

Q: Chương 4 học cái gì?

A: Các chương khác các biến của mình thường có từ “độc lập” với nhau. Còn chương 4 thì các biến của mình có quan hệ với nhau. Xét 2 biến X và Y thì mối quan hệ đó được biểu thị qua “hiệp phương sai $\text{cov}(X;Y)$ ”.

+/- Nếu $\text{cov}(X;Y) > 0$ thì X và Y có quan hệ cùng chiều,

+/- Nếu $\text{cov}(X;Y) = 0$ thì X và Y không có quan hệ, hay nói cách khác là X và Y “độc lập”

+/- Nếu $\text{cov}(X;Y) < 0$ thì X và Y có quan hệ ngược chiều

Công thức quan trọng

1. Hiệp phương sai: $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$

=> Nếu X, Y là 2 biến ngẫu nhiên (BNN) độc lập thì $E(XY) = E(X).E(Y) \Rightarrow \text{cov}(X,Y) = 0$

2. $V(a.X \pm b.Y) = a^2V(X) + b^2V(Y) \pm 2\text{cov}(a.X; b.Y) = a^2V(X) + b^2V(Y) \pm 2ab\text{cov}(X;Y)$

3. $E(a.X + b.Y) = a.E(X) + b.E(Y)$

4. Hệ số tương quan: $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$

(ngoài ra còn ký hiệu là $r_{A:B}$)

Bài toán tổng hợp hay thi:

Lãi suất hàng năm (%) khi đầu tư vào 2 thị trường A và B có bảng phân phối xác suất đồng thời sau

A \ B	-2	4	6
-1	0.1	0.15	0.15
4	0.05	0.15	0.2
5	0.1	0.05	0.05

a. Nếu chia đều vốn vào 2 thị trường thì khả năng có được lãi suất lớn hơn 4% là bao nhiêu?

b. Lãi suất trung bình trên thị trường A là bao nhiêu khi lãi suất trên thị trường B là 6%?

c. Tính $F(4,5; 6)$; $F(0;1)$

d. Tính $V(A-B)$

e. Tìm $\rho_{A,B}$

f. Đầu tư vào 2 thị trường này với tỷ lệ bao nhiêu thì mức độ rủi ro thấp nhất

g. Đầu tư vào 2 thị trường này với tỷ lệ bao nhiêu thì kỳ vọng lớn nhất

h. Hỏi việc đầu tư vào thị trường A có bị phụ thuộc vào việc đầu tư thị trường B không?



AAA CLASS - Trung tâm ôn luyện XSTK, KTL, TCC

Bài làm:

a/ Chia đều vốn cho 2 thị trường:

Gọi lãi suất nhận được khi đó là Z. Vì chia đều vốn nên $Z = 0,5.X + 0,5.Y$ trong đó X là lãi suất thu được ở thị trường A, Y là lãi suất thu được ở thị trường B

Ta cần tính $p(Z > 4)$

$$p(Z = 0,5.X + 0,5.Y > 4) = p(X + Y > 8)$$

Ta cần lập bảng phân phối của (X+Y)

X+Y	-3	2	3	5	8	9	10	11
p	0,1	0,05	0,25	0,15	0,15	0,05	0,2	0,05

$$\rightarrow p(X + Y > 8) = p(X + Y = 9) + p(X + Y = 10) + p(X + Y = 11) = 0,3$$

b/ Cần tính $E(A | B = 6)$

Lập bảng của $A | B = 6$

$A B = 6$	-1	4	5
P	$\frac{0,15}{0,15+0,2+0,05} = 0,375$	$\frac{0,2}{0,15+0,2+0,05} = 0,5$	$\frac{0,05}{0,15+0,2+0,05} = 0,125$

(tính xác suất bằng giá trị với bài toán “biết rằng”)

$$\Rightarrow E(A | B = 6) = 2,25$$

c/ $F(4,5;6)$: khi đó thì $4 < A \leq 5$ và $4 < B \leq 6$

$$\rightarrow F(4,5;6) = p(A = -1; B = -2) + p(A = -1; B = 4) + p(A = 4; B = -2) + p(A = 4; B = 4) = 0,45$$

(nhớ mẹo lập F(x) ở chương 2 là “tại dấu bằng thì không lấy”)

$F(0;1)$: khi đó $-1 < A \leq 4$ và $-2 < B \leq 4$

$$\rightarrow F(0;1) = p(A = -1; B = -2) = 0,1$$

d/ $V(A - B) = V(A) + V(B) - 2\text{cov}(A; B)$

(Ở chương 2, nếu A và B độc lập thì $\text{cov}(A; B) = 0 \Rightarrow V(A - B) = V(A) + V(B)$)

+/- $V(A)$

Lập bảng của A

A	-1	4	5
p	$0,1+0,15+0,15=0,4$	$0,05+0,15+0,2=0,4$	$0,1+0,05+0,05=0,2$

$$V(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = 6,96$$

+/- $V(B)$

Lập bảng của B

B	-2	4	6
p	0,25	0,35	0,4

$$V(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = 10,11$$

$$\pm \text{cov}(A; B) = E(A.B) - E(A).E(B)$$

Tính $E(A)$ dựa vào bảng của A $\Rightarrow E(A) = 2,2$



AAA CLASS - Trung tâm ôn luyện XSTK, KTL, TCC

Tính $E(B)$ dựa vào bảng của $B \Rightarrow E(B)=3,3$

Tính $E(A.B)$ dựa vào bảng A, B đề cho

$$\Rightarrow E(A.B) = \sum A.B.p = (-1).(-2).0,1 + 4.(-2).0,05 + \dots = 7,6$$

$$\Rightarrow \text{cov}(A;B)=0,34$$

$$\Rightarrow V(A-B)= 16,39$$

$$\text{e/ } \rho_{A,B} = \frac{\text{cov}(A;B)}{\sigma(A).\sigma(B)} = \frac{\text{cov}(A;B)}{\sqrt{V(A)}.\sqrt{V(B)}} = 0,0413$$

f/ Gọi t là tỷ lệ đầu tư tiền vào thị trường A ($0 \leq t \leq 1$)

Lãi suất Z từ 2 thị trường $Z=t.A+(1-t)B$

Liên quan đến mức độ rủi ro từ 2 thị trường thì dùng $V(Z)$

$$V(Z) = V[t.A + (1-t).B] = t^2.V(A) + (1-t)^2.V(B) + 2t.(1-t).\text{cov}(A;B)$$

$$V(Z) = 16,12.t^2 - 19,54.t + 10,11$$

$$V(Z) \text{ min khi } t = \frac{-b}{2a} = \frac{19,54}{2.16,12} = 0,6061 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy đầu tư 60,61% tiền vào thị trường A , số còn lại đầu tư thị trường B thì sẽ được rủi ro lãi suất nhỏ nhất

$$\text{g/ } E(Z) = t.E(A) + (1-t).E(B) = 3,3 - 1,1.t$$

$E(Z)$ lớn nhất khi t nhỏ nhất, mà $0 \leq t \leq 1$ nên $t=0 \Rightarrow$ đầu tư toàn bộ tiền vào thị trường B

h/ Xét sự phụ thuộc thì ta dùng cov . Như trên tính, $\text{cov}(A;B)=0,34 > 0$ nên việc đầu tư vào thị trường A có phụ thuộc vào việc đầu tư vào thị trường B , quan hệ cùng chiều.



AAA CLASS - Trung tâm ôn luyện XSTK, KTL, TCC