 2\left(\frac{N}{8}\right)^2\right] &= N + N + N + 8\left(\frac{N}{8}\right)^2 \\ &= N + N + N + 2^3(2^{\gamma-3})^2 \end{aligned}$$

.....

Quá trình cứ như thế tiếp tục đến bước thứ $(\gamma - 1)$ thì số phép tính đòi hỏi phải thực hiện là:

$$\underbrace{N + N + N + \dots + N}_{(\gamma-1) \text{ thành phần}} + 2^{\gamma-1} \left[2^{\gamma-(\gamma-1)} \right]^2$$

Còn đến bước thứ γ thì số phép tính đòi hỏi phải thực hiện là:

$$\underbrace{N + N + N + \dots + N}_{\gamma \text{ thành phần}} + 2^\gamma [2^{\gamma-\gamma}]^2$$

Vậy ở bước thứ γ thì thực chất là phân các DFT_2 thành hai DFT_1 và DFT_1 lại chính là $x(n)$ tức là:

$$X(k)_1 = \sum_{n=0}^{1-1} x(n)_1 W_1^{kn} = x(n)$$

Như thế không cần phải tính bước này, và chúng ta có thể kết luận như sau:

Sau γ lần phân hạch, việc tính gián tiếp dãy $X(k)_N$ sẽ đòi hỏi số phép tính là: γN phép, mà:

$$N = 2^\gamma \Rightarrow \gamma = \log_2 N$$

Vậy số phép tính khi dùng thuật toán FFT sẽ chỉ còn là:

$$N \log_2 N \quad (10.3.2.8)$$

Ví dụ 10.3.2.5

Giả sử chúng ta cần phải tính DFT với chiều dài $N = 8 = 2^3$

+ Hãy tính số phép tính cần phải thực hiện khi tính trực tiếp DFT.

+ Hãy tính số phép tính cần phải thực hiện qua từng giai đoạn khi tính gián tiếp qua thuật toán FFT phân thời gian.

Giải

+ Tính trực tiếp: Số phép tính cần phải thực hiện là:

$$N^2 = 64$$

+ tính gián tiếp qua thuật toán FFT:

- Giai đoạn thứ nhất: Số phép tính cần phải thực hiện là:

$$N + 2 \left(\frac{N}{2} \right)^2 = 8 + 2(4)^2 = 40$$

- Giai đoạn hai: Số phép tính cần phải thực hiện là:

$$N + N + 4 \left(\frac{N}{4} \right)^2 = N + N + 2^2 (2^{3-2})^2 = 32$$

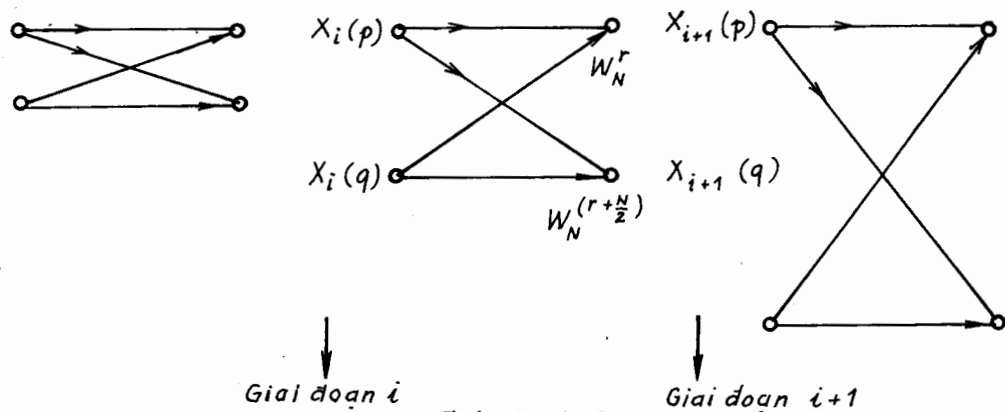
- Giai đoạn thứ ba: là giai đoạn cuối cùng nên khi phân DFT_2 thành hai DFT_1 , mà ta lại không cần phải tính DFT_1 vậy số phép tính cần phải thực hiện là:

$$N\gamma = N \log_2 N = 8.3 = 24$$

c) Cải thiện thuật toán

Chúng ta chú ý rằng theo thuật toán mà ta đã trình bày và nhất là theo hình 10.3.2.9 thì cứ mỗi một giai đoạn tính toán chúng ta lại có cùng một thuật toán dạng cánh bướm.

Giả sử chúng ta có hai giai đoạn tính toán kế tiếp nhau i và $(i + 1)$, thuật toán cánh bướm của các giai đoạn này được minh hoạ trên hình 10.3.2.10.



Hình 10.3.2.10.

Theo hình 10.3.2.10, ta thấy rằng giữa hai giai đoạn i và $(i + 1)$ chúng ta có thể viết như sau:

$$X_{i+1}(p) = X_i(p) + W_N^r X_i(q)$$

$$X_{i+1}(q) = X_i(p) + W_N^{(r+\frac{N}{2})} X_i(q) \quad (10.3.2.9)$$

Nhưng ta có:

$$W_N^{(r+\frac{N}{2})} = W_N^r W_N^{\frac{N}{2}} = W_N^r \cdot e^{-j\pi} = -W_N^r$$

Vậy ta có thể viết lại biểu thức (10.3.2.9) dưới dạng khác sau đây:

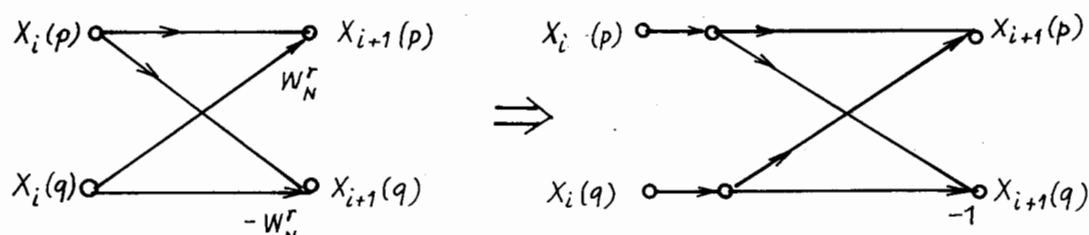
$$X_{i+1}(p) = X_i(p) + W_N^r X_i(q)$$

$$X_{i+1}(q) = X_i(p) - W_N^r X_i(q) \quad (10.3.2.10)$$

Như vậy theo biểu thức (10.3.2.10) ở trên chúng ta có thể cải thiện thuật toán cánh bướm cho trên hình 10.3.2.10 để mô tả hai giai đoạn tính toán kế tiếp nhau i và $(i + 1)$. Việc cải thiện này được minh hoạ trên hình 10.3.2.11.

Nhận xét

+ Theo biểu thức (10.3.2.10) và hình vẽ (10.3.2.11) ta thấy rằng việc cải thiện này sẽ làm giảm số lượng phép nhân phức, cụ thể là với chỉ một phép nhân $W_N^r \cdot X_i(q)$ chúng ta có thể sử dụng để tính đồng thời hai giá trị $X_{i+1}(p)$ và $X_{i+1}(q)$, vậy số phép nhân sẽ giảm đi hai lần, còn số lượng phép cộng thì vẫn giữ nguyên.



Hình 10.3.2.11.

+ Vậy để tính được hết tất cả các giá trị của $X(k)_N$ thì chúng ta cần phải thực hiện số lượng các phép tính như sau:

$N \log_2 N$ phép cộng phức,

và $\frac{1}{2} N \log_2 N$ phép nhân phức.

Ví dụ 10.3.2.6

Chúng ta quay lại ví dụ 10.3.2.4 với DFT có chiều dài $N = 8$.

Hãy dùng biểu thức 10.3.2.10 và hình vẽ 10.3.2.11 để vẽ lại graphe có hướng dạng cánh bướm cho trên hình 10.3.2.9.

Giải

Áp dụng tính chất: $W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$ ta có với $N = 8$ như sau:

$$W_N^4 = -W_N^0; W_N^5 = -W_N^1; W_N^6 = -W_N^2; W_N^7 = -W_N^3.$$

Sau đó thế vào giá trị trên hình 10.3.2.9, ta thu được graphe có hướng dạng cánh bướm đã được cải thiện, graphe này được minh họa trên hình 10.3.2.12.

Nhận xét

Nhìn trên hình 10.3.2.9 và hình 10.3.2.12 ta thấy rằng dãy vào $x(n)_N$ được sắp xếp theo thứ tự của mã nhị phân đảo, còn dãy ra $x(k)_N$ được sắp xếp theo thứ tự của mã nhị phân bình thường.

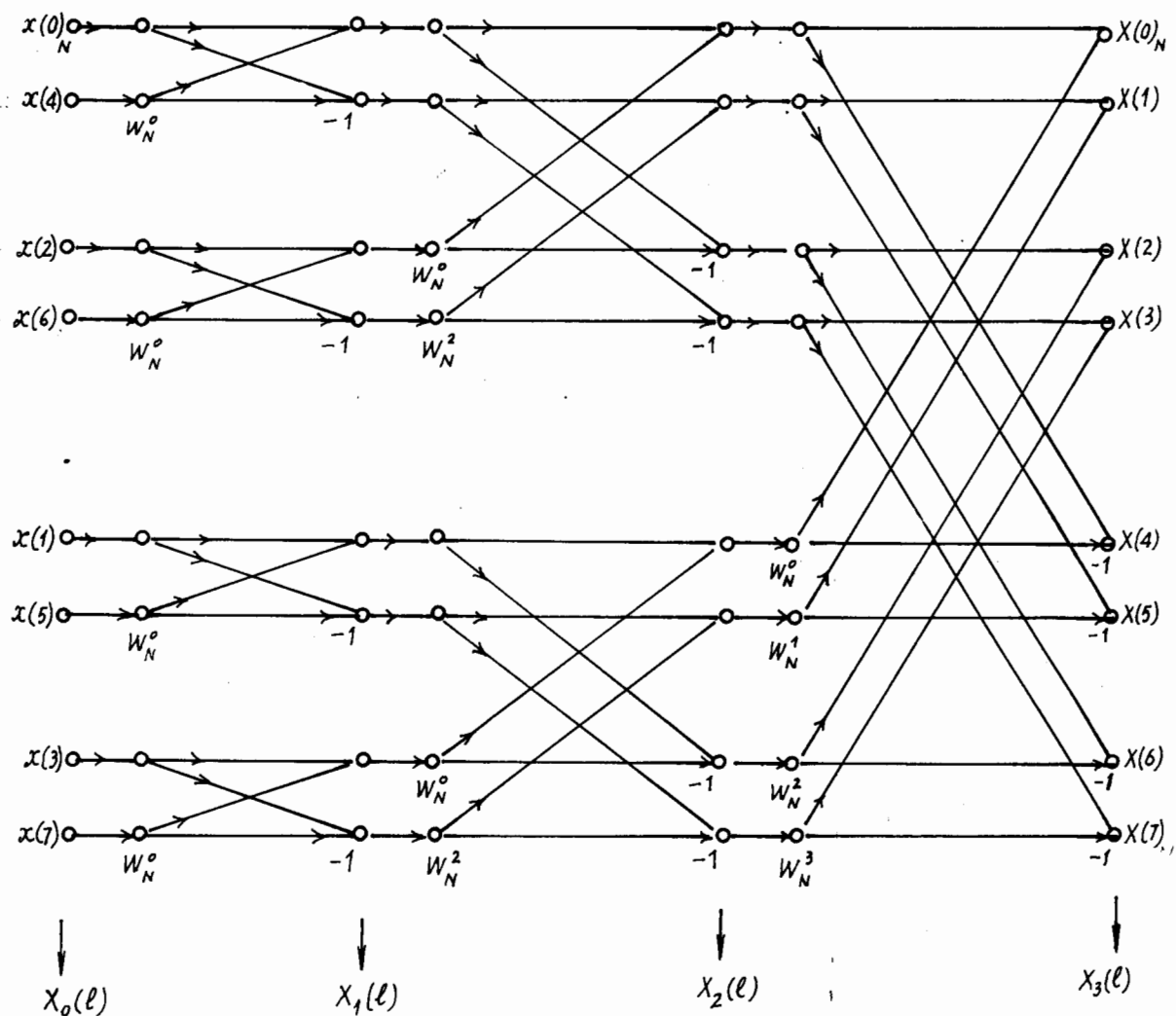
Ví dụ 10.3.2.7

Hãy minh họa việc sắp xếp thứ tự của dãy $x(n)_N$ theo mã nhị phân đảo và dãy $x(k)_N$ theo mã nhị phân bình thường trong trường hợp $N = 8$.

Giải

Vì $N = 8 = 2^3$, vậy ta phải dùng 3 bit để mã hoá.

Bảng 10.3.2.1 sẽ mô tả mã nhị phân đảo và mã nhị phân bình thường dùng để sắp xếp thứ tự của dãy $x(n)_N$ và $x(k)_N$.



Hình 10.3.2.12.

Bảng 10.3.2.1

Mã nhị phân đảo			Mã nhị phân		
$x(0)_N$	←	0 0 0	0 0 0	→	$X(0)_N$
$x(4)_N$		1 0 0	0 0 1		
$x(2)_N$		0 1 0	0 1 0		
$x(6)_N$		1 1 0	0 1 1		
$x(1)_N$		0 0 1	1 0 0		
$x(5)_N$		1 0 1	1 0 1		
$x(3)_N$		0 1 1	1 1 0		
$x(7)_N$		1 1 1	1 1 1	→	$X(7)_N$
	↕		↕		
	Trục đảo		Trục đảo		

10.3.3. CÁC DẠNG KHÁC CỦA THUẬT TOÁN

Sau đây chúng ta sẽ trình bày nội dung thuật toán là biến dạng của thuật toán FFT phân thời gian.

a) Thuật toán Cooley

Ở đây Cooley đã sử dụng các khái niệm đại số nhị phân để biểu diễn các dãy $x(n)_N$ và $x(k)_N$. Như vậy về mặt bản chất của thuật toán không khác gì thuật toán FFT phân thời gian đã được trình bày ở mục trên.

Chúng ta cũng xét trường hợp $N = 2^{\gamma}$. Vậy chúng ta có thể biểu diễn n và k theo mã nhị phân và thập phân như sau:

Biểu diễn số n :

$$\text{Nhị phân: } n = (n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0)$$

$$\text{Thập phân: } n = (2^{\gamma-1} \cdot n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} \cdot n_{\gamma-2} + \dots + 2n_1 + n_0)$$

Biểu diễn số k :

$$\text{Nhị phân: } k = (k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0)$$

$$\text{Thập phân: } k = (2^{\gamma-1} \cdot k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} \cdot k_{\gamma-2} + \dots + 2k_1 + k_0)$$

Từ đây dẫn đến việc biểu diễn các dãy $x(n)_N$ và $x(k)_N$ như sau:

$$x(n)_N = x(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0)$$

$$X(k)_N = X(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) \quad (10.3.3.1)$$

Vậy biểu thức của DFT N điểm có thể viết như sau:

$$X(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_{\gamma-1}=0}^1 x(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) W_N^{kn} \quad (10.3.3.2)$$

Bây giờ chúng ta khai triển tích kn trong biểu thức W_N^{kn} theo n , cách khai triển như sau:

Từ đầu tiên của W_N^{kn} sẽ là $W_N^{c_0}$ với $c_0 = k_0 2^{\gamma-1} n_{\gamma-1}$

Từ thứ hai của W_N^{kn} sẽ là $W_N^{c_1}$ với $c_1 = (2k_1 + k_0) 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2}$

.....

Từ cuối cùng của W_N^{kn} sẽ là $W_N^{c_{\gamma-1}}$ với:

$$c_{\gamma-1} = (2^{\gamma-1} k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} k_{\gamma-2} + \dots + 2k_1 + k_0) n_0$$

Theo cách khai triển trên thì biểu thức của DFT $N = 2^{\gamma}$ điểm sẽ được viết lại như sau:

$$X(k_{\gamma-1}, \dots, k_0) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_{\gamma-1}=0}^1 x(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) W_N^{C_0} W_N^{C_1} \dots W_N^{C_{\gamma-1}} \quad (10.3.3.3)$$

Biểu thức (10.3.3.3) ở trên thể hiện γ giai đoạn trung gian để tính được các điểm của $X(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0)$.

γ giai đoạn này có thể viết như sau:

$$X_1(k_0, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{n_{\gamma-1}=0}^1 x(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) W_N^{C_0}$$

$$X_2(k_0, k_1, n_{\gamma-3}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{n_{\gamma-2}=0}^1 X_1(k_0, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) W_N^{C_1}$$

.....

$$X_\gamma(k_0, k_1, \dots, k_{\gamma-2}, k_{\gamma-1}) = \sum_{n_0=0}^1 X_{\gamma-1}(k_0, k_1, \dots, k_{\gamma-2}, n_0) W_N^{C_{\gamma-1}}$$

Như vậy ta thấy rằng:

Giai đoạn đầu tiên ($i = 0$) chính là dãy $x(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0)$:

$$x(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) \equiv X_0(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0)$$

Giai đoạn cuối cùng ($i = \gamma$) chính là dãy $X(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0)$:

$$X(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) \equiv X_\gamma(k_0, k_1, \dots, k_{\gamma-2}, k_{\gamma-1})$$

Ví dụ 10.3.3.1

Chúng ta quay lại các ví dụ ở trên với DFT có chiều dài $N = 8 = 2^3$ điểm.

Hãy dùng thuật toán Cooley để thiết lập các giai đoạn tính DFT có chiều dài $N = 8$ điểm. Sau đó vẽ đồ hình có hướng dạng cánh bướm để minh họa thuật toán này.

Giải

Nếu $N = 8 = 2^3$, tức là $\gamma = 3$ và giá trị của n sẽ chạy từ 0 đến 7, như vậy phải cần 3 bit nhị phân n_2, n_1, n_0 để biểu diễn số n như sau:

$$\text{Nhị phân: } n = (n_2, n_1, n_0)$$

$$\text{Thập phân: } n = 4n_2 + 2n_1 + n_0$$

Vậy ta có thể viết:

$$x(n) = x(n_2, n_1, n_0)$$

Thay các giá trị của n vào ta có:

$$x(0) = x(0, 0, 0)$$

$$x(1) = x(0 \ 0 \ 1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x(7) = x(1 \ 1 \ 1)$$

Đối với k cũng biến đổi từ 0 đến 7 ta có:

$$\text{Nhị phân: } k = (k_2 \ k_1 \ k_0)$$

$$\text{Thập phân: } k = 4k_2 + 2k_1 + k_0$$

Vậy ta có thể viết:

$$X(k) = X(k_2 \ k_1 \ k_0)$$

Thay các giá trị của k vào ta có:

$$X(0) = X(0 \ 0 \ 0)$$

$$X(1) = X(0 \ 0 \ 1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X(7) = X(1 \ 1 \ 1)$$

Vậy biểu thức của DFT 8 điểm có thể viết như sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n)W_8^{kn}$$

$$\Rightarrow X(k \ k_1 \ k_0) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_0=0}^1 x(n_2 \ n_1 \ n_0) \cdot W_8^{kn}$$

Bây giờ chúng ta khai triển tích kn theo n và chú ý rằng tích này được hình thành bởi ba thành phần theo $4n_2$; $2n_1$ và n_0 , cụ thể như sau:

+ Thành phần thứ nhất:

$$k.4n_2 = (4k_2 + 2k_1 + k_0).4n_2 = 16k_2n_2 + 8k_1n_2 + 4k_0n_2$$

$$\Rightarrow W_8^{k.4n_2} = W_8^{16k_2n_2} \cdot W_8^{8k_1n_2} \cdot W_8^{4k_0n_2}$$

bởi vì: $W_8^{16k_2n_2} = 1$ và $W_8^{8k_1n_2} = 1$

Vậy ta có:

$$W_8^{k.4n_2} = W_8^{4k_0n_2}$$

+ Thành phần thứ hai:

$$k.2n_1 = (4k_2 + 2k_1 + k_0).2n_1 = 8k_2n_1 + 4k_1n_1 + 2k_0n_1$$

$$\Rightarrow W_8^{k.2n_1} = W_8^{8k_2n_1} \cdot W_8^{(2k_1+k_0).2n_1}$$

bởi vì: $W_8^{8k_2n_1} = 1$

Vậy ta có:

$$W_8^{k.2n_1} = W_8^{(2k_1+k_0).2n_1}$$

+ Thành phần thứ ba:

$$k.n_0 = (4k_2 + 2k_1 + k_0).n_0$$

Vậy ta có:

$$W_8^{k.n_0} = W_8^{(2k_2+2k_1+k_0).n_0}$$

Để viết cho gọn lại, chúng ta sẽ ký hiệu như sau:

$$C_0 = k_8.4n_2$$

$$C_1 = (k_1 + k_0).2n_1$$

$$C_2 = (4k_2 + 2k_1 + k_0).n_0$$

Từ đây ta có thể viết $X(k_2, k_1, k_0)$ như sau:

$$X(k_2, k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_2=0}^1 x(n_2, n_1, n_0) W_8^{C_0} W_8^{C_1} W_8^{C_2}$$

Và chúng ta ký hiệu các giai đoạn tính toán như sau:

$$X_0(n_2, n_1, n_0) = x(n_2, n_1, n_0)$$

$$X_1(k_0, n_1, n_0) = \sum_{n_2=0}^1 x(n_2, n_1, n_0) W_8^{C_0}$$

$$X_2(k_0, k_1, n_0) = \sum_{n_1=0}^1 X_1(k_0, n_1, n_0) W_8^{C_1}$$

$$X_3(k_0, k_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^1 X_2(k_0, k_1, n_0) W_8^{C_2}$$

$$X(k_2, k_1, k_0) = X_3(k_0, k_1, k_2)$$

Đồ hình dạng cánh bướm mô tả thuật toán Cooley được cho trên hình 10.3.3.1:

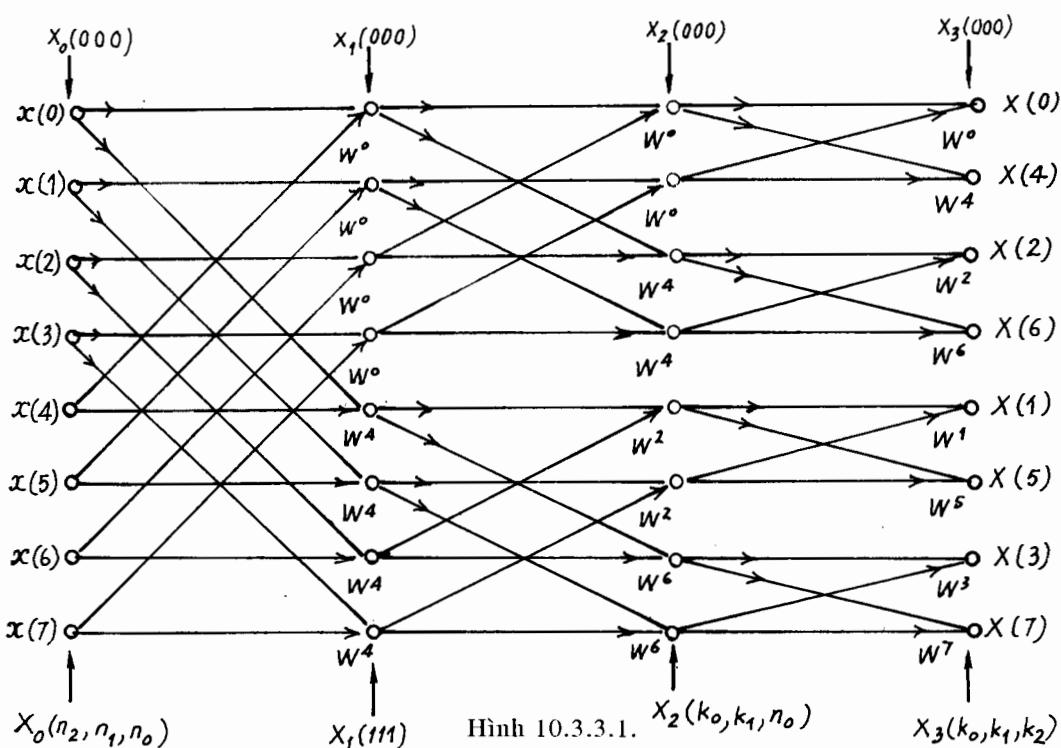
* Cải thiện thuật toán Cooley

Cũng giống như các biểu thức (10.3.2.9) và (10.3.2.10) qua mỗi gian đoạn i và $(i + 1)$ ta có thể viết:

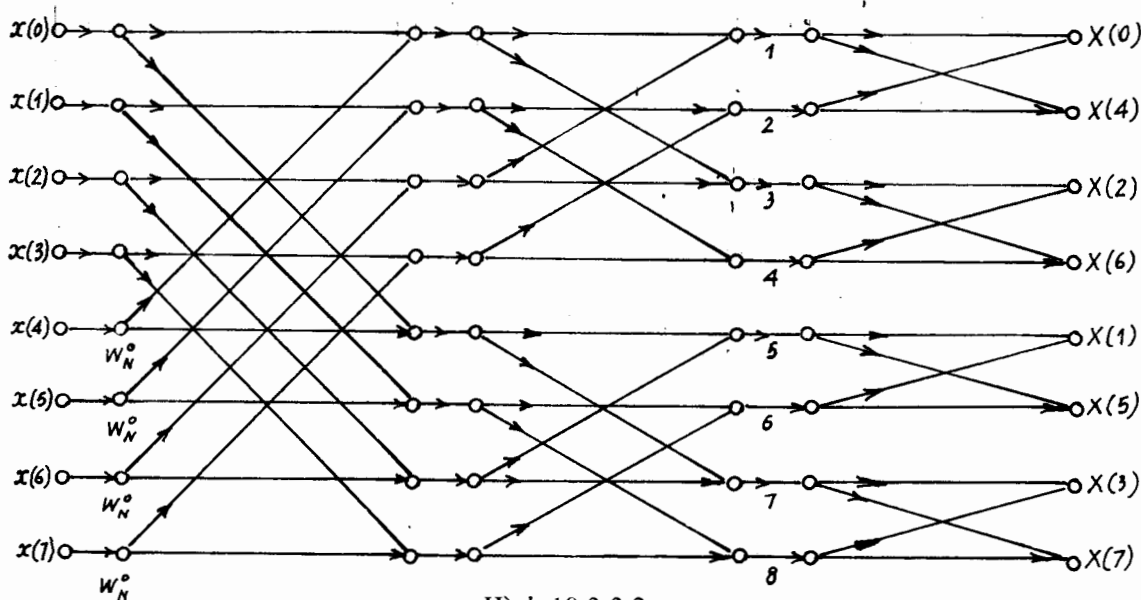
$$X_{i+1}(p) = X_i(p) + W_N^r X_i(q)$$

$$X_{i+1}(q) = X_i(p) + W_N^{(r+\frac{N}{2})} X_i(q) = X_i(p) - W_N^r X_i(q)$$

Theo hình (10.3.2.10) và (10.3.2.11) chúng ta có đồ hình dạng cánh bướm của thuật toán Cooley được minh hoạ trên hình 10.3.3.2.



Hình 10.3.3.1.

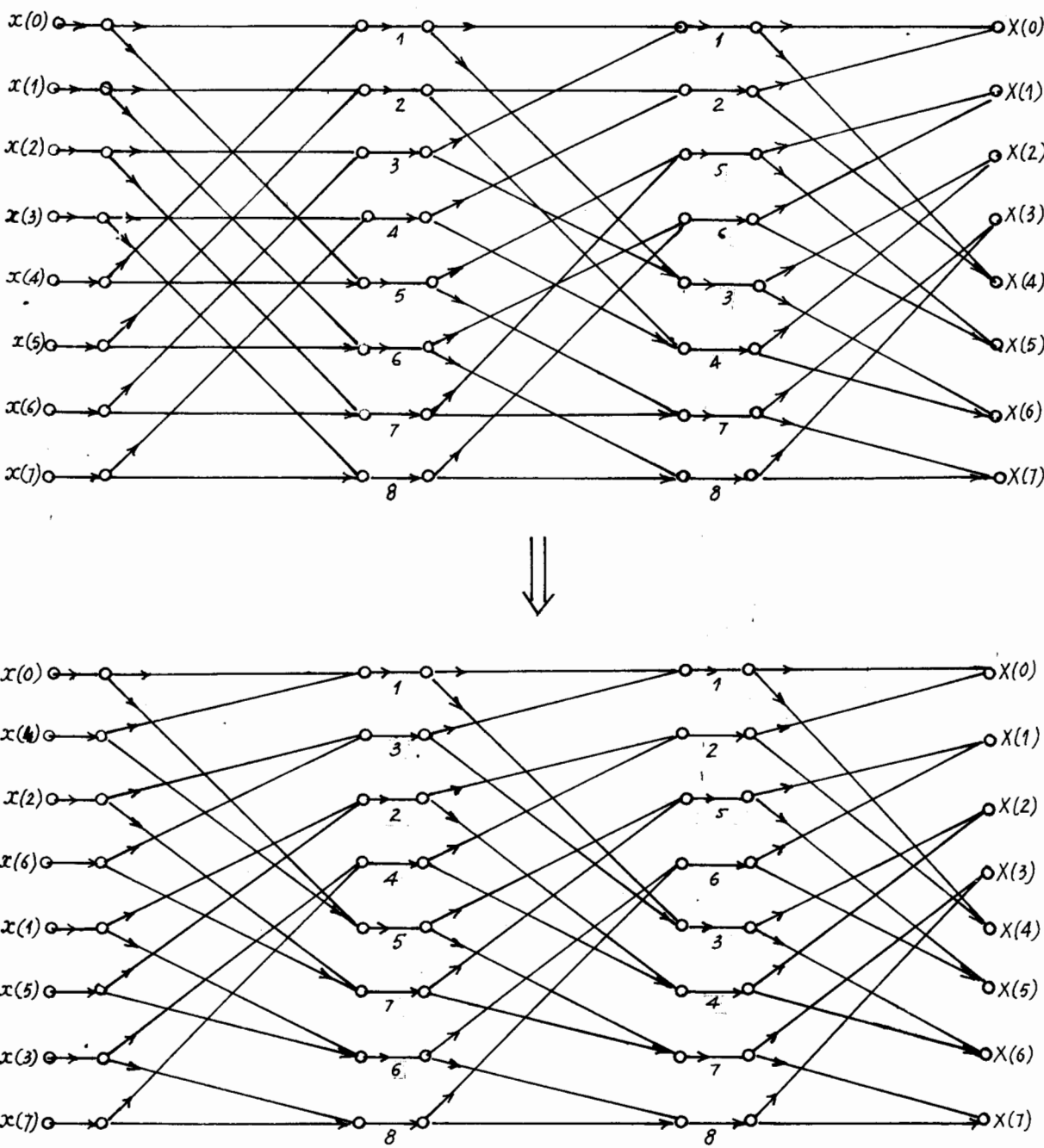


Hình 10.3.3.2.

b) Thuật toán Singleton

Chúng ta thấy rằng trong thuật toán FFT, đồ hình dạng cánh bướm ở từng giai đoạn là khác nhau. Singleton đã xáo trộn một cách hợp lý để đưa đồ hình dạng cánh bướm ở từng giai đoạn là tuần hoàn như nhau.

Xuất phát từ đồ hình dạng cánh bướm cho trên hình 10.3.3.2 chúng ta có thuật toán Singleton cho trên hình 10.3.3.3.



Hình 10.3.3.3.

10.3.4. THUẬT TOÁN FFT PHÂN THỜI GIAN TRONG TRƯỜNG HỢP $N = B^r$

a) Thủ tục tổng quát

Nếu $N = B^r$ thì chúng ta có thể phân dãy $x(n)_N$ thành B dãy có chiều dài là $\frac{N}{B}$, tức là thành các dãy $x(n)_{\frac{N}{B}}$ như sau:

$$x_0(n) = x(Br)$$

$$x_1(n) = x(Br + 1)$$

$$\vdots$$

$$x_{B-1}(n) = x(Br + B - 1)$$

Vậy ta có thể viết $x(n)$ dưới dạng sau đây:

$$x(n)_N = x_0(n) + x_1(n) + \dots + x_{B-1}(n)$$

và $X(k)_N$ có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_0(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{kn} + \dots + \sum_{n=0}^{N-1} x_{B-1}(n) W_N^{kn} \end{aligned}$$

Thay $x_i(n)$ vào và đổi biến số ta có:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} x(Br) W_N^{Brk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} x(Br+1) W_N^{(Br+1)k} + \dots + \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} x(Br+B-1) W_N^{(Br+B-1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} x(Br) W_N^{Brk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} x(Br+1) W_N^{Brk} + \dots + W_N^{(B-1)k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} x(Br+B-1) W_N^{Brk} \end{aligned}$$

Đặt:

$$x(Br) = g_0(r)$$

$$x(Br+1) = g_1(r)$$

$$\vdots$$

$$x_B(Br+B-1) = g_{B-1}(r)$$

$$\text{mà } W_N^{Brk} = W_{\frac{N}{B}}^{rk}$$

Và trong miền k ta cũng đặt:

$$\begin{aligned}
G_0(k)_N &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} g_1(r) W_N^{\frac{kr}{B}} \\
G_1(k)_N &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} g_2(r) W_N^{\frac{kr}{B}} \\
&\vdots \\
G_{B-1}(k)_N &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{B}-1} g_B(r) W_N^{\frac{kr}{B}}
\end{aligned}$$

Từ đây ta có:

$$X(k)_N = \begin{cases} G_0(k)_N + W_N^k G_1(k)_N + \dots + W_N^{(B-1)k} G_{B-1}(k)_N & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (10.3.4.1)$$

Hoặc ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
X(k)_N &= \tilde{G}_0(k)_N \text{rect}_N(k) + W_N^k \tilde{G}_1(k)_N \text{rect}_N(k) + \dots + \\
&\quad + W_N^{(B-1)k} \tilde{G}_{B-1}(k)_N \text{rect}_N(k) \quad (10.3.4.2)
\end{aligned}$$

Nhận xét

Sau đó chúng ta lại tiếp tục chia dãy $g_i(r)_N$ thành B dãy có chiều dài là $\frac{N}{B^2}$ và quá trình cứ thế tiếp tục cho đến khi chỉ còn tính DFT có chiều dài B điểm.

Ví dụ 10.3.4.1

Giả sử cho biến đổi Fourier rời rạc với chiều dài $N = 9$.

+ Hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp $N = B^2$.

+ Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán này.

Giải

$$N = 9 = 3^2 \Rightarrow B = 3 \text{ và } \gamma = 2$$

Áp dụng các biểu thức (10.3.4.1) và (10.3.4.2) ta có thể viết:

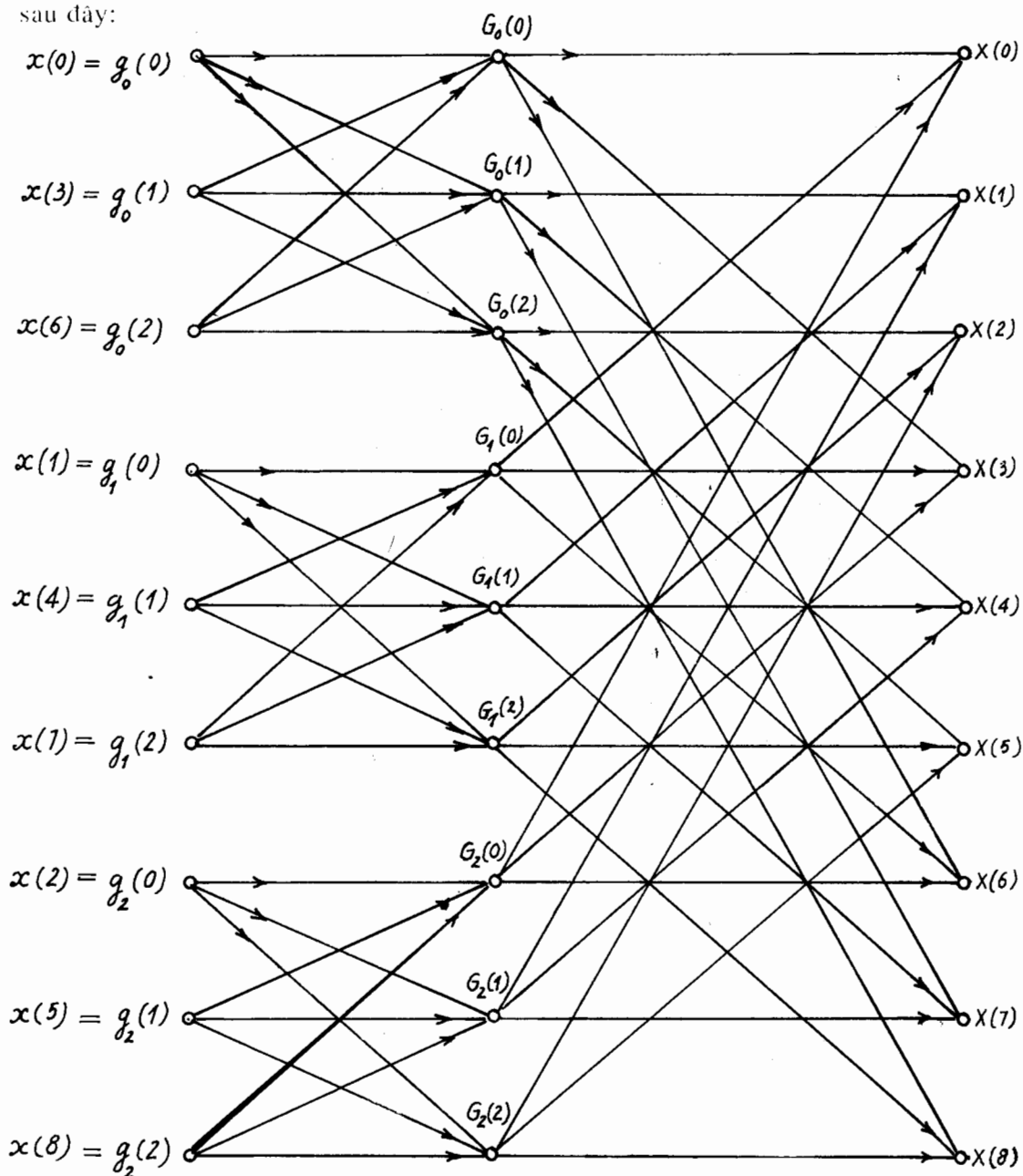
$$\begin{aligned}
X(k)_9 &= \tilde{G}_0(k)_3 \text{rect}_9(k) + W_9^k \tilde{G}_1(k)_3 \text{rect}_9(k) + W_9^{2k} \tilde{G}_2(k)_3 \text{rect}_9(k) \\
G_0(k)_3 &= \sum_{r=0}^2 g_0(r) W_3^{rk} = \sum_{r=0}^2 g_0(r) W_9^{3rk}
\end{aligned}$$

$$G_1(k)_3 = \sum_{r=0}^2 g_1(r)W_3^{rk} + \sum_{r=0}^2 g_1(r)W_9^{3rk}$$

$$G_2(k)_3 = \sum_{r=0}^2 g_2(r)W_3^{rk} + \sum_{r=0}^2 g_2(r)W_9^{3rk}$$

Như vậy từ DFT có chiều dài $N = 9$ chúng ta tách thành 2 DFT có chiều dài $\frac{N}{3} = 3$.

Đồ hình dạng cánh bướm minh họa thuật toán này được cho trên hình 10.3.4.1 sau đây:



Hình 10.3.4.1.

b) Hiệu quả của thuật toán

Cũng giống như phần trên ta thấy rằng để tính trực tiếp chúng ta cần N^2 phép nhân và phép cộng.

Ở bước 1 chúng ta chia dãy $X(n)_N$ thành B dãy $g_i(r)_{\frac{N}{B}}$ có chiều dài $\frac{N}{B}$. Vậy để tính trực tiếp một DFT có chiều dài $\frac{N}{B}$ chúng ta cần đòi hỏi $\left(\frac{N}{B}\right)^2$ phép nhân và phép cộng phức. Vậy để tính toán B DFT $G_i(k)_{\frac{N}{B}}$ cần đòi hỏi $B \cdot \left(\frac{N}{B}\right)^2$ phép nhân và phép cộng phức. Theo biểu thức (10.3.4.1) hoặc (10.3.4.2) để tính mỗi một điểm k của $X(k)_N$ chúng ta cần $(B - 1)$ phép cộng và để tính mỗi một điểm N của $X(k)_N$ chúng ta cần $N(B - 1)$ phép cộng.

Còn đối với phép nhân ta thấy rằng: để tính toán từ thành phần thứ 2 đến thành phần thứ B , mỗi thành phần chúng ta cần phải thực hiện một phép nhân W_N với $G_i(k)_{\frac{N}{B}}$, vậy để tính mỗi một điểm k của $X(k)_N$ chúng ta cần $(B - 1)$ phép nhân và để tính mỗi một điểm N của $X(k)_N$ chúng ta cần $N(B - 1)$ phép nhân.

Ở bước 2 và các bước tiếp theo chúng ta cũng lý luận tương tự, bước cuối cùng là bước γ .

$$+ \text{Bước 1 chúng ta cần } N(B - 1) + B\left(\frac{N}{B}\right)^2 \text{ phép tính}$$

$$+ \text{Bước 2 chúng ta cần } N(B - 1) + B\left[\frac{N}{B}(B - 1) + B\left(\frac{N}{B^2}\right)^2\right] \text{ phép tính}$$

$$= N(B - 1) + N(B - 1) + B^2\left(\frac{N}{B^2}\right)^2 \text{ phép tính}$$

.....

$$+ \text{Bước } \gamma \text{ chúng ta cần } \underbrace{N(B - 1) + N(B - 1) + \dots + N(B - 1)}_{\gamma \text{ lần}} + B^\gamma\left(\frac{N}{B^\gamma}\right)^2 \text{ phép tính.}$$

Ở bước γ ta thấy rằng $\frac{N}{B^\gamma} = 1$, tức là ta tính DFT 1 điểm mà chúng ta không cần phải tính DFT 1 điểm.

Tổng kết lại qua γ bước, để tính tất cả các giá trị của $X(k)_N$ chúng ta cần đòi hỏi:

$$N(B - 1)\gamma \text{ phép nhân phức}$$

và $N(B-1)\gamma$ phép cộng phức

Vậy hiệu quả của thuật toán có thể đánh giá như sau:

$$\frac{N^2}{N(B-1)\gamma} = \frac{N}{(B-1)\gamma}$$

Như thế ta thấy rằng khi N càng lớn thì hiệu quả càng cao.

Ví dụ 10.3.4.2

Cho DFT có chiều dài $N = 9$.

Hãy tính hiệu quả của thuật toán FFT.

Giải

$$N = 9 \Rightarrow N^2 = 81$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = 2 \\ B = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow N(B-1)\gamma = 9(3-1) = 36$$

Vậy kết quả là:

$$\frac{N}{(B-1)\gamma} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ lần .}$$

10.3.5. THUẬT TOÁN FFT PHÂN THỜI GIAN TRONG TRƯỜNG HỢP

$$N = B_1 \cdot B_2$$

a) Thủ tục tổng quát

Nếu $N = B_1 \cdot B_2$ và chúng ta có dãy $x(n)_N$ thì chúng ta có thể phân dãy $x(n)_N$ này thành B_1 dãy có chiều dài là $B_2 = \frac{N}{B_1}$, tức là phân thành B_1 dãy $x(n)_{B_2}$ như sau:

$$x_0(n) = x(B_1 r)$$

$$x_1(n) = x(B_1 r + 1)$$

$$\vdots$$

$$x_{B_1-1}(n) = x(B_1 r + B_1 - 1)$$

Vậy ta có thể viết $x(n)_N$ dưới dạng sau đây:

$$x(n)_N = x_0(n) + x_1(n) + \dots + x_{B_1-1}(n)$$

và $X(k)_N$ có thể viết như sau:

$$X(k)_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_0(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{kn} + \dots + \sum_{n=0}^{N-1} x_{B_1-1}(n) W_N^{kn}$$

Thay $x_i(n)_{B_2}$ ($i = 0 \div B_1 - 1$) vào và đổi biến số ta có:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \sum_{r=0}^{B_2-1} x(B_1 r) W_N^{B_1 r k} + \sum_{r=0}^{B_2-1} x(B_1 r + 1) W_N^{(B_1 r + 1)k} + \dots + \\ &\quad + \sum_{r=0}^{B_2-1} x(B_1 r + B_1 - 1) W_N^{(B_1 r + B_1 - 1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{B_2-1} x(B_1 r) W_N^{B_1 r k} + W_N^k \sum_{r=0}^{B_2-1} x(B_1 r + 1) W_N^{B_1 r k} + \dots + \\ &\quad + W_N^{(B_1 - 1)k} \sum_{r=0}^{B_2-1} x(B_1 r + B_1 - 1) W_N^{B_1 r k} \end{aligned}$$

Đặt:

$$x(B_1 r) = g_0(r)$$

$$x(B_1 r + 1) = g_1(r)$$

\vdots

$$x(B_1 r + B_1 - 1) = g_{B_1-1}(r)$$

mà ta có:

$$W_N^{B_1 r k} = W_{\frac{N}{B_1}}^{rk} = W_{B_2}^{rk}$$

và trong miền k ta cũng có:

$$G_0(k)_{\frac{N}{B_1}} = G_0(k)_{B_2} = \sum_{r=0}^{B_2-1} g_0(r) W_{B_2}^{rk}$$

$$G_1(k)_{\frac{N}{B_1}} = G_1(k)_{B_2} = \sum_{r=0}^{B_2-1} g_1(r) W_{B_2}^{rk}$$

$$G_{B_1-1}(k)_{\frac{N}{B_1}} = G_{B_1-1}(k)_{B_2} = \sum_{r=0}^{B_2-1} g_{B_1-1}(r) W_{B_2}^{rk}$$

Từ đây ta có:

$$X(k)_N = \begin{cases} G_0(k)_{B_2} + W_N^k G_1(k)_{B_2} + \dots + W_N^{(B_1-1)k} G_{B_1-1}(k)_{B_2} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (10.3.5.1)$$

Hoặc ta có thể viết:

$$X(k)_N = \tilde{G}_0(k)_{B_2} \text{rect}_N(k) + W_N^k \tilde{G}_0(k)_{B_2} \text{rect}_N(k) + \dots + W_N^{(B_1-1)k} \tilde{G}_{B_1-1}(k)_{B_2} \text{rect}_N(k) \quad (10.3.5.2)$$

Nhận xét

Trong trường hợp tổng quát nếu $N = B_1.B_2...B_\gamma$, thì chúng ta vẫn áp dụng cách tính trên nhưng phân từng giai đoạn như sau:

$$\begin{aligned} N &= B_1.B_2' \\ B_2' &= B_2.B_3...B_\gamma \\ &= B_2.B_3' \\ B_3' &= B_3.B_4...B_\gamma \\ &\dots \end{aligned}$$

Ví dụ 10.3.5.1

Giả sử cho biến đổi Fourier rời rạc với chiều dài $N = 6$.

* Hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp:

$$+ N = B_1.B_2 = 3.2; B_1 = 3; B_2 = 2$$

$$+ N = B_1.B_2 = 2.3; B_1 = 2; B_2 = 3$$

* Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa các thuật toán này.

Giải

+ Trường hợp $B_1 = 3; B_2 = 2$

Trong trường hợp này ta phân dãy $x(n)_6$ thành 3 dãy có chiều dài là 2: $x_i(n)_2$ như sau:

$$x_0(n) = x(3r) = g_0(r)_2$$

$$x_1(n) = x(3r + 1) = g_1(r)_2$$

$$x_2(n) = x(3r + 2) = g_2(r)_2$$

Áp dụng các biểu thức (10.3.5.1) hoặc (10.3.5.2) chúng ta có thể tính: $X(k)_6$ như sau:

$$X(k)_6 = \begin{cases} G_0(k)_2 + W_6^k G_1(k)_2 + W_6^{2k} G_2(k)_2 & 0 \leq k \leq 5 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

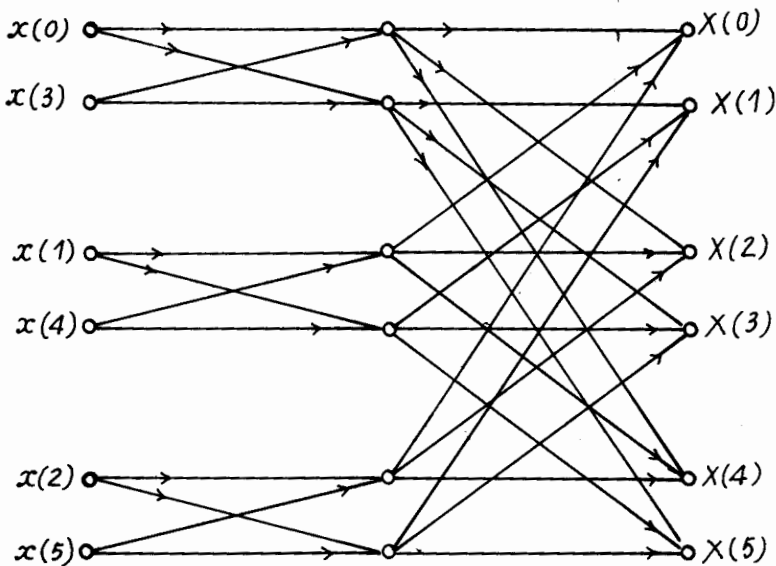
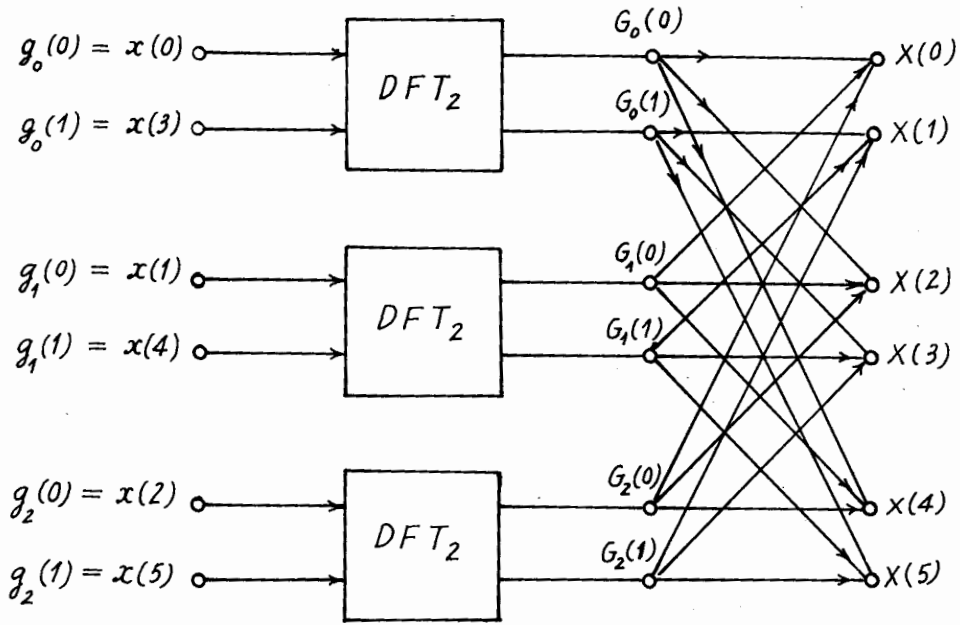
ở đây:

$$G_0(k)_2 = \sum_{r=0}^1 g_0(r)_2 W_2^{kr} = \sum_{r=0}^1 g_0(r)_2 W_6^{3kr}$$

$$G_1(k)_2 = \sum_{r=0}^1 g_1(r)_2 W_2^{kr} = \sum_{r=0}^1 g_1(r)_2 W_6^{3kr}$$

$$G_2(k)_2 = \sum_{r=0}^1 g_2(r)_2 W_2^{kr} = \sum_{r=0}^1 g_2(r)_2 W_6^{3kr}$$

Đồ hình dạng cánh bướm để minh hoạ thuật toán này cho trên hình 10.3.5.1.



Hình 10.3.5.1.

+ Trường hợp $B_1 = 2; B_2 = 3$

Trong trường hợp này ta phân dãy $x(n)_6$ thành hai dãy có chiều dài là 3: $x_i(n)_3$ như sau:

$$x_0(n) = x(2r) = g_0(r)_3$$

$$x_1(n) = x(2r + 1) = g_1(r)_3$$

Áp dụng các biểu thức (10.3.5.1) hoặc (10.3.5.2) chúng ta có thể tính $X(k)_6$ như sau:

$$X(k)_6 = \begin{cases} G_0(k)_3 + W_6^k G_1(k)_3 & 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

ở đây:

$$G_0(k)_3 = \sum_{r=0}^2 g_0(r)_3 W_3^{kr} = \sum_{r=0}^2 g_0(r)_3 W_6^{2kr}$$

$$G_1(k)_3 = \sum_{r=0}^2 g_1(r)_3 W_3^{kr} = \sum_{r=0}^2 g_1(r)_3 W_6^{2kr}$$

Dạng đồ hình cánh bướm để minh họa thuật toán này được cho trên hình 10.3.5.2.

b) Hiệu quả của thuật toán khi $N = B_1 \cdot B_2 \dots B_r$

Để tính toán $G_i(k)_{\frac{N}{B_1}}$ chúng ta cần $\left(\frac{N}{B_1}\right)^2$ phép nhân và phép cộng, chúng ta

phải tính B_1 dãy $G_i(k)_{\frac{N}{B_1}}$, vậy muốn để tính toán tất cả $G_i(k)_{\frac{N}{B_1}}$ thì ta cần $B_1 \left(\frac{N}{B_1}\right)^2$ phép nhân và phép cộng.

Để tính mỗi giá trị của $X(k)_N$ ta cần $(B_1 - 1)$ phép cộng và phép nhân.

Nhưng $k = 1 \div (N - 1)$, vậy để tính tất cả các giá trị của $X(k)_N$ chúng ta cần $N(B_1 - 1)$ phép cộng và phép nhân.

Tổng cộng ta cần số phép tính ở các bước tính toán như sau:

+ Bước 1 chúng ta cần $N(B_1 - 1) + B_1 \left(\frac{N}{B_1}\right)^2$ phép tính

+ Bước 2 chúng ta cần $N(B_1 - 1) + B_1 \left[\frac{N}{B_1}(B_2 - 1) + B_2 \left(\frac{N}{B_1 B_2}\right)^2\right]$ phép tính

$$\Rightarrow N(B_1 - 1) + N(B_2 - 1) + B_1 B_2 \left(\frac{N}{B_1 B_2}\right)^2 \text{ phép tính.}$$

.....

+ Bước γ ta cần: $\underbrace{N(B_1 - 1) + N(B_2 - 1) + \dots + N(B_\gamma - 1)}_{\gamma \text{ lần}} + B_1 \dots B_\gamma \left(\frac{N}{B_1 \dots B_\gamma} \right)^2$

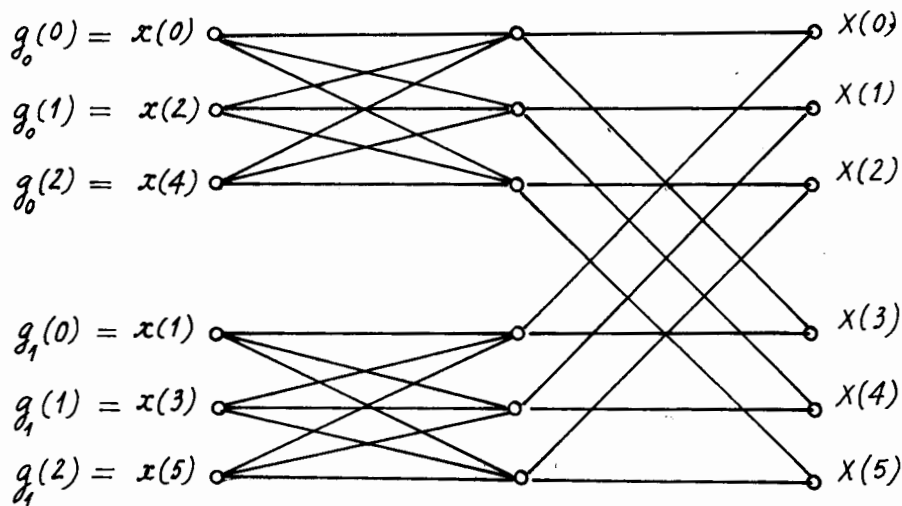
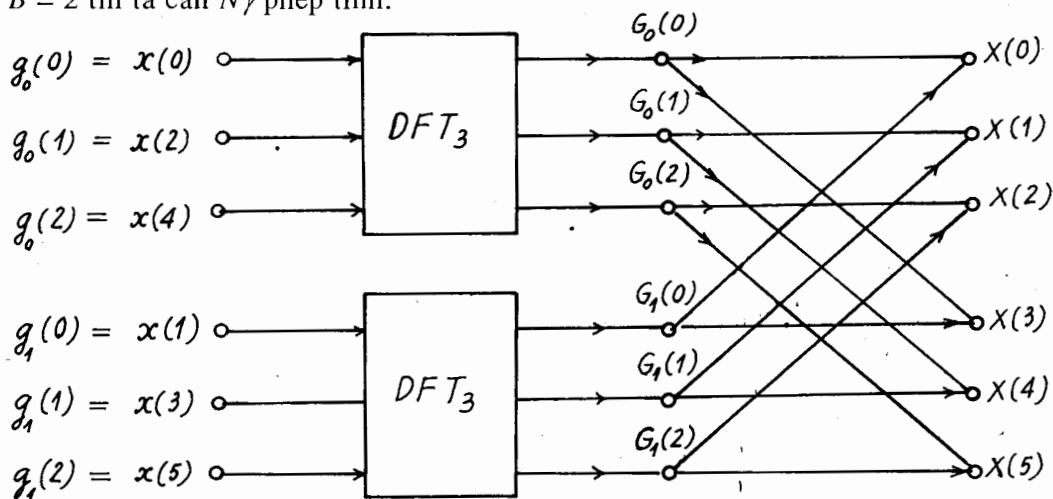
mà: $B_1 \dots B_\gamma \left(\frac{N}{B_1 \dots B_\gamma} \right)$ chính là DFT 1 điểm và đây chính là $x(n)_N$

$$N(B_1 - 1) + N(B_2 - 1) + \dots + N(B_\gamma - 1) = NB_1 - N + NB_2 - N + \dots + NB_\gamma - N =$$

$$= N(B_1 + B_2 + \dots + B_\gamma) + \gamma N = N(B_1 + B_2 + \dots + B_\gamma - \gamma)$$

Vậy để tính toán tất cả các giá trị của $X(k)_N$ chúng ta cần: $N(B_1 + B_2 + \dots + B_\gamma - \gamma)$ phép tính (phép cộng và phép nhân).

Chú ý rằng nếu $B_1 = B_2 = \dots = B_\gamma = B$ thì chúng ta cần $N\gamma(B - 1)$ phép tính và nếu $B = 2$ thì ta cần $N\gamma$ phép tính.



Hình 10.3.5.2.

10.4. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH PHÂN TẦN SỐ

10.4.1. ĐỊNH NGHĨA

Thuật toán tính nhanh biến đổi Fourier rời rạc dựa trên cơ sở phân dãy $X(k)_N$ thành các dãy con có chiều dài ngắn hơn được gọi là thuật toán biến đổi Fourier nhanh phân tần số.

Để minh hoạ thuật toán biến đổi Fourier nhanh phân tần số này trước hết chúng ta xét trường hợp $N = 2^r$ sau đây:

10.4.2. THUẬT TOÁN FFT PHÂN TẦN TRONG TRƯỜNG HỢP $N = 2^r$

a) Thủ tục tổng quát

Nếu $N = 2^r$ thì chúng ta có thể phân dãy $x(n)_N$ thành hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = x(n) \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right)$$

$$x_2(n) = x\left(n + \frac{N}{2}\right) \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right)$$

Vậy ta có thể tính $X(k)_N$ như sau:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{k\left(n + \frac{N}{2}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{k\left(n + \frac{N}{2}\right)} \end{aligned}$$

Chúng ta biết rằng:

$$W_N^{\frac{N}{2}k} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$$

Vậy ta có:

$$X(k)_N = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + (-1)^k x_2(n)] W_N^{kn} \quad (10.4.2:1)$$

Nếu k là chẵn thì $(-1)^k = 1$

Nếu k là lẻ thì $(-1)^k = -1$

Vậy chúng ta có thể phân $X(k)_N$ thành hai trường hợp k chẵn và k lẻ như sau:

Với k chẵn ta có $X(2r)$.

Với k lẻ ta có $X(2r+1)$.

Cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}
 X(2r) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_N^{2rn} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2rn} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{\frac{N}{2}}^{rn} \quad (10.4.2.2)
 \end{aligned}$$

và:

$$\begin{aligned}
 X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) - x_2(n)] W_N^{n(2r+1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n W_N^{2rn} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n W_{\frac{N}{2}}^{2rn} \quad (10.4.2.3)
 \end{aligned}$$

và ta thấy rằng:

$X(2r)$ và $X(2r+1)$ là các DFT $\frac{N}{2}$ điểm, vậy ta có thể đặt:

$$g(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad n = 0 \div \left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

$$h(n) = x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad n = 0 \div \left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

Thay vào biểu thức (10.4.2.2) và (10.4.2.3) ta có:

$$\begin{aligned}
 X(2r)_{\frac{N}{2}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g(n)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{rn} = G(r)_{\frac{N}{2}} \\
 X(2r+1)_{\frac{N}{2}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^n W_{\frac{N}{2}}^{2rn} = H(r)_{\frac{N}{2}} \quad (10.4.2.4)
 \end{aligned}$$

Chúng ta có thể đặt:

$$h'(n)_{\frac{N}{2}} = h(n)_{\frac{N}{2}} W_N^n$$

$$\Rightarrow H(r)_{\frac{N}{2}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h'(n)_{\frac{N}{2}} W_N^{\frac{r}{2}n} \quad (10.4.2.5)$$

Ví dụ 10.4.2.1

Giả sử cho chiều dài của DFT $N = 8$, hãy trình bày thuật toán FFT phân tần số để phân đôi DFT này. Sau đó dùng đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán này.

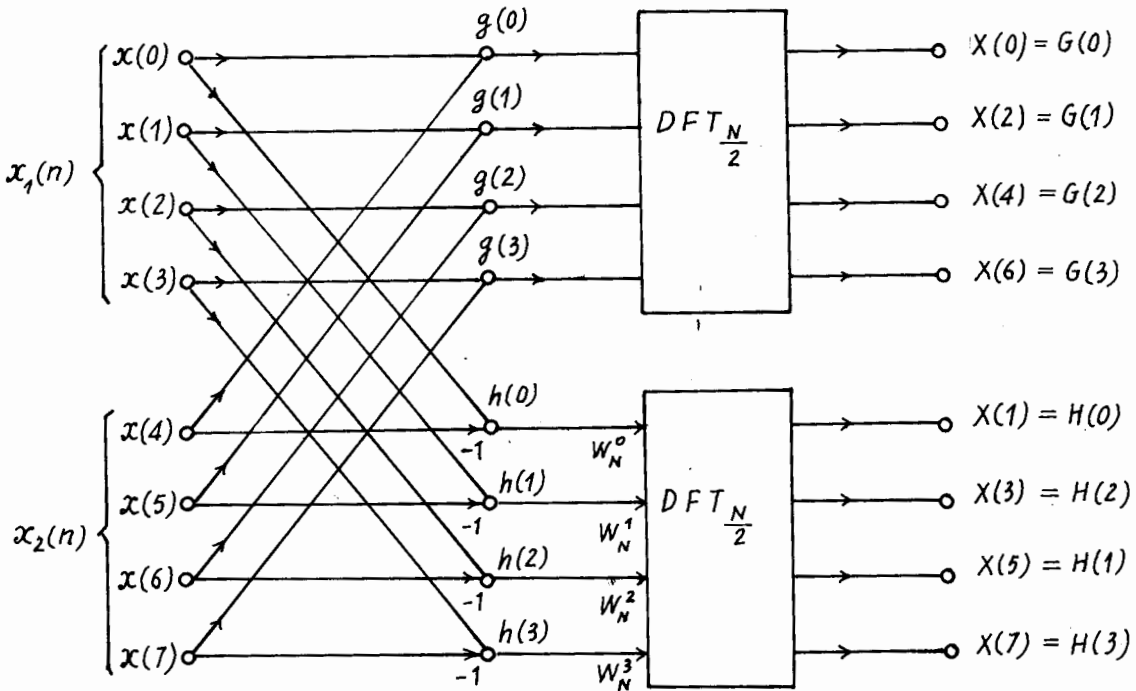
Giải

Với $N = 8$ chúng ta phân dãy $x(n)_8$ thành 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = x(n)_8 \quad \text{với } n = 0, 1, 2, 3$$

$$x_2(n) = x(n+4) \quad \text{với } n = 0, 1, 2, 3$$

Sau đó áp dụng biểu thức (10.4.2.4) ta có đồ hình cánh bướm cho trên hình 10.4.2.1 để minh họa thuật toán này.



Hình 10.4.2.1.

Tiếp tục bằng cách tương tự, chúng ta lại xây dựng thủ tục tính nhanh các DFT $\frac{N}{2}$ điểm.

Chúng ta chia dãy $g(n)_{\frac{N}{2}}$ thành hai dãy $g_1(n)_{\frac{N}{4}}$ và $g_2(n)_{\frac{N}{4}}$, và hình thành cách tính $G(r)_{\frac{N}{2}}$ như sau:

$$\begin{aligned} G(2l)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [g_1(n) + g_2(n)] W_{\frac{N}{2}}^{2ln} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [g(n) + g(n + \frac{N}{4})] W_{\frac{N}{4}}^{ln} \\ G(2l+1)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [g_1(n) - g_2(n)] W_{\frac{N}{2}}^{n(2l+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [g(n) - g(n + \frac{N}{4})] W_{\frac{N}{2}}^n \cdot W_{\frac{N}{4}}^{nl} \end{aligned}$$

Chúng ta đặt:

$$a(n) = g(n) + g(n + \frac{N}{4})$$

$$b(n) = g(n) - g(n + \frac{N}{4})$$

Ta có:

$$\begin{aligned} G(2l)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} a(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{4}}^{ln} = A(l)_{\frac{N}{4}} \\ G(2l+1)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} b(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{2}}^n W_{\frac{N}{4}}^{ln} = B(l)_{\frac{N}{4}} \end{aligned} \quad (10.4.2.6)$$

Chúng ta có thể đặt:

$$\begin{aligned} b'(n)_{\frac{N}{4}} &= b(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{2}}^n \\ \Rightarrow B(l)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} b'(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{4}}^{ln} \end{aligned} \quad (10.4.2.7)$$

Đối với dãy $h'(n)_{\frac{N}{2}}$ chúng ta cũng chia làm hai dãy $h'_1(n)_{\frac{N}{4}}$ và $h'_2(n)_{\frac{N}{4}}$, và hình thành cách tính $H(r)_{\frac{N}{2}}$ như sau:

$$\begin{aligned}
H(2l)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [h'_1(n) + h'_2(n)] W_{\frac{N}{2}}^{2ln} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left[h'(n) + h'\left(n + \frac{N}{4}\right) \right] W_{\frac{N}{4}}^{ln} \\
H(2l+1)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [h'_1(n) - h'_2(n)] W_{\frac{N}{2}}^{(2l+1)n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left[h'(n) - h'\left(n + \frac{N}{4}\right) \right] W_{\frac{N}{2}}^n W_{\frac{N}{4}}^{ln}
\end{aligned}$$

Chúng ta đặt:

$$c(n) = h'(n) + h'\left(n + \frac{N}{4}\right)$$

$$d(n) = h'(n) - h'\left(n + \frac{N}{4}\right)$$

Ta có:

$$H(2l)_{\frac{N}{4}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} c(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{4}}^{ln} = C(l)_{\frac{N}{4}}$$

$$H(2l+1)_{\frac{N}{4}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} d(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{4}}^n W_{\frac{N}{2}}^{ln} = D(l)_{\frac{N}{4}} \quad (10.4.2.8)$$

Chúng ta có thể đặt:

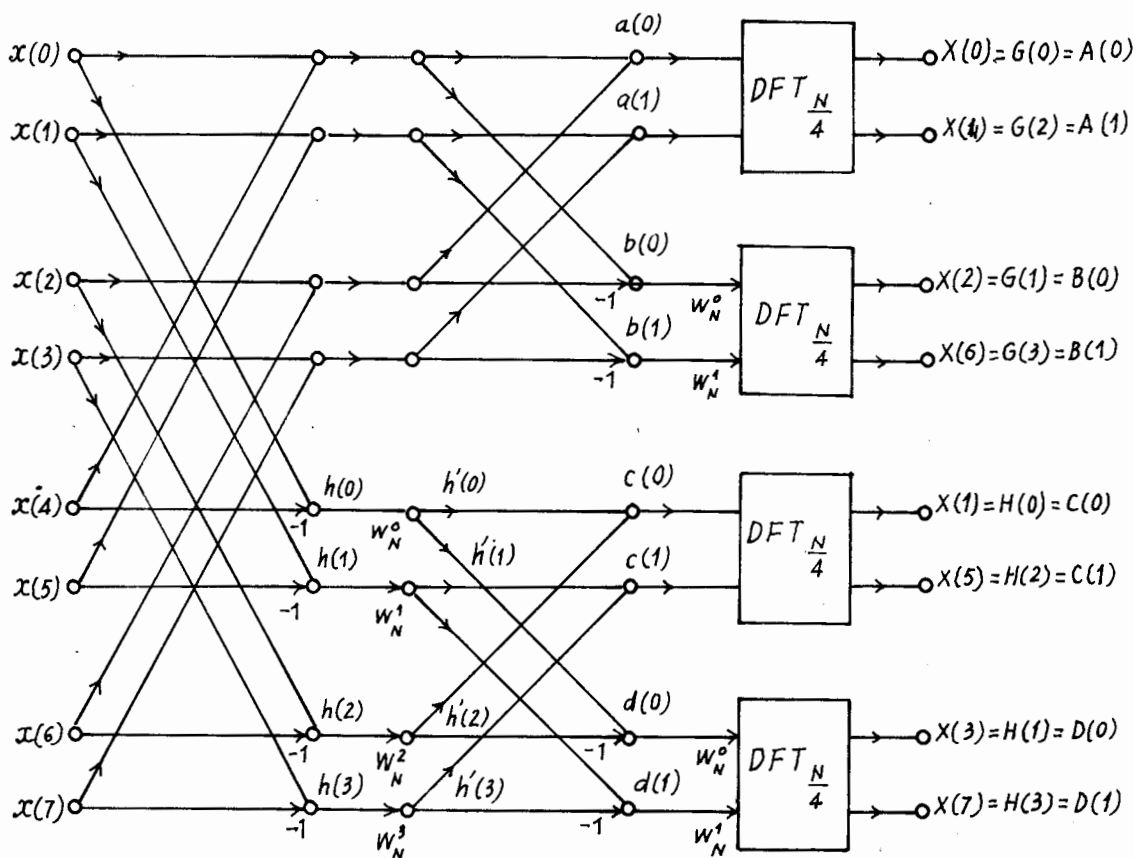
$$\begin{aligned}
d'(n)_{\frac{N}{4}} &= d(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{2}}^n \\
\Rightarrow D(l)_{\frac{N}{4}} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} d'(n)_{\frac{N}{4}} W_{\frac{N}{4}}^{ln} \quad (10.4.2.9)
\end{aligned}$$

Ví dụ 10.4.2.2

Tiếp tục ví dụ 10.4.2.1. Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán FFT phân tần số để phân đôi DFT $\frac{N}{2}$ điểm.

Giải

Dùng các biểu thức (10.4.2.6), (10.4.2.7), (10.4.2.8) và (10.4.2.9) chúng ta có đồ hình dạng cánh bướm minh họa thuật toán FFT cho trên hình (10.4.2.2) sau đây:



Hình 10.4.2.2.

Tương tự chúng ta lại xây dựng thủ tục tính nhanh DFT $\frac{N}{4}$ điểm tương tự như các thủ tục đã tính ở trên. Chúng ta chia các dãy: $a(n)_N$, $b'(n)_N$, $c(n)_N$ và $d'(n)_N$

thành các dãy có chiều dài $\frac{N}{8}$, và quá trình cứ tiếp tục cho đến khi nào chỉ còn lại DFT 2 điểm thì ta kết thúc quá trình tính toán. Ví dụ 10.4.2.3 sau đây sẽ minh họa toàn bộ thuật toán FFT phân tần số với $N = 8$.

Ví dụ 10.4.2.3

Tiếp tục ví dụ 10.4.2.2. Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán FFT phân tần số đối với DFT $\frac{N}{4}$ điểm.

Giải

Vì $N = 8 \Rightarrow \frac{N}{4} = 2$ điểm, vậy ta có:

$$A(l)_{\frac{N}{4}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} a(n) W_{\frac{N}{4}}^{ln}$$

$$\Rightarrow A(l)_2 = \sum_{n=0}^{2-1} a(n) W_{\frac{N}{4}}^{ln}$$

$$\Rightarrow A(0)_2 = a(0) + a(1) W_2^0$$

$$A(1)_2 = a(0) + a(1) W_2^1$$

mà $W_2^0 = 1$

$$W_2^1 = -1$$

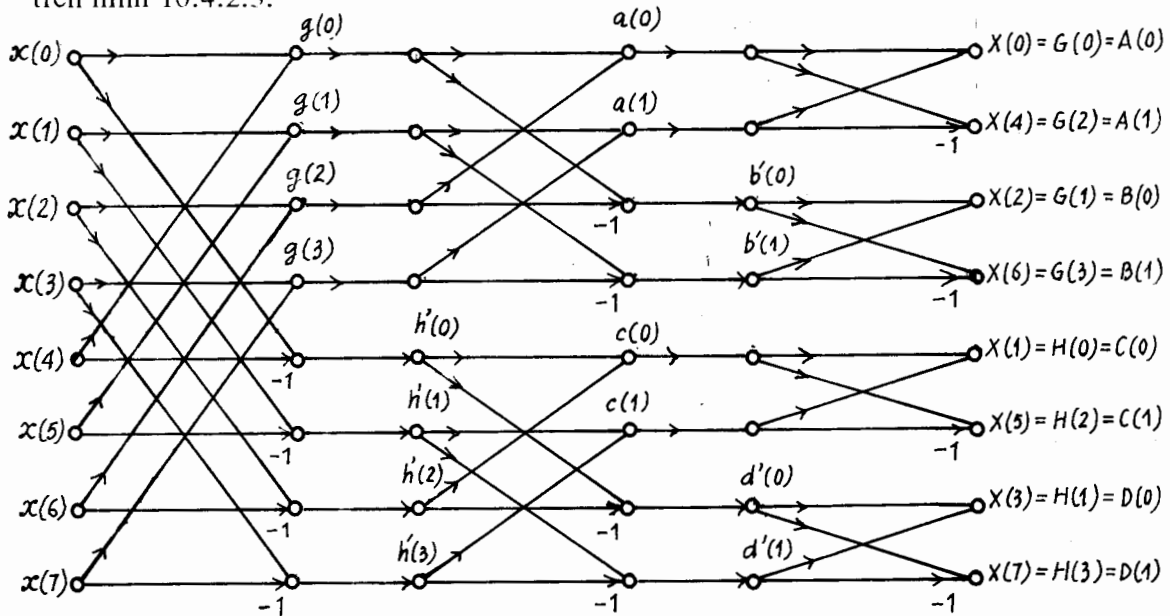
vậy ta có:

$$A(0)_2 = a(0) + a(1)$$

$$A(1)_2 = a(0) - a(1)$$

Đối với $B(l)_2$, $C(l)_2$, và $D(l)_2$ cũng tương tự.

Vậy ta có đồ hình dạng cánh bướm minh họa thuật toán FFT phân tần số cho trên hình 10.4.2.3.



Hình 10.4.2.3.

Nhận xét

+ Nhìn vào đồ hình dạng cánh bướm ta thấy rằng thuật toán FFT phân tần số và FFT phân thời gian có số lượng các bước giống hệt nhau, vì vậy số phép toán (phép

nhân và phép cộng) là giống hệt nhau dẫn đến hiệu quả của hai thuật toán này là giống hệt nhau.

+ Đối với thuật toán FFT phân tần số, đầu vào của đồ hình dạng cánh bướm, dãy $x(n)$ sẽ sắp xếp thứ tự theo mã nhị phân tự nhiên (mã 8 4 2 1), còn đầu ra của đồ hình cánh bướm, dãy $X(k)$ sẽ sắp xếp theo luật đảo bít của đầu vào. Còn đối với thuật toán FFT phân thời gian thì ngược lại, dãy ra $X(k)$ sẽ sắp xếp thứ tự theo mã nhị phân tự nhiên, còn dãy vào $x(n)$ sẽ sắp xếp theo quy luật đảo bít.

+ Như vậy hai thuật toán FFT phân thời gian và phân tần số cũng không có gì là khác nhau, nên ta dùng thuật toán nào cũng hiệu quả giống nhau về mọi phương diện.

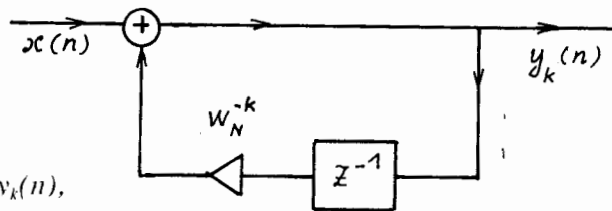
+ Ngoài ra thuật toán FFT phân tần số cũng có các dạng khác như thuật toán FFT phân thời gian, như là sử dụng khái niệm đại số nhị phân để biểu diễn các dãy $x(n)_N$ và $X(k)_N$ (thuật toán Sande) hoặc như là thuật toán Singleton,...

+ Dựa trên cơ sở tính đối xứng và tính tuần hoàn của hàm W_N^{kn} còn tồn tại một vài thuật toán khác nữa như thuật toán Winograd.

BÀI TẬP CHƯƠNG 10

Bài tập 10.1

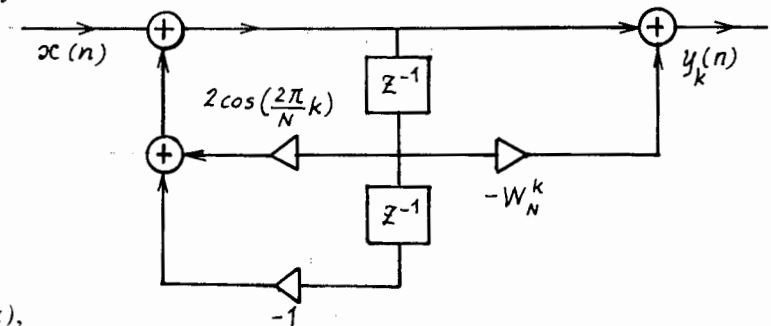
Cho hệ thống số sau:



- Hãy tìm $h_k(n)$ và $y_k(n)$,
- Bạn có ý kiến gì tại điểm $n = N$.

Bài tập 10.2

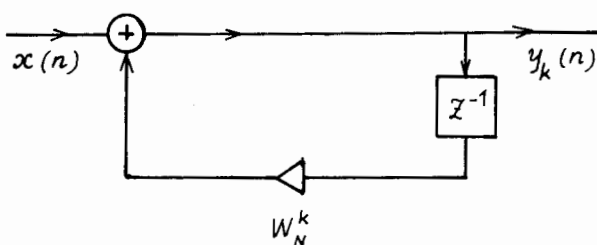
Cho hệ thống sau đây:



- Hãy tìm $H_k(z)$, $Y_k(z)$,
- Bạn có ý kiến gì tại điểm $n = N$.

Bài tập 10.3

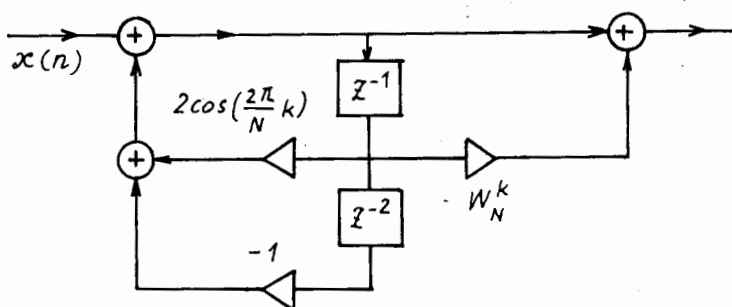
Cho hệ thống số sau:



- Hãy tìm $y_k(n)$,
- Bạn có ý kiến gì tại điểm $n = N$.

Bài tập 10.4

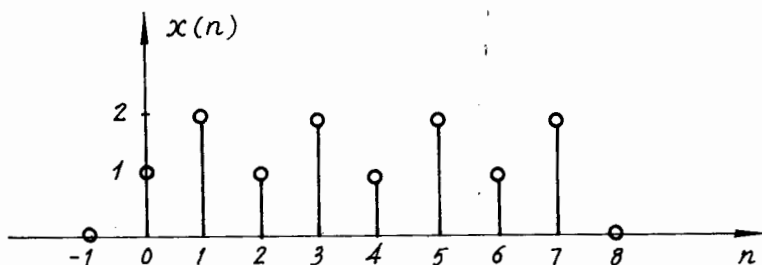
Cho hệ thống số sau:



- Hãy tìm $y_k(n)$,
- Bạn có ý kiến gì tại điểm $n = N$.

Bài tập 10.5

Cho dãy $x(n)$ có dạng trên hình BT 10.5.



Hình BT 10.5.

Hãy trình bày cách tính $X(k)$ theo thuật toán FFT phân thời gian.

Bài tập 10.6

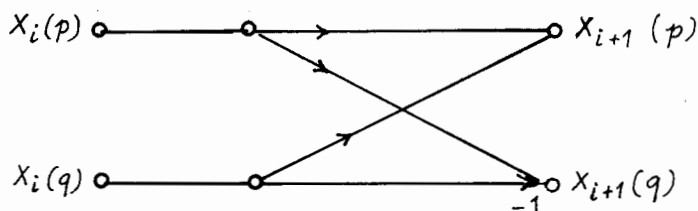
Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm đối với thuật toán FFT phân thời gian 16 điểm

Bài tập 10.7

Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm đối với thuật toán FFT phân thời gian 17 điểm

Bài tập 10.8

Cho đồ hình dạng cánh bướm như hình BT 10.8 sau đây:



Hình BT 10.8.

Chứng tỏ rằng:

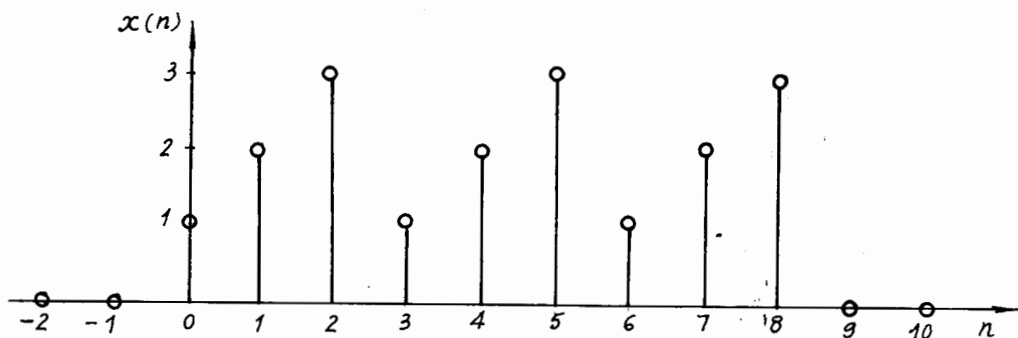
$$\operatorname{Re}[X_{i+1}(p)] < 1; \operatorname{Im}[X_{i+1}(p)] < 1$$

$$\operatorname{Re}[X_{i+1}(q)] < 1; \operatorname{Im}[X_{i+1}(q)] < 1$$

$$\text{Nếu } |X_i(p)| < \frac{1}{2} \text{ và } |X_i(q)| < \frac{1}{2}$$

Bài tập 10.9

Cho dãy $x(n)$ có dạng như trên hình BT 10.9.



Hình BT 10.9.

Hãy trình bày cách tính $X(k)$ theo thuật toán FFT phân thời gian.

Bài tập 10.10

Hãy trình bày và vẽ đồ hình dạng cánh bướm của thuật toán Cooley trong trường hợp $N = 16$

Bài tập 10.11

Hãy trình bày thuật toán Cooley trong trường hợp tổng quát $N = B^{\gamma}$. Sau đó áp dụng vào trường hợp $N = 3^2 = 9$ ($B = 3, \gamma = 2$), và vẽ đồ hình dạng cánh bướm trong trường hợp này.

Bài tập 10.12

Hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp $N = 25 = 5^2$. Sau đó hãy minh họa bằng đồ hình dạng cánh bướm và hãy tính hiệu quả của thuật toán so với cách tính trực tiếp.

Bài tập 10.13

Giả sử chúng ta cần tính biến đổi Fourier rời rạc với chiều dài $N = 15$.

* Hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp sau đây.

$$N = B_1 \cdot B_2 = 5 \cdot 3; B_1 = 5, B_2 = 3$$

$$N = B_1 \cdot B_2 = 3 \cdot 5; B_1 = 3, B_2 = 5$$

* Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa các thuật toán này.

* Hãy tính hiệu quả của các thuật toán so với cách tính trực tiếp.

Bài tập 10.14

Giả sử chúng ta cần tính biến đổi Fourier rời rạc với chiều dài $N = 30$

* Hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp sau đây:

$$+ N = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5; B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 5$$

$$+ N = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 3 \cdot 2 \cdot 5; B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 5$$

$$+ N = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 5 \cdot 2 \cdot 3; B_1 = 5, B_2 = 2, B_3 = 3$$

$$+ N = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 5 \cdot 3 \cdot 2; B_1 = 5, B_2 = 3, B_3 = 2$$

$$+ N = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 3 \cdot 2 \cdot 5; B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 5$$

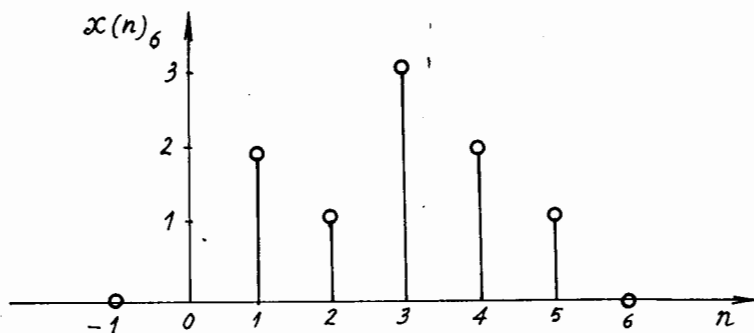
$$+ N = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 3 \cdot 5 \cdot 2; B_1 = 3, B_2 = 5, B_3 = 2$$

* Hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa các thuật toán này.

* Hãy tính hiệu quả của các thuật toán so với cách tính trực tiếp.

Bài tập 10.15

Cho dãy $x(n)_6$ có dạng cho trên hình BT 10.15 sau đây:



Hình BT 10.15

Hãy trình bày thuật toán FFT để tính $X(k)_6$ theo kiểu $N = B_1 \cdot B_2$.

Bài tập 10.16

Hãy trình bày thuật toán Cooley trong trường hợp $N = B_1 \cdot B_2 \dots B_r$. Sau đó áp dụng vào trường hợp $N = 2 \cdot 3$ và hãy vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán trong trường hợp này.

Bài tập 10.17

Hãy trình bày thuật toán Cooley trong trường hợp $N = 16$.

Sau đó vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán này.

Bài tập 10.18

Hãy trình bày thuật toán Singleton phân thời gian trong trường hợp $N = 16$.

Bài tập 10.19

Hãy trình bày thuật toán FFT phân tần số trong trường hợp $N = 16$. Sau đó vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán này.

Bài tập 10.20

• Hãy trình bày thuật toán FFT phân tần số sử dụng khái niệm đại số nhị phân để biểu diễn các dãy $x(n)_N$ và $X(k)_N$ (thuật toán Sande) trong các trường hợp: $N = 8$ và $N = 16$. Sau đó vẽ đồ hình dạng cánh bướm để minh họa thuật toán này.

Bài tập 10.21

Hãy trình bày thuật toán Singleton phân tần số trong các trường hợp $N = 8$ và $N = 16$.

Chương 11

BIẾN ĐỔI HILBERT

VÀ HỆ THỐNG PHA TỐI THIỂU

11.1. MỞ ĐẦU

Thông thường, các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho để tổng hợp các bộ lọc số thực tế chỉ liên quan tới modul của đáp ứng tần số $|H(e^{j\omega})|$ (tức là đáp ứng biên độ).

Còn argument của đáp ứng tần số, $\arg[H(e^{j\omega})]$ (tức là đáp ứng pha $\varphi(\omega)$) sẽ được xác định bởi các điều kiện ràng buộc về tính ổn định và tính nhân quả.

Trong các chương trước khi tổng hợp các bộ lọc số, chúng ta đã tổng hợp theo pha tuyến tính bởi vì không có các điều kiện ràng buộc về pha. Còn khi cần thiết phải có các chỉ tiêu kỹ thuật về pha (đáp ứng pha) thì chúng ta không thể chọn pha một cách tùy ý được. Trong trường hợp này cần phải tìm quan hệ giữa phần thực và phần ảo của đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ (hoặc quan hệ giữa đáp ứng biên độ và đáp ứng pha).

Biến đổi Hilbert sẽ làm nhiệm vụ thiết lập quan hệ giữa phần thực và phần ảo của đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$.

11.2. BIẾN ĐỔI HILBERT

11.2.1 PHÂN HOẠCH ĐÁP ỨNG XUNG

a) Phân hoạch một dãy bất kỳ

Chúng ta biết rằng một dãy bất kỳ có thể được biểu diễn bằng tổng của hai dãy chẵn và lẻ như sau:

Gọi:

$h(n)$: đáp ứng xung của hệ thống,

$h_e(n)$: phần chẵn của $h(n)$,

$h_o(n)$: phần lẻ của $h(n)$.

Ta có:

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n) \quad (11.2.1.1)$$

Ở đây:

$$h_e(n) = \frac{1}{2} [h(n) + h(-n)]$$

$$h_o(n) = \frac{1}{2} [h(n) - h(-n)]$$

Ví dụ 11.2.1.1

Cho dãy $h(n)$ như sau:

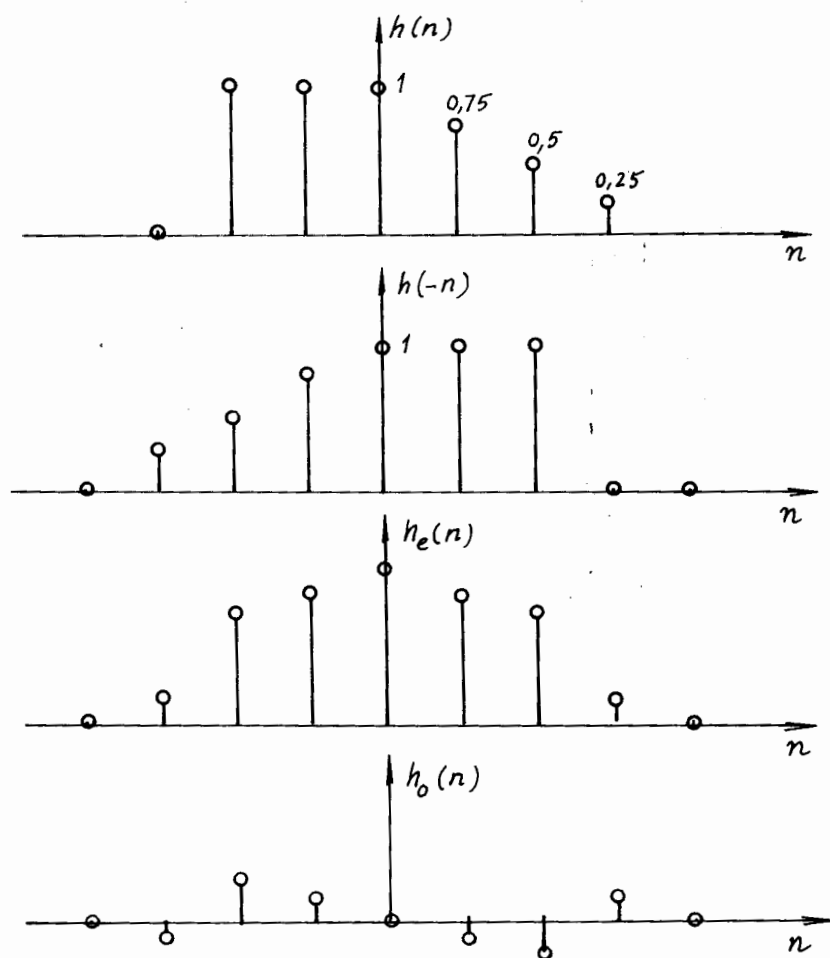
$$h(n) = \left\{ 1, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$\xrightarrow{-2}$
 -2

Hãy tìm $h_e(n)$ và $h_o(n)$ bằng đồ thị.

Giải

Lời giải cho trên hình 11.2.1.1.



Hình 11.2.1.1.

b) Phân hoạch dãy thực hiện được về vật lý (dãy nhân quả và thực)

Chúng ta biết rằng một hệ thống thực hiện được về vật lý thì đáp ứng xung $h(n)$ của nó phải là nhân quả và là thực, tức là:

$$\begin{aligned} h(n) &= 0 \quad \text{với } n < 0 \\ \Rightarrow h(-n) &= 0 \quad \text{với } n > 0 \end{aligned}$$

Vậy theo biểu thức (11.2.1.1) ta có:

$$h(n) = \begin{cases} 2h_e(n) & n > 0 \\ h_e(n) & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (11.2.1.2)$$

và:

$$h(n) = \begin{cases} 2h_o(n) & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Hoặc là:

$$\begin{aligned} h_e(n) &= h_o(n) = \frac{1}{2} h(n) \quad n > 0 \\ h_e(n) &= -h_o(n) = \frac{1}{2} h(-n) \quad n < 0 \\ \left. \begin{aligned} h_e(0) &= h_o(0) \\ h_o(0) &= 0 \end{aligned} \right\} n = 0 \end{aligned} \quad (11.2.1.3)$$

Ví dụ 11.2.1.2

Cho đáp ứng xung của một hệ thống thực hiện được về vật lý $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $h_e(n)$ và $h_o(n)$ bằng đồ thị..

Giải

Lời giải cho trên hình 11.2.1.2.

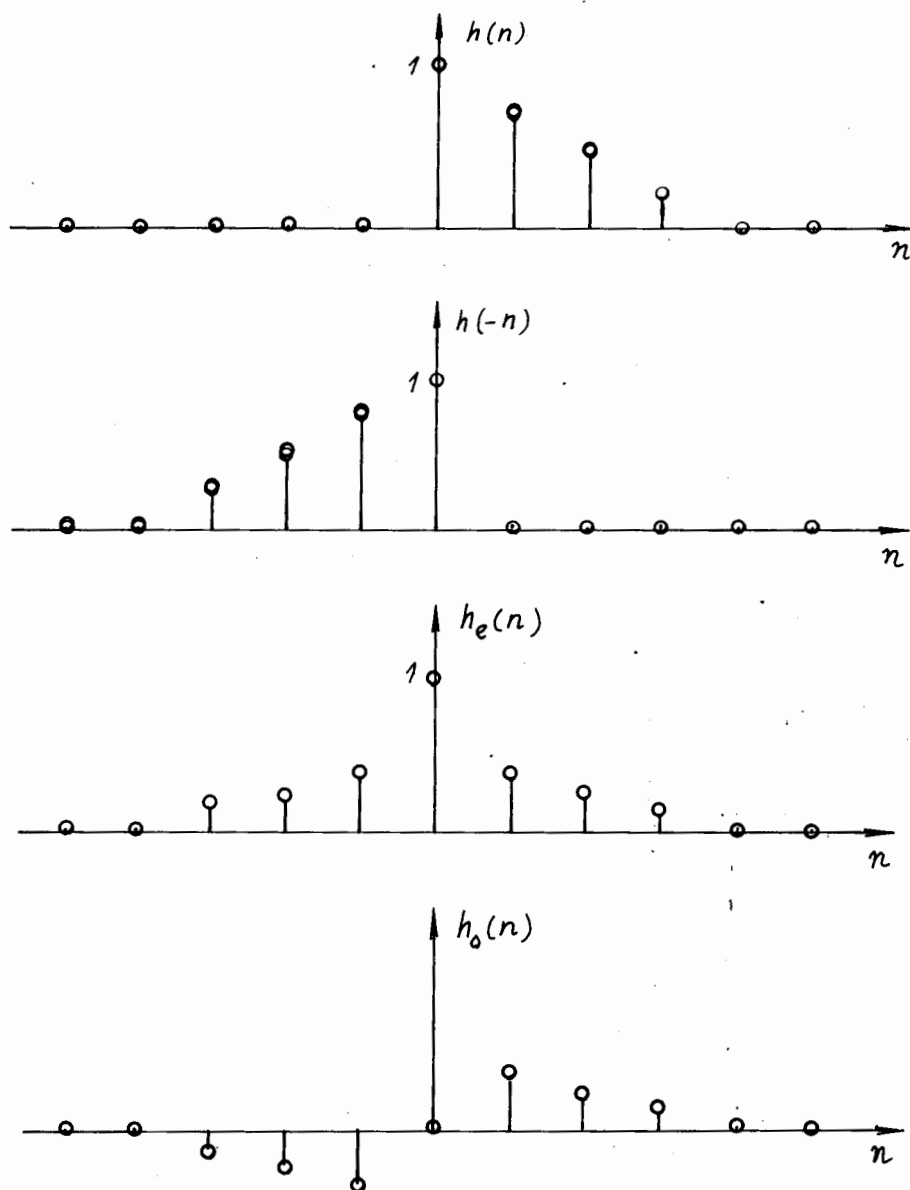
Nhận xét

Từ ví dụ 11.2.1.2 ta có các nhận xét sau đây:

$$\begin{aligned} + h_e(n) &= h_e(-n) \\ + h_o(n) &= -h_e(-n) \\ + h(n) &= h_e(n) + h_o(n) \end{aligned}$$

$$+ h_e(n) = \frac{1}{2} h(n) + \frac{1}{2} h(-n) = \frac{1}{2} [h(n) + h(-n)]$$

$$+ h_o(n) = \frac{1}{2} h(n) - \frac{1}{2} h(-n) = \frac{1}{2} [h(n) - h(-n)]$$

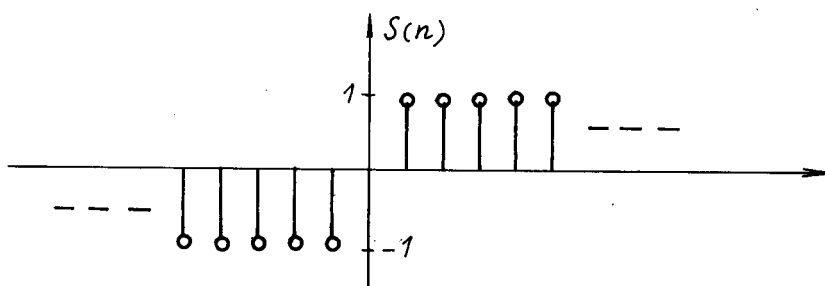


Hình 11.2.1.2.

Nếu chúng ta đặt hàm $S(n)$ như sau:

$$S(n) = \begin{cases} 1 & \text{với } n > 0 \\ 0 & \text{với } n = 0 \\ -1 & \text{với } n < 0 \end{cases}$$

Đồ thị của $S(n)$ được cho trên hình 11.2.1.3.



Hình 11.2.1.3.

Từ đây ta có:

$$h_0(n) = h_c(n) \cdot S(n)$$

$$h_c(n) = h_0(n) \cdot S(n) + h(0) \cdot \delta(n)$$

c) Biến đổi Fourier của dãy thực và nhân quả

Ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j\text{Im}[H(e^{j\omega})]$$

mà:

$$+ \quad h_c(n) = \frac{1}{2} [h(n) + h(-n)]$$

Vậy biến đổi Fourier của $h_c(n)$ được tính như sau:

$$\text{FT}[h_c(n)] = \frac{1}{2} \text{FT}[h(n)] + \frac{1}{2} \text{FT}[h(-n)]$$

$$= \frac{1}{2} H(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} H^*(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[h_c(n)] = \text{Re}[H(e^{j\omega})]$$

$$+ \quad h_0(n) = \frac{1}{2} [h(n) - h(-n)]$$

Vậy biến đổi Fourier của $h_0(n)$ được tính như sau:

$$\text{FT}[h_0(n)] = \frac{1}{2} [H(e^{j\omega}) - H^*(e^{j\omega})]$$

$$= j\text{Im}[H(e^{j\omega})]$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[h(n)] &= \text{FT}[h_e(n) + h_o(n)] \\
 &= \text{FT}[h_e(n)] + \text{FT}[h_o(n)] \\
 &= \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j\text{Im}[H(e^{j\omega})] \\
 &= H(e^{j\omega}).
 \end{aligned}$$

11.2.2. BIẾN ĐỔI HILBERT (HILBERT TRANSFORM: HT)

a) Các định nghĩa

Bây giờ chúng ta tính toán biến đổi Fourier của các dãy chẵn và các dãy lẻ như sau:

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[h_e(n)] &= \text{FT}[h_o(n).S(n) + h(0).\delta(n)] \\
 &= \text{FT}[h_o(n).S(n)] + \text{FT}[h(0).\delta(n)] \\
 \text{FT}[h_o(n)] &= \text{FT}[h_e(n).S(n)]
 \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[h_o(n)] &= j\text{Im}[H(e^{j\omega})] \\
 &= \text{FT}[h_e(n)] * \text{FT}[S(n)] \\
 &= \text{Re}[H(e^{j\omega})] * S(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow j\text{Im } H(e^{j\omega}) &= \text{Re}[H(e^{j\omega})] * S(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega}) * \text{Re}[H(e^{j\omega})] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}[H(e^{j\omega'})] S(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'
 \end{aligned}$$

hoặc:

$$\text{Im}[H(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}[H(e^{j\omega'})] S(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'$$

Tính biến đổi Fourier của $h_e(n)$ ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[h_e(n)] &= \underbrace{\text{FT}[h_o(n)]}_{j\text{Im}[H(e^{j\omega})]} * \underbrace{\text{FT}[S(n)]}_{S(e^{j\omega})} + h(0) \cdot \underbrace{\text{FT}[\delta(n)]}_1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Re}[H(e^{j\omega})] = \text{Im}[H(e^{j\omega})] * S(e^{j\omega}) + h(0)$$

$$\Rightarrow \text{Re}[H(e^{j\omega})] = j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Im}[H(e^{j\omega'})] S(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' + h(0)$$

Từ đây ta có cặp biến đổi Hilbert như sau:

$$\text{Im}[H(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}[H(e^{j\omega'})] S(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \quad (11.2.2.1)$$

và

$$\text{Re}[H(e^{j\omega})] = j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Im}[H(e^{j\omega'})] S(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' + h(0) \quad (11.2.2.2)$$

Và ta có thể ký hiệu như sau:

$$\text{Im}[H(e^{j\omega})] = \text{HT}\{\text{Re}[H(e^{j\omega})]\}$$

$$\text{Re}[H(e^{j\omega})] = \text{IHT}\{\text{Im}[H(e^{j\omega})]\}$$

Điều này có nghĩa là đối với một hệ thống nhân quả, chúng ta có thể tính phần ảo của đáp ứng tần số của hệ thống theo phần thực của nó, hoặc ngược lại ta có thể tính phần thực theo phần ảo và một hằng số $h(0)$.

Vậy ta có thể nói rằng biến đổi Hilbert cho ta quan hệ giữa phần thực và phần ảo của đáp ứng tần số của một hệ thống nhân quả.

Chúng ta có thể viết biến đổi Hilbert dưới dạng phép chập liên tục và tuần hoàn sau đây:

$$\text{Im}[H(e^{j\omega})] = -j\{S(e^{j\omega}) * \text{Re}[H(e^{j\omega})]\} \quad (11.2.2.3)$$

$$\text{Re}[H(e^{j\omega})] = j\{\text{Im}[H(e^{j\omega})] * S(e^{j\omega})\} + h(0) \quad (11.2.2.4)$$

b) Biến đổi Fourier của dãy $S(n)$

Chúng ta thấy rằng dãy $S(n)$ là dãy không có tổng tuyệt đối, vậy chúng ta không thể tính trực tiếp biến đổi Fourier của dãy $S(n)$ được. Vậy để tránh khó khăn này, chúng ta sử dụng thủ thuật quen thuộc là coi dãy $S(n)$ như là giới hạn của một dãy khác mà biến đổi Fourier của nó có thể tính được một cách dễ dàng.

Giả sử ta có dãy hàm mũ sau đây:

$$S_0(n) = a^n \cdot u(n-1)$$

ở đây: $0 < a < 1$

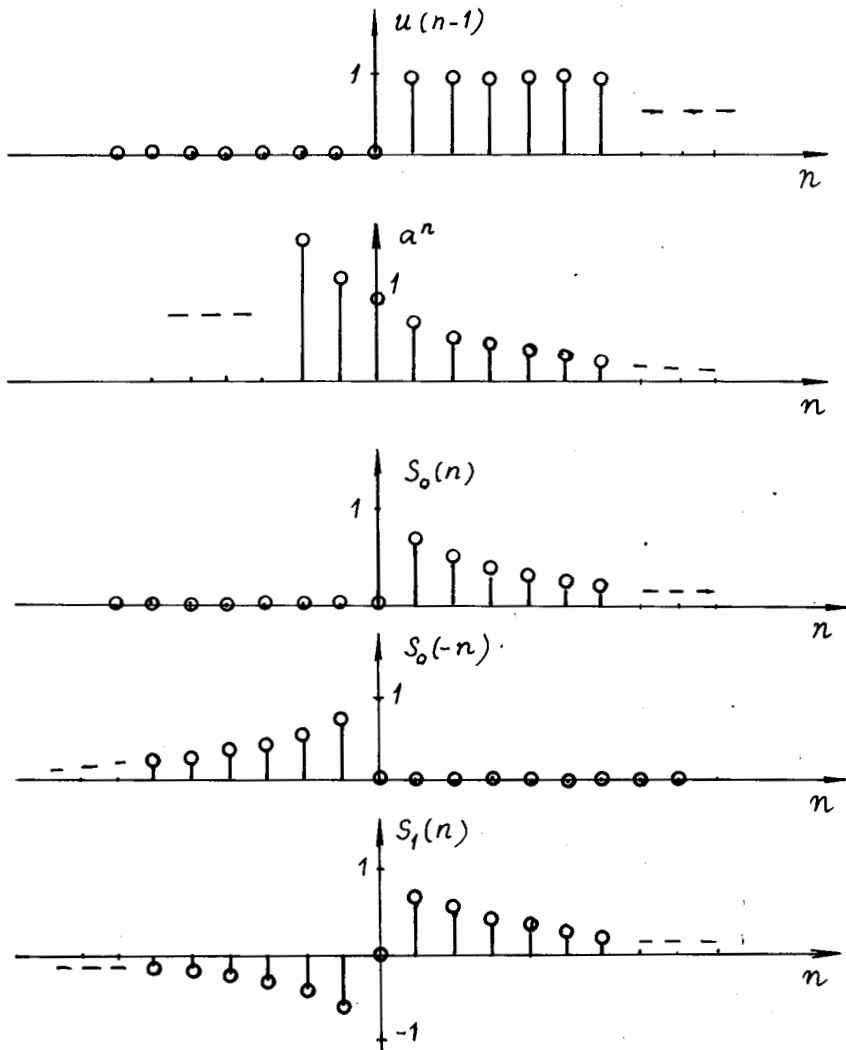
Ta tạo dãy $S_1(n)$ bằng cách sau đây:

$$S_1(n) = S_0(n) - S_0(-n)$$

Vậy rõ ràng là:

$$S(n) = \lim_{a \rightarrow 1} S_1(n)$$

Đồ thị minh họa các dãy $S_0(n)$ và $S_1(n)$ được cho trên hình 11.2.2.1.



Hình 11.2.2.1.

Biến đổi Fourier của dãy $S_1(n)$ được tính như sau:

$$\text{FT}[S_1(n)] = \text{FT}[S_0(n)] - \text{FT}[S_0(-n)]$$

Vì $S_0(n)$ là thực nên ta có:

$$\text{FT}[S_0(-n)] = S_0^*(e^{j\omega})$$

Vậy ta có:

$$S_1(e^{j\omega}) = S_0(e^{j\omega}) - S_0^*(e^{j\omega}) = 2j\text{Im}[S_0(e^{j\omega})]$$

Bây giờ ta tính $S_0(e^{j\omega})$:

$$S_0(e^{j\omega}) = \text{FT}[S_0(n)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_0(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n-1) e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow S_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{ae^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

mà:

$$S(n) = \lim_{a \rightarrow 1} S_1(n) \Rightarrow S(e^{j\omega}) = \lim_{a \rightarrow 1} [S_1(e^{j\omega})]$$

$$\Rightarrow S(e^{j\omega}) = \lim_{a \rightarrow 1} [S_0(e^{j\omega}) - S_0^*(e^{j\omega})] = 2j \operatorname{Im} \left[\lim_{a \rightarrow 1} S_0(e^{j\omega}) \right]$$

Bây giờ chúng ta tìm $\lim_{a \rightarrow 1} S_0(e^{j\omega})$:

$$\lim_{a \rightarrow 1} S_0(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \text{ với } \omega \neq 0$$

Từ đây chúng ta tìm được $S(e^{j\omega})$ như sau:

$$S(e^{j\omega}) = -j \cotg \frac{\omega}{2} \quad (11.2.2.5)$$

Ta thấy rằng $S(e^{j\omega})$ là thuần ảo bởi vì $S(n)$ là hàm lẻ. Rõ ràng là $S(e^{j\omega})$ là hàm không liên tục tại gốc tọa độ. Để tránh sự bất liên tục này, ta cần phải tính giới hạn tại gốc tọa độ. Vậy chúng ta phải viết biến đổi Hilbert dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}[H(e^{j\omega'})] S(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}[H(e^{j\omega'})] \left[-j \cotg \frac{\omega - \omega'}{2} \right] d\omega' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega - \omega'}{2} d\omega' \end{aligned}$$

\int : bất liên tục tại gốc tọa độ: $\omega = 0$

Từ đây ta có thể biến đổi Hilbert dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\pi}^{\omega-\varepsilon} \operatorname{Re}[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega - \omega'}{2} d\omega' + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega+\varepsilon}^{\pi} \operatorname{Re}[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega - \omega'}{2} d\omega' \right\} \quad (11.2.2.6) \end{aligned}$$

Và tiếp tục ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] = h(0) + \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\pi}^{\omega-\varepsilon} \operatorname{Im}[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega-\omega'}{2} d\omega' + \right. \\ \left. + \int_{\omega+\varepsilon}^{\pi} \operatorname{Im}[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega-\omega'}{2} d\omega' \right\} \quad (11.2.2.7) \end{aligned}$$

11.3. HỆ THỐNG PHA CỰC TIỂU

11.3.1. CÁC BỘ LỌC SỐ PHA CỰC TIỂU

a) Đáp ứng tần số

Chúng ta biết rằng đáp ứng tần số của một bộ lọc số có thể được viết dưới các dạng sau đây:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \text{FT}[h(n)] \\ &= |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \\ &= |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

ở đây:

$$\varphi(\omega) \equiv \arg[H(e^{j\omega})]$$

Nếu các hệ số của bộ lọc số là thực (đáp ứng xung $h(n)$ là thực), thì chúng ta có thể viết:

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

tức là:

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

và

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\arg[H(e^{-j\omega})]$$

Chúng ta biết rằng một bộ lọc thực hiện được về mặt vật lý nhất thiết phải là nhân quả, tức là đáp ứng xung của nó phải thỏa mãn quan hệ sau đây:

$$h(n) = 0 \text{ với } n < 0$$

và nếu $h(n)$ là thực và nhân quả, thì $\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]$ và $\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]$ sẽ quan hệ với nhau thông qua biến đổi Hilbert.

Bây giờ chúng ta coi logarit phức của đáp ứng tần số là $\hat{H}(e^{j\omega})$ như sau:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \ln[H(e^{j\omega})] \quad (11.3.1.1)$$

Vậy theo quan niệm mới này, chúng ta thu được một bộ lọc mới có đáp ứng tần số là $\hat{H}(e^{j\omega})$ và có đáp ứng xung mới là $\hat{h}(n)$, và chúng ta có thể viết:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \text{FT}[\hat{h}(n)]$$

và:

$$\hat{h}(n) = \text{IFT}[\hat{H}(e^{j\omega})]$$

Đối với bộ lọc mới này, chúng ta có thể phát biểu điều kiện ổn định như sau:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(n)| < \infty \quad (11.3.1.2)$$

Nếu điều kiện (11.3.1.2) này thoả mãn, thì bộ lọc mới này sẽ ổn định, và nếu xét trong miền z thì tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt $\hat{H}(z)$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị.

Hơn nữa nếu bộ lọc này là nhân quả thì đáp ứng xung $\hat{h}(n)$ phải tuân theo quan hệ sau đây:

$$\hat{h}(n) = 0 \quad \text{với } n < 0 \quad (11.3.1.3)$$

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ $\hat{H}(z)$ để kiểm tra tính ổn định của bộ lọc mới trong miền z .

b) Hàm truyền đạt $\hat{H}(z)$

Tương tự trong miền tần số ω , trong miền z ta cũng có quan hệ (11.3.1.1) như sau:

$$\hat{H}(z) = \ln[H(z)] \quad (11.3.1.4)$$

Bộ lọc số $H(z)$ là ổn định thì tất cả các điểm cực của $H(z)$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị.

Bây giờ ta viết $H(z)$ dưới dạng phân thức hữu tỷ sau đây:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Vậy:

$$\hat{H}(z) = \ln[H(z)] = \ln[N(z)] - \ln[D(z)] \quad (11.3.1.5)$$

Để bộ lọc mới $\hat{H}(z)$ là ổn định thì tất cả các điểm cực của $\hat{H}(z)$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị.

Mà ta biết rằng:

Các nghiệm của $D(z)$ là các điểm cực của $H(z)$

Các nghiệm của $N(z)$ là các điểm không của $H(z)$

Mà:

Tại các nghiệm của $D(z)$ thì $\ln[D(z)]$ là không xác định

Tại các nghiệm của $N(z)$ thì $\ln[N(z)]$ là không xác định.

Vậy ta có thể nói rằng:

Các nghiệm của $D(z)$ chính là các điểm cực của $\hat{H}(z)$.

Các nghiệm của $N(z)$ cũng chính là các điểm cực của $\hat{H}(z)$.

Và tổng quát ta có thể nói rằng các điểm không và điểm cực của $H(z)$ chính là các điểm cực của $\hat{H}(z)$.

Vậy để cho bộ lọc mới $\hat{H}(z)$ là ổn định thì tất cả các điểm không và điểm cực của $H(z)$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị.

c) Định nghĩa bộ lọc số pha cực tiểu

Nếu bộ lọc mới $\hat{H}(z)$ là ổn định và nhân quả thì chúng ta có thể áp dụng biến đổi Hilbert vào phần thực và phần ảo của $\hat{H}(e^{j\omega})$ như sau:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \ln[H(e^{j\omega})] = \ln\left\{ |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]} \right\} \quad (11.3.1.6)$$

$$\Rightarrow \hat{H}(e^{j\omega}) = \ln[H(e^{j\omega})] + j \arg[H(e^{j\omega})]$$

Vậy:

$$\operatorname{Re}\left[\hat{H}(e^{j\omega})\right] = \ln[H(e^{j\omega})]$$

$$\operatorname{Im}\left[\hat{H}(e^{j\omega})\right] = \arg[H(e^{j\omega})] \quad (11.3.1.7)$$

Từ đây ta có cặp biến đổi Hilbert như sau:

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega - \omega'}{2} d\omega' \quad (11.3.1.8)$$

Và:

$$\ln[H(e^{j\omega})] = \hat{h}(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arg[H(e^{j\omega'})] \cotg \frac{\omega - \omega'}{2} d\omega' \quad (11.3.1.9)$$

Nhận xét

+ Để cho các biểu thức này của biến đổi Hilbert có giá trị thì tất cả các điểm cực của $\hat{H}(z)$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị, tức là các điểm không và các điểm cực của $H(z)$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị.

+ Vậy nếu các điểm không và các điểm cực của hàm truyền đạt của một hệ thống tuyến tính nằm bên trong vòng tròn đơn vị thì logarit của modul và argument của đáp ứng tần số sẽ quan hệ với nhau theo biến đổi Hilbert. Các hệ thống này được gọi là *hệ thống pha cực tiểu*.

+ Tương tự ta có thể nói rằng: một hệ thống được gọi là hệ thống pha cực tiểu nếu tất cả các điểm cực và các điểm không của hàm truyền đạt $H(z)$ nằm trong vòng tròn đơn vị.

+ Ký hiệu hàm truyền đạt của hệ thống pha cực tiểu là: $H_{\min}(z)$.

Ví dụ 11.3.1.1

Cho một hệ thống tuyến tính có các điểm không như sau:

$$z_{01} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}; \quad z_{02} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

+ Hãy xét xem hệ thống này có phải là hệ thống pha cực tiểu hay không?

+ Hãy tìm $H(z)$ và $h(n)$.

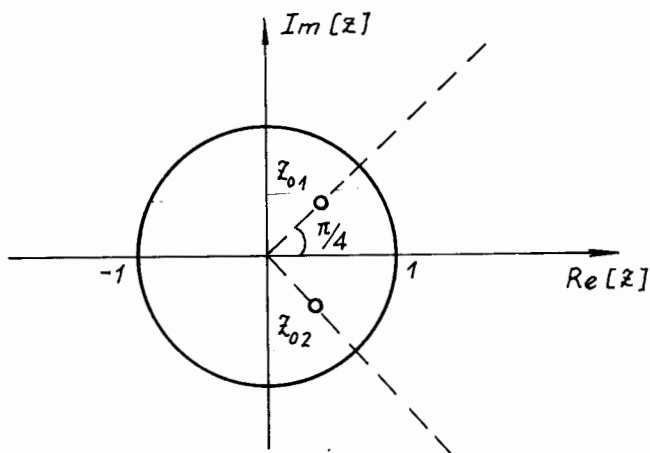
Giải

+ Vị trí của các điểm không được cho bởi hình vẽ 11.3.1.1

Từ hình 11.3.1.1 ta thấy rằng z_{01} và z_{02} nằm trong vòng tròn đơn vị, vậy hệ thống này là hệ thống pha cực tiểu.

+ Ta có thể tìm $H_{\min}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) &= (1 - z_{01}z^{-1})(1 - z_{02}z^{-1}) \\ &= 1 - (z_{01} + z_{02})z^{-1} + z_{01}z_{02}z^{-2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \end{aligned}$$



Hình 11.3.1.1.

Từ đây ta có $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \left\{ 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$\begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix}$

11.3.2. BỘ LỌC THÔNG TẮT (ALL - PASS FILTER)

a. Phân hoạch một bộ lọc

Nếu chúng ta có một bộ lọc nhân quả và ổn định nào đấy mà hàm truyền đạt của nó là $H(z)$, thì chúng ta thấy rằng tất cả các điểm cực của bộ lọc này phải nằm trong vòng tròn đơn vị, còn các điểm không của nó có thể nằm trong hoặc nằm ngoài vòng tròn đơn vị.

Giả sử bộ lọc $H(z)$ có M điểm không nằm ngoài vòng tròn đơn vị, các điểm không này là: $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0M}$. Vậy ta có thể phân hoạch $H(z)$ thành hai phần $H_1(z)$ và $H_2(z)$ như sau:

$$H(z) = H_1(z).H_2(z) \quad (11.3.2.1)$$

Trong đó $H_1(z)$ chỉ chứa các điểm cực và các điểm không nằm trong vòng tròn đơn vị, còn $H_2(z)$ chỉ chứa các điểm không nằm ngoài vòng tròn đơn vị. Tức là $H_2(z)$ chỉ chứa các điểm không: $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0M}$, còn $H_1(z)$ không chứa các điểm không này. Vậy $H_1(z)$ sẽ là bộ lọc pha cực tiểu.

Vậy ta có thể viết $H_2(z)$ như sau:

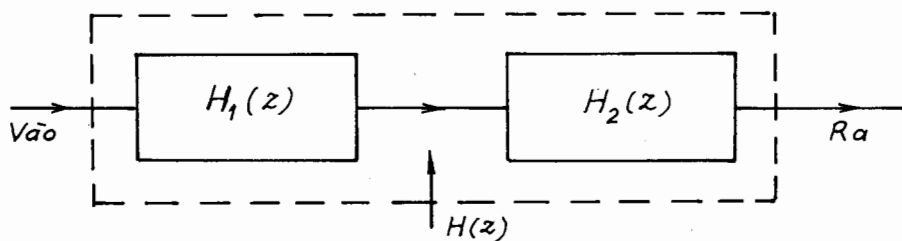
$$H_2(z) = \prod_{i=1}^M (1 - z_{oi} z^{-1})$$

$$\Rightarrow H(z) = H_1(z) \prod_{i=1}^M (1 - z_{oi} z^{-1}) \quad (11.3.2.2)$$

Và trong miền tần số ω ta có các quan hệ sau đây:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &\neq |H_1(e^{j\omega})| \\ |H(e^{j\omega})| &= |H_1(e^{j\omega})| |H_2(e^{j\omega})| \end{aligned} \quad (11.3.2.3)$$

Việc phân hoạch bộ lọc $H(z)$ này được biểu diễn trên hình 11.3.2.1.



Hình 11.3.2.1.

Ví dụ 11.3.2.1

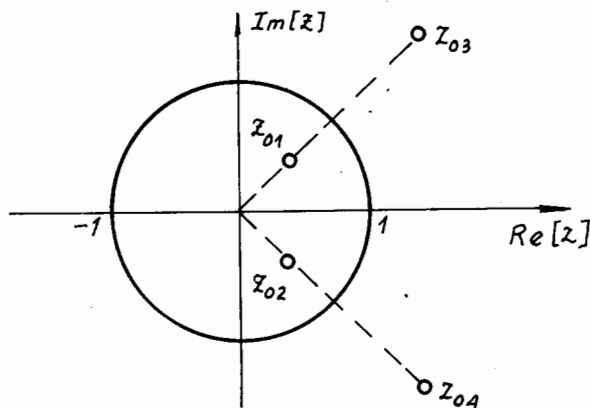
Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có hàm truyền đạt $H(z)$, $H(z)$ có 4 điểm không: z_{01} , z_{02} , z_{03} , z_{04} như sau:

$$z_{01} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}; z_{03} = 2 e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{04} = 2 e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Hãy tìm $H(z)$, $H_1(z)$ và $H_2(z)$.

Giải

Vị trí các điểm không của $H(z)$ được cho trên hình 11.3.2.2.



Hình 11.3.2.2.

Dựa vào hình 11.3.2.2 ta thấy rằng:

z_{01} và z_{02} nằm trong vòng tròn đơn vị,

z_{03} và z_{04} nằm ngoài vòng tròn đơn vị.

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - z_{01}z^{-1})(1 - z_{02}z^{-1})(1 - z_{03}z^{-1})(1 - z_{04}z^{-1}) \\ &= H_1(z).H_2(z) \end{aligned}$$

$$H_1(z) = (1 - z_{01}z^{-1})(1 - z_{02}z^{-1})$$

$$H_2(z) = (1 - z_{03}z^{-1})(1 - z_{04}z^{-1})$$

b) Định nghĩa bộ lọc thông tất

Bây giờ nếu chúng ta cần tổng hợp một bộ lọc pha cực tiểu với điều kiện là:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

$H(e^{j\omega})$ có thể là pha tuyến tính, có thể không phải là pha tuyến tính.

Theo cách phân hoạch bộ lọc ở biểu thức 11.3.2.1 ta có thể viết:

$$H(z) = H_{\min}(z).H_{\text{ap}}(z) \quad (11.3.2.4)$$

Và từ đây ta có thể viết:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})| \cdot |H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| \quad (11.3.2.5)$$

Vậy muốn để bảo đảm $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$ thì: $|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1$ với mọi ω . Từ đây dẫn đến định nghĩa của bộ lọc số thông tất như sau:

Định nghĩa của bộ lọc số thông tất

Bộ lọc số có đáp ứng biên độ bằng một đối với tất cả dải tần số được gọi là bộ lọc số thông tất (All - pass filter).

Nhận xét

- Vì đáp ứng biên độ của các bộ lọc số thông số đều giống nhau ($|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1$), nên chúng chỉ phân biệt với nhau duy nhất bởi đáp ứng pha.

- Từ biểu thức (11.3.2.4) ta có thể viết:

$$H(e^{j\omega}) = H_{\min}(z).H_{\text{ap}}(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow |H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1$$

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

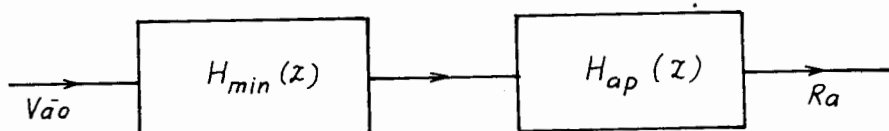
$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(z)] + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] \quad (11.3.2.6)$$

hoặc:

$$\theta(\omega) = \theta_{\min}(\omega) + \theta_{\text{ap}}(\omega)$$

Ta có thể nói rằng một bộ lọc nhân quả bất kỳ có thể được thay thế bằng hai bộ lọc, một bộ lọc pha cực tiểu và một bộ lọc thông tất ghép nối tiếp với nhau.

Sơ đồ minh hoạ cho trên hình 11.3.2.3.



Hình 11.3.2.3.

Ví dụ 11.3.2.2

Giả sử chúng ta có một bộ lọc số mà hàm truyền đạt $H(z)$ của nó có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad 0 < a < 1$$

- Hãy tìm các điểm không và các điểm cực của $H(z)$.
- Bộ lọc này có phải là bộ lọc thông tất hay không?

Giải

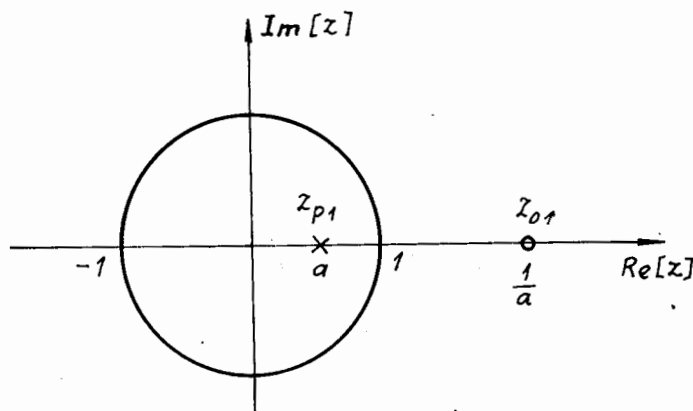
Ta dễ dàng thấy rằng $H(z)$ có một điểm không và một điểm cực như sau:

$$z_{01} = \frac{1}{a} : \text{nằm ngoài vòng tròn đơn vị.}$$

$$z_{p1} = a : \text{nằm trong vòng tròn đơn vị.}$$

Vì các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị nên bộ lọc này là ổn định.

Vị trí của các điểm cực và điểm không được minh hoạ trên hình 11.3.2.4.



Hình 11.3.2.4.

Để xét xem bộ lọc này có phải là bộ lọc thông tắt không chúng ta hãy tính $H(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - a}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 1 \text{ với mọi giá trị của } \omega$$

$$\Rightarrow \text{bộ lọc này là bộ lọc thông tắt.}$$

Nhận xét

+ Chúng ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới dạng phân thức hữu tỉ như sau:

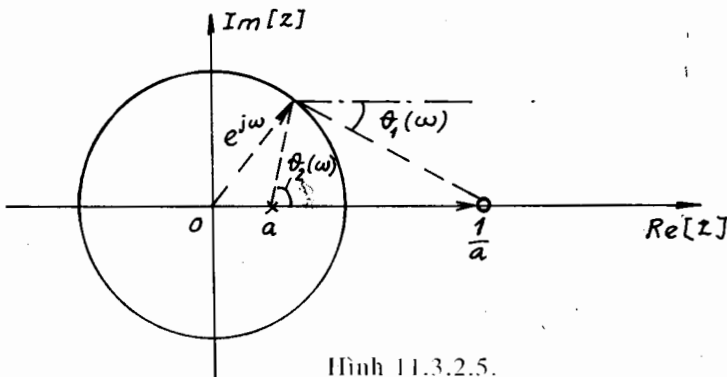
$$H_{ap}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a(1 - z)}{(z - a)}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \frac{a(1 - e^{j\omega})}{(e^{j\omega} - a)}$$

+ Bây giờ chúng ta sẽ bình luận về đáp ứng pha của bộ lọc số thông tắt này.

$$\left. \begin{aligned} \arg[N(e^{j\omega})] &\equiv \theta_1(\omega) \\ \arg[D(e^{j\omega})] &\equiv \theta_2(\omega) \\ \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] &\equiv \theta_{ap}(\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta_{ap}(\omega) = \theta_1(\omega) - \theta_2(\omega)$$

Quan hệ trên được minh họa trên hình 11.3.2.5.



Hình 11.3.2.5.

+ Đối với các giá trị của ω trong khoảng $[0, \pi]$ tương ứng với nửa trên của vòng tròn đơn vị thì pha $\theta_{ap}(\omega) = \theta_1(\omega) - \theta_2(\omega)$ luôn luôn âm (tức là $\theta_2(\omega)$ luôn lớn hơn $\theta_1(\omega)$).

+ Mà ta biết rằng:

$$\theta(\omega) = \theta_{min}(\omega) + \theta_{ap}(\omega)$$

Vậy pha $\theta_{\min}(\omega)$ luôn luôn âm ít hơn $\theta(\omega)$ bởi vì $\theta_{\max}(\omega)$ luôn âm.

+ Nếu ta gọi:

$$-\frac{\theta(\omega)}{\omega} \text{ là trễ pha,}$$

thì ta có:

$$-\frac{\theta_{\min}(\omega)}{\omega} < -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$$

Vậy ta có thể nói rằng $H_{\min}(e^{j\omega})$ có trễ pha luôn luôn nhỏ hơn trễ pha của bất kỳ bộ lọc nào có chứa ít nhất một điểm không nằm ngoài vòng tròn đơn vị. Vì vậy $H_{\min}(e^{j\omega})$ là một bộ lọc có trễ pha cực tiểu. Cũng vì vậy mà ta gọi là bộ lọc pha cực tiểu.

c) Dạng của bộ lọc số thông tắt

Bây giờ giả sử chúng ta có bộ lọc số thông tắt, bộ lọc số này có một điểm không là z_{01} nằm ngoài vòng tròn đơn vị và một điểm cực là z_{p1} nằm trong vòng tròn đơn vị như sau:

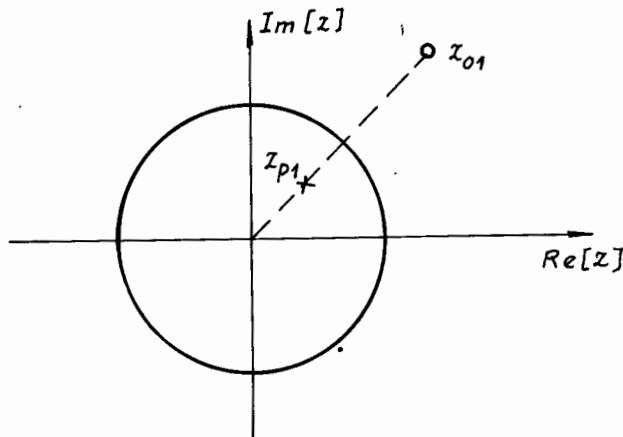
$$z_{01} = r_{01} e^{j\theta_{01}}$$

$$z_{p1} = r_{p1} e^{j\theta_{p1}}$$

mà:
$$r_{p1} = \frac{1}{r_{01}}; \quad \theta_{01} = \frac{1}{r_{p1}}$$

$$\theta_{p1} = \theta_{01}$$

Vị trí của z_{p1} và z_{01} được minh hoạ trên hình 11.3.2.6.



Hình 11.3.2.6.

Theo hình 11.3.2.6 thì chúng ta có thể viết quan hệ giữa z_{p1} và z_{01} như sau:

$$z_{p1} = \frac{1}{z_{o1}^*} = \frac{1}{r_{o1} e^{-j\theta_{o1}}} = \frac{1}{r_{o1}} e^{j\theta_{o1}} = r_{p1} e^{j\theta_{p1}}$$

$$z_{o1} = \frac{1}{z_{p1}^*} = \frac{1}{r_{p1} e^{-j\theta_{p1}}} = \frac{1}{r_{p1}} e^{j\theta_{p1}} = r_{o1} e^{j\theta_{o1}}$$

Vậy ta có:

$$\begin{cases} |z_{p1}| = \frac{1}{|z_{o1}|} \\ \theta_{p1} = \theta_{o1} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} |z_{o1}| = \frac{1}{|z_{p1}|} \\ \theta_{o1} = \theta_{p1} \end{cases}$$

Đây là bộ lọc thông tất nên đáp ứng tần số phải bằng 1 với tất cả ω , tức là:

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall \omega$$

Vậy ta phải viết hàm truyền đạt $H_{ap}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_{o1}^{-1}}{1 - (z_{o1}^*)^{-1} z^{-1}} \quad (11.3.2.7)$$

hoặc:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_{p1}^*}{1 - z_{p1} z^{-1}} \quad (11.3.2.8)$$

Ví dụ 11.3.2.3

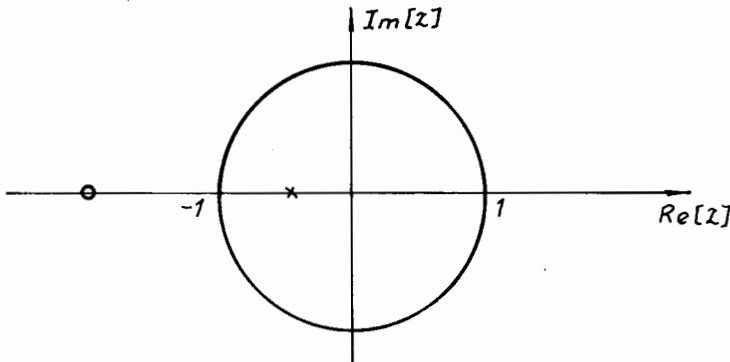
Giả sử ta có bộ lọc số thông tất có một điểm không và một điểm cực như sau:

$$z_{o1} = -2; \quad z_{p1} = -\frac{1}{2}$$

- Hãy xác định vị trí của z_{o1} và z_{p1} .
- Hãy tìm hàm truyền đạt $H_{ap}(z)$ của bộ lọc này.

Giải

Vị trí của z_{o1} và z_{p1} được cho trên hình 11.3.2.7



Hình 11.3.2.7.

Hàm truyền đạt $H_{ap}(z)$ được tính theo (11.3.2.7) hoặc (11.3.2.8) như sau:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Xét tổng quát hơn nữa nếu bộ lọc thông tắt $H_{ap}(z)$ có hai điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị và hai điểm không nằm ngoài vòng tròn đơn vị như sau:

$$z_{01} = r_{01}e^{j\theta_{01}}; \quad z_{p1} = r_{p1}e^{j\theta_{p1}}$$

$$z_{02} = r_{02}e^{j\theta_{02}}; \quad z_{p2} = r_{p2}e^{j\theta_{p2}}$$

mà:

$$r_{p1} = \frac{1}{r_{01}}; \quad \theta_{p1} = \theta_{01}$$

$$r_{p2} = \frac{1}{r_{02}}; \quad \theta_{p2} = \theta_{02}$$

Tức là:

$$z_{p1} = (z_{01}^*)^{-1} \quad \text{và} \quad z_{01}^{-1} = z_{p1}^*$$

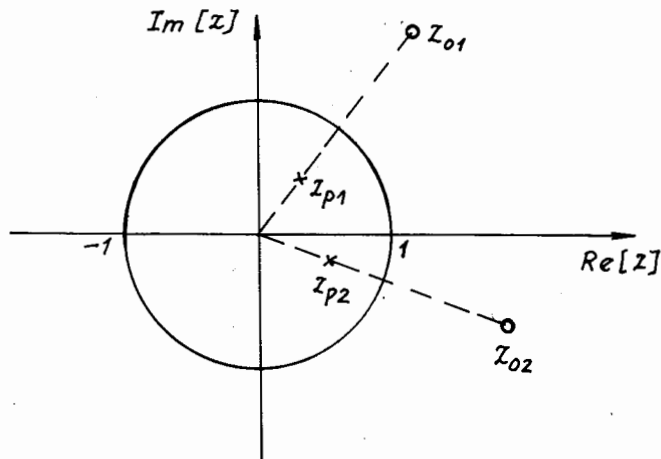
$$z_{p2} = (z_{02}^*)^{-1} \quad \text{và} \quad z_{02}^{-1} = z_{p2}^*$$

Trong trường hợp tổng quát thì:

z_{p1} và z_{p2} không phải là liên hợp phức

z_{01} và z_{02} không phải là liên hợp phức.

Trong trường hợp này vị trí của các điểm cực và các điểm không được minh họa trên hình 11.3.2.8.



Hình 11.3.2.8.

Tương tự các biểu thức (11.3.2.7) và (11.3.2.8) chúng ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới các dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - z_{01}^*)(z^{-1} - z_{02}^*)}{[1 - (z_{01}^*)^{-1}z^{-1}][1 - (z_{02}^*)^{-1}z^{-1}]} \quad (11.3.2.9)$$

hoặc:

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - z_{p1}^*)(z^{-1} - z_{p2}^*)}{(1 - z_{p1}z^{-1})(1 - z_{p2}z^{-1})} \quad (11.3.2.10)$$

hoặc khai triển dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} - (z_{p1}^* + z_{p2}^*)z^{-1} + z_{p1}^*z_{p2}^*}{1 - (z_{p1} + z_{p2})z^{-1} + z_{p1}z_{p2}z^{-2}} \quad (11.3.2.11)$$

Vậy theo (11.3.2.11) thì trong trường hợp tổng quát các hệ số của $H_{ap}(z)$ là phức. Nhưng nếu z_{p1} và z_{p2} là liên hợp phức, z_{01} và z_{02} cũng là liên hợp phức:

$$z_{p1} = z_{p2}^*; z_{p1}^* = z_{p2}; z_{01} = z_{02}^*; z_{01}^* = z_{02}.$$

Khi đó chúng ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} - (z_{p1}^* + z_{p1})z^{-1} + z_{p1}^*z_{p1}}{1 - (z_{p1} + z_{p1}^*)z^{-1} + z_{p1}z_{p1}^*z^{-2}} \quad (11.3.2.12)$$

mà:

$$z_{p1}^* + z_{p1} = 2\text{Re}[z_{p1}]; \quad z_{p1}^*z_{p1} = |z_{p1}|^2$$

Vậy ta có dạng của $H_{ap}(z)$ như sau:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^2 - 2\text{Re}[z_{p1}]z^{-1} + |z_{p1}|^2}{1 - 2\text{Re}[z_{p1}]z^{-1} + |z_{p1}|^2z^{-2}} \quad (11.3.2.13)$$

$2\text{Re}[z_{p1}]$ và $|z_{p1}|^2$ là các số thực, vậy trong trường hợp này các hệ số của $H_{ap}(z)$ là các số thực và lúc đó ta có thể lý luận lại $H_{ap}(z)$ như sau:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} + a_1z^{-1} + a_2}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

ở đây:

$$a_1 = -2\text{Re}[z_{p1}]$$

$$a_2 = |z_{p1}|^2$$

Phân tích sâu hơn nữa, chúng ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới dạng phân thức hữu tỷ sau đây:

$$\begin{aligned}
 H_{ap}(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} \\
 D(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\
 D(z^{-1}) &= 1 + a_1 z + a_2 z^2 \\
 \Rightarrow z^{-2} \cdot D(z^{-1}) &= z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2 = N(z) \\
 \Rightarrow H_{ap}(z) &= \frac{z^{-2} D(z^{-1})}{D(z)} \quad (11.3.2.15)
 \end{aligned}$$

Trong miền tần số liên tục ω ta có thể viết đáp ứng tần số $H_{ap}(e^{j\omega})$ dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned}
 H_{ap}(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-2j\omega} D(e^{-j\omega})}{D(e^{j\omega})} \quad (11.3.2.16) \\
 D(e^{j\omega}) &= |D(e^{j\omega})| e^{j \arg[D(e^{j\omega})]} = |D(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \\
 D(e^{-j\omega}) &= |D(e^{-j\omega})| e^{j \arg[D(e^{-j\omega})]} = |D(e^{-j\omega})| e^{j\varphi(-\omega)}
 \end{aligned}$$

Chúng ta biết rằng khi các hệ số của $D(z)$ là các số thực thì chúng ta có quan hệ sau đây:

$$\begin{aligned}
 |D(e^{j\omega})| &= |D(e^{-j\omega})| \\
 \arg[D(e^{j\omega})] &= -\arg[D(e^{-j\omega})]; \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \\
 \Rightarrow |H_{ap}(e^{j\omega})| &= 1 \\
 H_{ap}(e^{j\omega}) &= |H_{ap}(e^{j\omega})| e^{j \arg[H_{ap}(e^{j\omega})]} = |H_{ap}(e^{j\omega})| e^{j\varphi_{ap}(\omega)} \\
 \Rightarrow \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] &= \varphi_{ap}(\omega) = \arg[e^{-j2\omega}] + \varphi(-\omega) - \varphi(\omega) \\
 &= -2\omega + 2\varphi(-\omega) \\
 &= 2[\varphi(-\omega) - \omega]
 \end{aligned}$$

Ví dụ 11.3.2.4

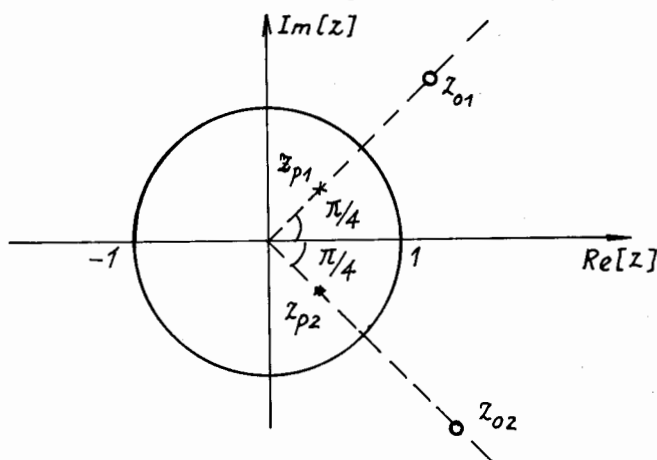
Giả sử chúng ta có một bộ lọc số thông tắt mà các điểm cực và các điểm không của nó có dạng sau đây:

$$z_{p1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, z_{p2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, z_{o1} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}, z_{o2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

- Hãy xác định vị trí của các điểm cực và các điểm không
- Hãy tìm $H_{ap}(z)$.

Giải

Vị trí của các điểm cực và các điểm không được minh hoạ trên hình 11.3.2.9.



Hình 11.3.2.9.

$H_{ap}(z)$ được xác định theo biểu thức (11.3.2.14) như sau:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2\text{Re}[z_{p1}] = -2 \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = |z_{p1}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-1} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$

Ví dụ 11.3.2.5

Nếu chúng ta có một hệ thống có hàm truyền đạt $H(z)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

ở đây:

$$H_1(z) = (1 - z_{01}.z^{-1})(1 - z_{02}.z^{-1})$$

với:

$$z_{01} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, z_{02} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$H_2(z) = \frac{(z^{-1} - z_{01}^{-1})(z^{-1} - z_{02}^{-1})}{(1 - z_{p1}.z^{-1})(1 - z_{p2}.z^{-1})}$$

với: $z_{01} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}, z_{02} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$$z_{p1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, z_{p2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

- Hãy xét xem bộ lọc số này có phải là bộ lọc số pha cực tiểu hay không?
- Hãy tính $H(z)$, $H(e^{j\omega})$.
- Hãy vẽ đồ thị $h(n)$ và $h_{min}(n)$.

Giải

Dựa vào các ví dụ trước ta tính ngay được:

$$H_1(z) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \equiv H_{min}(z)$$

$$H_2(z) = \frac{z^{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \equiv H_{ap}(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = z^{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}$$

Vậy bộ lọc số $H(z)$ này không phải là bộ lọc số pha cực tiểu, bởi vì các điểm không của $H_1(z)$ sẽ triệt tiêu với các điểm cực của $H_{ap}(z)$, cuối cùng $H(z)$ chỉ có hai điểm không nằm ngoài vòng tròn đơn vị.

Từ đây ta có đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ như sau:

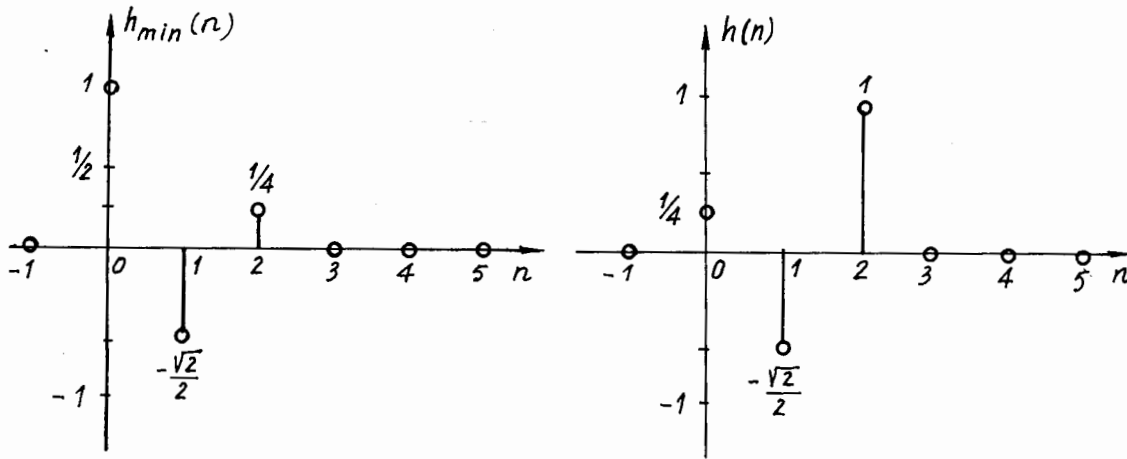
$$H(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}$$

$h(n)$ và $h_{min}(n)$ được minh họa trên hình 11.3.2.10.

Trong trường hợp tổng quát nếu:

$H_{ap}(z)$ có M điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị.

và $H_{ap}(z)$ có M điểm không nằm ngoài vòng tròn đơn vị.



Hình 11.3.2.10.

ta ký hiệu M điểm cực và M điểm không như sau:

$$z_{pi} = r_{pi} e^{j\theta_{pi}}; i = 1 \div M$$

$$z_{0i} = r_{0i} e^{j\theta_{0i}}; i = 1 \div M$$

$$z_{pi} = (z_{0i}^*)^{-1} \Rightarrow r_{pi} = \frac{1}{r_{0i}} \text{ và } \theta_{pi} = \theta_{0i}$$

$$z_{0i}^{-1} = z_{pi}^*$$

Từ đây ta có dạng của $H_{ap}(z)$ như sau:

$$H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^M \frac{z^{-1} - z_{0i}^{-1}}{1 - (z_{0i}^*)^{-1} \cdot z^{-1}} \quad (11.3.2.17)$$

hoặc

$$H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^M \frac{z^{-1} - z_{pi}^*}{1 - z_{pi} \cdot z^{-1}} \quad (11.3.2.18)$$

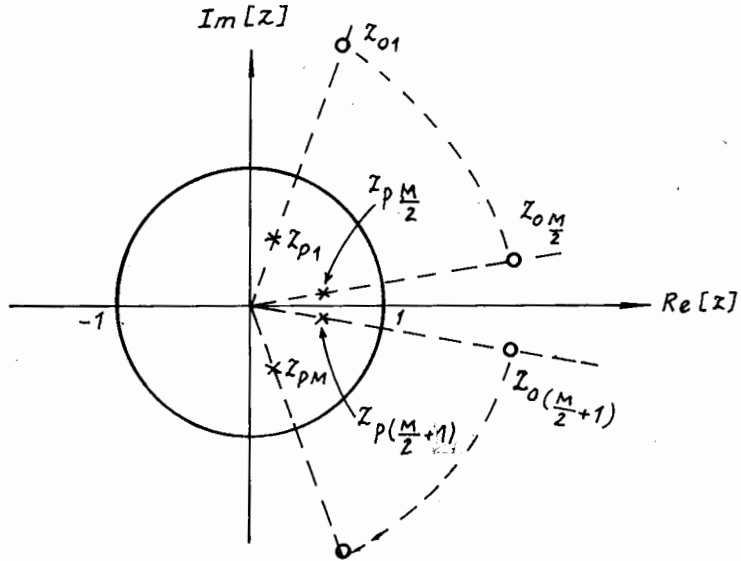
Nếu các điểm cực và các điểm không không phải là liên hợp phức thì các hệ số của $H_{ap}(z)$ sẽ là phức.

Nếu M là số chẵn, các điểm cực và các điểm không là liên hợp phức từng đôi một như sau:

$$z_{p1} = z_{pM}^*; z_{p2} = z_{p(M-1)}^*; \dots; z_{p\frac{M}{2}} = z_{p(\frac{M}{2}+1)}^*$$

$$z_{01} = z_{0M}^*; z_{02} = z_{0(M-1)}^*; \dots; z_{0\frac{M}{2}} = z_{0(\frac{M}{2}+1)}^*$$

Vị trí của các điểm cực và các điểm không này được minh hoạ trên hình 11.3.2.11.



Hình 11.3.2.11.

Khi đó chúng ta có thể viết:

$$\begin{aligned} H_{ap}(z) &= \prod_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{z^{-1} - z_{pi}^*}{1 - z_{pi} z^{-1}} \cdot \prod_{i=(\frac{M}{2}+1)}^M \frac{z^{-1} - z_{pi}^*}{1 - z_{pi} z^{-1}} \\ &= \prod_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{(z^{-1} - z_{pi}^*)(z^{-1} - z_{pi})}{(1 - z_{pi} z^{-1})(1 - z_{pi}^* z^{-1})} \\ &= \prod_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{z^2 - (z_{pi}^* + z_{pi})z^{-1} + z_{pi}^* z_{pi}}{1 - (z_{pi} + z_{pi}^*)z^{-1} + z_{pi} z_{pi}^* z^{-1}} \end{aligned}$$

mà:

$$z_{pi}^* + z_{pi} = z_{pi} + z_{pi}^* = 2\text{Re}[z_{pi}]$$

$$z_{pi}^* z_{pi} = z_{pi} z_{pi}^* = |z_{pi}|^2$$

$$\Rightarrow H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{z^2 - 2\text{Re}[z_{pi}]z^{-1} + |z_{pi}|^2}{1 - 2\text{Re}[z_{pi}]z^{-1} + |z_{pi}|^2 z^{-2}} \quad (11.3.2.19)$$

Trong trường hợp này các hệ số của $H_{ap}(z)$ là số thực, và ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^M \frac{z^2 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad (11.3.2.20)$$

ở đây:

$$a_{1i} = -2\text{Re}[z_{pi}]$$

$$a_{2i} = |z_{pi}|^2$$

Ví dụ 11.3.2.6

Giả sử chúng ta có một bộ lọc số thông tắt mà các điểm cực và các điểm không của nó có dạng sau đây:

$$z_{p1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{p2} = \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}; z_{p3} = \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}; z_{p4} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_{01} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02} = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}; z_{03} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}; z_{04} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Hãy tìm $H_{ap}(z)$?

Giải

Trong trường hợp này $M = 4$ vậy theo biểu thức (11.3.2.20) ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^4 \frac{z^2 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}$$

Tính các hệ số a_{1i} và a_{2i} như sau

$$a_{11} = -2\text{Re}[z_{p1}] = -2 \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_{21} = |z_{p1}|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = -2\text{Re}[z_{p2}] = -2 \cdot \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$a_{22} = |z_{p2}|^2 = \left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \cdot \frac{z^{-2} - \frac{2}{\sqrt{3}}z^{-1} + \frac{4}{9}}{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}z^{-1} + \frac{4}{9}z^{-2}}$$

Biến đổi tiếp, chúng ta có thể viết $H_{ap}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-4} + b_1 z^{-3} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-1} + b_4}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}$$

ở đây:

$$b_1 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad b_2 = \left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$b_3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right); \quad b_4 = \frac{1}{9}.$$

Nhận xét

- Nếu M chẵn và các điểm cực và các điểm không là liên hợp phức từng đôi một, thì các hệ số của bộ lọc số thông tắt sẽ là số thực và hàm truyền đạt $H_{ap}(z)$ được viết dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-M} + b_1 z^{-(M-1)} + b_2 z^{-(M-2)} + \dots + b_{M-1} z^{-1} + b_M}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}} \quad (11.3.2.21)$$

- Trong trường hợp tổng quát nếu các điểm cực và các điểm không không phải liên hợp phức từng đôi một, thì hàm truyền đạt $H_{ap}(z)$ của bộ lọc số thông tắt sẽ được viết dưới dạng sau đây:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-M} + b_1^* z^{-(M-1)} + b_2^* z^{-(M-2)} + \dots + b_{M-1}^* z^{-1} + b_M^*}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}} \quad (11.3.2.22)$$

- Vì $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$ nên bộ lọc số thông tắt có thể được coi như bộ biến đổi pha (bộ di pha).

d) Bộ lọc số pha cực đại

Định nghĩa bộ lọc số pha cực đại:

Nếu hàm truyền đạt của một bộ lọc không có bất kỳ một điểm cực và một điểm không nào nằm trong vòng tròn đơn vị, thì bộ lọc số đó được gọi là bộ lọc số pha cực đại.

Vậy nếu xét theo vị trí của các điểm cực và các điểm không thì bộ lọc số pha cực đại và bộ lọc số pha cực tiểu là ngược nhau.

Chúng ta ký hiệu hàm truyền đạt của bộ lọc số pha cực đại là $H_{\max}(z)$.

Ví dụ 11.3.2.7

Giả sử chúng ta có bộ lọc số FIR pha cực tiểu như sau:

$$H_{\min}(z) = (1 - z_{01} z^{-1})(1 - z_{02} z^{-1})$$

$$z_{01} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}; \quad z_{02} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

- Hãy tìm $h_{\min}(n)$.

- Hãy tìm $h_{\max}(n)$, $H_{\max}(z)$ với điều kiện $|H_{\min}(e^{j\omega})| = |H_{\max}(e^{j\omega})|$

Giải

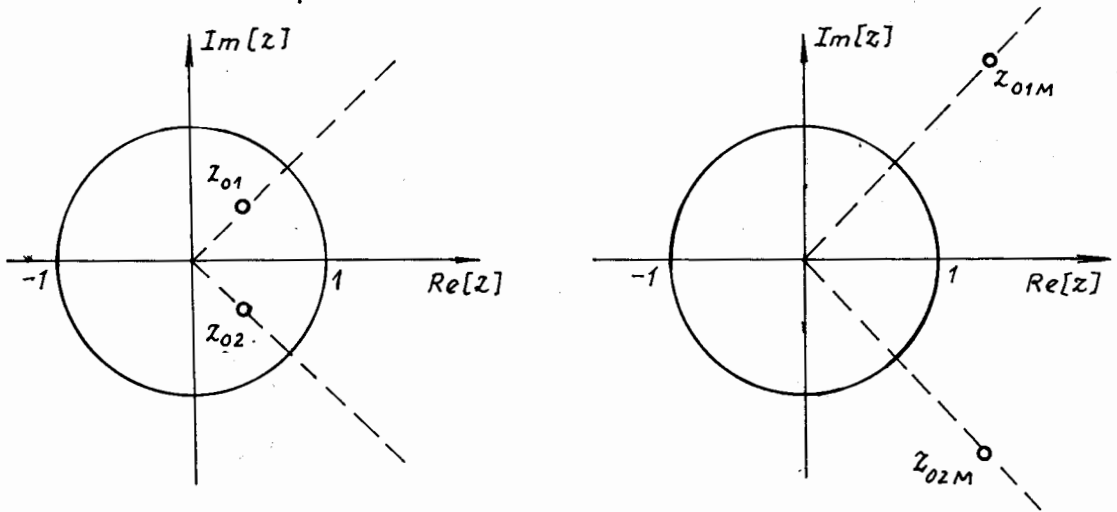
Để cho đáp ứng biên độ không thay đổi $(|H_{\min}(e^{j\omega})| = |H_{\max}(e^{j\omega})|)$ thì chúng ta phải chuyển các điểm không của $H_{\min}(z)$, các điểm không này nằm trong vòng tròn đơn vị, ra ngoài vòng tròn đơn vị heo đường bán kính với khoảng cách ngược lại, tức là:

$$z_{01M} = \frac{1}{z_{01}} \quad \text{và} \quad z_{02M} = \frac{1}{z_{02}}$$

z_{01M} và z_{02M} là các điểm không của $H_{\max}(z)$.

Vị trí các điểm không của $H_{\min}(z)$ được minh hoạ trên hình 11.3.2.12 a.

Vị trí các điểm không của $H_{\max}(z)$ được minh hoạ trên hình 11.3.2.12 b.



Hình 11.3.2.12.

Chúng ta tính được $H_{\min}(z)$ và $h_{\min}(n)$ như sau:

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) &= (1 - z_{01}z^{-1})(1 - z_{02}z^{-1}) \\ &= 1 - (z_{01} + z_{02})z^{-1} + z_{01}z_{02}z^{-2} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{\min}(n) = \delta(n) - \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(n-1) + \frac{1}{4} \delta(n-2)$$

Từ đây ta tìm được $H_{\max}(z)$ và $h_{\max}(n)$ như sau:

$$H_{\max}(z) = k(1 - z_{01M}z^{-1})(1 - z_{02M}z^{-1})$$

k : hệ số tỉ lệ.

$$\Rightarrow H_{\max}(z) = k[1 - (z_{01M} + z_{02M})z^{-1} + z_{01M}z_{02M}z^{-2}]$$

$$z_{01M} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02M} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow H_{\max}(z) = k(1 - 2\sqrt{2}z^{-1} + 4z^{-2})$$

Bây giờ chúng ta tìm tỷ lệ k sao cho đảm bảo điều kiện: $|H_{\min}(e^{j\omega})| = |H_{\max}(e^{j\omega})|$

$$H_{\min}(e^{j\omega}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

$$H_{\max}(e^{j\omega}) = k(1 - 2\sqrt{2}e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega})$$

Chúng ta có thể xác định k tại $\omega = 0$ như sau:

$$\text{Tại } \omega = 0 \Rightarrow |H_{\min}(e^{j0})| = |H_{\max}(e^{j0})|$$

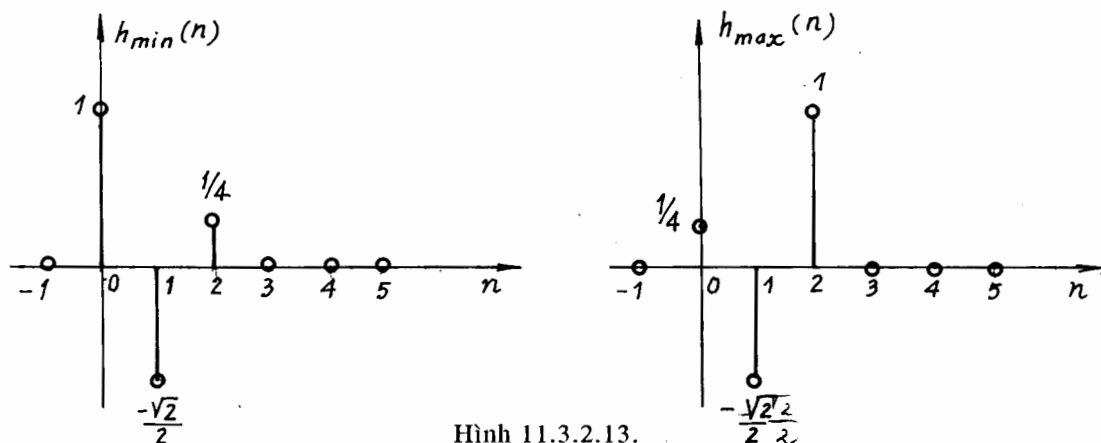
$$\Rightarrow \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\right| = k|1 - 2\sqrt{2} + 4|$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow H_{\max}(z) = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{2}z^{-1} + 4z^{-2}) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + z^{-2}$$

$$\Rightarrow h_{\max}(n) = \frac{1}{4}\delta(n) - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

Đồ thị của $h_{\min}(n)$ và $h_{\max}(n)$ được cho trên hình 11.3.2.13.



Hình 11.3.2.13.

Nhận xét

- Để đảm bảo điều kiện $|H_{\min}(e^{j\omega})| = |H_{\max}(e^{j\omega})|$ và tránh không phải sử dụng hệ số tỷ lệ k , chúng ta có thể tìm $H_{\max}(z)$ dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned} H_{\max}(z) &= (z^{-1} - z_{01M}^{-1})(z^{-1} - z_{02M}^{-1}) \\ &= z^{-2}(z_{01M}^{-1} + z_{02M}^{-1})z^{-1} + z_{01M}^{-1}z_{02M}^{-1} \\ &= z^{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Chúng ta có thể hình thành một bộ lọc pha cực đại (hoặc một bộ lọc nào đấy) từ một bộ lọc pha cực tiểu với cùng một đáp ứng biên độ.

- Đối với một bộ lọc nào đấy $H(z)$ có chứa M điểm không, chúng ta có thể tìm được 2^M bộ lọc khác có cùng đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ nhưng đáp ứng pha $\arg[H(e^{j\omega})]$ thì khác nhau.

11.4. BIẾN ĐỔI HILBERT ĐỐI VỚI DÂY PHỨC

11.4.1. BIẾN ĐỔI HILBERT ĐỐI VỚI TÍN HIỆU TƯƠNG TỰ

a) Tín hiệu phân tích

Giả sử ta có tín hiệu tương tự phức $x_a(t)$ như sau:

$$x_a(t) = \operatorname{Re}[x_a(t)] + j\operatorname{Im}[x_a(t)]$$

$\operatorname{Re}[x_a(t)]$: phần thực của $x_a(t)$.

$\operatorname{Im}[x_a(t)]$: phần ảo của $x_a(t)$.

Biến đổi Fourier của tín hiệu $x_a(t)$ được tính như sau:

$$X_a(\omega_a) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\omega_a t} dt \quad (11.4.1.4)$$

Ta ký hiệu biến đổi Fourier như sau:

$$X_a(\omega_a) = \operatorname{FT}[x_a(t)]$$

* Định nghĩa tín hiệu phân tích

Nếu $X_a(\omega_a)$ triệt tiêu với $\omega_a < 0$, tức là:

$$X_a(\omega_a) = 0 \text{ với } \omega_a < 0$$

thì tín hiệu tương tự phức này được gọi là tín hiệu phân tích.

Ví dụ 11.4.1.1

Cho tín hiệu $x_a(t)$ như sau:

$$x_a(t) = e^{j\omega_{a0}t}, \quad \omega_{a0} \text{ là hằng số dương}$$

Hãy xét xem $x_a(t)$ có phải là tín hiệu phân tích hay không?

Giải

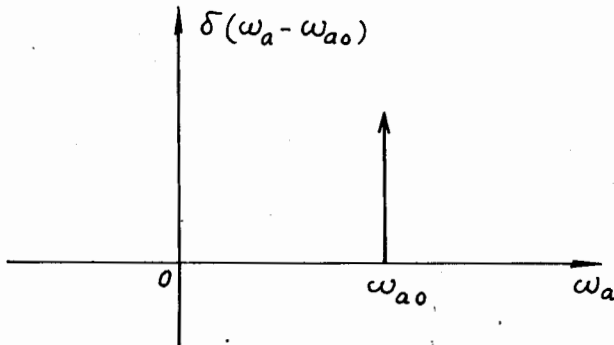
Trước hết chúng ta phải tìm biến đổi Fourier của $x_a(t)$:

$$X_a(\omega_a) = \text{FT}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_{a0}t} e^{-j\omega_a t} dt$$

$$X_a(\omega_a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_{a0} - \omega_a)t} dt = \delta(\omega_a - \omega_{a0})$$

$$\delta(\omega_a - \omega_{a0}) = \begin{cases} \infty & \text{với } \omega_a = \omega_{a0} \\ 0 & \omega_a \neq \omega_{a0} \end{cases}$$

Đồ thị của $\delta(\omega_a - \omega_{a0})$ được cho trên hình 11.4.1.1.



Hình 11.4.1.1.

Theo hình 11.4.1.1 ta thấy rằng:

$$X_a(\omega_a) = 0 \text{ với } \omega_a < 0$$

Vậy $x_a(t)$ là tín hiệu phân tích.

b) Biến đổi Hilbert đối với tín hiệu phân tích

Chúng ta biết rằng:

$$x_a(t) = \text{Re}[x_a(t)] + j\text{Im}[x_a(t)]$$

$$\Rightarrow x_a^*(t) = \text{Re}[x_a(t)] - j\text{Im}[x_a(t)]$$

$$\text{Re}[x_a(t)] = \frac{1}{2} [x_a(t) + x_a^*(t)]$$

$$\operatorname{Im}[x_a(t)] = \frac{1}{2j} [x_a(t) - x_a^*(t)] = -\frac{1}{2j} [x_a(t) - x_a^*(t)]$$

Đương nhiên $\operatorname{Re}[x_a(t)]$ và $\operatorname{Im}[x_a(t)]$ là thực, vậy ta có thể biến đổi Fourier của phần thực và phần ảo như sau:

$$\operatorname{FT}\{\operatorname{Re}[x_a(t)]\} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{FT}[x_a(t)] + \operatorname{FT}[x_a^*(t)] \right\}$$

$$\operatorname{FT}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega_a t} dt = X_a(\omega_a)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{FT}[x_a^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a^*(t) e^{-j\omega_a t} dt = \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega_a t} dt \right]^* \right\}^* \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{j\omega_a t} dt \right\}^* = \{X_a(-\omega_a)\}^* = X_a^*(-\omega_a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{FT}\{\operatorname{Re}[x_a(t)]\} = \frac{1}{2} [X_a(\omega_a) + X_a^*(-\omega_a)] \quad (11.4.1.2)$$

$$\equiv X_{aR}(\omega_a)$$

Vậy nếu $x_a(t)$ là tín hiệu phân tích thì:

$$X_a(\omega_a) = 0 \quad \text{với } \omega_a < 0$$

$$\Rightarrow X_a(-\omega_a) = 0 \quad \omega_a > 0$$

$$X_a^*(-\omega_a) = 0 \quad \omega > 0$$

Tức là:

$$X_{aR}(\omega_a) = \frac{1}{2} X_a(\omega_a) \quad \text{với } \omega_a \geq 0$$

và:

$$X_{aR}(\omega_a) = \frac{1}{2} X_a^*(-\omega_a) \quad \text{với } \omega_a < 0 \quad (11.4.1.3)$$

Từ đây ta có thể viết:

$$X_a(\omega_a) = \begin{cases} 2X_{aR}(\omega_a) & \omega_a \geq 0 \\ 0 & \omega_a < 0 \end{cases} \quad (11.4.1.4)$$

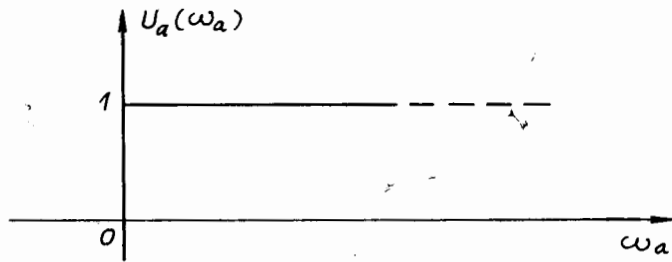
Hoặc ta có thể viết dưới dạng sau đây:

$$X_a(\omega_a) = 2U_a(\omega_a)X_{aR}(\omega_a) \quad (11.4.1.5)$$

ở đây:

$$U_a(\omega_a) = \begin{cases} 1 & \omega_a \geq 0 \\ 0 & \omega_a < 0 \end{cases}$$

Đồ thị của hàm $U_a(\omega_a)$ được minh hoạ trên hình 11.4.1.2.



Hình 11.4.1.2.

Tương tự ta có thể tính biến đổi Fourier của phần ảo như sau:

$$\begin{aligned} \text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\} &= -j \frac{1}{2} [X_a(\omega_a) - X_a^*(-\omega_a)] \\ &\equiv X_{al}(\omega_a) \end{aligned} \quad (11.4.1.6)$$

Và nếu $x_a(t)$ là tín hiệu phân tích thì ta cũng có:

$$X_{al}(\omega_a) = -j \frac{1}{2} X_a(\omega_a) \quad \text{với } \omega \geq 0$$

và:

$$X_{al}(\omega_a) = j \frac{1}{2} X_a^*(-\omega_a) \quad \text{với } \omega < 0 \quad (11.4.1.7)$$

Từ đây ta có thể viết:

$$X_a(\omega_a) = \begin{cases} 2jX_{al}(\omega_a) & \omega_a \geq 0 \\ 0 & \omega_a < 0 \end{cases} \quad (11.4.1.8)$$

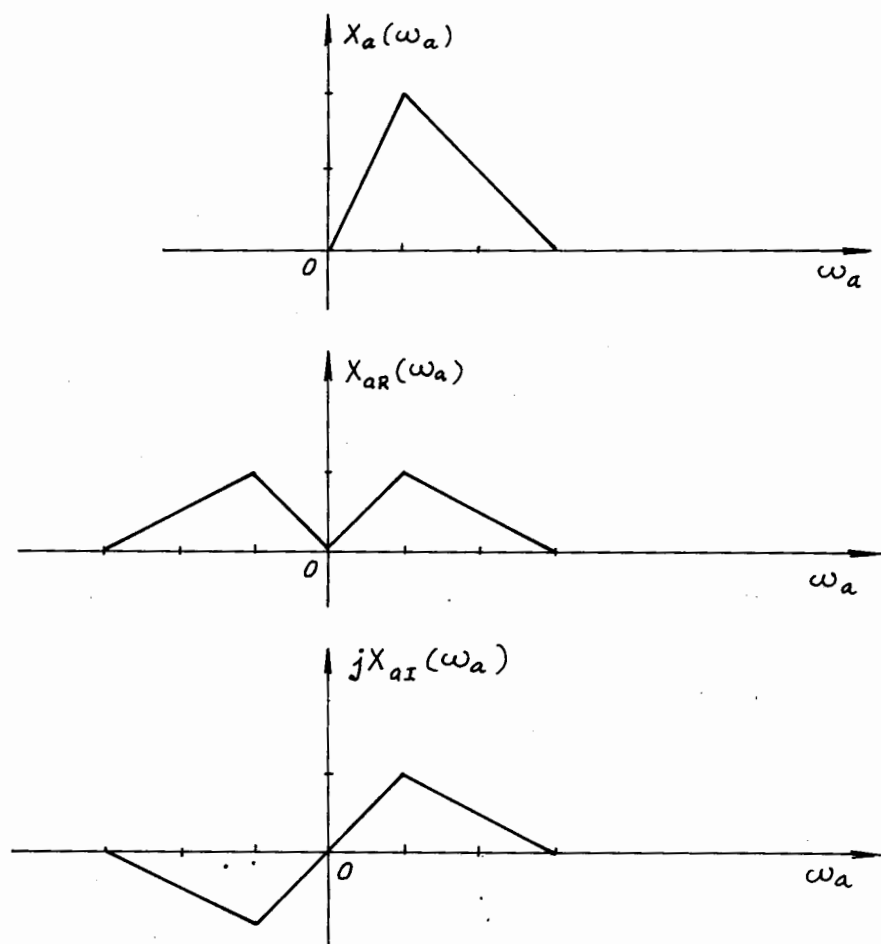
hoặc ta có thể viết dưới dạng sau đây:

$$X_a(\omega_a) = 2jU_a(\omega_a)X_{al}(\omega_a) \quad (11.4.1.9)$$

Từ đây ta có thể viết biến đổi Fourier của tín hiệu phân tích $x_a(t)$ như sau:

$$\begin{aligned} \text{FT}[x_a(t)] &= \text{FT}\{\text{Re}[x_a(t)]\} + j\text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\} \\ \Rightarrow X_a(\omega_a) &= X_{aR}(\omega_a) + jX_{al}(\omega_a) \end{aligned} \quad (11.4.1.10)$$

Hình 11.4.1.3 sẽ minh hoạ $X_a(\omega_a)$, $X_{aR}(\omega_a)$ và $jX_{al}(\omega_a)$ bằng đồ thị.



Hình 11.4.1.3.

Tiếp tục chúng ta có thể viết:

$$2u_a(\omega_a) = 1 + \text{Sgn}(\omega_a) \quad (11.4.1.11)$$

$\text{Sgn}(\omega_a)$: hàm dấu

$$\text{Sgn}(\omega_a) = \begin{cases} 1 & \text{với } \omega_a \geq 0 \\ -1 & \omega_a < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2X_a(\omega_a) = [1 + \text{Sgn}(\omega_a)] \cdot X_{aR}(\omega_a) \quad (11.4.1.12)$$

$$= X_{aR}(\omega_a) + \text{Sgn}(\omega_a) \cdot X_{aR}(\omega_a) = X_{aR}(\omega_a) + jX_{aI}(\omega_a)$$

và chúng ta biết rằng:

$$\begin{aligned} X_a(\omega_a) &= \text{FT}[x_a(t)] = \text{FT}\{\text{Re}[x_a(t)]\} + j\text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\} \\ &= X_{aR}(\omega_a) + jX_{aI}(\omega_a) \end{aligned}$$

Tức là:

$$\begin{aligned}
 X_{aR}(\omega_a) &= \text{FT}\{\text{Re}[x_a(t)]\} \Rightarrow \text{Re}[x_a(t)] = \text{IFT}[X_{aR}(\omega_a)] \\
 X_{aI}(\omega_a) &= \text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\} = \frac{1}{j} \text{Sgn}(\omega_a).X_{aR}(\omega_a) \\
 &= -j \text{Sgn}(\omega_a).X_{aR}(\omega_a) \\
 \Rightarrow \text{Im}[x_a(t)] &= \text{IFT}[X_{aI}(\omega_a)] = \text{IFT}\left[\frac{1}{j} \text{Sgn}(\omega_a).X_{aR}(\omega_a)\right] \\
 &= \text{IFT}[-j \text{Sgn}(\omega_a)] * \text{IFT}[X_{aR}(\omega_a)] \\
 \text{IFT}[-j \text{Sgn}(\omega_a)] &= \frac{1}{\pi t} \\
 \text{IFT}[X_{aR}(\omega_a)] &= \text{Re}[x_a(t)] \\
 \Rightarrow \text{Im}[x_a(t)] &= \frac{1}{\pi t} * \text{Re}[x_a(t)] = \text{Re}[x_a(t)] * \frac{1}{\pi t}
 \end{aligned}$$

cuối cùng ta có:

$$\Rightarrow \text{Im}[x_a(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[x_a(\tau)] \frac{1}{t-\tau} d\tau \quad (11.4.1.13)$$

và chúng ta có thể viết:

$$\text{Im}[x_a(t)] = \text{HT}\{\text{Re}[x_a(t)]\}$$

Biểu thức (11.4.1.13) chính là biến đổi Hilbert của tín hiệu $\text{Re}[x_a(t)]$. Tức là biến đổi Hilbert của $\text{Re}[x_a(t)]$ sẽ là $\text{Im}[x_a(t)]$.

Tương tự như vậy ta có:

$$\begin{aligned}
 X_{aI}(\omega_a) &= 2jU_a(\omega_a), \quad X_{aI}(\omega_a) = X_{aR}(\omega_a) + jX_{aI}(\omega_a) \\
 &= j[1 + \text{Sgn}(\omega_a)].X_{aI}(\omega_a) \\
 &= j\text{Sgn}(\omega_a).X_{aI}(\omega_a) + jX_{aI}(\omega_a) \\
 \Rightarrow X_{aR}(\omega_a) &= j\text{Sgn}(\omega_a).X_{aI}(\omega_a)
 \end{aligned}$$

Tức là trong miền ω_a ta có:

$$\Rightarrow \text{FT}\{\text{Re}[x_a(t)]\} = j\text{Sgn}(\omega_a).\text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\}$$

Vậy trong miền t ta có:

$$\text{Re}[x_a(t)] = \text{IFT}[j\text{Sgn}(\omega_a)] * \text{Im}[x_a(t)]$$

mà:
$$\text{IFT}[\text{Sgn}(\omega_a)] = -\frac{1}{\pi t}$$

Vậy ta có:

$$\text{Re}[x_a(t)] = -\frac{1}{\pi t} * \text{Im}[x_a(t)] = \text{Im}[x_a(t)] * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

Cuối cùng ta có:

$$\text{Re}[x_a(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}[x_a(\tau)] \frac{1}{t-\tau} d\tau \quad (11.4.1.14)$$

và chúng ta có thể viết:

$$\text{Re}[x_a(t)] = \text{IHT}\{\text{Im}[x_a(t)]\}$$

Vậy biểu thức (11.4.1.14) chính là biến đổi Hilbert ngược của tín hiệu $\text{Im}[x_a(t)]$. Tức là biến đổi Hilbert ngược của $\text{Im}[x_a(t)]$ sẽ là $\text{Re}[x_a(t)]$.

Và cuối cùng ta có thể nói rằng các biểu thức (11.4.1.13) và (11.4.1.14) là cặp biến đổi Hilbert.

Ví dụ 11.4.1.2

Cho một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ như sau:

$$x_a(t) = e^{j\omega_a t}$$

+ Hãy tìm $\text{Re}[x_a(t)]$ và $\text{Im}[x_a(t)]$.

+ Hãy tìm $X_{aR}(\omega_a) = \text{FT}\{\text{Re}[x_a(t)]\}$ và $X_{aI}(\omega_a) = \text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\}$.

+ Hãy tìm cặp biến đổi Hilbert.

Giải

$$\text{Re}[x_a(t)] = \cos\omega_a t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_a t} + e^{-j\omega_a t}]$$

$$\text{Im}[x_a(t)] = \sin\omega_a t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_a t} - e^{-j\omega_a t}]$$

$$\begin{aligned} X_{aR}(\omega_a) &= \text{FT}\{\text{Re}[x_a(t)]\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_a t} + e^{-j\omega_a t}] e^{-j\omega_a t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_a - \omega_a)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_a + \omega_a)t} dt \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\omega_a - \omega_a) + \delta(\omega_a + \omega_a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{al}(\omega_a) &= \text{FT}\{\text{Im}[x_a(t)]\} = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_a t} - e^{-j\omega_a t}] e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2j} [\delta(\omega_a - \omega) - \delta(\omega_a + \omega)] \\
&= \frac{1}{2j} [\delta(\omega_a + \omega) - \delta(\omega_a - \omega)]
\end{aligned}$$

Từ đây ta có thể viết:

$$X_{al}(\omega_a) = \begin{cases} \frac{1}{2j} \delta(\omega_a + \omega) & \text{với } \omega < 0 \\ -\frac{1}{2j} \delta(\omega_a - \omega) & \text{với } \omega \geq 0 \end{cases}$$

và ta có thể viết:

$$X_{al}(\omega_a) = -j \text{Sgn}(\omega_a) \cdot X_{ar}(\omega_a)$$

Tiếp tục tính toán cặp biến đổi Hilbert ta có:

$$\begin{aligned}
\text{Im}[x_a(t)] &= \frac{1}{\pi t} * \text{Re}[x_a(t)] = \text{HT}\{\text{Re}[x_a(t)]\} \\
\Rightarrow \sin(\omega_a t) &= \text{HT}[\cos(\omega_a t)] = \frac{1}{\pi t} * \cos(\omega_a t)
\end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned}
\text{Re}[x_a(t)] &= -\frac{1}{\pi t} * \text{Im}[x_a(t)] = \text{IHT}\{\text{Im}[x_a(t)]\} \\
\cos(\omega_a t) &= \text{IHT}[\sin(\omega_a t)] = -\frac{1}{\pi t} * \sin(\omega_a t)
\end{aligned}$$

c) Bộ lọc cầu phương

Giả sử chúng ta có một hệ thống tương tự tuyến tính có đáp ứng xung là $h_a(t)$ như sau:

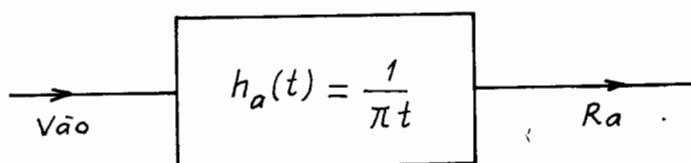
$$h_a(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (11.4.1.15)$$

Vậy ta có:

$$\text{FT}[h_a(t)] = \text{FT}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j \text{Sgn}(\omega_a) = H_a(\omega_a)$$

$H_a(\omega_a)$ chính là đáp ứng tần số của hệ thống này.

Sơ đồ khối của hệ thống này được minh họa trên hình 11.4.1.4.



Hình 11.4.1.4.

Vậy xét trong miền tần số ω_a ta có:

$$H_a(\omega_a) = \begin{cases} -j & \text{với } \omega_a \geq 0 \\ j & \text{với } \omega_a < 0 \end{cases} \quad (11.4.1.16)$$

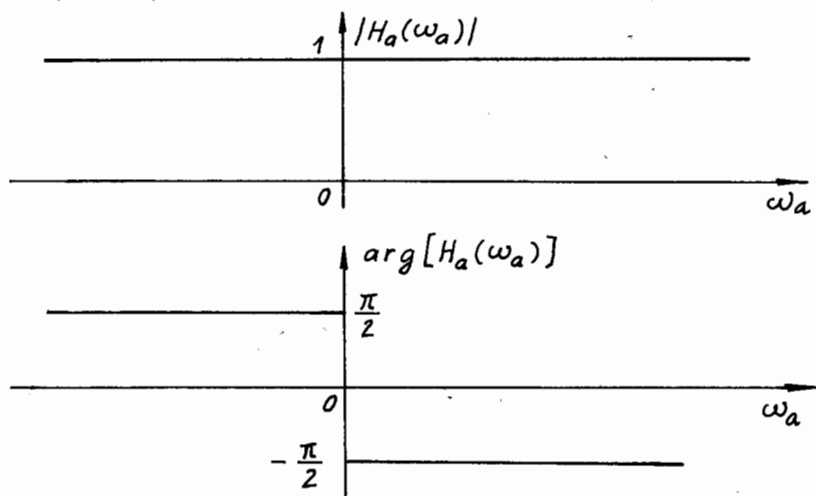
$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1 \quad \text{với mọi } \omega_a$$

$$\arg[H_a(\omega_a)] = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{với } \omega_a \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{với } \omega_a < 0 \end{cases}$$

Vì $|H_a(\omega_a)| = 1$ nên hệ thống này chính là một bộ dịch pha thuần túy đi một góc là $\pm \frac{\pi}{2}$.

Vì góc pha $\frac{\pi}{2}$ chính là một phần tử của chu kỳ, mỗi chu kỳ là 2π nên bộ dịch pha thuần túy đi góc $\pm \frac{\pi}{2}$ được gọi là bộ lọc cầu phương.

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ và $\arg[H_a(\omega_a)]$ được biểu diễn trên hình 11.4.1.5



Hình 11.4.1.5.

Ví dụ 11.4.1.3

Giả sử cho hệ lọc cầu phương có đáp ứng xung $h_a(t) = \frac{1}{\pi t}$, tín hiệu vào là $g_a(t)$

tín hiệu ra là $\hat{g}_a(t)$.

Hãy tìm quan hệ giữa $G_a(\omega_a)$ và $\hat{G}_a(\omega_a)$.

Giải

$$G_a(\omega_a) = \text{FT}[g_a(t)]$$

$$\hat{G}_a(\omega_a) = \text{FT}[\hat{g}_a(t)]$$

$$\hat{g}_a(t) = \text{HT}[g_a(t)] = \frac{1}{\pi t} * g_a(t)$$

$$\hat{G}_a(\omega_a) = [-j \cdot \text{Sgn}(\omega_a)] \cdot G_a(\omega_a)$$

$$= H_a(\omega_a) \cdot G_a(\omega_a)$$

$$\Rightarrow \left| \hat{G}_a(\omega_a) \right| = \underbrace{[-j \text{Sgn}(\omega_a)]}_1 \left| G_a(\omega_a) \right|$$

$$\Rightarrow \left| \hat{G}_a(\omega_a) \right| = \left| G_a(\omega_a) \right|$$

$$\arg \left[\hat{G}_a(\omega_a) \right] = \arg[G_a(\omega_a)] - \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sgn}(\omega_a)$$

11.4.2. BIẾN ĐỔI HILBERT ĐỐI VỚI DÃY PHỨC

a) Dây phân tích

Cũng giống như trong trường hợp tín hiệu tương tự phân tích chúng ta giả sử có tín hiệu rời rạc phức $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)]$$

Vậy $\text{Re}[x(n)]$ và $\text{Im}[x(n)]$ là các dãy thực.

Trong miền tần số liên tục ω , ta biến đổi Fourier của dãy phức $x(n)$ như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \text{FT}[x(n)]$$

Như ta đã biết $X(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Vì vậy ta chỉ xét $X(e^{j\omega})$ trong một chu kỳ $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

+ Định nghĩa dãy phân tích

Nếu phổ của dãy $x(n)$ là $X(e^{j\omega})$ triệt tiêu trong khoảng tần số ω âm (xét trong một chu kỳ: $-\pi \leq \omega \leq \pi$), tức là:

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{với } -\pi \leq \omega \leq 0$$

thì dãy phức $x(n)$ này được gọi là dãy phân tích.

Nhận xét

Nếu một tín hiệu rời rạc $x(n)$ nhận được từ việc lấy mẫu một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ với tần số mẫu F_s , thì ta có thể viết như sau:

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT_s} \quad (\text{coi } T_s = 1)$$

$$X_a(\omega_a) = \begin{cases} X(e^{j\omega}) & 0 \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

b) Biến đổi Hilbert đối với dãy phức

Chúng ta biết rằng:

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)]$$

$$\Rightarrow x^*(n) = \text{Re}[x(n)] - j\text{Im}[x(n)]$$

$$\text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)]$$

$$\text{Im}[x_a(t)] = -j \frac{1}{2} [x(n) - x^*(n)]$$

Đương nhiên $\text{Re}[x(n)]$ và $\text{Im}[x_a(t)]$ là các dãy thực và ta có thể biến đổi Fourier của chúng như sau:

$$\text{FT}\{\text{Re}[x(n)]\} = \frac{1}{2} [\text{FT}[x(n)] + \text{FT}[x^*(n)]]$$

Ta ký hiệu:

$$X_R(e^{j\omega}) = \text{FT}\{\text{Re}[x(n)]\}$$

$$\Rightarrow X_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (11.4.2.1)$$

Nếu $x(n)$ là dãy phân tích thì ta có thể viết như sau:

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{với } -\pi \leq \omega < 0 \quad (\text{nếu xét trong một chu kỳ: } -\pi \leq \omega \leq \pi)$$

$$\Rightarrow X(e^{-j\omega}) = 0 \quad \text{với } 0 < \omega \leq \pi$$

$$X^*(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{với } 0 < \omega \leq \pi$$

Tức ta có:

$$\begin{aligned}
 X_R(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) \quad \text{với } 0 \leq \omega < \pi \\
 &= \frac{1}{2} X^*(e^{-j\omega}) \quad \text{với } -\pi \leq \omega < 0
 \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\begin{aligned}
 X_I(e^{j\omega}) &= \text{FT}\{\text{Im}[x(n)]\} \\
 &= -j \frac{1}{2} \{\text{FT}[x(n)] - \text{FT}[x^*(n)]\} \\
 \Rightarrow X_I(e^{j\omega}) &= -j \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (11.4.2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_I(e^{j\omega}) &= -j \frac{1}{2} X(e^{j\omega}) \quad \text{với } 0 \leq \omega < \pi \\
 &= j \frac{1}{2} X^*(e^{-j\omega}) \quad \text{với } -\pi \leq \omega < 0 \\
 \Rightarrow X(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 2jX_I(e^{j\omega}) & 0 \leq \omega \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq \omega \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Đương nhiên ta có thể viết:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + j X_I(e^{j\omega})$$

Chúng ta có thể minh họa $X(e^{j\omega})$, $X_R(e^{j\omega})$ và $X_I(e^{j\omega})$ của tín hiệu phân tích $x(n)$ trên hình 11.4.2.1.

Vậy nếu xét trong một chu kỳ $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ta có:

Trong khoảng $0 \leq \omega \leq \pi$ thì:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= 2X_R(e^{j\omega}) = 2jX_I(e^{j\omega}) \\
 \Rightarrow X_R(e^{j\omega}) &= j X_I(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

hoặc:

$$X_I(e^{j\omega}) = -j X_R(e^{j\omega})$$

Trong khoảng $-\pi \leq \omega \leq 0$ thì:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = 0 \\
 \Rightarrow X_R(e^{j\omega}) &= -jX_I(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

hoặc:

$$X_I(e^{j\omega}) = jX_R(e^{j\omega})$$

Cuối cùng chúng ta có các quan hệ sau đây:

$$X_I(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_R(e^{j\omega}) & \text{với } 0 \leq \omega < \pi \\ jX_R(e^{j\omega}) & \text{với } -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

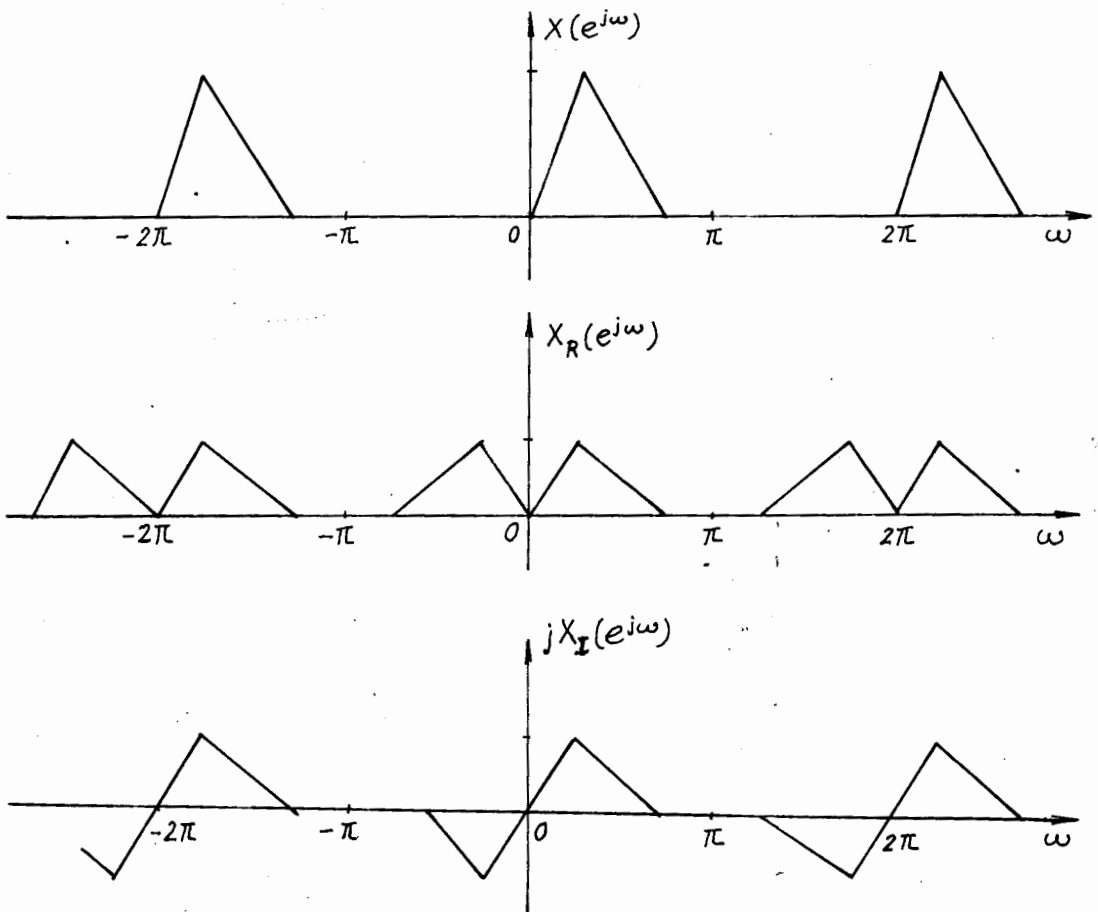
hoặc chúng ta có thể viết:

$$X_I(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X_R(e^{j\omega}) \quad (11.4.2.3)$$

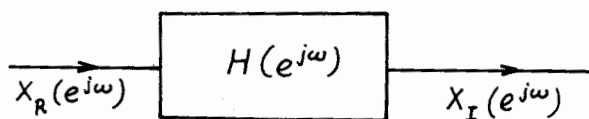
với:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 \leq \omega \leq \pi \\ j & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (11.4.2.4)$$

Vậy chúng ta có hệ thống mà đáp ứng tần số là $H(e^{j\omega})$ được cho bởi biểu thức (11.4.2.4), đầu vào của hệ thống là $X_R(e^{j\omega})$ và đầu ra là $X_I(e^{j\omega})$. Sơ đồ khối của hệ thống này được biểu diễn trên hình 11.4.2.2.



Hình 11.4.2.1.



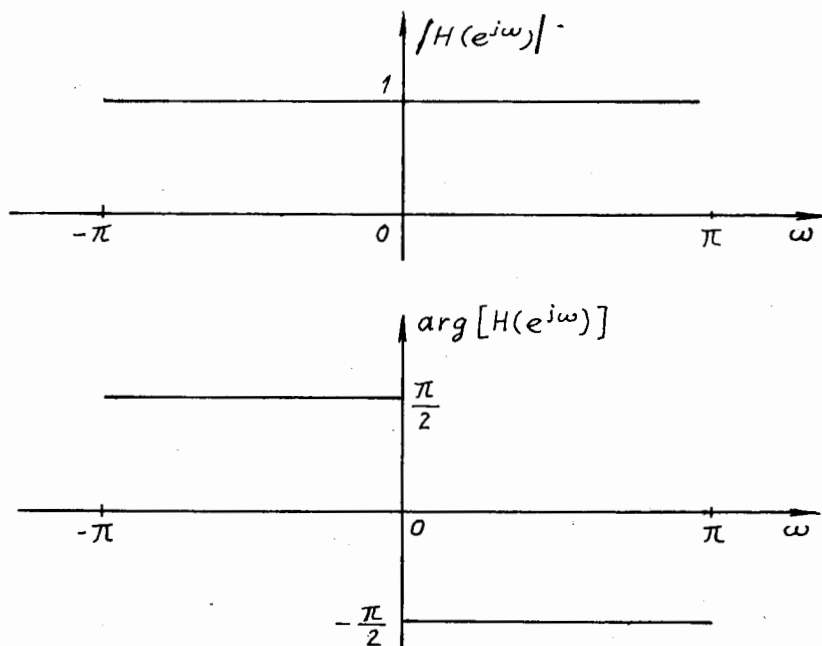
Hình 11.4.2.2.

Như vậy đáp ứng tần số của hệ thống này có đáp ứng biên độ và đáp ứng pha như nhau:

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \text{ với mọi } \omega$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{với } 0 \leq \omega \leq \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{với } -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha này được minh họa trên hình 11.4.2.3.



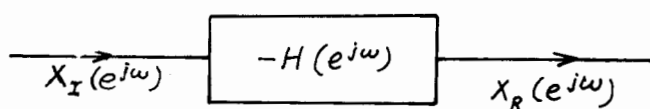
Hình 11.4.2.3.

Nhận xét

- Do $|H(e^{j\omega})| = 1$ nên hệ thống số này làm nhiệm vụ như một bộ dịch pha thuần túy.
- Góc dịch pha bằng $\frac{\pi}{2}$, nên hệ thống số này được gọi là bộ lọc số cầu phương.
- Biến đổi biểu thức (11.4.2.3) sang dạng khác ta có:

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= \frac{1}{H(e^{j\omega})} X_I(e^{j\omega}) \\ &= -H(e^{j\omega}) X_I(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (11.4.2.5)$$

Hệ thống có đáp ứng tần số là $-H(e^{j\omega})$ sẽ làm nhiệm vụ biến đổi $X_I(e^{j\omega})$ thành $X_R(e^{j\omega})$. Sơ đồ khối của hệ thống này được minh họa trên hình 11.4.2.4.



Hình 11.4.2.4.

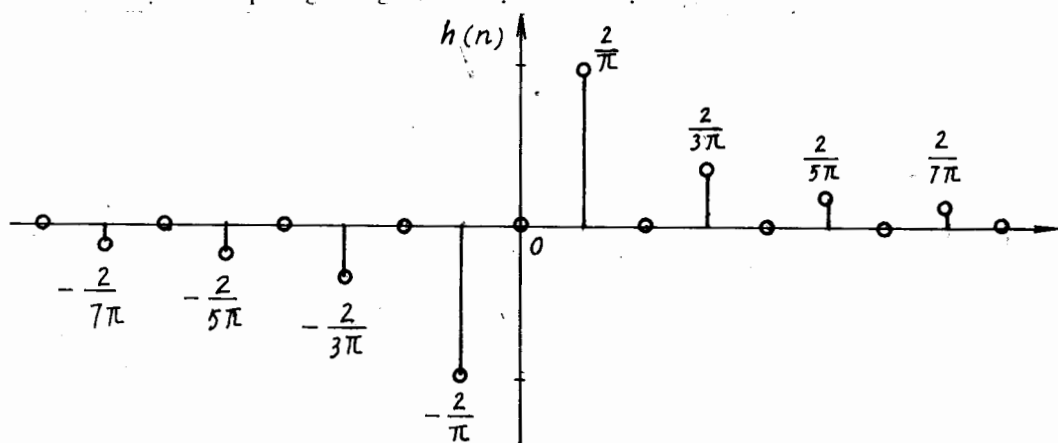
c) Biến đổi Hilbert

Trong phần trên, theo biểu thức (11.4.2.4) chúng ta đã có giá trị của đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của bộ lọc cầu phương, bây giờ chúng ta sẽ tiến hành tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số cầu phương này.

Chúng ta đã biết rằng:

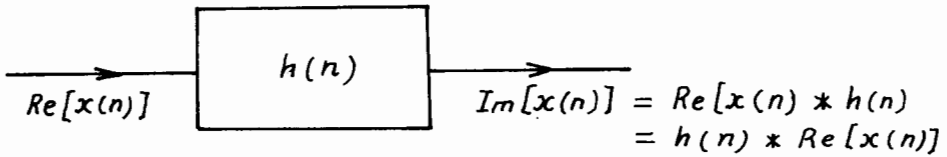
$$\begin{aligned}
 h(n) &= \text{IFT}[H(e^{j\omega})] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-j) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^0 e^{j\omega n} d(j\omega n) - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} e^{j\omega n} d(j\omega n) \\
 \Rightarrow h(n) &= \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(\pi n)] \\
 h(n) &= \begin{cases} \frac{2}{\pi n} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad (11.4.2.5)
 \end{aligned}$$

Đồ thị của đáp ứng xung $h(n)$ được minh họa trên hình 11.4.2.5.



Hình 11.4.2.5.

Vậy trong miền biến số n , sơ đồ khối của hệ thống này được minh họa trên hình 11.4.2.6.



Hình 11.4.2.6.

Về mặt toán học chúng ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 Im[x(n)] &= h(n) * Re[x(n)] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot Re[x(n-k)]
 \end{aligned}$$

Thay biểu thức 11.4.2.5 vào ta có:

$$Im[x(n)] = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi k}{2}}{k} \cdot Re[x(n-k)] \quad (11.4.2.6)$$

Biểu thức (11.4.2.6) này gọi là biến đổi Hilbert của dãy $Re[x(n)]$, tức là ta có thể viết:

$$Im[x(n)] = HT\{Re[x(n)]\} \quad (11.4.2.7)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\begin{aligned}
 Re[x(n)] &= -h(n) * Im[x(n)] \\
 &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot Im[x(n-k)]
 \end{aligned}$$

Thay biểu thức 11.4.2.5 vào ta cũng có:

$$Re[x(n)] = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi k}{2}}{k} \cdot Im[x(n-k)] \quad (11.4.2.8)$$

Biểu thức (11.4.2.8) này gọi là biến đổi Hilbert ngược của dãy $Im[x(n)]$, tức là ta có thể viết:

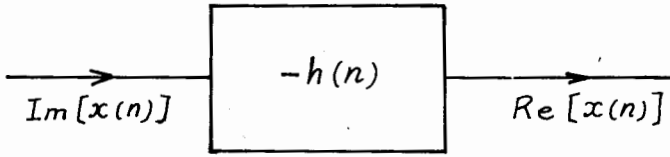
$$Re[x(n)] = IHT\{Im[x(n)]\} \quad (11.4.2.9)$$

Và sơ đồ khối của hệ thống có đáp ứng xung là $-h(n)$ để thực hiện biến đổi Hilbert ngược được minh họa trên hình 11.4.2.7.

Nhận xét:

- Bộ lọc cầu phương $h(n)$ này cũng còn được gọi là bộ biến đổi Hilbert.

- $h(n)$ là không nhân quả và có chiều dài vô hạn.
- $h(n)$ là phản đối xứng, trục phản đối xứng nằm tại gốc tọa độ.
- Để thực hiện bộ lọc cầu phương loại này chúng ta phải hạn chế chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ và đưa nó về nhân quả.



Hình 11.4.2.7.

Ví dụ 11.4.2.1

Hãy dùng cửa sổ chữ nhật với chiều dài $N = 11$ để đưa $h(n)$ về nhân quả và có chiều dài hữu hạn.

Giải

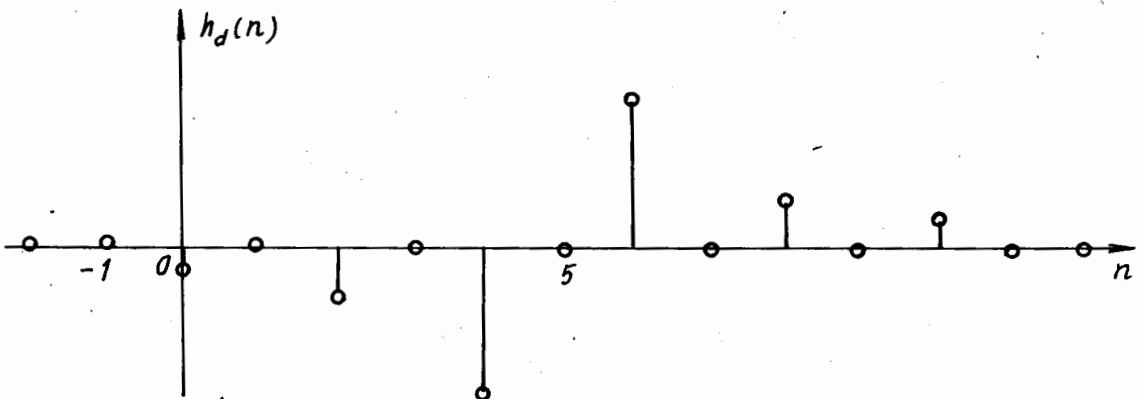
Ta ký hiệu $h_d(n)$ là đáp ứng xung nhân quả và có chiều dài hữu hạn. Vậy để đưa $h(n)$ về nhân quả và có chiều dài hữu hạn ta sẽ dùng quan hệ sau đây:

$$h_d(n) = \frac{2}{\pi(n - \frac{N-1}{2})} \sin^2 \frac{\pi(n - \frac{N-1}{2})}{2} \cdot \omega_R(n)_N$$

Thay $N = 11$ ta có:

$$h_d(n) = \frac{2}{\pi(n-5)} \sin^2 \frac{\pi(n-2)}{2} \cdot \omega_R(n)_{11}$$

Vậy trục đối xứng sẽ nằm tại điểm $n = 5$. Kết quả $h_d(n)$ được cho trên hình 11.4.2.8.



Hình 11.4.2.8.

11.4.3. TỔNG HỢP BỘ LỌC CẦU PHƯƠNG (TỔNG HỢP BỘ BIẾN ĐỔI HILBERT)

a) Tổng hợp bộ lọc cầu phương có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR)

* Tổng hợp trực tiếp bộ lọc FIR loại 3

Chúng ta biết rằng trong chương 5, chúng ta đã nghiên cứu các phương pháp tổng hợp các bộ lọc số FIR pha tuyến tính, chúng ta có 4 loại bộ lọc số FIR pha tuyến tính: loại 1, loại 2, loại 3, loại 4.

Trong trường hợp bộ lọc số cầu phương này chúng ta sẽ dùng các phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính loại 3.

Đặc điểm của bộ lọc số FIR loại 3 là:

- $h(n)$ là phản đối xứng và nhân quả:

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

- N là lẻ (N là chiều dài của bộ lọc)

Bây giờ ta xét kỹ hơn về đáp ứng tần số.

Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ có dạng sau đây:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} A(e^{j\omega})$$

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h(\frac{N-1}{2} - n) \sin(\omega n) \quad \text{với } 0 \leq \omega \leq \frac{N-1}{2}$$

Từ đây ta có:

Đối với bộ lọc FIR nhân quả, tức là pha tuyến tính ta có:

$$H(e^{j\omega}) = jA(e^{j\omega})e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

Đối với bộ lọc FIR pha không, tức là bộ lọc không nhân quả ta có:

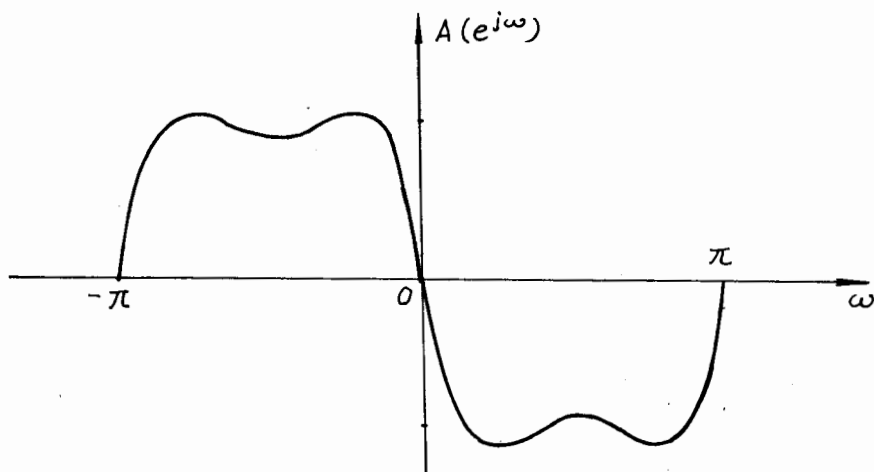
$$H(e^{j\omega}) = jA(e^{j\omega})$$

Trong chương 5 ta thấy rằng, đối với bộ lọc số FIR loại 3 thì $A(e^{j\omega})$ là phản đối xứng trong khoảng một chu kỳ 2π ($0 \leq \omega \leq 2\pi$ hoặc $-\pi \leq \omega \leq \pi$) và $A(e^{j\omega}) = 0$ với $\omega = 0$ và $\omega = \pi$.

Chúng ta có thể tổng hợp bộ lọc số FIR với N hệ số $h(n)$ nhân quả để nhận được giá trị của $A(e^{j\omega})$ một cách gần đúng như sau:

$$A(e^{j\omega}) \approx \begin{cases} -1 & 0 \leq \omega < \pi \\ +1 & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

Giá trị gần đúng của $A(e^{j\omega})$ được minh họa bằng đồ thị cho trên hình 11.4.3.1.



Hình 11.4.3.1.

Nhận xét

+ Chúng ta có thể coi $A(e^{j\omega})$ như một đáp ứng tần số của một bộ lọc mà các hệ số của bộ lọc này ký hiệu là $a(n)$. Vậy $a(n)$ được tính như sau:

$$\begin{aligned} a(n) &= \text{IFT}[A(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi j n} \left[e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^0 - e^{j\omega n} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi j n} [2 - 2\cos \pi n] = -j \frac{1}{\pi n} [1 - \cos \pi n] \\ \Rightarrow \quad a(n) &= -j \frac{2}{\pi n} \sin^2 \frac{\pi n}{2} \end{aligned} \tag{11.4.3.1}$$

Vậy các hệ số $a(n)$ là thuần ảo.

So sánh với giá trị của $h(n)$ trong biểu thức 11.4.2.5 ta thấy rằng:

$$a(n) = -jh(n) \quad (11.4.3.2)$$

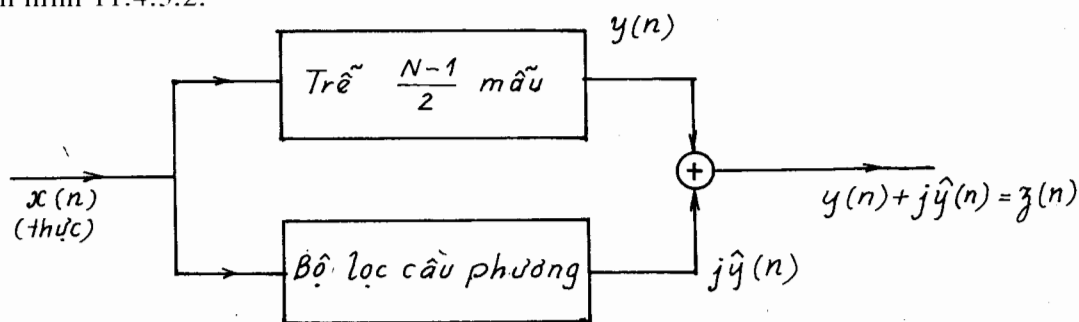
hoặc:
$$h(n) = ja(n) \quad (11.4.3.3)$$

Như thế ta thấy rằng các hệ số $a(n)$ là thuần ảo, nhưng các hệ số $h(n)$ lại là thực.

+ Chúng ta có thể sử dụng tất cả các phương pháp trong chương 5 để tổng hợp các bộ lọc cầu phương.

+ Chúng ta có thể sử dụng một bộ lọc FIR cầu phương nhân quả và một mạch trễ $\frac{N-1}{2}$ mẫu để thiết lập một tín hiệu phức xuất phát từ một tín hiệu thực, bởi vì

rằng $h(n)$ là nhân quả và tâm đối xứng nằm tại mẫu $\frac{N-1}{2}$. Điều này được minh họa trên hình 11.4.3.2.



Hình 11.4.3.2.

Từ hình 11.4.3.2 ta thấy rằng:

$$z(n) = y(n) + j\hat{y}(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \text{Re}[z(n)]$$

$$\hat{y}(n) = \text{Im}[z(n)]$$

Vậy $z(n)$ là dãy phân tích và bộ lọc số này gọi là bộ lọc số phân tích.

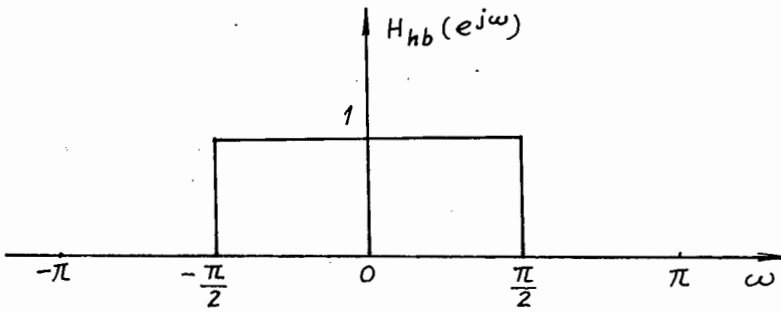
** Tổng hợp gián tiếp thông qua bộ lọc số FIR nửa band*

Để có được đáp ứng tần số của bộ lọc số cầu phương chúng ta có thể dùng đáp ứng tần số của bộ lọc số nửa band.

Giả sử ta có bộ lọc số nửa band lý tưởng pha không có đáp ứng tần số là $H_{hb}(e^{j\omega})$ như sau:

$$H_{hb}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Đồ thị của $H_{hb}(e^{j\omega})$ được minh họa trên hình 11.4.3.3.

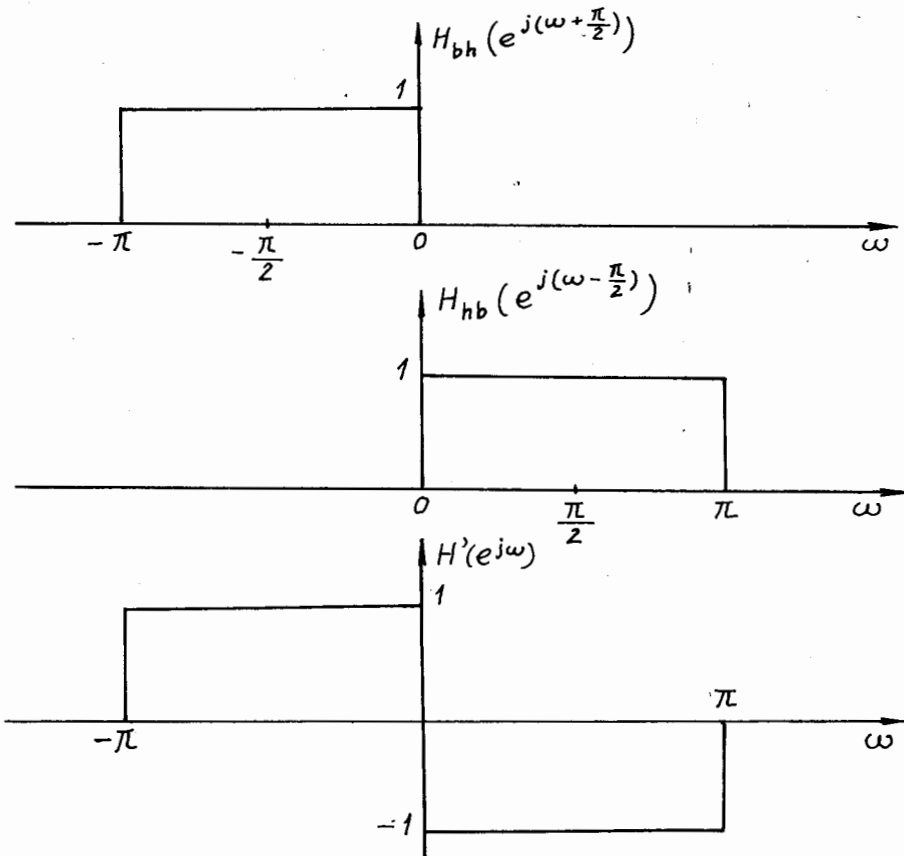


Hình 11.4.3.3.

Bây giờ nếu chúng ta dịch $H_{hb}(e^{j\omega})$ về phía trái và về phía phải đi một lượng là $\frac{\pi}{2}$ thì chúng ta sẽ thu được $H_{hb}(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})$ và $H_{hb}(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})$ sau đó cộng chúng lại ta sẽ có $H'(e^{j\omega})$ như sau:

$$H'(e^{j\omega}) = H_{hb}(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}) + H_{hb}(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}) \quad (11.4.3.4)$$

Hình 11.4.3.4 minh họa sự hình thành $H'(e^{j\omega})$.



Hình 11.4.3.4.

Theo hình 11.4.3.4 ta thấy đáp ứng tần số $H'(e^{j\omega})$ có giá trị như nhau trong khoảng $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$.

$$H'(e^{j\omega}) = \begin{cases} -1 & 0 < \omega \leq \pi \\ 1 & -\pi < \omega \leq 0 \end{cases} \quad (11.4.3.5)$$

Hơn nữa đáp ứng tần số của bộ lọc cầu phương $H(e^{j\omega})$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 \leq \omega < \pi \\ j & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (11.4.3.6)$$

Từ các biểu thức (11.4.3.5) và (11.4.3.6) ta có được quan hệ giữa $H(e^{j\omega})$ và $H'(e^{j\omega})$ như sau:

$$H(e^{j\omega}) = jH'(e^{j\omega}) \quad (11.4.3.7)$$

hoặc:

$$H'(e^{j\omega}) = -jH(e^{j\omega}) \quad (11.4.3.8)$$

Tương ứng trong miền n ta cũng có quan hệ giữa đáp ứng xung $h(n)$ và $h'(n)$ như sau:

$$h(n) = jh'(n) \quad (11.4.3.9)$$

hoặc:

$$h'(n) = -jh(n) \quad (11.4.3.10)$$

Chúng ta có thể tính $h'(n)$ thông qua đáp ứng xung của bộ lọc nửa band như sau:

$$\begin{aligned} h'(n) &= \text{IFT}[H'(e^{j\omega})] \\ &= \text{IFT}[H_{hb}(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})] + \text{IFT}[H_{hb}(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})] \\ \Rightarrow h'(n) &= e^{-j\frac{\pi}{2}} h_{hb}(n) - e^{j\frac{\pi}{2}} h_{hb}(n) \\ &= h_{hb}(n)(e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{j\frac{\pi}{2}}) \\ \Rightarrow h'(n) &= -2jh_{hb}(n)\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned} \quad (11.4.3.11)$$

Kết hợp các biểu thức (11.4.3.9) và (11.4.3.11) ta có quan hệ sau đây:

$$h(n) = 2h_{hb}(n)\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (11.4.3.12)$$

Nhận xét:

+ Chúng ta có thể sử dụng tất cả các phương pháp tổng hợp các bộ lọc số FIR nửa band để tìm các hệ số $h(n)$ của bộ lọc cầu phương.

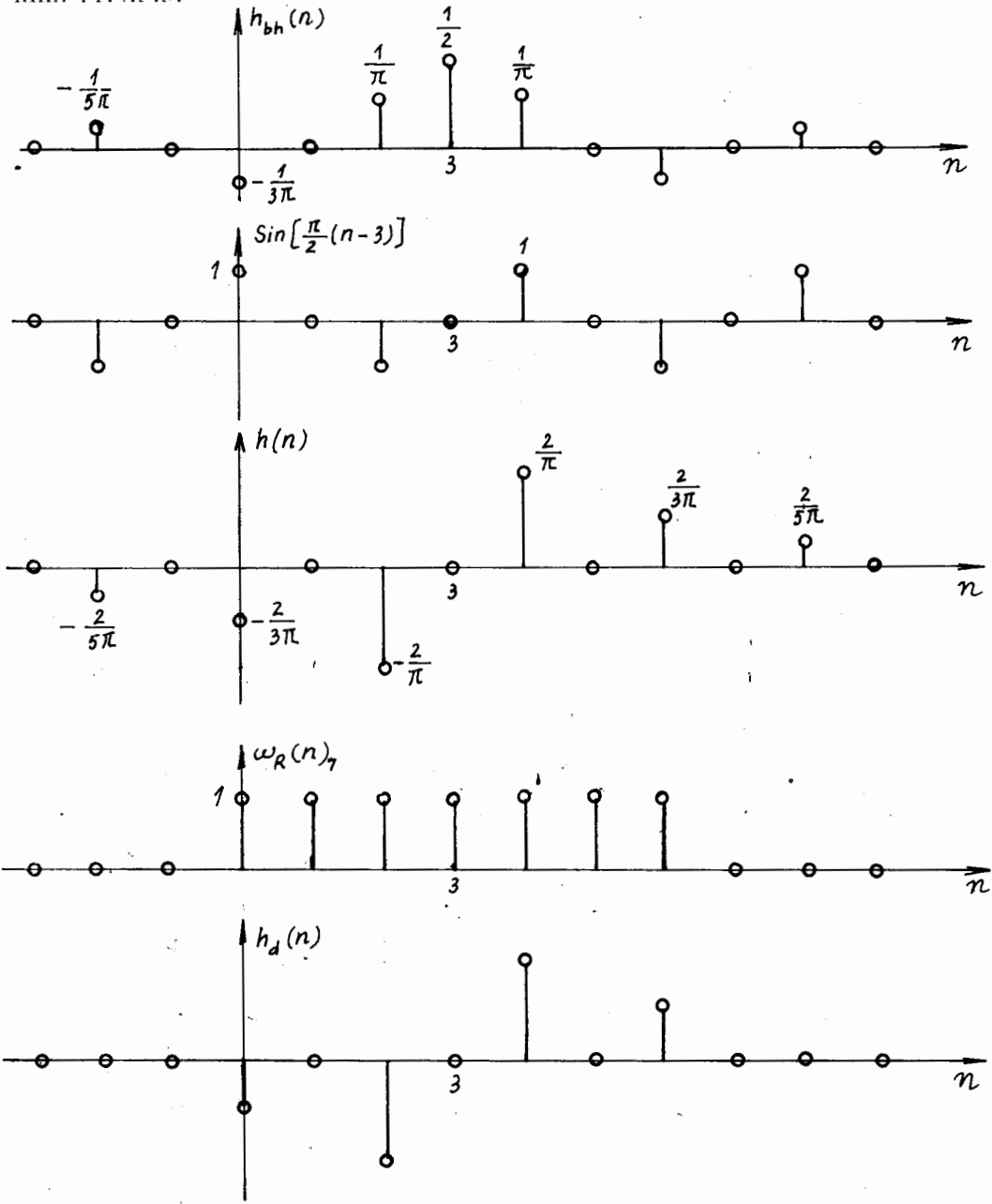
+ Việc tổng hợp bộ lọc cầu phương loại FIR sẽ không gây sai số về pha mà chỉ gây sai số về biên độ.

Ví dụ 11.4.3.1

Hãy dùng đáp ứng xung của bộ lọc nửa band $h_{bh}(n)$ và dùng phương pháp cửa sổ chữ nhật với chiều dài $N = 7$ để tổng hợp bộ lọc cầu phương FIR $h_d(n)$.

Giải

Việc tổng hợp bộ lọc cầu phương FIR $h_d(n)$ được minh họa bằng đồ thị cho trên hình 11.4.3.5.

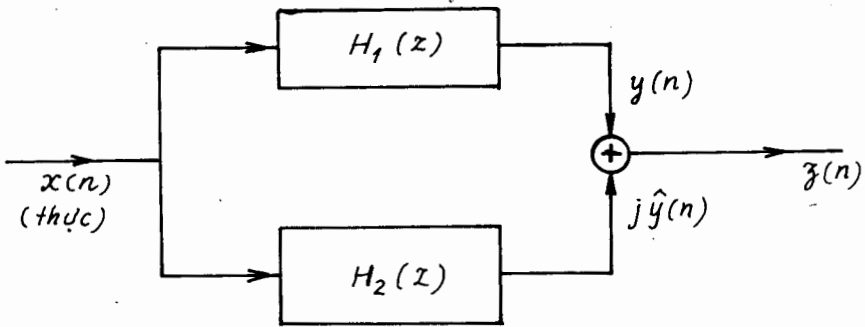


Hình 11.4.3.5.

b) Tổng hợp bộ lọc số cầu phương IIR

Chúng ta có thể sử dụng các bộ lọc số thông tắt IIR để tổng hợp bộ lọc cầu phương.

Chúng ta đã biết rằng một bộ lọc số thông tắt chính là một bộ dịch pha thuần túy, vì vậy có khả năng tạo ra một cặp bộ dịch pha sao cho các đầu ra thể hiện được sự khác pha nhau là 90° (với một sai số rất nhỏ cho phép được). Cặp bộ dịch pha này được minh họa trên hình 11.4.3.6.



Hình 11.4.3.6

Nhận xét

Chúng ta biết rằng $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$, vì vậy chúng ta có thể tổng hợp bộ lọc cầu phương loại IIR không gây sai số về biên độ nhưng có sai số về pha (tất nhiên sai số này phải nằm trong khoảng cho phép).

BÀI TẬP CHƯƠNG 11

Bài tập 11.1

Cho dãy $h(n)$ là thực và nhân quả có biến đổi Fourier là $H(e^{j\omega})$. Hãy tìm biến đổi Fourier của dãy $h(-n)$ theo hàm của $H(e^{j\omega})$.

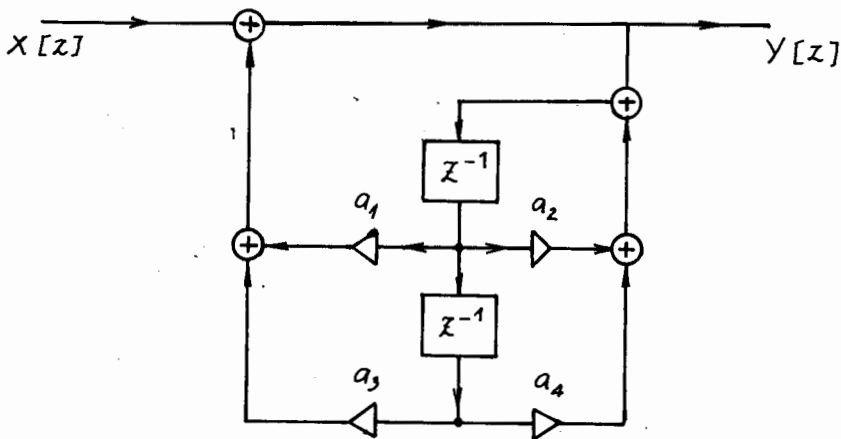
Bài tập 11.2

Hãy chứng minh biểu thức (11.2.2.5) như sau:

$$S(e^{j\omega}) = -j \cotg \frac{\omega}{2}$$

Bài tập 11.3

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 11.3.

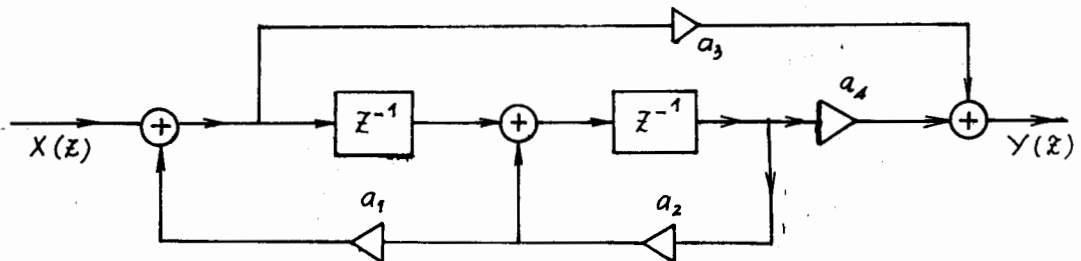


Hình BT 11.3.

- Hãy xác định $H(z)$?
- Hãy tìm điều kiện của các hệ số a_i sao cho hệ thống này là hệ thống pha cực tiểu.

Bài tập 11.4

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 11.4 .



Hình BT 11.4.

- Hãy tìm $H(z)$?
- Hãy tìm điều kiện của các hệ số a_i sao cho hệ thống này là hệ thống pha cực tiểu.

Bài tập 11.5

Giả sử ta có hệ thống nhân quả pha không cực tiểu có đáp ứng xung là $h(n)$ và hàm truyền đạt là $H(z)$. Giả sử $H(z)$ có M điểm không là z_{or} ; $r = 1, 2, \dots, M$, ở đây $|z_{o1}| < |z_{o2}| < \dots < |z_{oM}|$. Từ hệ thống $h(n)$ pha không cực tiểu này, ta tạo ra hệ thống mới $g(n)$ có pha cực tiểu bằng cách sau đây:

$$g(n) = a^n h(n)$$

Chúng ta phải chọn hệ số a như thế nào để hệ thống mới $g(n)$ là hệ thống có pha cực tiểu.

Bài tập 11.6

Hãy chứng minh rằng nếu $H_{ap}(z)$ viết dưới dạng (11.3.2.7) và (11.3.2.8) như sau:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_{01}^{-1}}{1 - (z_{01}^*)^{-1} z^{-1}}$$

hoặc:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_{p1}^*}{1 - (z_{p1})z^{-1}}$$

thì đáp ứng tần số sẽ có dạng sau:

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall \omega$$

Bài tập 11.7

Cho hệ thống có hàm truyền đạt như sau:

$$H_{ap}(z) = (1 - z_{01}z^{-1})(1 - z_{02}z^{-2})(1 - z_{03}z^{-3})(1 - z_{04}z^{-4})$$

ở đây:

$$z_{01} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}; \quad z_{02} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

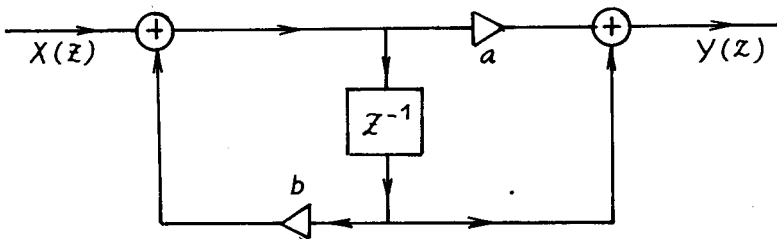
$$z_{03} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}; \quad z_{04} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

+ Hệ thống này có phải là hệ thống pha tuyến tính hay không?

+ Nếu hệ thống này là pha tuyến tính thì hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống pha cực tiểu và hệ thống pha cực đại có cùng đáp ứng biên độ như nhau, sau đó so sánh đáp ứng xung của các hệ thống này.

Bài tập 11.8

Cho hệ thống có sơ đồ trên hình BT 11.8 sau đây:

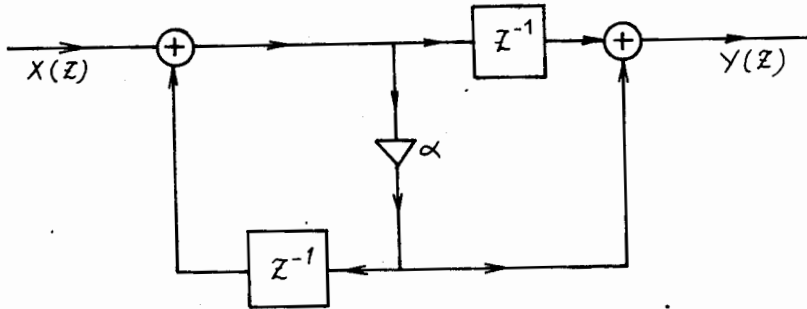


Hình BT 11.8.

- + Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống này.
- + Hãy tìm các điều kiện của các hệ số a và b để hệ thống này là bộ lọc thông tắt.

Bài tập 11.9

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 11.9.

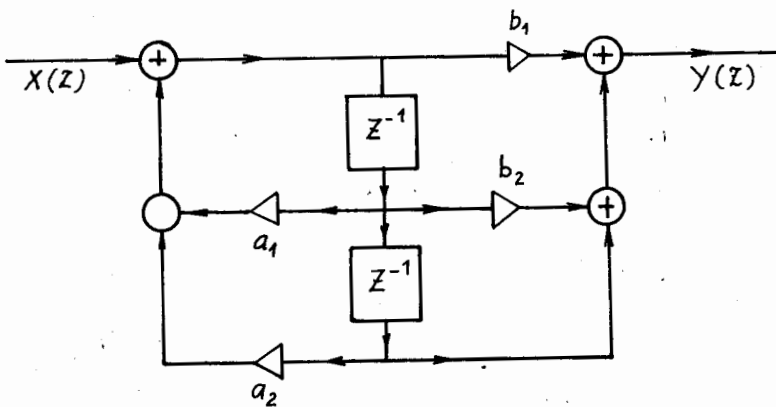


Hình BT 11.9.

- + Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống này.
- + Hãy tìm các điều kiện của hệ số α để hệ thống này là bộ lọc thông tắt (α là số thực hay phức).

Bài tập 11.10

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 11.10 sau đây:



Hình BT 11.10.

- + Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống này.
- + Hãy tìm quan hệ giữa của các hệ số a_1, a_2 và b_1, b_2 để hệ thống này là bộ lọc thông tắt.

Bài tập 11.11

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT 11.11 sau đây:

$$z_{01} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}; z_{03} = -\frac{1}{2}$$

+ Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ và đáp ứng xung $h(n)$?

+ Hệ thống này là hệ thống gì?

+ Hệ thống này có thực hiện được về vật lý hay không?

Bài tập 11.16

Giả sử $h_{\min}(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống pha cực tiểu, hệ thống này có đáp ứng tần số là $H_{\min}(e^{j\omega})$.

Nếu ta có một hệ thống khác nào đó có đáp ứng xung là $h(n)$, hệ thống này có đáp ứng tần số là $H(e^{j\omega})$.

Hãy chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } |H_{\min}(e^{j\omega})| \equiv |H(e^{j\omega})| \quad \text{thì } |h(0)| < |h_{\min}(0)|$$

(gợi ý: dựa vào định lý giá trị đầu).

Bài tập 11.17

Giả sử ta có hai hệ thống $H_1(z)$ và $H_2(z)$ đều là hệ thống pha cực tiểu. Hãy chứng minh rằng:

$$\text{+ Nếu: } H_1(z).H_2(z) = H_3(z)$$

thì $H_3(z)$ cũng là hệ thống pha cực tiểu.

$$\text{+ Nếu: } H_1(z) + H_2(z) = H_3(z)$$

thì $H_3(z)$ chưa chắc là hệ thống pha cực tiểu.

Bài tập 11.18

Cho các hệ thống có các điểm không như sau:

$$\text{a) } z_{01} = e^{j\frac{\pi}{3}}; z_{02} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{b) } z_{01} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}; z_{03} = 3$$

$$\text{c) } z_{01} = \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}; z_{02} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } z_{01} = \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02} = \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{e) } z_{01} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}; z_{02} = 2$$

+ Hãy xét xem các hệ thống này là các hệ thống gì?

+ Các hệ thống này có thực hiện được về vật lý hay không?

Bài tập 11.19

Giả sử chúng ta có dãy phức $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j \text{Im}[x(n)]$$

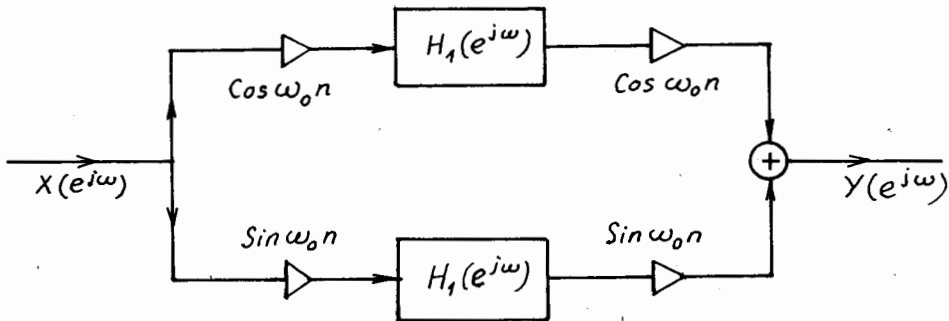
với:
$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq \omega \leq \pi \\ = 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

$$\text{Re}[x(n)] = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm phần thực và phần ảo của $X(e^{j\omega})$.

Bài tập 11.20

Cho hệ thống cầu phương có sơ đồ cho trên hình BT 11.20 sau đây:



Hình BT 11.20.

+ Hãy tìm $H(e^{j\omega})$ theo hàm của $H_1(e^{j\omega})$.

+ Nếu $h_1(n) = a^n u(n)$ $0 < a < 1$

Hãy vẽ $H_1(e^{j\omega})$ và $H(e^{j\omega})$ với $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 11.21

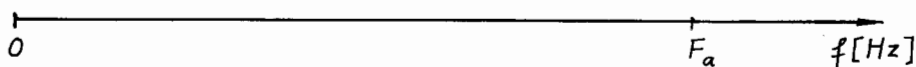
Hãy chứng minh biểu thức (11.4.2.5) như sau:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

PHỤ LỤC

1. Các trục tần số dùng trong xử lý tín hiệu

+ Tần số không chuẩn hoá f , Hz



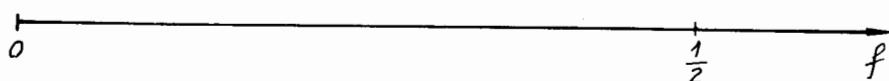
F_a : bề rộng phổ của tín hiệu

F_s : tần số lấy mẫu

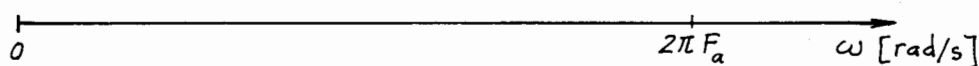
• F_{sNy} : tần số Nyquist.

+ Tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s : $\frac{f}{F_s}$, nếu lấy $F_s = F_{sNy} = 2F_a$ thì ta có

tần số chuẩn hoá $\frac{f}{2F_a}$:

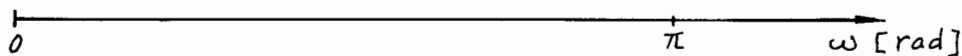


+ Tần số góc không chuẩn hoá $\omega = 2\pi f$, [rad/s]



+ Tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s : $\frac{\omega}{F_s}$. Nếu lấy $F_s = F_{sNy} = 2F_a$ thì

ta có tần số góc chuẩn hoá: $\frac{\omega}{2F_a}$, rad:



2. Ma trận nghịch đảo

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\underline{\mathbf{A}}}|} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$* \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Nguyễn Xuân Quỳnh* "Lý thuyết mạch logic và kỹ thuật số", Nhà xuất bản Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà Nội 1991.
2. *Nguyễn Xuân Quỳnh* "Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng", Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1995.
3. *Nguyễn Quốc Trung* "Vi điện tử số", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội 1997.
4. *M. Kunt* "Traitement numérique des signaux" TE XX, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1980.
5. *R. Boite et H. Leich* "Les filtres numérique" Masson, Paris 1982.
6. *P. G. Fontolliet* "Systèmes de télécommunication" TE. XVIII., Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1983.
7. *M. Hassler, J. Neiryneck* "Filtres électriques" TE. XIX Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1982.
8. *René Boite et Murat Kunt* "Traitement de la Parole" Complément au Traité d'électricité, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1987.
9. *Alexandru Spataru* "Fondements de la théorie de la Transmission de l'informatinon complément au Traité d'électricité, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1987.
10. *Hansruedi Buhler* "Réglages échantillonnés"
Vol. 1 (1982, 1986). Traitement par la transformation en Z.
Vol. 2 (1983), Traitement dans l'espace d'état.
Complément au traité d'électricité, presses Polytechniques romandes, Lausanne.
11. *M. G. Bellanger* "Tratement numérique du signal" Masson, Paris 1988.
12. *Jean - Pierre Vidal* "Tratement numérique du Signal", Paris 1987.
13. *Jean - Claude Lafont et Jean - Paul Vabre* "Cours et Prolèmes d'électronique numérique" Ellipses, Paris 1988.
14. *F. de Coulon* "Théorie et traitement des Signaux" TE. VI, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1984.
15. *Leland B. Jackson* "Signals, Systems and Transforms" Addison - Wesley Publishing Company, printed in The United States of America 1991.
16. *Peter Kraniuskas* "Transforms in Signals and Systems" Addison - Wesley Publishing Company, printed in Great Britain by William Clowes Ltd. 1993.

17. INMOS Limited "Digital Signal Processing" Prentice Hall International (UK) Ltd. Printed and bound in Great Britain at the University Press, Cambridge, 1989.
18. *John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis* "Introduction to Digital Signal Processing" Maxwell Macmillan International Editions, New York 1989.
19. *John G. Proakis* "Digital Communication" McGraw - Hill International Editions Printed in Singapore 1995.
20. *A. Antoniou* "Digital filter: Analysis and Design" McGraw Hill, New York 1979.
21. *Richard G. Lyons* "Understanding Digital Signal Processing" Addison - Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1997.
22. *Gordon E. Pelton* "Voice Processing" McGraw - Hill International Editions 1993.
23. *John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis* "Digital Signal Processing: Principles Algorithms, and Applications" Macmilan Publishing Company, printed the republic of Singapore, 1992.
24. *David J. Defatta, Joseph G. Lucas and William S. Hodgkiss* "Digital Signal Processing: A System Design Approach" John Wiley & Sons. Inc, printed ub Singapore 1988.
25. *Athanasios Papoulis* "Signal Analysis" McGraw - Hill Book Company, New York 1977.
26. *Sophoclis J. Orfanidis* "Optimum Signal processing: A Introduction" McGraw - Hill Book Company New York 1988.
27. *James V. Candy* "Signal Processing: The Modern approach" McGraw - Hill Book Company New York 1988.
28. *Stephen P. Banks* "Signal Processing, Image processing and Pattern Recognition" Prentice Hall International (UK) Ltd. 1991.
29. *Richard J. Vaccaro* "Digital Control: "A State - Space Approach" McGraw - Hill, Inc, New York 1995.
30. *Charles W. Therrien* "Discrete Random Signal and Statistical Signal processing" Prentice Hall International, Inc, Printed in the United States of America, 1992.
31. *C J. Savant, Jr., Martin S. Roden, and Gordon L. Carpenter* "Electronic design: Circuits and Systems" The Benjamin/ Cummings Publishing company, Inc, California 1991.
32. *R. E. Crochiere and L. R. Rabiner* "Multirate Digital Signal Processing" Englewood cliffs, NJ: Prentice, 1983.

33. *L. R. Rabiner and B. Gold* "Theory and Application of Digital Signal Processing" Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1975.
34. *A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer* "Digital Signal Processing" Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1975.
35. *Martin Vetterli* "A Theory of Multirate Filter Banks" IEEE Transaction on acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol ASSP - 35, No - 3, March 1987.
36. *P. P Vaidyanathan* "Multirate Digital filter, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications" A Tutorial Proceedings of IEEE, Vol78, No 1 January 1990.
37. *Ali N. Akansu* "The Binomial QMF - Wavelet Transform for Multiresolution Signal Decomposition" IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 1 January 1993 P. P 13 - 14.
38. *R. D Koilpillai and P. P Vaidyanathan* "A Spectral factorization Approach to Pseudo - QMF Design" Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 1 January 1993, P. P 82 - 92.
39. *A. S. Alkairy* "Design and characterization of optimal FIR filter with arbitrary phase". IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No February 1993 P. P 559 - 637.
40. *G. Li* "Optimal FWL (finite word length) Design of State - Space Digital Systems With Weighted Sensitivity Minimization and Sparseness Consideration", IEEE Transaction on circuits and Systems, Vol 39 No May 1992 P. P 365 - 376.
41. *P. P Vaidyanathan and T. Q. Nguyen* "A Trick for the design of FIR half - band filters", IEEE Transaction on circuits and Systems, Vol 34 Mar 1987 P. P 397 - 300.
42. *P. P Vaidyanathan and T. Q. Nguyen* "Eigenfilter : A new approach to least - square FIR filter design and applications including Nyquist filter", IEEE Transaction on circuits and systems, Vol 34 Jan 1987 P. P 11 - 23.
43. *P. P Vaidyanathan, Z. Dognata, T. Q. Nguyen, and T. Saramaki* "Improved approach for Design of perfect reconstruction FIR QMF banks with lossless polyphase structures", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 37 July 1989.
44. *P. P Vaidyanathan, Z. Dognata, and T. Q. Nguyen* " General Synthesis Procedures for Lossless transfer matrices, for perfect reconstruction multirate filter bank applications" IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 36 P. P 1561 - 1574 Oct 1988.
45. *P. Q. Hoang and P. P Vaidyanathan* "Lattice Structures for optimal design and robust implementation of two - channel reconstruction QMF banks", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 36 P. P 81 - 94 Jan 1988:

46. *Nguyen Quốc Trung* "Xử lý tín hiệu và lọc số" tập I, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội 1999.
47. *Calliope, J. P. TUBACH* "La parole et son traitement automatique", Masson, Paris 1989.
48. *Laurent Miclet* "Méthodes structurelles pour la reconnaissance des formes", Eyroolles, Paris 1984.
49. *Nicolas Moreau* "Techniques des compression des signaux", Masson, Paris Milan Barcelone 1995.
50. *A. Cohen* "Ondelettes et Traitement numérique du Signal", Masson, Paris Milan Barcelone Bonn 1992.
51. *Y. T. Chan* "Wavelet Basics" Royal Military College of Canada. Kluwer Academic Publishers, second printing, 1995 Printed in the United States of America.
52. *Ali N. AKANSU and RICHARD A. HADDAD* "Multiresolution Signal Decomposition", Academic press, inc., Boston Sandiego New York 1992
53. *Martin Velterli and Jelena Kovacevic* "Wavelets and Subband Coding" Prentice Hall PTR, Englewood cliffs, New Jersey, 1995.
54. *Gilbert Strang and Nguyễn Quốc Trường*. "Wavelets and filter banks", Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA, 1996.
55. *P. P. Vaidyanathan* "Multirate Systems and filter Banks" Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey 1993.
56. *ANIL K. JAIN* "Fundamentals of Digital Image Processing" Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1989
57. *R. W. Hamming* "Digital filter" Prentice Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey 1983.
58. *Ken Steiglitz* "A Digital Signal Processing Primer" Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1996.
59. *James Tsui* " Digital Techniques for Wideband Receivers" ARTECH HOUSE INC. Boston London, 1995.
60. *William N. Waggner* "Pulse Code Modulation Systems Design" ARTECH HOUSE INC. Boston London, 1999.
61. *John G. Proakis, Charles M. Rader, Fayun Ling and Chrysostomos L. Nikias*. "Advanced Digital Signal processing" Macmillan publishing Company, Singapor 1992.
62. *Christi K. Madsen and Jian H. Zhao*. "Optical filter Design and Analysis A Signal Processing Approach" John Wiley & Sons, INC. Canada 1999.

63. *Ahmet Kirac* "Optimal Orthonormal Subband Coding and Lattice Quantization with vector Dithering" Thesis of Doctor of philosophy, California, 1998.
64. *Trần Duy Trác* "Linear phase perfect reconstruction filter banks: Theory, structure, Design, and application in image compression" A Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of philosophy. University of Wisconsin - Madison, 1999.
65. *Ilango Balasingham* "On Optimal Perfect Reconstruction Filter Banks for Image Compression" A Dissertation Submitted in partial fulfillment of the Requirements for the degree of Doctor Ingenior, Department of Telecommunications, faculty of Electrical Engineering and Telecommunications, Norwegian University of Science and Technology, N - 7034 Trondheim, Norway, 1998.
66. *William M. Campbell* "Optimal Design of multirate Systems" A Dissertation Submitted in partial fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of philosophy, Cornell University, 1995.
67. *Marc Goldberg* "Application of Wavelets to Quantization and Random process Representations" A Dissertation Submitted in partial fulfillment of the Requirement for the Degree of Doctor of philosophy. Stanford University, May 1993.
68. *Shahriar Mirabbasi* "On the Design of Multirate filter Banks by H_∞ optimization" A Thesis Submitted in Conformity with the requirements for the degree of Master of Applied Science. University of Toronto, 1997.
69. *Tongwen Chen, Li Qiu, Erwei Bai* "General Multirate Building Structures with Application to Nonuniform Filter Banks" Canada, Honkong, USA, August 12, 1997.
70. *Tongwen Chen* "Nonuniform Multirate Filter Banks: Analysis and Design with an H_∞ Performance Measure" Dept. of Electrical and Computer Engineering University of Calgary Canada, July 31, 1995.
71. *S. Grace Chang, Bin Yu, and Martin Vetterli* "Lossy Compression and Wavelet Thresholding for Image Denoising" CA, USA, October 1997
72. *Shahriar Mirabbasi, Bruce Francis, and Tongwen Chen* "Controlling Distortion in Maximally Decimated Filter Banks" Toronto, Calgary, Canada.
73. *Jelena Kovacevic and Martin Vetterli* "Nonseparable Two - and Three - Dimensional Wavelet" This work was presented at ICASSP 1992 in San Francisco, CA and ISCAS 1993 in Chicago.
74. *Minyue Fu, Soura Dasgupta and Geoff A. Williamson* "Algorithms for optimal Multirate filter Bank Design" Australia, USA.

75. *Hangko Balasingham and Tor A. Ramstad*. "Nonuniform Nonunitary Perfect Reconstruction filter Banks for Image Coding" PROC. NORSIG - 95, Norway
76. *Tongwen Chen and Bruce Francis* "Design of Multirate Filter Banks by H_{∞} Optimization" University of Calgary; University of Toronto, Canada.
77. *Jelena Kovacevic* "Subband Coding System Incorporating Quantizer Models" AT & T Bell Laboratories, USA, January 17, 1995.
78. *Jelena Kovacevic and Martin Vetterli* "Perfect Reconstruction Filter Banks With Rational Sampling Factors" New York, USA, January 18, 1995.
79. *Takayuki Nagai, C. W. Kok, Masaaki Ikehara and Nguyễn Quốc Truong* "Design and Lattice Structure of FIR Paraunitary Filter Banks With Linear Phase" IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E80 - A, No. 4 April. 1997.
80. *Shuitsu Matsumura, Fumihiko Murata and Tsugosi Takere* "Perfect Reconstruction Two - CH. Linear Phase IIR Filter Bank with Quasi Power Complementary Characteristic" IEICE Tran. Fundamentals, Vol. E 80 - A, No. 8 August 1997.
81. *Maurits Malfait and Dirk Roose* "Experiments with a Wavelet Based Image Denoising Method" K. U. Leuven Departement of Computer Science, Belgium.
82. *Tongwen Chen* "Nonuniform Multirate Filter Banks: Analysis and Design with an H_{∞} Performance Measure" University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, July 31, 1995.
83. *Shahid U. H. Qureshi* "Adaptive Equalization" Proceedings of the IEEE, Vol. 73, No. 9, pp 1340 - 1387, sept. 1985.

MỤC LỤC

	Trang
<i>Lời giới thiệu</i>	3
<i>Lời nói đầu</i>	5
 Chương 6. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN (BỘ LỌC SỐ IIR)	 7
6.1. Mở đầu	7
6.2. Các tính chất tổng quát của bộ lọc	7
6.2.1. Bộ lọc số IIR thực hiện được	7
6.2.2. Hàm truyền đạt	8
6.2.3. Đáp ứng tần số của bộ lọc số IIR	8
6.2.4. Thời gian truyền nhóm	9
6.3. Các phương pháp tổng hợp bộ lọc số IIR từ bộ lọc tương tự	12
6.3.1. Mở đầu	12
6.3.2. So sánh hệ thống tương tự và hệ thống số	12
6.3.3. Phương pháp 1: phương pháp bất biến xung	14
6.3.4. Phương pháp 2: phương pháp biến đổi song tuyến	21
6.3.5. Phương pháp 3: phương pháp tương đương vi phân	30
6.3.6. Phương pháp 4: phương pháp biến đổi z thích ứng	36
6.4. Tổng hợp các bộ lọc tương tự	38
6.4.1. Tổng quan về các bộ lọc tương tự	38
6.4.2. Bộ lọc tương tự Butterworth	38
6.4.3. Bộ lọc tương tự Chebyshev	52
6.4.4. Bộ lọc tương tự Cauer (hoặc bộ lọc tương tự elliptique)	92
6.5. Biến đổi tần số	106
6.5.1. Biến đổi tần số trong miền tương tự	106
6.5.2. Biến đổi tần số trong miền số	111
6.5.3. Kết luận	117
<i>Bài tập chương 6</i>	117
 Chương 7. CẤU TRÚC VÀ ĐỘ NHẠY CỦA CÁC BỘ LỌC SỐ	 126
7.1. Mở đầu	126

7.2. Cấu trúc của bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn	127
7.2.1. Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc	128
7.2.2. Cấu trúc trực tiếp chuyển vị	129
7.2.3. Cấu trúc chuẩn tắc dạng tầng	129
7.2.4. Cấu trúc chuẩn tắc trực tiếp của bộ lọc số FIR pha tuyến tính	130
7.2.5. Cấu trúc của bộ lọc số FIR với lấy mẫu tần số	133
7.2.6. Cấu trúc dạng mắt cáo	144
7.3. Cấu trúc của bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài vô hạn	153
7.3.1. Cấu trúc trực tiếp chuẩn tắc	153
7.3.2. Cấu trúc chuẩn tắc dạng tầng	160
7.3.3. Cấu trúc chuẩn tắc dạng song song	162
7.3.4. Cấu trúc hình thang	164
7.3.5. Cấu trúc dạng mắt cáo	174
7.4. Độ nhảy	178
7.4.1. Đặt vấn đề	178
7.4.2. Định nghĩa độ nhảy	179
<i>Bài tập chương 7</i>	183
 Chương 8. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI	194
8.1. Mở đầu	194
8.2. Phương trình trạng thái	194
8.2.1. Đặt vấn đề	194
8.2.2. Ma trận trạng thái	195
8.3. Phân tích hệ thống trong miền n	201
8.3.1. Xác định đầu ra $y(n)$	201
8.3.2. Xác định đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống nhân quả	204
8.4. Trị riêng và vectơ riêng của ma trận	205
8.4.1. Trị riêng của ma trận	205
8.4.2. Vectơ riêng của ma trận	207
8.5. Chọn vectơ trạng thái và ma trận chọn \underline{T}	211
8.5.1. Chọn vectơ trạng thái	211
8.5.2. Tầm quan trọng của ma trận trạng thái	217
8.6. Biến đổi z của phương trình trạng thái và độ ổn định	218

8.6.1. Biến đổi z của phương trình trạng thái	222
8.6.2. Độ ổn định	223
<i>Bài tập chương 8</i>	223
Chương 9. LỌC SỐ NHIỀU NHỊP	234
9.1. Mở đầu	234
9.2. Thay đổi nhịp lấy mẫu	234
9.2.1. Các định nghĩa	234
9.2.2. Phép phân chia hệ số M	236
9.2.3. Phép nội suy với hệ số nguyên L	243
9.2.4. Thay đổi nhịp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L}$	248
9.3. Bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu	255
9.3.1. Bộ lọc phân chia	255
9.3.2. Bộ lọc nội suy	263
9.3.3. Bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L}$ không nguyên	268
9.4. Phân hoạch nhiều pha (polyphase decomposition)	275
9.4.1. Phân hoạch nhiều pha hai thành phần	275
9.4.2. Phân hoạch nhiều pha M thành phần	279
9.4.3. Phân hoạch nhiều pha loại hai	284
9.5. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu	286
9.5.1. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc phân chia	286
9.5.2. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc nội suy	291
9.5.3. Cấu trúc nhiều pha của các bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L không nguyên	295
9.6. Một vài ứng dụng của hệ thống lọc số nhiều nhịp	303
9.6.1. Bank lọc số	303
9.6.2. Bank lọc số nhiều nhịp hai kênh	314
9.6.3. Bank lọc số nhiều nhịp M kênh	324
9.6.4. Hệ thống khôi phục hoàn hảo (Perfect Reconstruction)	328
9.6.5. Mã hoá dải con và cấu trúc dạng cây của bank lọc số QMF	331
9.6.6. Kỹ thuật ghép kênh	335
9.6.7. Các hệ thống audio số	346
<i>Bài tập chương 9</i>	349

Chương 10. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH	358
10.1. Mở đầu	358
10.2. Bản chất của biến đổi Fourier rời rạc (DFT)	359
10.2.1. Đánh giá cách tính trực tiếp đồ thị	359
10.2.2. Các tính chất của W_N^{kn}	361
10.3. Biến đổi Fourier nhanh phân thời gian (FFT)	363
10.3.1. Định nghĩa	363
10.3.2. Thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp $N = 2^y$	364
10.3.3. Các dạng khác của thuật toán	381
10.3.4. Thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp $N = B^y$	387
10.3.5. Thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp $N = B_1 \cdot B_2$	391
10.4. Biến đổi Fourier nhanh phân tần số	397
10.4.1. Định nghĩa	397
10.4.2. Thuật toán FFT phân tần trong trường hợp $N = 2^y$	397
<i>Bài tập chương 10</i>	404
 CHƯƠNG 11. BIẾN ĐỔI HILBERT VÀ HỆ THỐNG PHA TỬ THIỂU	409
11.1. Mở đầu	409
11.2. Biến đổi Hilbert	409
11.2.1. Phân hoạch đáp ứng xung	409
11.2.2. Biến đổi Hilbert (Hilbert Transform: HT)	414
11.3. Hệ thống pha cực tiểu	418
11.3.1. Các bộ lọc số pha cực tiểu	418
11.3.2. Bộ lọc thông tắt (all - pass filter)	422
11.4. Biến đổi Hilbert đối với dãy phức	440
11.4.1. Biến đổi Hilbert đối với tín hiệu tương tự	440
11.4.2. Biến đổi Hilbert đối với dãy phức	449
11.4.3. Tổng hợp bộ lọc cầu phương	457
<i>Bài tập chương 11</i>	463
 Phụ lục	470
Tài liệu tham khảo	471