Table of contents

Định thức
Giới thiệu định thức
Định nghĩa định thức
Định lý Laplace
Định thức một số ma trận đặc biệt
Dùng biến đổi sơ cấp để tính định thức
Một số tính chất của định thức
Phương pháp tính định thức cấp n
Bài tập
Xác định ma trận nghịch đảo bằng định thức
Giải và biện luận hệ phương trình bằng php Cramer
Phương pháp Cramer
So sánh phương pháp Cramer và phương pháp khử Gauss

Định thức

Định thức là công cụ để:

1. Xác định tính khả nghịch của ma trận vuông. Xác định ma trận nghịch đảo của ma trận khả nghịch.
2. Cho biết số (trong một số trường hợp) nghiệm của hệ n phương trình n ẩn. Và biểu diễn nghiệm trong trường hợp ma trận hệ số khả nghịch.
3. *Chứng một hệ các vectơ độc lập tuyến tính.*
4. *Tìm trị riêng ma trận vuông.*
5. ...

Định nghĩa định thức

Định nghĩa 1 (Định thức khai triển theo dòng 1)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Gọi $A(i|j)$ là ma trận A bỏ đi dòng i và cột j. Khi đó định thức ma trận A (ký hiệu $\det(A)$ hay $|A|$) là một số thực xác định như sau:

- *Nếu $n = 1$, $|A| = \det([a]) = a$, với $A = [a]$.*
- *Nếu $n > 1$, định thức được xác định bởi công thức đệ qui sau:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}|A(1|j)|, \tag{1}$$

Ví dụ 1

Khai triển định thức cấp 2, 3 từ định nghĩa. Và cách tính nhanh cho định thức cấp 3 (Qui tắc Saurrus: mô tả bằng lời, bằng hình ảnh).

Ví dụ

Nhận xét 1

Khi xét $\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|$, *ta có thể viết là* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Bài tập 1

Tìm giá trị lớn nhất (và giá trị nhỏ nhất) của các định thức cấp 3 mà các phần tử chỉ có thể là 1 hay 0.

Bài tập 2

Tìm giá trị lớn nhất (và giá trị nhỏ nhất) của các định thức cấp 3 mà các phần tử chỉ có thể là 1 hay -1.

Ví dụ

Bài tập 3

Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *là hai vectơ trong hệ trục tọa độ Oxyz, chứng minh rằng*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Bài tập 4

Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *là các vectơ trong hệ trục tọa độ Oxyz. Ta biết rằng thể tích của hình hộp sinh bởi ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *là* $V := |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|$. *Chứng minh rằng*

$$V = \left|\det([\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}])\right|.$$

Định lý Laplace

Định lý 1 (Định lý Laplace)

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ và $A(i|j)$ được định nghĩa như Định nghĩa 1, và đặt $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A(i|j))$ (được gọi là các phần bù đại số của a_{ij}). Khi đó

1. $\det(A)$ *có thể khai triển theo dòng i. Cụ thể*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}. \tag{3}$$

2. $\det(A)$ *có thể khai triển theo cột j. Cụ thể*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij}. \tag{4}$$

Định lý Laplace

Nhận xét 2

Khi tính toán, nếu $a_{ij} = 0$ *thì ta không cần xác định phần bù đại số của nó.*

Nhận xét 3

Khai triển định thức có thể theo dòng hay cột bất kỳ. Ta nên chọn khai triển theo dòng hay cột như thế nào?

Tính chất 1

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó* $\det(A^T) = \det(A)$.

Định thức một số ma trận đặc biệt

- Ma trận $\mathbf{0}_n$.
- Ma trận đơn vị $\rightarrow$ Ma trận đường chéo $\rightarrow$ Ma trận tam giác.
- Ma trận có một dòng hoặc một cột bằng $\mathbf{0}$ thì định thức của nó bằng 0.

Bài tập 5

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và có nhiều hơn* $n^2 - n$ *hệ số bằng* 0*.* *Chứng minh rằng* $\det(A) = 0$.

Dùng biến đổi sơ cấp để tính định thức

Định lý 2

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó

i. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $\det(A') = -\det(A)$.

ii. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$ *thì* $\det(A') = \alpha \det(A)$.

iii. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := d_i + \alpha d_j, i \neq j} A'$ *thì* $\det(A') = \det(A)$.

Nhận xét 4

1. *Trong (ii.), ta cần ràng buộc $\alpha \neq 0$ không?*
2. *Nếu xét $i = j$, (iii.) được phát biểu như thế nào?*
3. *Cho $\beta \in \mathbb{R}$, $i \neq j$ và Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i + \beta d_j, i \neq j} A'$ *thì* $\det(A') = ?\det(A)$.

Dùng biến đổi sơ cấp để tính định thức

Nhận xét 5

Nhờ Tính chất 1 và Định lý 2, ta có định lý 2 với phiên bản biến đổi sơ cấp trên cột.

Nhận xét 6

1. *Nếu một dòng hoặc một cột của định thức "chia hết" α thì ta có thể rút α ra ngoài dấu định thức.*
2. *Nếu định thức có hai dòng hoặc hai cột tỉ lệ nhau thì định thức bằng 0.*

Ví dụ 2

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp để tính định thức

Tính chất 2

Nếu A, B, $C \in M_n(\mathbb{R})$ có các dòng giống nhau trừ dòng i và dòng i của A, B, C lần lượt là a, b, c; với c là tổ hợp tuyến tính của a, b, nghĩa là có λ, $\beta \in \mathbb{R}$ thỏa $c = \lambda a + \beta b$. Khi đó

$$\det(C) = \lambda \det(A) + \beta \det(B).$$

Tính chất 3

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Bài tập 6

Cho n là số tự nhiên lẻ và $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận phản đối xứng. Xác định $\det(A)$.

Định thức của tích hai ma trận

Định lý 3

Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Bài tập 7

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Chứng minh rằng

$$\det(A^T A) = \det(AA^T) = \{\det(A)\}^2.$$

Hệ quả 1

Cho $A, A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các ma trận vuông cấp n, ta có

- $$\det(\mathbf{A}^m) = (\det \mathbf{A})^m$$
- $$\det(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \det \mathbf{A}_2 \ldots \det \mathbf{A}_k.$$

Định thức của tích hai ma trận

Bài tập 8

Cho $\det(A) = 2$, *P là ma trận khả nghịch,* $B = P^{-1}AP$. *Tính* $\det(B)$, $\det(B^n)$.

Bài tập 9

Cho $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ *sao cho* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *và B là ma trận khả nghịch.*

Xác định $\det\left(B^{-1}AB\right)^k$.

(Xem lại Bài tập *Lũy thừa* 2015 (Bài giảng số 1).)

Bài tập 10

Cho B là ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng

$$\det(B) \neq 0,$$

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}.$$

Phương pháp tính định thức cấp n

Tham khảo: Mỵ Vinh Quang, Các phương pháp tính định thức cấp n, Bài giảng ôn thi cao học, 2005. http://toantindalat.files.wordpress.com/2009/03/20041014-thayquang-bai2.pdf.

Phương pháp tính định thức cấp n(tt)

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 21 tháng 4 năm 2006

Bài 2 : Các Phương Pháp Tính Định Thức Cấp n

Định thức được định nghĩa khá phức tạp, do đó khi tính các định thức cấp cao (cấp lớn hơn 3) người ta hầu như không sử dụng định nghĩa định thức mà sử dụng các tính chất của định thức và thường dùng các phương pháp sau.

1 Phương pháp biến đổi định thức về dạng tam giác

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) của ma trận và các tính chất của định thức để biến đổi ma trận của định thức về dạng tam giác. Định thức sau cùng sẽ bằng tích của các phần tử thuộc đường chéo chính (theo *tính chất 3.3*).

Ví dụ 1.1: Tính định thức cấp n ($n \geqslant 2$) sau đây:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Nhân dòng (2) với (-1) rồi cộng vào dòng (3), (4), $\dots$, (n). Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)!$$

(1): nhân dòng (1) với (-2) cộng vào dòng (2).

1

Ví dụ 1.2: Tính định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Bài giải: Đầu tiên cộng các cột (2), (3),$\dots$, (n) vào cột (1). Sau đó nhân dòng (1) với (-1) cộng vào các dòng (2), (3),$\dots$, (n). Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$
$$= \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$$

2 Phương pháp qui nạp

Áp dụng các tính chất của định thức, biến đổi, khai triển định thức theo dòng hoặc theo cột để biểu diễn định thức cần tính qua các định thức cấp bé hơn nhưng có cùng dạng. Từ đó ta sẽ nhận được công thức truy hồi.

Sử dụng công thức truy hồi và tính trực tiếp các định thức cùng dạng cấp 1, cấp 2, $\dots$, để suy ra định thức cần tính.

Ví dụ 2.1: Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Sử dụng *tính chất 2.4*, tách định thức theo cột n, ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức đầu theo cột (n) ta sẽ có định thức đầu bằng D_{n-1}.
Nhân cột (n) của định thức thứ hai lần lượt với $(-b_i)$ rồi cộng vào cột i ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

2

Phương pháp tính định thức cấp n(tt)

Ta được:

$$D_n = D_{n-1} + b_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n b_n$$

Vậy ta có công thức truy hồi $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Vì công thức trên đúng với mọi n nên ta có

$$D_n = D_{n-1} + a_n b_n = \left(D_{n-2} + a_{n-1} b_{n-1}\right) + a_n b_n = \dots = D_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Vì $D_1 = a_1 b_1 + 1$ nên cuối cùng ta có

$$D_n = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Ví dụ 2.2: Cho $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Bài giải: Khai triển định thức theo dòng đầu, ta được:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức sau theo cột (1) ta có công thức:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \text{ với } n \geqslant 3 \tag{$*$}$$

Do đó:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

Công thức này đúng với mọi $n \geqslant 3$ nên ta có

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \dots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ và $D_1 = a + b$ do đó $D_2 - aD_1 = b^2$. Bởi vậy

$$D_n - aD_{n-1} = b^n \tag{1}$$

Tiếp tục, từ công thức $(*)$ ta lại có $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$. Do công thức này đúng với mọi $n \geqslant 3$ nên tương tự như trên ta lại có

$$\begin{aligned} D_n - bD_{n-1} &= a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-3} - bD_{n-4}) \\ &= \dots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^n \text{ vì } D_2 - bD_1 = a^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$D_n - bD_{n-1} = a^n \tag{2}$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta sẽ được kết quả

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

3

3 Phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức

Nhiều định thức cấp n có thể tính được dễ dàng bằng các tách định thức (theo các dòng hoặc theo các cột) thành tổng của các định thức cùng cấp. Các định thức mới này thường bằng 0 hoặc tính được dễ dàng.

Ví dụ 3.1: Ta sẽ tính định thức D_n trong Ví dụ 2.1 bằng phương pháp này.

Bài giải: Mỗi cột của D_n được viết thành tổng của 2 cột mà ta ký hiệu là cột loại (1) và loại (2) như sau:

$$\begin{array}{c} D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & 0 + a_1 b_2 & \dots & 0 + a_1 b_n \\ 0 + a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \dots & 0 + a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + a_n b_1 & 0 + a_n b_2 & \dots & 1 + a_n b_n \end{vmatrix} \\ \quad\quad (1) \;\; (2) \;\; (1) \;\; (2) \qquad\quad (1) \;\; (2) \end{array}$$

Sử dụng *tính chất 2.4* của định thức, ta lần lượt tách các cột của định thức. Sau n lần tách ta có D_n là tổng của 2^n định thức cấp n. Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D_n. Ta chia 2^n định thức này thành ba dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) tỉ lệ nên tất cả các định thức loại này có giá trị bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1). Giả sử cột i là loại (2) ta có định thức đó là

$$\begin{array}{c} D_{n,i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_1 b_i & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_2 b_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_i & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_i b_i \\ \uparrow \\ \text{cột } i \end{array}$$

(khai triển theo cột i). Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1) và do đó có đúng một định thức dạng 3 là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy D_n bằng tổng của tất cả các định thức ba dạng trên và bằng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + 1$$

4

Phương pháp tính định thức cấp n(tt)

Nhận xét: Tất cả các định thức mà các cột (dòng) có thể biểu diễn dưới dạng tổng 2 cột (2 dòng) trong đó các cột loại (2) (dòng loại (2)) tỉ lệ với nhau đều có thể tính được dễ dàng bằng phương pháp 3 với cách trình bày giống hệt như trên.

4 Phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức

Giả sử ta cần tính định thức D cấp n. Ta biểu diễn ma trận tương ứng A của D thành tích các ma trận vuông cấp n đơn giản hơn: $A = B.C$. Khi đó ta có

$$D = \det A = \det(B.C) = \det B.\det C$$

với các định thức $\det B$, $\det C$ tính được dễ dàng nên D tính được.

Ví dụ 4.1: Tính định thức cấp n ($n \geqslant 2$) sau

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geqslant 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B.\det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4.2: Tính định thức cấp n ($n \geqslant 2$)

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geqslant 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B.\det C = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n > 2 \\ -\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \text{ nếu } n = 2 \end{cases}$$

Bài Tập

Tính các định thức cấp n sau:

6. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

Phương pháp tính định thức cấp n(tt)

11. $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$

Tính các định thức cấp $2n$ sau

12. $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$

(đường chéo chính là a, đường chéo phụ là b, tất cả các vị trí còn lại là 0)

13. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix}$

Xác định ma trận nghịch đảo bằng định thức

Định nghĩa 2 (Ma trận phó)

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|j)|$ *là phần bù đại số của* a_{ij}, *với mọi* $i, j = \overline{1, n}$. *Đặt* $adj(A) = (c_{ij})^T$.

Khi đó, ta gọi $adj(A)$ *là ma trận phó hay ma trận phụ hợp của* A.

Ví dụ 3

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *có ma trận phụ hợp là*

$$adj(A) = ?$$

Xác định ma trận nghịch đảo bằng định thức

Định lý 4

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Khi đó*

$$Aadj(A) = adj(A)A = det(A)I_n.$$

Định lý 5

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Khi đó* A *khả nghịch khi và chỉ khi* $\det(A) \neq 0$*. Hơn nữa, nếu* A *khả nghịch thì*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Bài tập 11

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$*. Chứng minh rằng:* AB *khả nghịch khi và chỉ khi* A *và* B *khả nghịch.*

Bài tập 12

Hạng của ma trận và hạng của ma trận phó

Định lý 6

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Các điều sau tương đương

1. $r(A) = n.$
2. *A khả nghịch.*
3. $\det(A) \neq 0.$

Từ Định lý trên, ta cũng có

Định lý 7

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Các điều sau tương đương

1. $r(A) < n.$
2. *A suy biến.*
3. $\det(A) = 0.$

Hạng của ma trận và hạng của ma trận phó

Bài tập 13 (Câu 3, Kiểm tra lần 1 lớp 14HOH1 (2014-2015))

Chứng minh rằng nếu hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ bx + cy = a, \\ cx + ay = b. \end{cases}$$

có nghiệm thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Định lý 8

Cho $A \in \mathbf{M}(\mathbb{R})$. *Chứng minh rằng*

(i) *Nếu* $n > 1$ *và* $r(A) = n - 1$ *thì* $r(adj(A)) = 1$.

(ii) *Nếu* $r(A) = n$ *thì* $r(adj(A)) = n$.

(iii) *Nếu* $r(A) < n - 1$ *thì* $adj(A) = \mathbf{0}$.

Hạng của ma trận và hạng của ma trận phó

Bài tập 14

Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa $A^2 = \mathbf{0}$. *Chứng minh* $A + I_n$ *khả nghịch.*

Hướng dẫn 2

"Tính" định thức của ma trận $A^2 - I_n^2$ *bằng hai cách.*

Bài tập 15

Cho A là ma trận vuông cấp n lũy linh cấp k, nghĩa là thỏa $A^k = \mathbf{0} \neq A^{k-1}$. *Chứng minh* $A - I_n$ *khả nghịch.*

Hướng dẫn 3

"Phân tích" đa thức ma trận $A^k - {I_n}^k$ *thành nhân tử.*

Giải và biện luận phương trình bằng pp Cramer

Định lý 9 (Cramer)

Xét hệ phương trình $AX = b$, trong đó $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Đặt A_j là ma trận được tạo ra từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bằng cột b. Khi đó nếu $X = \left[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right]$ là một nghiệm của hệ thì

$$\det(A_j) = \alpha_j \det(A). \tag{5}$$

Hơn nữa, nếu $\det(A) \neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa

$$\alpha_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}. \tag{6}$$

Nhận xét 7

1. *Nếu $\det(A) \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.*
2. *Nếu $\det(A) = 0$ và tồn tại j sao cho $\det(A_j) \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.*

Giải và biện luận phương trình bằng pp Cramer

Các bước giải hệ bằng phương pháp Cramer

1.
2.

Ví dụ 4

Giải lại bài tập 1.33 trang 63 [?]. Sau đó đối chiếu kết quả và phân tích để chọn lựa phương pháp giải quyết.

Bài tập 16 (Kiểm tra lần 1- 15CNSH1-2016)

Giải và biện luận theo m hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + my + 2z = 8, \\ 2x + y + 5z = 8, \\ mx + 2y + z = 8. \end{cases} \tag{7}$$

Giải và biện luận phương trình bằng pp Cramer

Bài tập 17 (Kiểm tra lần 1- 15CNSH2-2016)

Giải và biện luận theo m hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x + y + mz = 7, \\ x + my + 2z = 7, \\ mx + 2y + z = 7. \end{cases} \tag{8}$$

Bài tập 18 (Kiểm tra lần 1- 15HOH1-2016)

Giải và biện luận theo m hệ phương trình sau

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 7, \\ x + 2y + 4z = 7, \\ 2x + my + z = 7. \end{cases} \tag{9}$$

Giải và biện luận phương trình bằng pp Cramer

Bài tập 19 (Kiểm tra lần 1- 15HOH2-2016)

Giải và biện luận theo m hệ phương trình sau

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 5z = 8, \\ 2x + my + z = 8. \end{cases} \tag{10}$$

Ví dụ 5 (Bài tập 2.13(d))

Giải và biện luận theo m hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + x + 2x_3 = 1, \\ x_1 - mx_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - mx_3 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

- Phương pháp Cramer chỉ giải được trong trường hợp hệ $\cdots\cdots\cdots\cdots$
- Hạn chế của phương pháp Cramer là không giải được hệ khi $\cdots\cdots\cdots\cdots$
- Trái lại, phương pháp khử Gauss cho ta cách giải cho hệ phương trình tổng quát. Hơn nữa xét góc độ về độ phức tạp tính toán, phương pháp $\cdots$ có độ phức tạp cao hơn phương pháp $\cdots$. Do đó trong các tính toán khoa học, phương pháp $\cdots$ không được ưa chuộng. Tuy nhiên phương pháp khử Gauss cũng có một hạn chế là không cung cấp thông tin về nghiệm khi hoàn thành việc giải hệ phương trình (nghĩa là sau khi hoàn thành bước thế ngược).