

## Tổng quan

Chương I thường được coi là chương khó nhất trong môn Xác suất - Thống kê, mặc dù có lượng công thức rất ít và cũng rất đơn giản, dễ nhớ. Đứng trước một bài toán Xác suất cổ điển, thường ta bị bối rối bởi câu từ, vấn đề bài toán đặt ra và không biết cần bắt đầu từ đâu.

Đi tìm lời giải bài toán qua lần lượt những bước sau, bạn sẽ thấy mọi thứ đơn giản hơn rất nhiều

**Bước 1:** Tóm tắt đề bài.

**Bước 2:** Đặt các biến cố và tìm quan hệ giữa chúng

**Chìa khóa của bài toán xác suất không nằm ở công thức mà nằm ở biến cố.** Biểu diễn câu hỏi cùng những trường hợp liên quan qua các biến cố. Chú ý khi đặt biến cố:

- Chỉ nên đặt những biến cố sơ cấp (biến cố không thể biểu diễn thành tổng các biến cố khác)
- Đặt biến cố sao cho số biến cố là tối thiểu, và có thể dễ dàng biểu diễn xác suất cần tính qua các kí hiệu quan hệ giữa những biến cố đó. Đặc biệt liên quan đến quan hệ giữa các biến cố: giao, hợp và đối lập để biểu diễn quan hệ giữa các biến cố.

**Bước 3:** Sử dụng các công thức xác suất để tính

Nhìn chung Xác suất chương I có 3 dạng bài chính, dưới đây là ví dụ và lưu ý cho từng dạng.

### I. Dạng bài sử dụng công thức cộng, công thức nhân, công thức xác suất cơ bản

**Ví dụ 1:** Một hộp có 7 viên bi trắng, 3 viên bi đen. Bốc ra 2 viên bi. Xác suất để 2 viên bi bốc được đều là trắng trong các trường hợp sau:

- a) Bốc đồng thời
- b) Bốc lần lượt, có hoàn lại
- c) Bốc lần lượt, không hoàn lại

#### **Giải:**

a) Gọi A là biến cố 2 viên bi bốc được đều là trắng.

Số cách bốc 2 viên bi từ 10 viên là  $C_{10}^2$ . Số cách bốc 2 viên bi trắng là  $C_7^2$

Vậy xác suất 2 viên bi đều là trắng là  $\frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$

b) Gọi A là biến cố bốc được bi trắng trong lần 1

B là biến cố bốc được bi trắng trong lần 2

➤ Tại sao không gọi trực tiếp A là biến cố cả 2 lần bốc được bi trắng?



Khi đó ta cần tính xác suất  $P(AB)$

Áp dụng công thức nhân ta có  $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$

➤ Tại sao  $P(A) = \frac{7}{10}$  và  $P(B/A) = \frac{7}{10}$

$$c) P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

➤ Sự khác biệt giữa câu b và câu c là gì? Ảnh hưởng như thế nào đến  $P(B/A)$

**Ví dụ 2: (đề cô Hương)** Tiến hành bắn 3 phát súng vào bia, điểm tối đa mỗi phát súng là 10. Xác suất được 8 hoặc 9 điểm đều bằng 0,25. Xác suất được dưới 8 điểm là 0,4. Xác suất được 30 điểm với 3 lần bắn là 0,001. Xác suất để đạt tổng số 28 điểm?

### Giải

➤ Các bạn có để ý đề ra thừa dữ kiện?

Gọi  $A_i$  là biến cố đạt 8 điểm trong lần bắn thứ  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$B_i$  là biến cố đạt 9 điểm trong lần bắn thứ  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$C_i$  là biến cố đạt 10 điểm trong lần bắn thứ  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

➤ Tại sao chỉ xét các biến cố đạt 8 – 9 – 10 điểm?

Xác suất để đạt tổng số 28 điểm là:

$$P(A_1C_2C_3 + C_1A_2C_3 + C_1C_2A_3 + B_1B_2C_3 + B_1C_2B_3 + C_1B_2B_3)$$

$$= P(A_1C_2C_3) + P(C_1A_2C_3) + P(C_1C_2A_3) + P(B_1B_2C_3) + P(B_1C_2B_3) + P(C_1B_2B_3)$$

(Tách được thành tổng các xác suất như thế là vì các biến cố xung khắc với nhau)

$$= 0,02625$$

➤ Dùng công thức nhân ở đây như thế nào?



## II. Dạng bài sử dụng công thức xác suất đầy đủ - Công thức Bayes

Nhận diện bài toán sử dụng công thức xác suất đầy đủ: Có 2 công đoạn thực hiện, hoặc 2 tính chất khác nhau cần xét đến để đi đến biến cố cuối cùng cần tính xác suất.

Nhận diện bài toán sử dụng công thức Bayes: Có 2 công đoạn thực hiện, hoặc 2 tính chất khác nhau cần xét đến. Bài toán có từ “Biết rằng” hoặc “Giả sử”.

### Ví dụ 3: (đề thầy Lâm Sơn)

Có 2 lô sản phẩm. Lô 1 có 10 chính phẩm, 2 phế phẩm. Lô 2 có 16 chính phẩm, 4 phế phẩm. Từ mỗi lô lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Sau đó lấy ra từ 2 sản phẩm đó 1 sản phẩm. Xác suất để sản phẩm sau cùng là chính phẩm là bao nhiêu?

#### Giải:

a) Ta biết bài toán này sử dụng công thức xác suất đầy đủ vì biến cố cuối: sản phẩm cuối cùng là chính phẩm được thực hiện qua **2 công đoạn**: chọn 1 sản phẩm từ mỗi lô và chọn sản phẩm cuối từ 2 sản phẩm được chọn.

Gọi A là biến cố sản phẩm sau cùng là chính phẩm.

**Làm thế nào để xác định hệ biến cố đầy đủ?** Hãy quan tâm đến sau công đoạn thứ nhất ta có thể thu được những khả năng nào. Đó chính là hệ đầy đủ ta cần xác định

Trong ví dụ trên, công đoạn thứ nhất là chọn 1 sản phẩm từ mỗi lô. Vì thế hệ đầy đủ của ta sẽ là:

H1: Chọn được chính phẩm từ lô 1, phế phẩm từ lô 2

H2: Chọn được phế phẩm từ lô 1, chính phẩm từ lô 2

H3: Chọn được chính phẩm từ cả 2 lô

H4: Chọn được phế phẩm từ cả 2 lô

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = P(A/H1).P(H1) + P(A/H2).P(H2) + P(A/H3).P(H3) + P(A/H4).P(H4)$$

Khi tính xác suất của H1, H2, H3, H4, ta lưu ý rằng tổng xác suất của hệ đầy đủ luôn bằng 1.

$$P(H1) = \frac{10}{12} \cdot \frac{4}{20} = \frac{1}{6} ; P(H2) = \frac{2}{15} ; P(H3) = \frac{2}{3} ; P(H4) = \frac{1}{30}$$

➤ Tại sao tính được các xác suất  $P(H2)$ ,  $P(H3)$ ,  $P(H4)$ ?



A/H1: Biến cố A xảy ra khi biến cố H1 đã xảy ra. Nghĩa là chọn được 1 chính phẩm từ 2 sản phẩm, trong đó có 1 chính phẩm và 1 phế phẩm. Hiển nhiên  $P(A/H1) = \frac{1}{2}$

➤ Tương tự, hãy tính các xác suất còn lại và kết luận kết quả cuối cùng

Đáp số:  $\frac{49}{60}$

Lưu ý rằng công thức Bayes là ngược lại với công thức xác suất đầy đủ. Các bước làm gần giống y hệt phần xác suất đầy đủ, chỉ khác công thức cuối cùng

**Ví dụ 4: (đề cô Hương)** Có 15 hộp bi, trong đó có 6 hộp loại 1, mỗi hộp 3 bi trắng, 5 bi đỏ; 4 hộp loại 2, mỗi hộp 7 bi trắng, 5 bi đỏ; 5 hộp loại 3, mỗi hộp 6 bi trắng, 9 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, rồi từ hộp đó lấy ra 2 bi. Biết 2 bi lấy ra là 2 bi đỏ. Xác suất để 2 bi đó thuộc hộp loại 1?

**Giải:** Có từ “Biết” nên sử dụng công thức Bayes. Gọi A là biến cố bốc được 2 bi đỏ

➤ Cần gọi hệ đầy đủ H1, H2, H3 nào ở đây?

Công thức:

$$P(H1/A) = \frac{P(A/H1).P(H1)}{P(A)} = \frac{P(A/H1).P(H1)}{P(A/H1).P(H1) + P(A/H2).P(H2) + P(A/H3).P(H3)}$$

$$P(H1) = \frac{2}{5} ; P(A/H1) = \frac{C_5^2}{C_8^2}$$

➤ Tính tương tự với các xác suất còn lại.

Đáp số:  $\frac{495}{1031}$



### III. Dạng bài tính toán với xác suất

Đây không phải là những bài toán có lời văn nữa, mà là cho một số biểu thức xác suất của A, B, C cho trước, sau đó vận dụng những phép tính xác suất để tính biểu thức đề bài yêu cầu.

Công thức cần nhớ:

$$1. P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$2. P(AB) = P(A).P(B / A) = P(B).P(A / B)$$

$$3. P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}; P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$4. P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$5. P(A / B) + P(\bar{A} / B) = 1$$

Một số quan hệ biến cố quan trọng:

$$1. \overline{X + Y} = \bar{X}\bar{Y}$$

$$2. \overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$$

$$3. X(Y + Z) = XY + XZ$$

Lưu ý xác suất quan trọng:  $P(A\bar{A}) = 0$

**Ví dụ 5:** Cho  $P(A) = 3/10; P(B) = 1/2; P(B / A) = 3/5$ . Tính  $P(A / B); P((\bar{A} + B) / A)$

**Giải:**  $P(AB) = P(A).P(B / A) = \frac{9}{50} \Rightarrow P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{9}{25}$

$$P((\bar{A} + B) / A) = \frac{P((\bar{A} + B).A)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}A + BA)}{P(A)} = \frac{P(BA)}{P(A)} = P(B / A) = \frac{3}{5}$$

➤ Tính  $P(\bar{A}B + A\bar{B})$ . Đáp số:  $\frac{11}{25}$

