

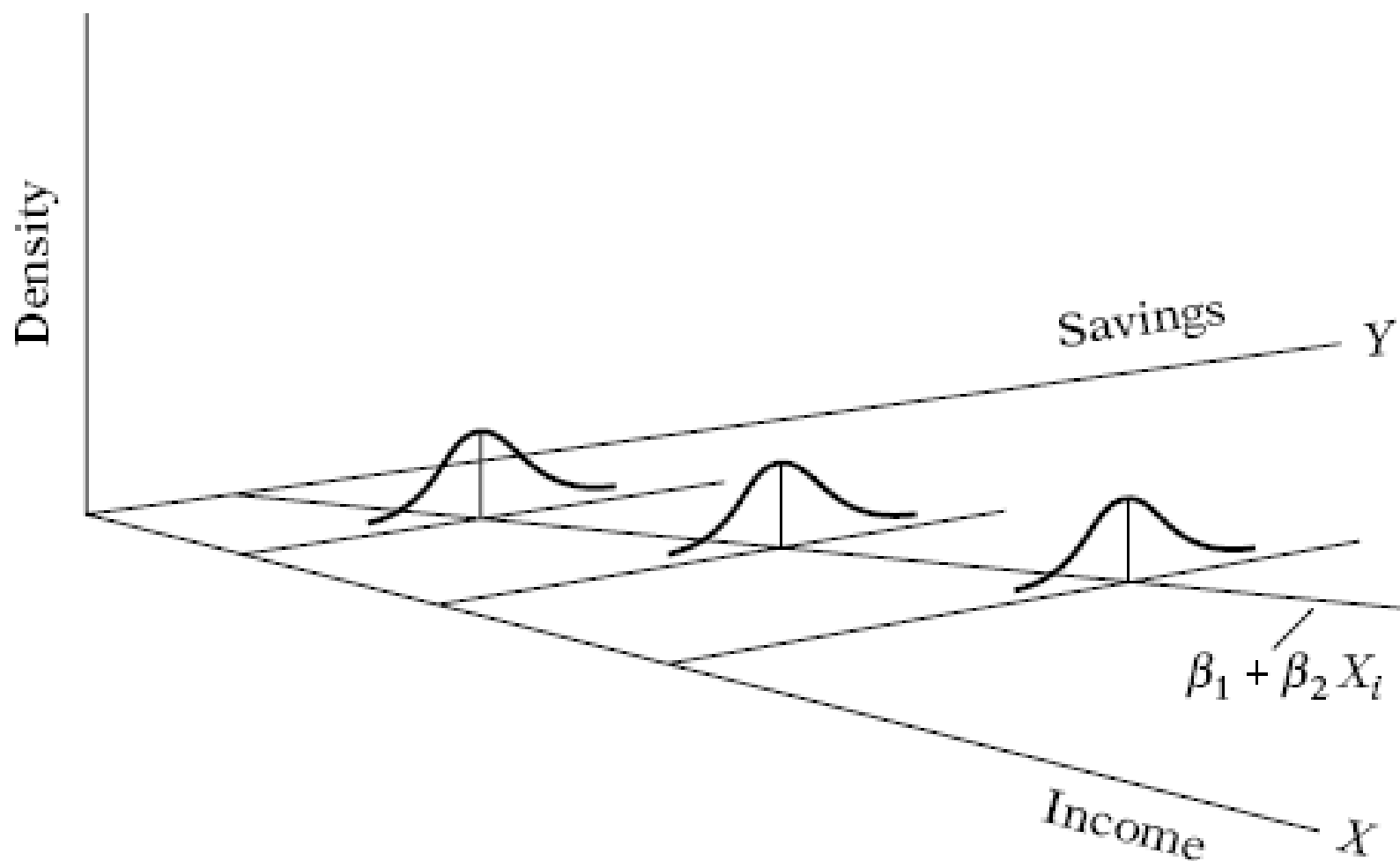
Chương 6

Phương sai của sai số thay đổi (Heteroskedasticity)

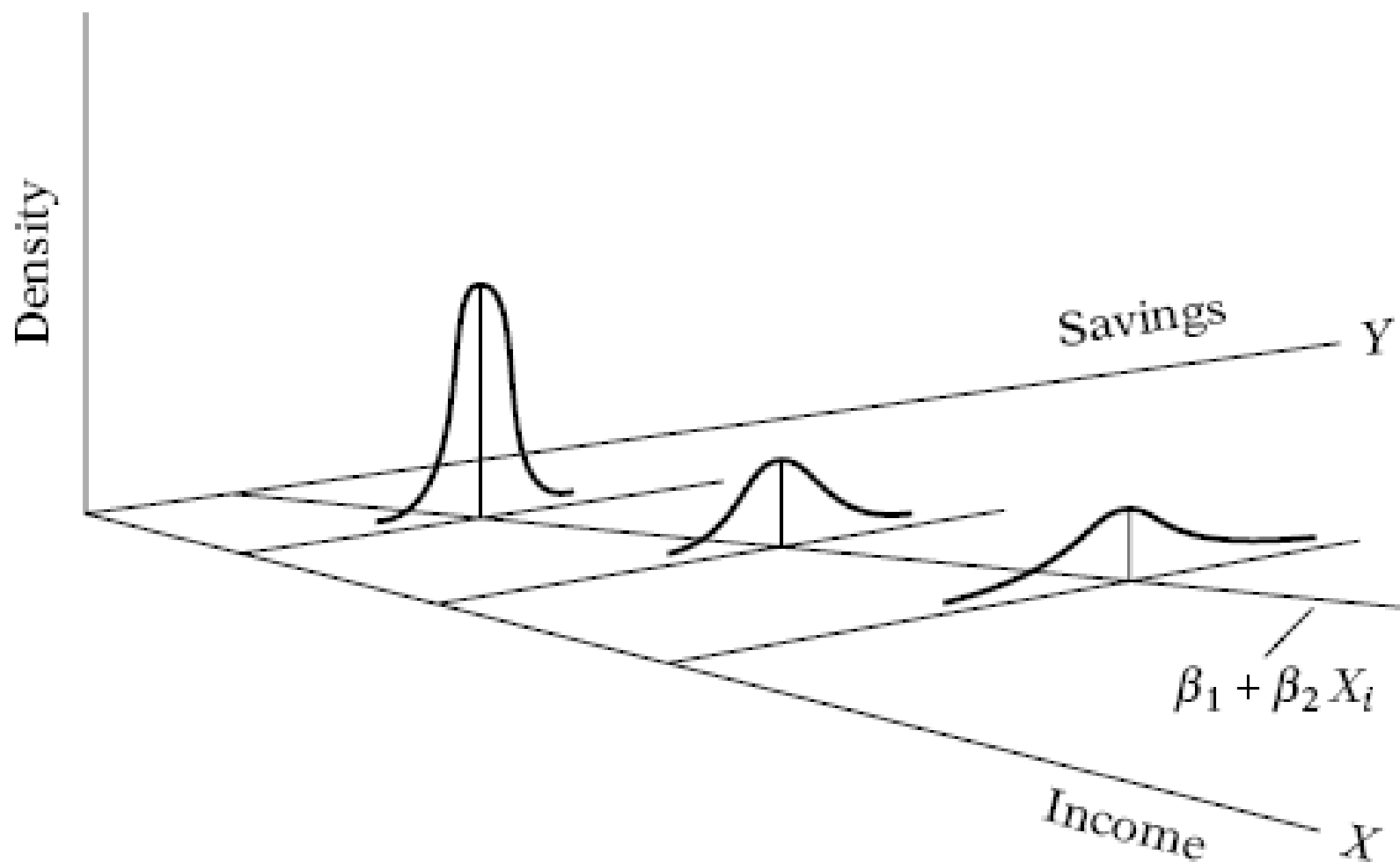
Các giả thiết của mô hình CLRM (nhắc lại)

1. Mô hình là tuyến tính $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$
2. Kỳ vọng U_i bằng 0: $E(u_i | X_{2i}, X_{3i}) = 0$
3. Các U_i thuần nhất: $\text{var}(u_i) = \sigma^2$
4. Không có sự tương quan giữa các U_i : $\text{cov}(u_i, u_j) = 0, i \neq j$
5. Không có quan hệ tuyến tính giữa các biến giải thích.
 $\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 X_{2i} + \lambda_3 X_{3i} \neq \mathbf{0},$
 $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq (0, 0, 0)$

Sai số thuần nhất



Sai số thay đổi



6.1. Nguyên nhân của phương sai sai số thay đổi.

- Do bản chất vấn đề kinh tế, ví dụ trong nghiên cứu tiêu dùng, người giàu có thể chọn tiêu nhiều tiền vào các mục tiêu xa xỉ, nhưng người nghèo thì không như thế.
- Trong các nghiên cứu, các công ty lớn có thể có nhiều lựa chọn khác hơn công ty bé.
- Do kinh nghiệm làm giảm bớt sai số chẳng hạn lỗi đánh máy càng ngày càng giảm.
- Các vấn đề về mô hình
 - Bỏ sót biến
 - Kỹ thuật xử lý số liệu
 - Dạng hàm sai

6.2. Ước lượng OLS khi phương sai của sai số thay đổi.

- Khi xem xét tác động của PSSS thay đổi, chúng ta phải phân biệt giữa tác động lên trung bình (tính chệch) và phương sai (tính hiệu quả).
- Kết quả chung là:
 - PSSS thay đổi không có tác động lên trung bình của các ước lượng.
 - PSSS thay đổi làm thay đổi phương sai của các ước lượng (Kđ T và F không tin cậy nữa).

- Xét mô hình $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$
- Giả sử $E(u_i^2) = \sigma_i^2$, còn các giả thiết khác của CLRM vẫn thỏa mãn. Ta có

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \\ &= \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}\end{aligned}$$

- Và $\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$

- Dễ dàng chứng minh $\hat{\beta}_2$ vẫn là ƯL tuyến tính, không chệch của β_2 . **Có hiệu quả ko?**

6.3. Phương pháp bình phương nhỏ nhất tổng quát

1. Phương pháp bình phương có trọng số

- Xét mô hình $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ với $\text{var}(u_i) = \sigma_i^2$
- Phương pháp bình phương nhỏ nhất có trọng số là cực tiểu tổng bình phương các phần dư có trọng số:

$$\sum w_i \hat{u}_i^2 = \sum w_i (Y_i - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_i)^2$$

với $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

- Đạo hàm bậc hai theo $\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*$

$$\frac{\partial \sum w_i \hat{u}_i^2}{\partial \beta_1^*} = 2 \sum w_i (Y_i - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_i) (-1)$$

$$\frac{\partial \sum w_i \hat{u}_i^2}{\partial \beta_2^*} = 2 \sum w_i (Y_i - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_i) (-X_i)$$

- Ta nhận được

$$\hat{\beta}_1^* = \bar{Y}^* - \hat{\beta}_2^* \bar{X}^*$$

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{(\sum w_j)(\sum w_i X_i Y_i) - (\sum w_i X_i)(\sum w_i Y_i)}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2}$$

2. Phương pháp bình phương nhỏ nhất tổng quát

- Xét mô hình $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ với $E(u_i^2) = \sigma_i^2$.
- Tức là $Y_i = \beta_1 X_{0i} + \beta_2 X_i + u_i$ với $X_{0i} = 1$.
- Giả sử σ_i^2 đã biết, ta có:

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_1 \left(\frac{X_{0i}}{\sigma_i} \right) + \beta_2 \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right) + \left(\frac{u_i}{\sigma_i} \right)$$

- Hay $Y_i^* = \beta_1^* X_{0i}^* + \beta_2^* X_i^* + u_i^*$ t/m CLRM

trong đó

$$\begin{aligned}
 \text{var}(u_i^*) &= E(u_i^*)^2 = E\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma_i^2} E(u_i^2) && \text{since } \sigma_i^2 \text{ is known} \\
 &= \frac{1}{\sigma_i^2} (\sigma_i^2) && \text{since } E(u_i^2) = \sigma_i^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

- Đ/N: GLS là phương pháp biến đổi các biến số của mô hình ban đầu về mô hình mới, ở đó các giả thiết của OLS đều được thỏa mãn.

Các ước lượng GLS β_1^*, β_2^*

■ SRF: $Y_i^* = \hat{\beta}_1^* X_{0i}^* + \hat{\beta}_2^* X_i^* + \hat{u}_i^*$

Ta cực tiểu $\sum \hat{u}_i^{2*} = \sum (Y_i^* - \hat{\beta}_1^* X_{0i}^* - \hat{\beta}_2^* X_i^*)^2$

Tức là
$$\sum \left(\frac{\hat{u}_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum \left[\left(\frac{Y_i}{\sigma_i} \right) - \hat{\beta}_1^* \left(\frac{X_{0i}}{\sigma_i} \right) - \hat{\beta}_2^* \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right) \right]^2$$

■ Tìm được

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{(\sum w_i)(\sum w_i X_i Y_i) - (\sum w_i X_i)(\sum w_i Y_i)}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_2^*) = \frac{\sum w_i}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2}$$

Trong đó $w_i = 1/\sigma_i^2$. Chú ý - Trong GLS, ta cực tiểu RSS có trọng số
- WLS là trường hợp đặc biệt của GLS (tự đọc).

6.4. Phát hiện PSSS thay đổi

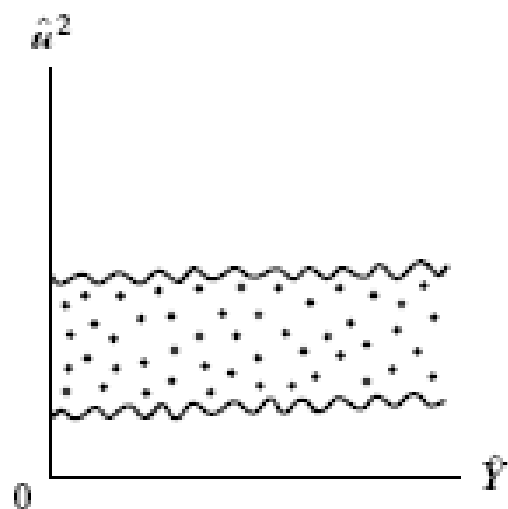
1. Phân tích kinh tế

- Căn cứ vào nội dung kinh tế của các biến số có trong mô hình để đoán nhân khả năng xảy ra phương sai của sai số thay đổi.
- Khi làm việc với số liệu chéo, ta đặc biệt quan tâm đến phương sai của sai số.

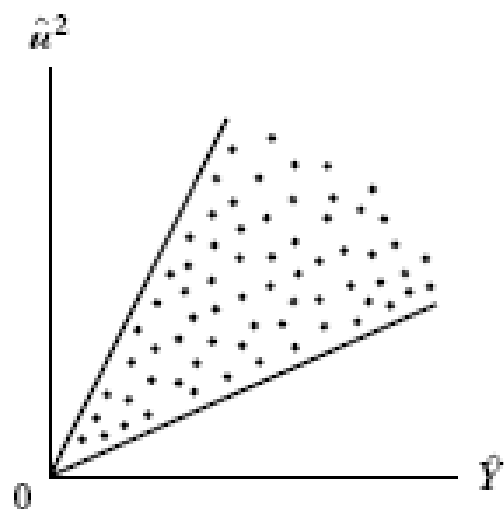
2. Dùng đồ thị của phần dư

- Dùng OLS ước lượng bình thường và tính được phần dư tương ứng e_i
- Vẽ đồ thị phần dư $|e_i|$ hoặc e_i^2

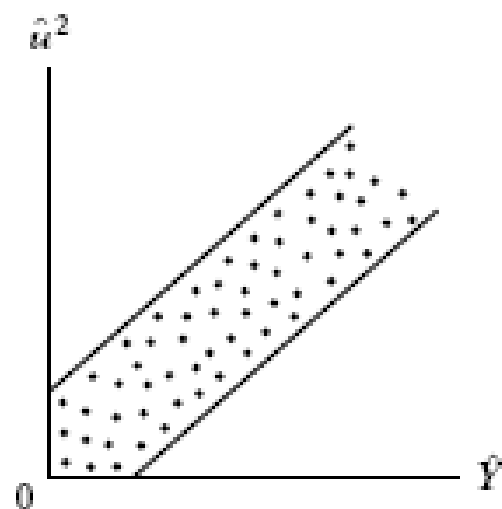
■ Vẽ đồ thị phần dư



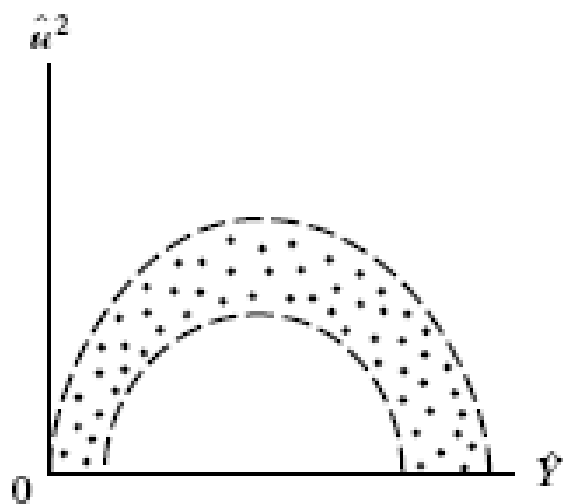
(a)



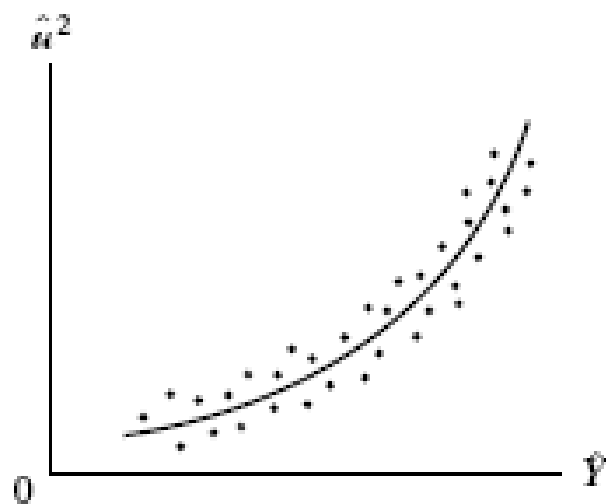
(b)



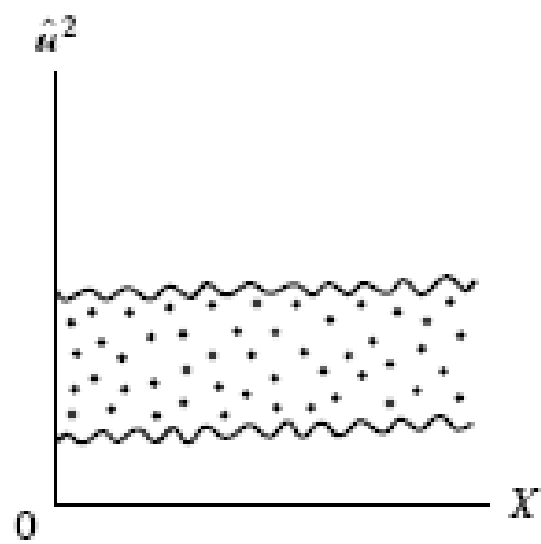
(c)



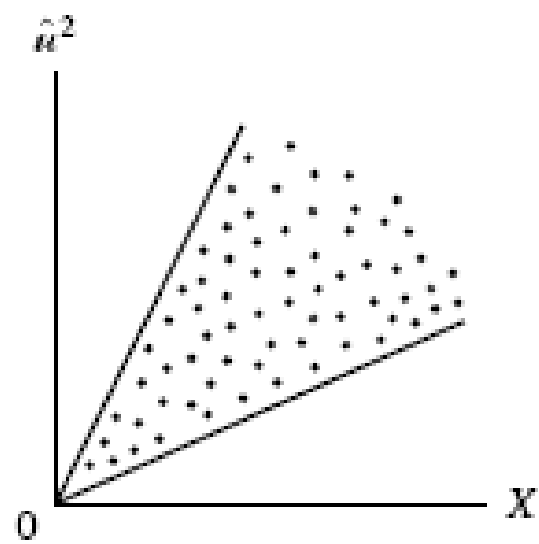
(d)



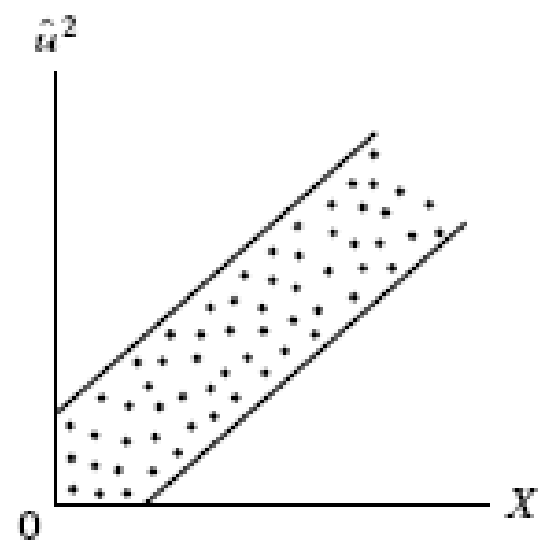
(e)



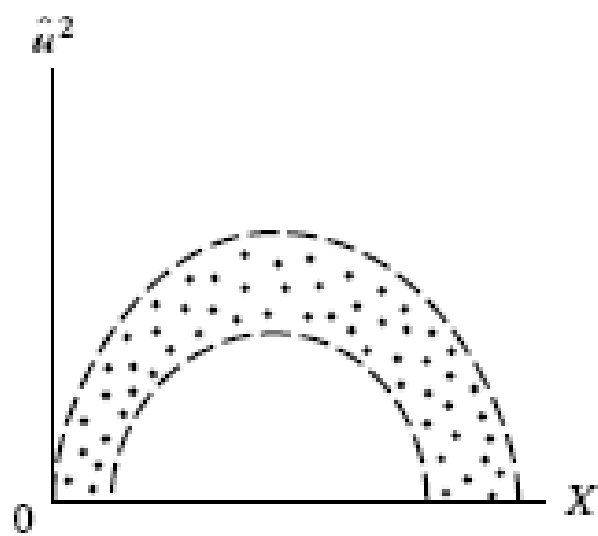
(a)



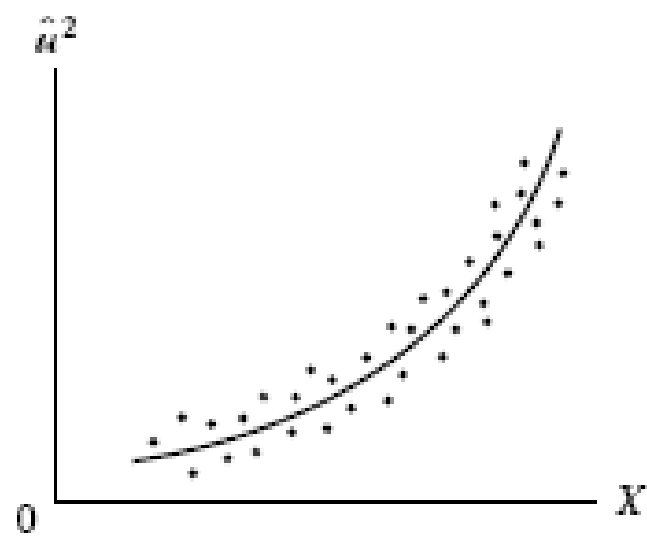
(b)



(c)



(d)



(e)

3. Kiểm định Park

- Từ đồ thị, Park giả thiết rằng σ_i^2 phụ thuộc X_i theo dạng hàm nào đó.
- Dạng hàm của Park: $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^\beta e^{v_i}$
hoặc $\ln \sigma_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i$
- Kiểm H₀: PSSS đồng đều ($\beta=0$)
H₁: PSSS thay đổi ($\beta \neq 0$)

B1: Dùng OLS ƯL hàm xuất phát, thu được $e_i, \ln e_i^2, \ln X_i$

B2: Dùng OLS ƯL $\ln e_i^2 = \alpha + \beta \ln X_i + v_i$

B3: Kiểm H₀: PSSS đồng đều ($\beta=0$), H₁: PSSS td

4. Kiểm định Glejser

- Glejser đưa ra một số dạng hàm

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 X_i + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 \sqrt{X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i^2} + v_i$$

- Chú ý: -....
 - Glejser thường dùng cho mẫu lớn.
- Kiểm định tương quan hạng của Spearman (Tự đọc)
- Kiểm định Goldfeld-Quandt (tự đọc)
- Kiểm định Breusch-Pagan-Godfrey (tự đọc)

5. Kiểm định White

■ Xét MH $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$ (1)

B1: ƯL (1) thu được e_i, e_i^2

B2: ƯL mô hình

$$e_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{3i}^2 + \alpha_6 X_{2i} X_{3i} + v_i$$

Thu được R^2 (2)

(chú ý (2) luôn phải có hệ số chặn)

B3: H_0 : PSSSđđ

H_1 : PSSStdđ

$$\chi^2_{qs} = nR^2 \sim \chi^2(df)$$

$df = \text{số hệ số (2)} - 1$

B4: Nếu $\chi^2_{qs} > \chi^2(df)$ thì bác bỏ H_0 .

6. Kiểm định dựa trên biến phụ thuộc

Đây là kiểm định Koenker-Bassett (KB)

- MH gốc là $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$
- B1: ƯL mô hình gốc thu được $e_i, \hat{Y}_i$
- B2: ƯL mô hình sau $e_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 (\hat{Y}_i)^2 + v_i$

Thu được R^2

- H_0 : PSSSđđ ($\alpha_2=0$)
- H_1 : PSSStd ($\alpha_2 \neq 0$)

a) Kđ χ^2

$$\chi^2_{qs} = nR^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\chi^2_{qs} > \chi^2(1): \text{Bác bỏ } H_0$$

b) Kđ F hoặc kđ t

thông thường, chú ý:
ở đây $F(1, n-2) = t^2_{qs}$.

6.5. Biện pháp khắc phục

- 1. σ_i^2 đã biết: dùng phương pháp WLS, các ước lượng tìm được là BLUE.
- 2. σ_i^2 chưa biết:

Đồ thị, Park, Glejser

Giả thiết 1: $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 X_i^2$.

- Biến đổi mô hình

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_1}{X_i} + \beta_2 + \frac{u_i}{X_i}$$

$$= \beta_1 \frac{1}{X_i} + \beta_2 + v_i \quad \text{CÓ} \quad E(v_i^2) = E\left(\frac{u_i}{X_i}\right)^2 = \frac{1}{X_i^2} E(u_i^2) = \sigma^2$$

Giả thiết 2: $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 X_i$

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} &= \frac{\beta_1}{\sqrt{X_i}} + \beta_2 \sqrt{X_i} + \frac{u_i}{\sqrt{X_i}} \\ &= \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_2 \sqrt{X_i} + v_i \end{aligned}$$

where $v_i = u_i / \sqrt{X_i}$ and where $X_i > 0$.

Giả thiết 3: $\text{Var}(u_i) = \sigma^2$ $[E(Y_i)]^2$

$$E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

$$\frac{Y_i}{E(Y_i)} = \frac{\beta_1}{E(Y_i)} + \beta_2 \frac{X_i}{E(Y_i)} + \frac{u_i}{E(Y_i)}$$

$$= \beta_1 \left(\frac{1}{E(Y_i)} \right) + \beta_2 \frac{X_i}{E(Y_i)} + v_i$$

- Có thể thấy $\text{var}(v_i) = \sigma^2$. Vì $E(Y_i)$ chưa biết nên ta dùng $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$ là ước lượng của $E(Y_i)$. Ta tiến hành qua hai bước:

- B1: Chạy OLS mô hình gốc thu được $\hat{Y}_i$.

- B2: ƯL $\frac{Y_i}{\hat{Y}_i} = \beta_1 \left(\frac{1}{\hat{Y}_i} \right) + \beta_2 \left(\frac{X_i}{\hat{Y}_i} \right) + v_i$

Giả thiết 4: Dạng hàm sai.

- Định dạng sai cũng dẫn đến PSSStd, nên ta định dạng lại dạng hàm
- Có thể - Dạng Cobb-Douglas
 - Có thể dạng tuyến tính
 - Có thể bỏ sót biến
 -