Mục lục

Chương 6

ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM

6.1 Một số khái niệm tổng quan về ước lượng điểm

Các suy luận thống kê hầu hết xoay quay việc rút ra các kết luận về một hay một vài tham số của tổng thể. Để thực hiện được điều này ta thường tiến hành một điều tra quan sát mẫu của tổng thể về vấn đề đang quan tâm. Các kết luận được rút ra từ việc tính toán các giá trị của mẫu quan sát được.

Ví dụ ta ký hiệu μ là chiều cao trung bình của tất cả sinh viên nữ của Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật. Quan sát một mẫu ngẫu nhiên gồm chiều cao của $n = 200$ sinh viên nữ của trường ta, thu được các giá trị $x_1, x_2, ..., x_{200}$. Trung bình mẫu $\overline{x}$ sẽ được sử dụng để đưa ra kết luận về μ.

Một cách tổng quát ta ký hiệu θ là tham số đang quan tâm, chưa biết và cần rút ra kết luận về θ. Giả sử ta cần ước lượng θ dựa trên mẫu ngẫu nhiên cỡ n là $X_1, X_2, ..., X_n$. Một thống kê trên mẫu nhiên này là một hàm của các X_i, ví dụ như trung bình mẫu $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} X_i$ là một biến ngẫu nhiên có thể sử dụng để đưa ra suy luận cho μ.

Điều này cũng đúng với trường hợp dữ liệu quan sát gồm nhiều mẫu. Ví dụ như có hai mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ và $Y_1, Y_2, ..., Y_m$; khi đó $\overline{X} - \overline{Y}$ là 1 hàm thống kê cho suy luận về sự khác biệt giữa 2 trung bình của 2 tổng thể là $\mu_1 - \mu_2$.

Định nghĩa 6.1. **Một giá trị ước lượng điểm** của tham số θ là một số mà số này được xem như là 1 giá trị hợp lý của θ. Một giá trị ước lượng điểm thu được bằng cách chọn 1 thống kê phù hợp và tính giá trị của thống kê này trên dữ liệu của mẫu. Khi đó hàm thống kê này được gọi là **ước lượng điểm** của θ.

Hàm thống kê là ước lượng điểm của θ tính toán trên mẫu thực nghiệm, kí hiệu là $\widehat{\theta}$, gọi là giá trị ước lượng điểm.

Ví dụ 6.1. Quan sát thời gian sử dụng của máy điện thoại A (đơn vị: giờ) sau 10 lần sạc đầy pin ta có mẫu

$$x_1 = 5,5; x_2 = 5,33; x_3 = 6,2; x_4 = 6,5; x_5 = 7,0; x_6 = 5,66; x_7 = 4,5; x_8 = 6,5; x_9 = 4,8; x_{10} = 5,$$

Gọi μ là thời gian sử dụng trung bình của máy điện thoại A sau sạc đầy pin.

$\widehat{\mu} = \overline{X} = \dfrac{1}{10}\sum_{x=1}^{10} X_i$ là một ước lượng điểm của μ.

$\overline{x} = \dfrac{1}{10}(5,5+5,33+6,2+6,5+7,0+5,66+4,5+6,5+4,8+5,0) = 5,699$ (giờ) là giá trị ước lượng điểm của μ ứng với ước lượng điểm $\overline{X}$.

Gọi Y là số lần máy điện thoại A có thời gian sử dụng từ 6 giờ trở lên sau n lần sạc pin đầy.

p là khả năng máy điện thoại A có thời gian sử dụng ít nhất là 6 giờ.

$\widehat{p} = \dfrac{Y}{n}$ là một ước lượng điểm của p.

$\dfrac{y}{n} = \dfrac{5}{10} = 0,5$ là một giá trị ước lượng điểm của p.

$\widetilde{X} = \dfrac{\min\limits_i X_i + \max\limits_i X_i}{2}$ cũng là một ước lượng điểm khác của trung bình μ.

$\widetilde{x} = \dfrac{4,5+7,0}{2} = 5,75$ cũng là một giá trị ước lượng điểm của trung bình μ tương ứng với ước lượng điểm $\widetilde{X}$.

$\widehat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ là một ước lượng điểm của phương sai σ^2.

$s^2 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = 0,6820544444$ là một giá trị ước lượng điểm của phương sai σ^2 ứng với ước lượng điểm S^2.

$S'^2 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$ cũng là một ước lượng điểm khác của phương sai σ^2.

$s'^2 = \dfrac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n} = 0,613849$ là một giá trị ước lượng điểm của phương sai σ^2 ứng với ước lượng điểm S'^2.

Như vậy tương ứng với một tham số θ ta có thể có nhiều ước lượng điểm. Tối ưu nhất ta cần tìm ước lượng điểm mà $\widehat{\theta} = \theta$. Tuy nhiên $\widehat{\theta}$ là một biến ngẫu nhiên nên giá trị ước lượng điểm có thể thay đổi trên các mẫu thực nghiệm khác nhau. Vậy làm thế nào lựa chọn một ước lượng điểm tốt nhất trong nhóm hữu hạn các ước lượng điểm, ta có một số tính chất mà một ước lượng điểm cần có như sau.

6.1.1 Ước lượng không chệch

Định nghĩa 6.2. Một ước lượng điểm $\widehat{\theta}$ được gọi là một ***ước lượng không chệch*** của θ nếu $E(\widehat{\theta}) = \theta$ với mọi giá trị có thể có của θ. Nếu $\widehat{\theta}$ là một ước lượng có chệch thì $E(\widehat{\theta}) - \theta$ được gọi là **sai số hệ thống của** θ.

Như vậy $\widehat{\theta}$ là một ước lượng không chệch của θ nếu phân phối xác suất của nó luôn có "trung tâm" tại giá trị đúng của tham số θ. "Trung tâm" ở đây là kỳ vọng của phân phối $\widehat{\theta}$.

Mệnh đề

X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với hai tham số n và p. Tỷ lệ mẫu $\widehat{p} = \dfrac{X}{n}$ là một ước lượng không chệch của p.

Thật vậy, $E(\widehat{p}) = E\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{1}{n}E(X) = \dfrac{1}{n}(np) = p$.

Mệnh đề

Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên có cùng phân phối với trung bình μ và phương sai σ^2. Khi đó ước lượng $\widehat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ là một ước lượng không chệch của σ^2.

Chứng minh

Với Y là một biến ngẫu nhiên, $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$. Do đó ta có $E(Y^2) =$

$V(Y) + [E(Y)]^2$.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}\right]$$

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n-1}\left\{\sum E(X_i^2) - \frac{1}{n}E(\sum X_i)^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum(\sigma^2 - \mu^2) - \frac{1}{n}\left\{V(\sum X_i) + [E(\sum X_i)]^2\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2 + n\mu^2 - \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{1}{n}(n\mu)^2\right\} = \frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2 - \sigma^2\right\} = \sigma^2
\end{aligned}$$

Do đó S^2 là ước lượng không chệch của σ^2. Mặt khác $E(S'^2) = E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$ nên $S'^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n}$ là một ước lượng chệch của σ^2.

Khi chọn một ước lượng điểm trong nhiều ước lượng điểm của cùng một tham số ta chọn ước lượng không chệch.

$\widehat{\mu}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ là một ước lượng điểm không chệch của μ.

$$\begin{aligned}
\text{Thật vậy, } E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu
\end{aligned}$$

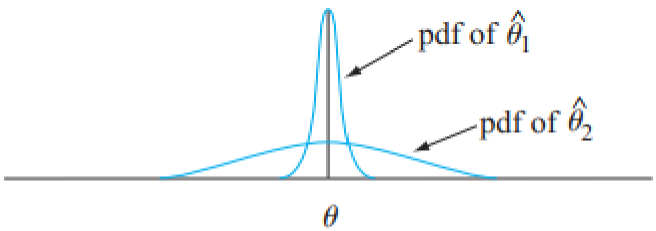
$\widehat{\mu}_2 = \dfrac{\min\limits_i X_i + \max\limits_i X_i}{2}$ cũng là một ước lượng điểm không chệch của μ.

$$\begin{aligned}
\text{Vì, } E(\widehat{\mu}_2) &= E\left(\frac{\min\limits_i X_i + \max\limits_i X_i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E(\min_i X_i) + E(\max_i X_i)\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\mu + \mu\} = \mu
\end{aligned}$$

Vậy chúng ta cần chọn ước lượng điểm không chệch nào trong lớp các ước lượng điểm không chệch của θ? Để trả lời câu hỏi này ta xét mục tiếp theo.

6.1.2 Ước lượng hiệu quả

Giả sử $\widehat{\theta}_1$ và $\widehat{\theta}_2$ là hai ước lượng điểm không chệch của θ. Phân phối của hai ước lượng này đều có trung tâm tại giá trị đúng θ, tuy nhiên độ phân tán các giá trị có thể có của $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ xung quanh giá trị θ có thể khác nhau. Nếu phương sai của $\widehat{\theta}_1$ nhỏ hơn phương sai của $\widehat{\theta}_2$ thì các giá trị có thể có của $\widehat{\theta}_1$ tập trung gần θ hơn các giá trị có thể có của $\widehat{\theta}_2$.



Hình 6.1: Đồ thị hai hàm phân phối của hai ước lượng điểm không chệch.

Định nghĩa 6.3. Trong lớp các ước lượng điểm không chệch của θ, ước lượng điểm $\widehat{\theta}$ có phương sai nhỏ nhất được gọi là ước lượng hiệu quả của θ so với các ước lượng không chệch khác.

Ước lượng hiệu quả có phương sai nhỏ nhất trong lớp tất cả các ước lượng không chệch của θ, hầu hết các giá trị của có thể có của ước lượng hiệu quả sẽ tập trung gần giá trị đúng θ.

Định lý

Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với hai tham số μ và σ^2. Khi đó ước lượng điểm $\widehat{\mu} = \overline{X}$ là một ước lượng hiệu quả của μ.

6.1.3 Sai số chuẩn

Định nghĩa 6.4. ***Sai số chuẩn*** của ước lượng $\widehat{\theta}$ là độ lệch chuẩn của nó

$$\sigma_{\widehat{\theta}} = \sqrt{V(\widehat{\theta})}$$

Sai số chuẩn là tham số đo độ lệch chuẩn giữa một ước lượng điểm và giá trị đúng θ.

Nếu sai số chuẩn có chứa tham số chưa biết mà giá trị tham số đó có thể ước lượng thì ta sẽ ước lượng sai số chuẩn của một ước lượng. Ước lượng sai số chuẩn ký hiệu là $\widetilde{\sigma}_{\widehat{\theta}}$ hay $s_{\widehat{\theta}}$.

Ví dụ 6.2. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn với trung bình μ và phương sai σ^2.

Quan sát một mẫu ngẫu nhiên cỡ $n = 20$ ta thu được mẫu thực nghiệm:

1,65	1,71	1,66	1,69	1,72	1,68	1,64	1,66	1,71	1,74
1,62	1,64	1,61	1,69	1,73	1,76	1,70	1,69	1,67	1,68

$\widehat{\mu} = \overline{X}$ là một ước lượng điểm tốt nhất của μ với giá trị ước lượng là $\overline{x} = 1,6825$
Nếu ta biết $\sigma = 0,05$ thì sai số chuẩn của $\overline{X}$ là:
$\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0,05}{\sqrt{20}} = 0,0111803399.$

Nếu σ chưa biết, giá trị ước lượng của σ là $\widehat{\sigma} = s = 0,03971941061$ thì ta có ước lượng sai số chuẩn của ước lượng $\overline{X}$ là:
$\widehat{\sigma}_{\overline{x}} = s_{\overline{X}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 8,881530214.10^{-3}.$

Giả sử X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với 2 tham số n và p. Tỉ lệ mẫu $\widehat{p} = \dfrac{X}{n}$ là ước lượng điểm tốt cho p với sai số chuẩn.
$\sigma_{\widehat{p}} = \sqrt{V\left(\dfrac{X}{n}\right)} = \sqrt{\dfrac{V(X)}{n^2}} = \sqrt{\dfrac{np(1-p)}{n^2}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}.$

Khi một ước lượng điểm có phân phối xấp xỉ chuẩn, điều này thường xảy ra khi n lớn thì giá trị đúng của θ có nhiều khả năng thuộc vào khoảng với độ rộng là 2 sai số chuẩn của θ. Ví dụ như với mẫu có $n = 36$ có giá trị trung bình mẫu $\overline{x} = 29,35$ và độ lệch chuẩn mẫu $s = 0,36$ khi đó tính được ước lượng sai số chuẩn của $\widehat{\mu}$ là $\dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{0,36}{\sqrt{36}} = 0,6$. Khi đó μ nhiều khả năng thuộc khoảng $29,35 \pm (2)(0,6) = (28,15; 30,55)$

Nếu ước lượng không chệch $\widehat{\theta}$ không xấp xỉ chuẩn ta không thể sử dụng công thức trên để đưa ra khoảng giá trị để dự đoán θ thuộc vào. Để khắc phục tình huống này gần đây trong thống kê hiện đại có một phương pháp gọi là bootstrap. Phương pháp bootstrap là phương pháp coi mẫu gốc ban đầu đóng vai trò tổng thể mà từ đó nó được rút ra. Từ mẫu ban đầu lấy lại các mẫu ngẫu nhiên cùng cỡ với mẫu gốc bằng phương pháp lấy mẫu có hoàn lại, gọi là mẫu bootstrap. Với mỗi mẫu lấy lại ta tính được giá trị tham số thống kê quan tâm gọi là tham số bootstrap. Sự phân bố của các tham số thống kê mẫu bootstrap là phân phối bootstrap.

Lấy mẫu có hoàn lại có nghĩa là sau khi chúng ta rút ra ngẫu nhiên một quan sát từ mẫu ban đầu, ta đặt nó trở lại trước khi lấy quan sát tiếp theo. Điều này cũng giống như lấy một số từ một chiếc mũ, sau đó đặt nó trở lại trước khi rút lại. Kết quả là, bất kỳ số có thể được rút ra một lần, nhiều hơn một lần, hoặc không được rút ra lần nào.

Với mẫu ban đầu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ta có mẫu bootstrap $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ với mỗi giá trị x_i^* được lấy ngẫu nhiên từ tập các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với xác suất $\frac{1}{n}$.

Tương ứng với mỗi mẫu bootstrap x^* ta có mô phỏng bootstrap của $\widehat{\theta}$ là $\widehat{\theta}^* = T(x^*)$, với hàm thống kê $T(x^*)$ tương tự với hàm thống kê $T(x)$ tác động lên mẫu x.

Mẫu lấy lại thứ nhất: $x_1^* = (x_{1_1}^*, x_{1_2}^*, ..., x_{1_n}^*)$ ta tính được giá trị $\widehat{\theta}_1^2$.

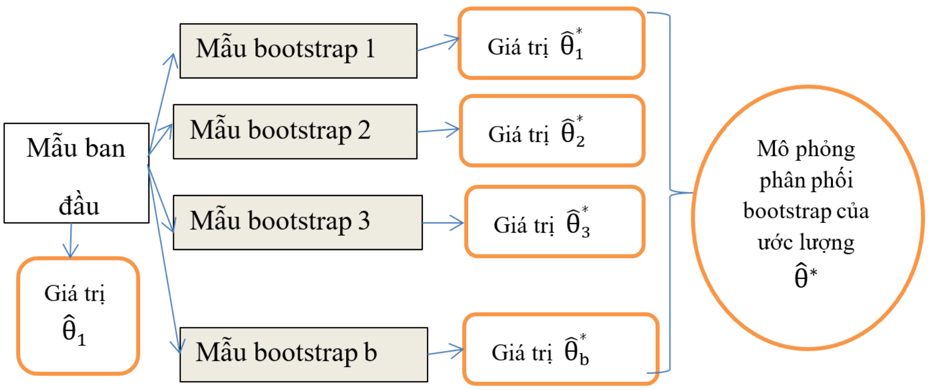
Mẫu lấy lại thứ hai: $x_2^* = (x_{2_1}^*, x_{2_2}^*, ..., x_{2_n}^*)$ ta tính được giá trị $\widehat{\theta}_2^*$.

...

Mẫu lấy lại thứ B: $x_B^* = (x_{B_1}^*, x_{B_2}^*, ..., x_{B_n}^*)$ ta tính được giá trị $\widehat{\theta}_B^*$.

Với $B = 1000$ hay 2000.

Với mẫu bootstrap ngẫu nhiên $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$, $\widehat{\theta}^* = T(X^*)$ là một thống kê trên mẫu bootstrap, khi đó $F^*(t) = P(\widehat{\theta}^* \leq t)$ là phân phối bootstrap của $\widehat{\theta}^*$.



Hình 6.2: Sơ đồ mô phỏng phân phối bootstrap.

Các bước dùng phương pháp bootstrap ước lượng sai số tiêu chuẩn của $\widehat{\theta}$ từ một mẫu gốc ban đầu:

Bước 1: Lấy theo phương pháp có hoàn lại từ mẫu gốc ban đầu được B mẫu bootstrap độc lập cùng cỡ với mẫu gốc $x_k^* = \left(x_{k_1}^*, x_{k_2}^*, \ldots, x_{k_n}^*\right), \quad k = 1, 2, \ldots, B.$

Bước 2: Với mỗi mẫu bootstrap có được ở bước 1 ta tính giá trị thống kê $\widehat{\theta}_k^* = T(x_k^*), \quad k = 1, 2, \ldots, B.$

Bước 3: Tính độ lệch chuẩn của B giá trị tính được ở bước 2.

$$S_{\widehat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum (\widehat{\theta}_i^* - \overline{\theta}^*)^2} \qquad \text{với} \quad \overline{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum \widehat{\theta}_i^*.$$

Độ lệch tiêu chuẩn này là ước lượng bootstrap của sai số tiêu chuẩn $\sigma_{\widehat{\theta}}$. Sai số chuẩn của ước lượng bootstrap là độ lệch chuẩn mẫu của giá trị $\widehat{\theta}_i^*$.

Ta có giá trị $S_{\widehat{\theta}}$ xấp xỉ $\sigma_{\widehat{\theta}}$ khi số lượng mẫu bootstrap B là lớn.

6.2 Các phương pháp ước lượng điểm

6.2.1 Phương pháp Moment

Định nghĩa 6.5. Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên có cùng phân phối xác suất.

Moment thứ k của X (moment tổng thể hay moment lý thuyết) là $E(X^k)$.

Moment mẫu thứ k của X là $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

Cụ thể ta có:

Moment thứ nhất của X là $E(X) = \mu$.

Moment mẫu thứ nhất của X là $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Moment thứ hai của X là $E(X^2)$.

Moment mẫu thứ hai của X là $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

Định nghĩa 6.6. Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên có cùng phân phối xác suất có hàm xác suất hay mật độ xác suất $f(x; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ phụ thuộc vào m tham số chưa biết là $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$. Ước lượng moment của m tham số này thu được bằng cách giải m phương trình m moment cấp k đầu tiên bằng m mẫu moment cùng bậc tương ứng.

Ví dụ 6.3. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với tham số p chưa biết. X ít có hàm xác suất

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \text{với } x = 1, \\ 1 - p & \text{với } x = 0. \end{cases}$$

Quan sát một mẫu ngẫu nhiên có cỡ $n = 10$ ta có bộ số liệu $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$. Hãy tìm ước lượng moment của p.

Giải:

Moment thứ nhất của X là $E(X) = p$.

Moment mẫu thứ nhất của X là $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,6$.

Giải phương trình $E(X) = \overline{X}$ ta có $\widehat{p} = \overline{X}$ là ước lượng moment của p với giá trị ước lượng là $0,6$.

Ví dụ 6.4. Thời gian hoạt động của loại thiết bị A là biến ngẫu nhiên X (đơn vị: giờ) có phân phối mũ với tham số λ. Quan sát thời gian hoạt động của một số thiết bị A ta có số liệu

$$(15,6; 16,0; 16,5; 15,8; 16,2; 17,5; 18,5; 17,8; 18,2; 16,8; 17,4; 17,9; 16,8; 16,0; 16,6)$$

Hãy tìm ước lượng của moment của λ.

<u>Giải:</u>

Moment thứ nhất của X là $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Giá trị moment mẫu thứ nhất của X là $\overline{x} = 16,9$ (giờ).

$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \widehat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{X}}$ là một ước lượng moment của λ.

Vậy giá trị ước lượng moment của λ là $\dfrac{1}{16,9}$.

Ví dụ 6.5. Điểm thi xác suất của sinh viên trường Đại học M là biến ngẫu nhiênS X có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Quan sát một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 1018$ bài thi của sinh viên trường M ta có bảng số liệu:

Điểm số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số bài	2	24	50	98	151	193	189	162	95	46	8

Hãy tìm ước lượng moment của μ và σ^2.

<u>Giải:</u>

Moment cấp 1 của X là $E(X) = \mu$ với moment mẫu tương ứng là $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Moment cấp 2 của X là $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ với moment mẫu tương ứng là $\overline{X^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Giá trị moment mẫu cấp 1 của X là $\overline{x}_n = 5,411591356$.

Giá trị moment mẫu cấp 2 của X là $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 = 33,09921415$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \mu = \overline{X} \\ \sigma^2 + \mu^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$

Ta có ước lượng moment của μ là $\widehat{\mu} = \overline{X}$ và giá trị ước lượng moment của μ bằng $5,411591356$.

Ước lượng moment của phương sai σ^2 là $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\overline{X})^2$ và giá trị ước lượng moment của σ^2 bằng $3,813893141$.

6.2.2 Phương pháp ước lượng hợp lý cực đại

Định nghĩa 6.7. Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ có cùng phân phối $f(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ với $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ là các tham số chưa biết. Hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ là hàm của các giá trị quan sát được $x_1, x_2, ..., x_n$ và $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ được gọi là hàm hợp lý. Ước lượng $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, ..., \widehat{\theta}_m$ làm cực đại hàm hợp lý gọi là ước lượng hợp lý cực đại của $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$.

Ví dụ 6.6. Tỷ lệ sản phẩm đạt chuẩn của nhà máy B là p chưa biết. Một người kiểm tra từng sản phẩm cho đến khi được 10 sản phẩm đạt chuẩn thì dừng. Biết người này dừng lại ở lần kiểm tra thứ 12. Hãy tìm ước lượng hợp lý cực đại của p.

Giải:

Gọi X là số lần kiểm tra cho đến khi được 10 sản phẩm đạt chuẩn thì dừng $\Rightarrow X$ có phân phối nhị thức âm với hai hàm số là $r = 10$ và p.

$P(X = 12) = C_{11}^{10} p^{10}(1-p)^2 = f(p)$ làm hàm hợp lý cực đại của p.

$$\begin{aligned} f'(p) &= 11[10p^9(1-p)^2 - 2p^{10}(1-p)] \\ &= 11p^9(1-p)[10(1-p) - 2p] \\ &= 11p^9(1-p)(10-12p) \end{aligned}$$

$f'(p) = 0$ tại $p = 0$ hoặc $p = 1$ hoặc $p = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

p	0		5/6		1
$f'(p)$	0	+	0	-	0
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(p)$ đạt cực đại tại $5/6$. Vậy giá trị ước lượng hợp lý cực đại của p tương ứng với quan sát người kiểm tra dừng lại ở lần kiểm tra thứ 12 là $5/6$.

Ví dụ 6.7. Giả sử $X_1, X_2, ..., X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ

$X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập nên ta có hàm hợp lý

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda) &= (\lambda e^{-\lambda x_1})...(\lambda e^{-\lambda x_n}) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} \end{aligned}$$

$$ln[f(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)] = nln(\lambda) - \lambda \sum x_i$$

Đạo hàm $ln[f(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)]$ theo λ và cho bằng 0 ta có

$$\frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$$

Suy ra ta có ước lượng hợp lý cực đại của λ là $\widehat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{X}}$

Kết quả này tương tự với kết quả thu được bằng phương pháp moment.
Tuy nhiên vì $E(\dfrac{1}{\overline{X}}) \neq \dfrac{1}{E(\overline{X})}$ nên đây là một ước lượng chệch của λ.

Bài tập 6.1

1. Quan sát điểm môn Toán của sinh viên trường Đại học A ta có bảng số liệu

5,9	7,3	6,8	7,8	8,1	8,8	6,5	6,3	7,6
4,5	8,2	7,9	7,6	6,9	5,6	5,2	5,4	7,3
4,8	9,0	9,1	8,3	8,4	4,8	5,5	5,6	6,5
6,4	3,5	9,5	4,0	6,8	7,0	7,3	7,8	7,9
5,2	5,1	6,8	7,5	7,3	7,1	7,9	9,8	5,0

   (a) Tìm một giá trị ước lượng điểm trung bình môn Toán của sinh viên trường Đại học A, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

   (b) Tìm một giá trị của ước lượng điểm của tỷ lệ sinh viên trường Đại học A có điểm Toán từ 5 trở lên, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

   (c) Tìm một giá trị ước lượng điểm của độ lệch chuẩn σ có điểm thi môn Toán sinh viên trường Đại học A, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

   (d) Tìm một giá trị ước lượng điểm của tham số $\dfrac{\sigma}{\mu}$, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

2. Quan sát số xe bán ra trong một ngày tại một số cửa hàng ta có bộ số liệu:

Số xe bán ra	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Số cửa hàng	3	5	7	10	11	15	18	21	19	17	15	13	12	10

(a) Tìm một giá trị ước lượng điểm cho số xe trung bình bán ra trong một ngày tại các cửa hàng, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

(b) Tìm một giá trị ước lượng điểm cho tỉ lệ cửa hàng có số xe bán ra trong một ngày từ 10 xe trở lên, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng

(c) Tìm một giá trị của những điểm cho phương sai cho số xe bán ra trong một ngày tại các cửa hàng, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

(d) Tìm một giá trị ước lượng điểm cho trung vị của số xe bán ra trong một ngày tại các cửa hàng, chỉ ra ước lượng điểm tương ứng.

(e) Xác định sai số chuẩn của ước lượng trong câu (d).

3. (a) Quan sát số lượng ga (đơn vị: therm) sử dụng tại 10 ngôi nhà được chọn ngẫu nhiên tại vùng A trong tháng 1 , ta có bộ số liệu $103, 156, 118, 89, 125, 147, 122, 99, 138, 90$. Ký hiệu μ là lượng ga trung bình sử dụng tại mỗi nhà có sử dụng ga trong toàn bộ vùng A. Tính một giá trị ước lượng điểm của μ.

(b) Giả sử có 10000 hộ sử dụng ga tại vùng A. Ký hiệu T là tổng lượng ga được sử dụng tại vùng A trong tháng 1. Ước lượng T với dữ liệu đã cho trong phần (a) và chỉ ra ước lượng điểm đã dùng.

(c) Sử dụng dữ liệu trong phần (a), ước lượng tỉ lệ p là tỷ lệ hộ sử dụng ít nhất 100(therm)ga trong tháng 1.

4. Quan sát ngẫu nhiên n_1 nam giới hút thuốc, có X_1 người hút thuốc có đầu lọc. Quan sát ngẫu nhiên n_2 nữ giới hút thuốc, có X_2 người hút thuốc có đầu lọc. Ký hiệu p_1 và p_2 là tỷ lệ nam, nữ hút thuốc có đầu lọc trong số các nam giới, nữ giới có thuốc.

(a) Chỉ ra rằng $\left(\dfrac{X_1}{n_1}\right) - \left(\dfrac{X_2}{n_2}\right)$ là một ước lượng không chệch của $p_1 - p_2$.

(b) Xác định sai số chuẩn của ước lượng trong phần (a). Sử dụng các giá trị x_1, x_2 là các giá trị quan sát của các biến ngẫu nhiên X_1, X_2 để tính giá trị sai số chuẩn của ước lượng này.

(c) Cho $n_1 = n_2 = 200, x_1 = 126, x_2 = 176$ sử dụng ước lượng trong phần a tính giá trị ước lượng của $p_1 - p_2$.

5. Cho mẫu ngẫu nhiên $X_1, .., X_n$ có cùng phân phối xác suất, xác định bởi hàm mật độ xác suất

$$f(x, \theta) = 0,5(1 + \theta x) \qquad -1 \leq x \leq 1$$

với $-1 \leq \theta \leq 1$. Chỉ ra rằng $\widehat{\theta} = 3\overline{X}$ là một ước lượng không chệch của θ.

Bài tập 6.2

1. Một xét nghiệm được áp dụng cho n người chắc chắn không bệnh. Gọi X là số xét nghiệm dương tính (tức là có bệnh) trong n kết quả tức là X là số kết quả dương tính sai. Và p là tỉ lệ người không có bệnh bị kết luận là có bệnh sau xét nghiệm.

   (a) Xác định ước lượng hợp lý cực đại của p. Nếu $n = 20$ và $x = 3$. Xác định giá trị của hợp lý cực đại của p.

   (b) Ước lượng điểm trong phần (a) có là ước lượng không chệch không?

   (c) Nếu $n = 20$ và $x = 3$ hãy xác định ước lượng hợp lý cực đại của xác suất $(1 - p)^5$ là không có kết quả dương tính nào trong 5 xét nghiệm đối với 5 người không có bệnh.

2. Cho biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất

$$f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^{\theta} & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

   với $\theta > -1$. Quan sát một mẫu ngẫu nhiên cỡ n của X ta thu được bộ số liệu

   $x_1 = 0,92; x_2 = 0,79; x_3 = 0,65; x_4 = 0,9; x_5 = 0,86; x_6 = 0,47; x_7 = 0,73; x_8 = 0,97; x_9 = 0$

   (a) Sử dụng phương pháp moment tìm một ước lượng điểm của θ và tính giá trị của ước lượng này theo số liệu trên.

   (b) Tìm ước lượng hợp lý cực đại của θ rồi tính giá trị của lượng này theo số liệu trên.

3. X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số λ_1, λ_2. Xác định ước lượng hợp lý cực đại của λ_1, λ_2 và $\lambda_1 - \lambda_2$.

4. Cho một mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ có hàm mật độ xác suất

$$f(x,\lambda,\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} & x \geq 0, \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

   (a) Xác định ước lượng hợp lý cực đại của θ và λ.

   (b) Với mẫu thực nghiệm $3,11; 0,64; 2,55; 2,20; 5,44; 3,42; 10,39; 8,93; 17,82$ và $1,3$ tính giá trị ước lượng của θ và λ.

Chương 7

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG

Giới thiệu

Một ước lượng điểm, là 1 con số, tự bản thân nó không cung cấp bất kỳ thông tin nào về độ chính xác và độ tin cậy của ước lượng đó. Ví dụ như dùng thống kê $\overline{X}$ để tính ước lượng điểm cho giá trị trung bình đúng μ, giả sử dựa trên mẫu thực nghiệm thu được giá trị ước lượng điểm $\overline{x} = 9322,7$. Vì mẫu thay đổi nên hầu như không xảy ra trường hợp $\overline{x} = \mu$. Hơn nữa, ước lượng điểm không nói đến việc $\overline{x}$ gần hay xa μ.

Một giải pháp thay thế cho việc đưa ra một giá trị hợp lý duy nhất cho tham số là tính một khoảng giá trị hợp lý mà giá trị cần ước lượng thuộc vào, khoảng này gọi là khoảng ước lượng hay khoảng tin cậy. Để tính khoảng tin cậy cần xác định mức độ tin cậy của khoảng. Khoảng ước lượng với độ tin cậy 95% cho trung bình đúng có giới hạn dưới là 9162,5 và giới hạn trên 9482,9 thì μ có thể là bất kỳ giá trị nào thuộc khoảng (9162,5; 9482,9) với độ tin cậy 95%. Độ tin cậy 95% nghĩa là 95% của tất cả các mẫu sẽ cho ra khoảng ước lượng chứa μ hoặc bất kỳ tham số nào được ước lượng. Độ tin cậy thường dùng là 95%, 99% và 90%.

Khoảng ước lượng với độ tin cậy cao và độ rộng hẹp cho thông tin về tham số cần ước lượng khá chính xác. Ngược lại khoảng tin cậy rộng và độ tin cậy thấp cho thấy thông tin không chắc chắn về tham số cần ước lượng.

7.1 Các tính chất cơ bản của khoảng tin cậy

Giả sử tham số quan tâm là trung bình μ của một tổng thể và giả sử

1. Tổng thể có phân phối chuẩn.

2. Giá trị độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là σ đã biết.

Thông thường giả thiết tổng thể có phân phối chuẩn là hợp lý, tuy nhiên nếu chưa biết giá trị của μ mà giá trị σ đã biết thường thì không đủ độ tin cậy.

Mẫu thực nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ là kết quả quan sát của mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ có phân phối chuẩn với trung bình μ và độ lệch chuẩn σ. Khi đó biến ngẫu nhiên trung bình mẫu $\overline{X}$ có phân phối chuẩn với trung bình μ và độ lệch chuẩn $\sigma/\sqrt{n}$. Biến đổi chuẩn tắc hóa ta có

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{7.1}$$

Do đó các giá trị có thể có của Z thuộc khoảng -1,96 đến 1,96 với khả năng là 95%.

$$P\left(-1,96 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,96\right) = 0,95 \tag{7.2}$$

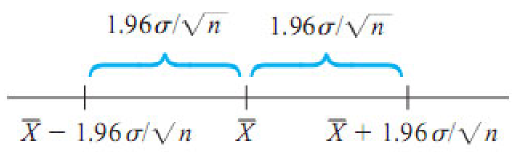
Biến đổi tương đương ta có

$$P\left(\overline{X} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95 \tag{7.3}$$

Khoảng ngẫu nhiên

$$\left(\overline{X} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{7.4}$$

có trung tâm tại biến ngẫu nhiên $\overline{X}$.



Hình 7.1: Khoảng ngẫu nhiên $(\overline{X} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ có trung tâm tại $\overline{X}$.

Định nghĩa 7.1.1. Từ mẫu thực nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tính được giá trị trung bình mẫu $\overline{x}$, thay $\overline{X}$ trong (7.4) bằng $\overline{x}$, khoảng cố định thu được gọi là khoảng tin cậy 95% cho μ

$$(\overline{x} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Hay

$$\overline{x} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

với độ tin cậy 95% cho μ. Biểu diễn ngắn gọn là $\overline{x} \pm 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, khi đó tương ứng với dấu - là điểm cuối bên trái (giới hạn dưới) và tương ứng với dấu + là điểm cuối bên phải (giới hạn trên).

Ví dụ 7.1 Sử dụng dữ liệu $\sigma = 3$, cỡ mẫu $n = 36$ và trung bình mẫu $\overline{x} = 80$ để tính khoảng tin cậy 95% cho chiều cao trung bình μ ta có kết quả là

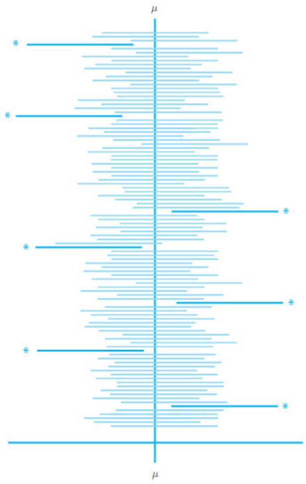
$$\overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80 \pm 1,96\frac{3}{\sqrt{36}} = 80 \pm 0,98 = (79,02; 80,98)$$

Tức là với độ tin cậy 95% thì $79,02 < \mu < 80,98$; khoảng ước lượng khá hẹp tức là độ chính xác của ước lượng của μ là khá cao.

Khoảng giá trị $(79,02; 80,98)$ là một khoảng cố định không là khoảng ngẫu nhiên và μ là một hằng số (chưa biết) do đó khi viết $P(\mu \in (79,02; 80,98)) = 0,95$ là không chính xác.

Một giải thích chính xác của "độ tin cậy 95%" được dựa trên quan hệ tần số của xác suất, để nói một biến cố A có xác suất 0,95 tức là nếu thử nghiệm trên A được lặp đi lặp lại về lâu dài thì khả năng A sẽ xảy ra 95%. Giả sử lấy mẫu chiều cao của những người khác sẽ tính được một khoảng ước lượng với độ tin cậy 95% khác và lặp lại công việc này cho mẫu thứ 3, mẫu thứ 4, mẫu thứ 5,... Gọi A là biến cố $\overline{X} - 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Khi đó $P(A) = 0,95$ theo tính toán thì 95% của khoảng tin cậy sẽ chứa μ, điều này được minh họa trong hình sau khi đường thẳng đứng cắt trục đo tại giá trị μ (chưa biết) chú ý rằng 7 trong 100 khoảng sẽ không chứa μ tức là chỉ 5% của các khoảng được biểu diễn như vậy sẽ không chứa μ.

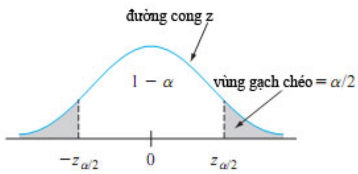
Dùng công thức khoảng tin cậy mặc dù đôi khi không thoả mãn yêu cầu bài toán. Khó khăn ở đây là ta cần giải thích về xác suất khi áp dụng trong một chuỗi các thí nghiệm chứ không phải là một khoảng duy nhất.



Hình 7.2: Khoảng tin cậy 95% (dấu * là khoảng không chứa μ)

7.1.1 Các khoảng tin cậy khác

Độ tin cậy 95% được suy từ xác suất 0,95 trong bất đẳng thức (7.2), nếu muốn độ tin cậy 99% thì xác suất ban đầu phải thay bằng 0,99 khi đó cần phải thay giá trị phân vị mức của Z từ 1,96 thành 2,58 trong công thức tính độ tin cậy 95%. Trong thực tế muốn có độ tin cậy bao nhiêu thì thay 1,96 hay 2,58 bằng giá trị phân vị mức thích hợp của phân phối chuẩn.



Hình 7.3: $P(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Định nghĩa 7.1.2. Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho trung bình μ của một tổng thể có phân phối chuẩn với giá trị của σ cho trước là

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{7.5}$$

hay $\overline{x} \pm z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Công thức (7.5) cho khoảng tin cậy có thể phát biểu thành lời như sau

Ước lượng điểm của $\mu \pm$ (giá trị phân biệt của Z)(sai số chuẩn của kỳ vọng)

Ví dụ 7.2 Qui trình sản xuất một loại động cơ cụ thể gần đây đã được sửa đổi, lịch sử dữ liệu cho biết phân phối đường kính của lỗ ổ cắm trên vỏ động cơ có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn 0,1 mm. Người ta tin rằng việc thay đổi này không ảnh hưởng đến phân phối cũng như độ lệch chuẩn, tuy nhiên giá trị trung bình của đường kính có thể thay đổi. Một mẫu gồm 100 động cơ được chọn, xác định được đường kính các lỗ ổ cắm trong mẫu là 5,426 mm. Yêu cầu đặt ra là tính khoảng tin cậy cho trung bình các đường kính lỗ với độ tin cậy 90%.

Độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ với $\alpha = 0,1$ suy ra giá trị phân vị mức $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$. Khoảng ước lượng cần tìm là

$$5,426 \pm (1,645).\frac{0,1}{\sqrt{100}} = 5,426 \pm 0,01645 = (5,40955; 5,44245)$$

7.1.2 Độ tin cậy, độ chính xác và cỡ mẫu

Độ tin cậy càng cao thì độ dài khoảng ước lượng càng rộng. Độ tin cậy 95% thì khoảng ước lượng kéo dài $1,96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ cho mỗi bên của $\overline{x}$, độ rộng của khoảng là $2(1,96).\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,92.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Tương tự độ rộng của khoảng tin cậy 99% là $2(2,58).\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5,16.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Nghĩa là ta tin cậy nhiều hơn vì khoảng rộng hơn. Độ rộng của khoảng ước lượng với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ là

$$w_0 = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Một nửa độ rộng của khoảng ước lượng $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ của độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ đôi khi được gọi là sai số của khoảng ước lượng. Sai số của khoảng tin cậy $100(1-\alpha\%)$ là

$$\epsilon = \frac{w_0}{2} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Với một mẫu cố định từ độ tin cậy ta có thể xác định được độ chính xác của khoảng ước lượng và ngược lại biết độ rộng của khoảng ước lượng thì xác định được độ tin cậy của khoảng ước lượng. Còn với độ tin cậy cho trước cố định cỡ mẫu thay đổi sẽ làm độ rộng của khoảng ước lượng thay đổi.

Ví dụ 7.3 Quan sát thời gian chia sẻ lệnh của một hệ thống máy tính biết rằng thời gian cụ thể cho 1 lệnh chỉnh sửa có phân phối chuẩn với độ lệch tiêu chuẩn là 25 milisec. Một hệ điều hành mới được cài đặt, ta cần ước lượng thời gian trung bình thực sự là μ. Trong điều kiện mới giả sử thời gian vẫn có phân phối chuẩn với $\sigma = 25$. Xác định cỡ mẫu cần thiết để có độ tin cậy 95% và độ rộng (tối đa) là 10.

Cỡ mẫu cần thỏa mãn

$$10 = 2.(1,96)(25/\sqrt{n})$$

Suy ra

$$\sqrt{n} = 2.(1,96)(25)/10 = 9,80$$

Do đó

$$n = (9,80)^2 = 96,04$$

Vì n là số nguyên nên ta cần cỡ mẫu $n = 97$.

Cỡ mẫu cần cho khoảng tin cậy trong (7.5) với độ rộng w là $n = \left(2.z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{w}\right)^2$

7.1.3 Nguồn gốc của khoảng tin cậy

Cho mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu mà trên đó tìm khoảng tin cậy của tham số θ. Giả sử tìm được biến ngẫu nhiên $h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ thỏa mãn 2 tính chất sau:

1. Là hàm phụ thuộc của cả $X_1, X_2, \ldots, X_n$ và θ.

2. Phân phối xác suất của biến này không phụ thuộc θ hay bất kỳ tham số nào.

Ví dụ như nếu phân phối của tổng thể là phân phối chuẩn khi biết σ và $\theta = \mu$ thì biến $h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ thỏa cả hai tính chất là hàm phụ thuộc theo μ nhưng có phân phối chuẩn tắc nên không phụ thuộc μ.

Cho α bất kỳ thuộc 0 và 1 ta tìm được hằng số a và b thỏa mãn

$$P(a < h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta) < b) = 1 - \alpha \tag{7.6}$$

Theo tính chất 2, a và b không phụ thuộc θ, theo ví dụ mẫu lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn thì $a = -z_{\alpha/2}, b = z_{\alpha/2}$. Biến đổi (7.6) theo θ ta được xác suất

$$P(l(X_1, X_2, \ldots, X_n) < \theta < u(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

Khi đó $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $u(x_1, x2, \ldots, x_n)$ là giới hạn trên và giới hạn dưới của khoảng tin cậy với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ trong ví dụ mẫu lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn $l(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \overline{X} - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ và $u(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \overline{X} + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ví dụ 7.4 Mô hình lý thuyết cho rằng thời gian để chất lỏng cách điện ở các điện cực bị phân hủy với một điện áp đặc biệt có phân phối mũ với tham số λ. Một mẫu ngẫu nhiên có kích thước $n = 10$ với chuỗi thời gian phân hủy có dữ liệu (theo phút) như sau $x_1 = 41,53; x_2 = 18,73; x_3 = 2,99; x_4 = 30,34; x_5 = 12,33; x_6 = 117,52; x_7 = 73,02; x_8 = 223,63; x_9 = 4; x_{10} = 26,78$. Với độ tin cậy 95% hãy tìm khoảng ước lượng cho λ từ đó tìm khoảng ước lượng cho thời gian phân hủy trung bình μ.

Đặt $h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda) = 2\lambda \sum X_j$, $h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda)$ có phân phối Chi bình phương với bậc tự do $\nu = 2n$. Sử dụng bảng phụ lục các giá trị phân vị mức của phân phối Chi bình phương tương ứng với bậc tự do $\nu = 2(10) = 20$ có

$$P\left(9,591 < 2\lambda \sum X_i < 34,17\right) = 0,95$$

hay

$$P\left(\frac{9,591}{2\sum X_i} < \lambda < \frac{34,170}{2\sum X_i}\right) = 0,95$$

Với dữ liệu đã cho $\sum x_i = 550,87$ có khoảng ước lượng cho λ là (0,00871; 0,03101).

Trung bình của phân phối mũ là $\mu = \frac{1}{\lambda}$ nên

$$P\left(\frac{2\sum X_i}{34,170} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2\sum X_i}{9,591}\right)$$

do đó khoảng ước lượng cho trung bình μ với độ tin cậy 95% là

$$\left(\frac{2\sum x_i}{34,170}; \frac{2\sum x_i}{9,591}\right) = (32,24; 114,87)$$

7.1.4 Khoảng tin cậy bootstrap

Phương pháp bootstrap đã giới thiệu trong chương 6 như là cách để ước lượng sai số chuẩn $\sigma_{\hat{\theta}}$ của ước lượng điểm $\hat{\theta}$. Nó cũng được ứng dụng tìm khoảng tin cậy cho θ. Xét ước lượng của kỳ vọng μ của phân phối chuẩn với σ đã biết. Thay μ bởi θ và dùng $\hat{\theta} = \overline{X}$ như trong ước lượng điểm. Chú ý rằng $1,96\sigma\sqrt{n}$ là phân vị thứ 97,5 của phân phối $\hat{\theta} - \theta$[tức là, $P(\overline{X} - \mu < 1,96\sigma/\sqrt{n}) = P(Z < 1,96) = 0,9750$]. Tương tự $-1,96\sigma/\sqrt{n}$ là phân vị thứ 2,5; vì vậy

$$\begin{aligned}0,95 &= P(\text{phân vị thứ} \quad 2,5 < \hat{\theta} - \theta < \text{phân vị thứ} \quad 97,5)\\ &= P(\hat{\theta} - \text{phân vị thứ} \quad 2,5 > \theta > \hat{\theta} - \text{phân vị thứ} \quad 97,5)\end{aligned}$$

Nghĩa là, với

$$l = \hat{\theta} - \text{phân vị thứ 97,5 của} \quad \hat{\theta} - \theta$$

$$u = \hat{\theta} - \text{phân vị thứ 2,5 của} \quad \hat{\theta} - \theta \tag{7.7}$$

Khoảng tin cậy cho θ là (l, u). Trong nhiều trường hợp, bách phân vị trong (7.7) không thể tính được nhưng ta có thể ước lượng được từ mẫu của chính nó. Giả sử lấy lại $B = 1000$ mẫu bootstrap và tính được

$$\hat{\theta}_1^*, ..., \hat{\theta}_{1000}^* \quad \text{và} \quad \overline{\theta}^*$$

được suy ra từ 1000 giá trị khác nhau

$$\hat{\theta}_1^* - \overline{\theta}^*, ..., \hat{\theta}_{1000}^* - \overline{\theta}^*.$$

Giá trị lớn nhất thứ 25 và giá trị nhỏ nhất thứ 25 của những sai khác này là ước lượng của những phân vị mức chưa biết trong (7.7).

7.2 Khoảng tin cậy của trung bình cho mẫu lớn

Khoảng tin cậy cho μ trong những phần trước đều giả sử tổng thể có phân phối chuẩn với σ đã biết. Giả sử khoảng tin cậy khi mẫu lớn không yêu cầu giả thiết này. Sau đây ta sẽ lập luận để đưa ra khoảng ước lượng cho trng bình khái quát trong trường hợp mẫu lớn và khoảng ước lượng cho tỉ lệ p của tổng thể.

7.2.1 Khoảng ước lượng của μ khi mẫu lớn

Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rút ra từ tổng thể có kỳ vọng μ và độ lệch chuẩn σ. Định lý giới hạn trung tâm chỉ ra rằng khi n lớn $\overline{X}$ dần tiến về phân phối chuẩn dù tổng thể có phân phối nào. Do đó có thể nói $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ có phân phối xấp xỉ chuẩn, vì thế

$$P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

Lập luận như trong (7.1) cho $\overline{x} \pm z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ được khoảng tin cậy cho μ với độ tin cậy xấp xỉ $100(1-\alpha)\%$ khi mẫu lớn.

Khó khăn ở đây là việc tính toán khoảng tin cậy dựa trên giá trị σ mà giá trị này hiếm khi được biết. Xét biến chuẩn hóa $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$, trong biến chuẩn hóa này độ lệch chuẩn mẫu S thay cho σ. Trước đó chỉ có tử số là ngẫu nhiên theo Z bởi chứa $\overline{X}$. Trong biến chuẩn hóa mới này cả $\overline{X}$ và S đều có giá trị thay đổi từ mẫu này đến mẫu khác. Vì thế ta thấy rằng phân phối của biến mới này trải dài hơn đường cong z phản ánh sự thay đổi trong mẫu số. Điều này đúng khi n nhỏ. Tuy nhiên, khi n lớn chỉ có một chút thay đổi khi thay biến S cho σ, vì vậy biến này cũng có phân phối xấp xỉ chuẩn. Biến đổi xác suất trên biến này tương tự như trường hợp của σ đã biết, được một khoảng tin cậy của mẫu lớn cho μ.

Mệnh đề 7.2.1. *Nếu n đủ lớn, biến chuẩn hóa $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ có phân phối xấp xỉ chuẩn, nghĩa là*

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}.\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{7.8}$$

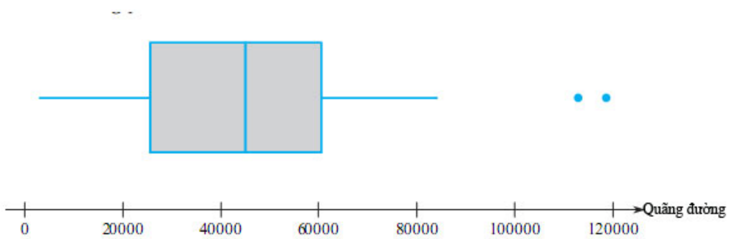
*là **khoảng tin cậy của trung bình** μ khi mẫu lớn với độ tin cậy xấp xỉ $100(1-\alpha)\%$. Công thức này đúng với mọi phân phối của tổng thể.*

Nói chung, $n > 40$ sẽ thỏa mãn để chứng minh các khoảng này. Điều này có phần hạn chế hơn công thức cho định lý giới hạn trung tâm CLT vì sử dụng S thay cho σ trong biến mới.

Ví dụ 7.5 Cho mẫu thực nghiệm

2948	2996	7197	8338	8500	8759	12710	12925
15767	20000	23247	24863	26000	26210	30552	30600
35700	36466	40316	40596	41021	41234	43000	44607
45000	45027	45442	46963	47978	49518	52000	53334
54208	56062	57000	57365	60020	60265	60803	62851
64404	72140	74594	79308	79500	80000	80000	84000
113000	118634						

Biểu đồ hộp của dữ liệu cho thấy, trừ hai ngoại lai ở phía cuối, phân phối của các giá trị tương đối đối xứng.



Xử lý số liệu được

- cỡ mẫu $n = 50$;
- giá trị trung bình mẫu $\overline{x} = 45.679,4$;
- giá trị trung vị mẫu $\tilde{x} = 45.013,5$ và
- giá trị độ lệch chuẩn mẫu $s = 26.641,675$,
- tứ phân vị lan truyền (khoảng cách từ tứ phân vị nhỏ đến tứ phân vị lớn) $f_s = 34265$.

Với độ tin cậy 95% giá trị $z_{0,025} = 1,96$ khoảng ước lượng cho trung bình là

$$\begin{aligned} 45.679,4 \pm (1,96)\left(\frac{26.641,675}{\sqrt{50}}\right) &= 45.679,4 \pm 7384,7 \\ &= (38.294,7; 53.064,1) \end{aligned}$$

Khoảng ước lượng này có độ rộng khá lớn do cỡ mẫu $n = 50$ chưa đủ lớn để vượt qua sự thay đổi đáng kể của mẫu.

7.2.2 Khoảng tin cậy tổng quát trong trường hợp mẫu lớn

Khoảng ước lượng $\overline{x} \pm z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ và $\overline{x} \pm z_{\alpha/2}.\frac{s}{\sqrt{n}}$ là một trường hợp đặc biệt của khoảng tin cậy của tham số θ khi mẫu có cỡ lớn. Giả sử $\hat{\theta}$ là ước lượng hợp lý thỏa tính chất sau:

1. có phân phối xấp xỉ chuẩn;
2. là ước lượng không chệch;
3. một biểu diễn của $\sigma_{\hat{\theta}}$, độ lệch tiêu chuẩn của $\hat{\theta}$ đã biết.

Ví dụ, trong trường hợp $\theta = \mu, \hat{\mu} = \overline{X}$ là một ước lượng không chệch của μ có phân phối xấp xỉ chuẩn khi n lớn và $\sigma_{\hat{\mu}} = \sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. Chuẩn tắc hóa $\hat{\theta}$ thành biến ngẫu nhiên $Z = (\hat{\theta} - \theta)/\sigma_{\hat{\theta}}$, có phân phối xấp xỉ chuẩn.

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \tag{7.9}$$

Đầu tiên giả sử $\sigma_{\hat{\theta}}$ không liên quan đến bất kỳ tham số nào (ví dụ, biết σ trong trường hợp $\theta = \mu$). Thay dấu $<$ trong (7.9) thành dấu $=$ ta có kết quả $\theta = \hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}.\sigma_{\hat{\theta}}$, vì vậy giới hạn trên và giới hạn dưới của khoảng ước lượng là

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2}.\sigma_{\hat{\theta}} \quad \text{và} \quad \hat{\theta} + z_{\alpha/2}.\sigma_{\hat{\theta}}.$$

Giả sử $\sigma_{\hat{\theta}}$ không liên quan đến θ nhưng có liên quan đến một vài tham số. Đặt $s_{\hat{\theta}}$ là ước lượng của $\sigma_{\hat{\theta}}$ điều này có được bằng cách ước lượng tham số chưa biết. (ví dụ $s/\sqrt{n}$ là ước lượng của $\sigma/\sqrt{n}$). Dưới những điều kiện chung (cần để $s/\sqrt{n}$ dần về $\sigma_{\hat{\theta}}$ cho hầu hết mẫu), giá trị khoảng tin cậy là $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}.s_{\hat{\theta}}$. Khoảng tin cậy của trung bình trong trường hợp mẫu lớn

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}.s/\sqrt{n} \quad \text{là một ví dụ.}$$

Cuối cùng, giả sử $\sigma_{\hat{\theta}}$ liên quan đến θ chưa biết. Với trường hợp này, xét ví dụ khi $\theta = p$ là một tỉ lệ tổng thể thì $(\hat{\theta} - \theta)/\sigma_{\hat{\theta}} = z_{\alpha/2}$ có thể khó để giải. Một giải pháp xấp xỉ có thể dùng là thay θ trong $\sigma_{\hat{\theta}}$ bằng ước lượng $\hat{\theta}$. Kết quả được ước lượng cho độ lệch chuẩn $s_{\hat{\theta}}$ và khoảng ước lượng tương ứng là

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}.s_{\hat{\theta}}.$$

7.2.3 Khoảng tin cậy cho tỉ lệ tổng thể

Đặt p là tỉ lệ tính chất quan tâm của tổng thể, đối tượng có tính chất cụ thể (ví dụ nhóm đối tượng tốt nghiệp từ một trường đại học, máy tính không cần dịch vụ bảo hành,...v.v). Mẫu ngẫu nhiên của n cá thể độc lập được chọn và X là số cá thể có tính chất quan tâm trong mẫu. Biết n nhỏ so với tổng thể thì X có thể xem là một biến ngẫu nhiên nhị thức với $E(X) = np$ và $\sigma_X = \sqrt{np(1-np)}$. Hơn nữa, nếu $np \geq 10, (q = 1-p)$ thì X có phân phối xấp xỉ chuẩn.

Ước lượng hợp lý của p là $\hat{p} = X/n$, khi đó $\hat{p}$ có được bằng cách nhân X với hằng số $1/n$ cũng là phân phối xấp xỉ chuẩn. Như trong mục 6.1 $E(\hat{p}) = p$ ($\hat{p}$ là một ước lượng không chệch của p) và sai số chuẩn $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}$. Độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_{\hat{p}}$ liên quan đến tham số p chưa biết. Chuẩn hóa $\hat{p}$ suy ra

$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z_{\alpha/2}) \approx 1-\alpha$$

Biến đổi xác suất như trong mục 7.1 "nguồn gốc của khoảng tin cậy", kết quả giới hạn khoảng tin cậy có được bằng cách thay < bằng dấu = và giải phương trình theo p. Ta được:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\hat{p} + z^2_{\alpha/2}/2n}{1 + z^2_{\alpha/2}/n} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n + z^2_{\alpha/2}/4n^2}}{1 + z^2_{\alpha/2}/n} \\ &= \tilde{p} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n + z^2_{\alpha/2}/4n^2}}{1 + z^2_{\alpha/2}/n} \end{aligned}$$

Mệnh đề 7.2.2. *Đặt* $\tilde{p} = \dfrac{\hat{p} + z^2_{\alpha/2}/2n}{1 + z^2_{\alpha/2}/n}$ *thì một khoảng tin cậy chi tỉ lệ của tổng thể* p *với độ tin cậy xấp xỉ* $100(1-\alpha)\%$ *là*

$$\tilde{p} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n + z^2_{\alpha/2}/4n^2}}{1 + z^2_{\alpha/2}/n} \tag{7.10}$$

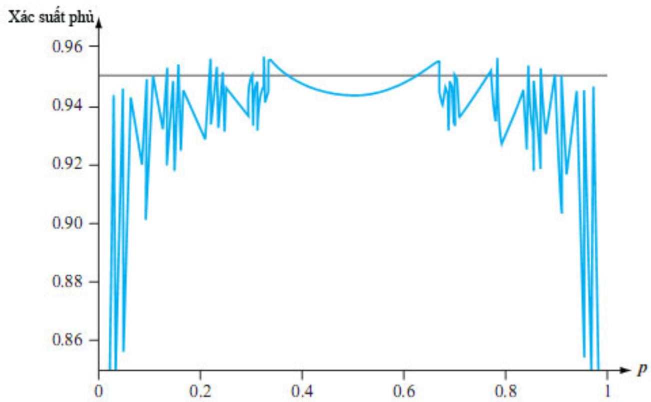
với $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ *và khi đó dấu - trong (7.10) là giới hạn dưới và dấu + là giới hạn trên. Đây là* ***khoảng ước lượng dấu*** *cho* p.

Nếu cỡ mẫu n rất lớn thì $z^2/2n$ không đáng kể (nhỏ), z^2/n rất nhỏ khi so sánh với $\hat{p}$ và 1. Từ đó $\tilde{p} \approx \hat{p}$ trong trường hợp này so sánh giữa $z^2/4n^2$ và pq/n cũng không đáng kể (n^2 là số chia lớn hơn n), chiếm ưu thế trong biểu thức $\pm$ là $z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$ khi đó tỉ lệ ước lượng của khoảng là xấp xỉ

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \tag{7.11}$$

Đây là khoảng ước lượng có dạng là $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ trong trường hợp mẫu lớn trong mục này. Khoảng tin cậy xấp xỉ (7.1) đã được giới thiệu trong nhiều sách về xác suất. Nó rõ ràng đơn giản và dễ hiểu hơn khoảng ước lượng dấu. Tại sao phải quan tâm đến khoảng ước lượng dấu?

Đầu tiên, giả sử dùng $z_{0{,}025} = 1,96$ trong công thức truyền thống (7.1), thì với độ tin cậy của khoảng ước lượng là xấp xỉ 95%, xác suất khoảng ngẫu nhiên bao gồm cả giá trị thực của p (tức là xác suất phủ) nên là 0,95. Theo biểu diễn của hình sau cho trường hợp n=100, xác suất phủ thực sự cho khoảng có thể khác nhau đáng kể so với xác suất chuẩn 0,95, đặc biệt khi p không gần với 0,5 (hình ảnh xác suất phủ p rất phức tạp vì phân phối xác suất nhị thức cơ bản là rời rạc chứ không liên tục). Nói chung khác biệt của khoảng truyền thống và độ tin cậy thực sự có thể không đáng kể khi cỡ mẫu lớn. Những nghiên cứu gần đây cũng chỉ ra rằng khoảng ước lượng dấu có thể khắc phục cho hầu như tất cả cỡ mẫu và tất cả giá trị của p, khoảng tin cậy thực sự sẽ ít khác biệt với khoảng ước lượng chuẩn do cách chọn $z_{\alpha/2}$. Thực tế là khoảng ước lượng dấu gần về 0,5 so với khoảng ước lượng chuẩn. Đặc biệt điểm $\tilde{p}$ của khoảng ước lượng dấu gần về 0,5 so với điểm $\hat{p}$ của khoảng truyền thống. Đó là điều đặc biệt khi p nằm trong khoảng 0 đến 1.



Xác suất phủ thực sự cho khoảng (7.1) cho các giá trị khác nhau của p khi $n = 100$.

Thêm vào đó, khoảng ước lượng dấu có thể sử dụng cho hầu hết các mẫu và giá trị tham số. Không cần kiểm tra điều kiện $n\hat{p} \geq 10$ và $n(1-\hat{p}) \geq 10$ thỏa yêu cầu của khoảng truyền thống.

Ví dụ 7.6 Môt mẫu thực nghiệm cỡ $n = 48$ có 16 thí nghiệm có kết quả quan tâm. Gọi p là tỉ lệ có kết quả quan tâm trong mọi thí nghiệm. Một ước lượng điểm cho p là $\hat{p} = 16/48 = 1/3 = 0,333$. Khoảng tin cậy cho p với độ tin cậy xấp xỉ 95%

$$\frac{0,333 + (1,96)^2/96}{1 + (1,96)^2/48} \pm \frac{\sqrt{(0,333)(0,667)/48 + (1,96)^2/9216}}{1 + (1,96)^2/48}$$
$$= 0,345 \pm 0,129 = (0,216; 0,474)$$

Khoảng này khá rộng vì cỡ mẫu $n = 48$ chưa đủ lớn. Khoảng ước lượng truyền thống là

$$0,333 \pm 1,96\sqrt{\frac{(0,333)(0,667)}{48}} = 0,333 \pm 0,133 = (0,200; 0,466)$$

Hai khoảng này khá gần nhau do thỏa mãn cỡ mẫu lớn.

Cỡ mẫu n cần thiết để khoảng ước lượng cho tỷ lệ p có độ rộng w là

$$n = \frac{2z^2\hat{p}\hat{q} - z^2w^2 \pm \sqrt{4z^4\hat{p}\hat{q}(\hat{p}\hat{q} - w^2) + w^4z^4}}{w^2} \tag{7.12}$$

Hay

$$n \approx \frac{4z^2\hat{p}\hat{q}}{w^2}$$

Tuy nhiên kết quả này vẫn chứa $\hat{p}$ chưa biết. Cách tiếp cận hay nhất dùng giá trị lớn nhất của $\hat{p}\hat{q} = \hat{p}(1-\hat{p})$ khi $\hat{p} = \hat{q} = 0,5$.

7.2.4 Khoảng tin cậy bất đối xứng

Khoảng tin cậy được nói đến có cả giới hạn dưới của độ tin cậy và giới hạn trên của độ tin cậy cho ước lượng tham số. Trong một số trường hợp, điều tra viên chỉ mong muốn hai loại ràng buộc. Ví dụ nhà tâm lý học muốn tính khoảng tin cậy 95% chặn trên cho thời gian phản ứng trung bình với một kích thích đặc biệt, hay một kỹ sư mong muốn chỉ có chặn dưới cho thời gian hoạt động trung bình của một loại nhất định. Vì vùng diện tích tích lũy ở dưới đường cong chuẩn ở bên trái giá trị 1,645 là 0,95 nên

$$P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < 1,645\right) \approx 0,95$$

Dùng bất đẳng thức trong ngoặc đơn biến đổi theo μ và thay biến chuẩn hóa bằng cách tính toán các giá trị được bất đẳng thức $\mu > \overline{x} - 1,645.s/\sqrt{n}$. Vế phải biểu diễn chặn dưới của khoảng tin cậy. Với $P(-1,645 < Z) \approx 0,95$ và biến đổi bất đẳng thức ta được chặn trên của tin cậy. Lập luận tương tự cho ràng buộc của mỗi bên với một độ tin cậy khác nhau.

Mệnh đề 7.2.3. *Với một mẫu lớn, khoảng chặn trên của μ là*

$$\mu < \overline{x} + z_{\alpha}.\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Với một mẫu lớn, khoảng chặn dưới của μ là

$$\mu > \overline{x} - z_{\alpha}.\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Khoảng ước lượng một phía cho p là kết quả của việc thay $z_{\alpha/2}$ bằng z_{α} và $\pm$ bởi + hay - trong công thức khoảng tin cậy cho p trong (7.10). Trong tất cả trường hợp độ tin cậy xấp xỉ là $100(1-\alpha)\%$.

Ví dụ 7.7 Một mẫu gồm 48 cá thể với giá trị trung bình mẫu $\overline{x} = 17,17$ và giá trị độ lệch chuẩn mẫu $s = 3,28$. Khoảng ước lượng chặn dưới của trung bình với độ tin cậy 95% là

$$17,17 - (1,645)\frac{(3,28)}{\sqrt{48}} = 17,17 - 0,78 = 16,39$$

Nghĩa là với độ tin cậy 95% ta có thể nói $\mu > 16,39$.

7.3 Các khoảng dựa trên phân phối chuẩn

Khoảng tin cậy cho μ dùng trong phần 7.2 có nghĩa khi n lớn. Kết quả là khoảng có thể sử dụng với bất kỳ phân phối nào của tổng thể. Tuy nhiên khi n nhỏ một cách để tìm khoảng ước lượng là đưa ra một giả thiết cụ thể về dạng phân phối của tổng thể, sau đó suy ra khoảng tin cậy phù hợp với giả thiết đó. Ví dụ, ta có thể đưa ra một khoảng tin cậy cho μ khi tổng thể được mô tả là có phân phối gamma, một khoảng khác cho trường hợp của phân phối Weibull, ... Các nhà thống kê đã thực hiện điều này cho một số họ phân phối khác nhau.

Giả Thiết 7.3.1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn với hai tham số μ và σ chưa biết.*

Kết quả chính của khoảng trong phần 7.2 là cho n lớn, biến ngẫu nhiên chuẩn hóa $Z = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ có phân phối xấp xỉ chuẩn. Khi n nhỏ, S có thể không dần về σ vì thế sự biến thiên của Z phát sinh trong cả tử số và mẫu số. Điều này suy ra rằng phân phối xác suất của $(\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ phân tán hơn phân phối chuẩn. Kết quả suy luận dựa trên việc giới thiệu một họ mới của phân phối xác suất gọi là phân phối t.

Định lý 7.3.2. *Nếu $\overline{X}$ là trung bình của mẫu ngẫu nhiên có kích thước n từ một phân phối chuẩn với kỳ vọng μ, biến ngẫu nhiên*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{7.13}$$

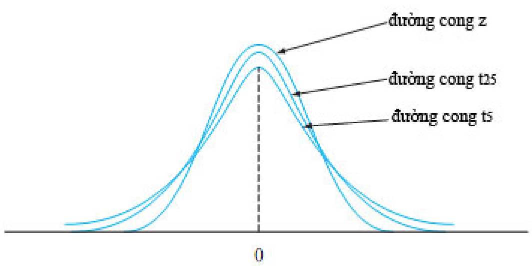
có một phân phối xác suất gọi là phân phối t với $n - 1$ bậc tự do.

7.3.1 Tính chất của phân phối t

Ký hiệu ν là bậc tự do, viết tắt là df, là bậc tự do của phân phối t. Giá trị có thể có của ν là những số dương 1,2,3.... Cho một giá trị ν bất kỳ hàm mật độ xác định phân phối t tương ứng phức tạp hơn hàm mật độ chuẩn. May mắn là ta chỉ cần quan tâm đến một vài tính chất quan trọng của đường cong mật độ này. Đặt t_ν ký hiệu là phân phối t với bậc tự do ν.

Tính chất của phân phối t.

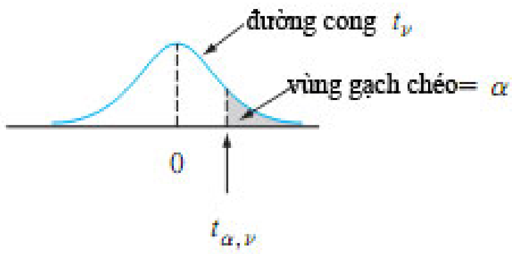
1. Đường cong t_ν có dạng chuông và trung vị tại 0.
2. Đường cong t_ν có độ trải rộng hơn đường cong của phân phối chuẩn tắc (z).
3. Khi ν tăng thì độ trải rộng của đường cong t_ν tương ứng giảm.
4. Khi $\nu \to \infty$, đường cong t_ν xấp xỉ với đường cong của phân phối chuẩn tắc (vì thế đường cong z thường được gọi là đường cong t với bậc tự do $df = \infty$.



Hình 7.7 Đường cong t_ν và z.

Mặc dù S dựa trên n độ lệch $X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$ nhưng $\sum(X_i - \overline{X}) = 0$ nên số bậc tự do (df) cho T trong (7.13) là $n-1$. Số bậc tự do cho biến t là căn cứ xác định số độ lệch tự do của ước lượng độ lệch chuẩn trong mẫu số của T.

Chú ý: Đặt $t_{\alpha,\nu}$ là số giá trị phân vị mức $100(1-\alpha)$ của phâ phối t với nu bậc tự do (df); tức là diện tích miền giới hạn bởi trục hoành đường cong t nằm về phía bên phải của giá trị $t_{\alpha,\nu}$ là α
Lấy ví dụ $t_{0,05;6}$ là giá trị phân vị mức 95 của phân phối t với 6 bậc tự do. Giá trị phân vị mức $t_{\alpha,\nu}$ được minh họa trong hình 7.8. Vì đường cong t đối xứng qua 0, $t_{1-\alpha,\nu} = -t_{\alpha,\nu}$. Giá trị phân vị mức $t_{\alpha,\nu}$ được biểu diễn trong bảng phụ lục A.5. Ví dụ để có được $t_{0,05;15} = 1,753$ ta đi từ cột $\alpha = 0,05$ chiếu xuống được dòng $\nu = 15$ và đọc được $t_{0,05;15} = 1,753$. Tương tự, $t_{0,05;22} = 1,717$ (cột 0,05 dòng $\nu = 22$), và $t_{0,01;22} = 2,508$.



Hình 7.8 Minh họa cho giá trị phân vị mức của phân phối t.

Với bậc tự do ν cố định, $t_{\alpha,\nu}$ tăng khi α giảm, khi đó ta phải di chuyển nhanh hơn về phía bên phải của 0 để xác định được khu vực α của phần đuôi. Cho α cố định, khi ν tăng (nghĩa là ta nhìn xuống bất kỳ cột nào của bảng t) giá trị của $t_{\alpha,\nu}$ giảm, vì thế không cần xa 0 để xác định miền đuôi có diện tích α. Thêm vào đó, $t_{\alpha,\nu}$ giảm chậm khi ν tăng. Do đó bảng giá trị phân vị mức của t biểu diễn sự tăng giữa 2 mốc bậc tự do 30 và 40 và nhảy tới $\nu = 50; 60; 120$ và cuối cùng là ∞. Vì t_∞ là đường cong của phân phối chuẩn. Họ các giá trị z_α xuất hiện vào dòng cuối của bảng. Công thức khoảng ước lượng CI sử dụng trước đó với mẫu lớn $(n > 40)$ ta xấp xỉ phân phối chuẩn cho phân phối t.

7.3.2 Khoảng tin cậy cho một mẫu t

Chuẩn hóa T có phân phối t với $n-1$ bậc tự do (df) và diện tích miền giới hạn đường cong mật độ t và trục hoành từ $-t_{\alpha/2,n-1}$ và $t_{\alpha/2,n-1}$ là $1-\alpha$ (Diện tích mỗi bên đuôi là $\alpha/2$). Do đó

$$P(-t_{\alpha/2,n-1} < T < t_{\alpha/2,n-1}) = 1-\alpha \tag{7.14}$$

Biểu thức 7.14 khác với biểu thức trong mục trước trong đó T và $t_{\alpha/2,n-1}$ thay cho Z và $z_{\alpha/2}$, nhưng nó được thao tác cùng một cách để có được khoảng tin cậy cho μ.

Mệnh đề 7.3.3. *Đặt $\overline{x}$ và s là trung bình mẫu và độ lệch tiêu chuẩn của mẫu của mẫu rút ngẫu nhiên từ tổng thể có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ. Thì khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho μ là*

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2,n\text{-}1}.\frac{s}{\sqrt{n}};\overline{x} + t_{\alpha/2,n\text{-}1}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \tag{7.15}$$

hay, gọn hơn , $\overline{x} \pm t_{\alpha/2,n-1}.s/\sqrt{n}$.
Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ chặn trên cho μ là

$$\left(-\infty;\overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

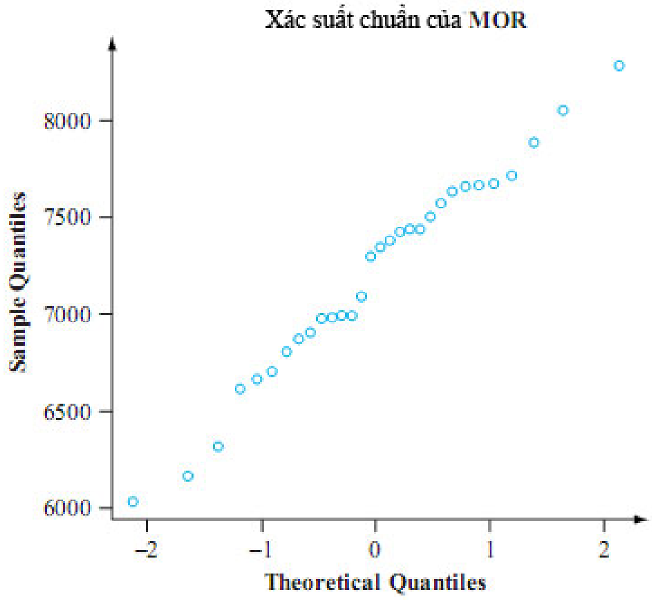
Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ chặn dưới cho μ là

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}.\frac{s}{\sqrt{n}};\infty\right)$$

Ví dụ 7.8 Dữ liệu sau đây là giá trị MOR (đơn vị: MPa) trong bài viết "Phát triển của nền công nghiệp Laminated Planks từ gỗ xẻ Sweetgum" (Tạp chí Kỹ sư cầu đường, 2008:64-66)

6807.99	7637.06	6663.28	6165.03	6991.41	6992.23
6981.46	7569.75	7437.88	6872.39	7663.19	6032.28
6906.04	6617.17	6984.12	7093.71	7659.50	7378.61
7295.54	6702.76	7440.17	8053.26	8284.75	7347.95
7422.69	7886.87	6316.67	7713.65	7503.33	7674.99

Hình 7.9 biểu diễn biểu đồ xác suất chuẩn của dữ liệu bởi phần mềm R. Độ thẳng của các điểm trong biểu đồ cung cấp một giải thích mạnh mẽ cho phân phối của tổng thể MOR là tại đó ít xấp xỉ chuẩn nhất.



Hình 7.9 Biểu đồ xác suất chuẩn của dữ liệu MOR.

Trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu lần lượt là 7203.191 và 543.54.
Bây giờ ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình đúng của MOR với độ tin cậy 95%. Khoảng tin cậy này dựa vào $n - 1 = 29$ bậc tự do, do đó giá trị tới hạn t cần tìm là $t_{0.025,29} = 2.045$. Khoảng ước lượng tìm được là:

$$\overline{x} \pm t_{0.025,29}.\frac{s}{\sqrt{n}} = 7230.191 \pm (2.045).\frac{543.54}{\sqrt{30}}$$

$$= 7230.191 \pm 202.938 = (7000.253, 7406.129)$$

Vậy ta ước lượng được $7000.253 < \mu < 7406.129$ với độ tin cậy 95%.
Chặn dưới của khoảng tin cậy 95% sẽ được tìm bằng cách thay giới hạn dưới của khoảng tin cậy vừa tìm với $t_{0.05,29} = 1.699$ thay cho 2.045.

7.3.3 Dự đoán khoảng cho một giá trị tương lai đơn

Trong nhiều ứng dụng, vấn đề dự đoán giá trị đơn của một biến được quan sát tại một số thời điểm tương lai, được quan tâm hơn là ước lượng giá trị trung bình của biến đó.

Ví dụ 7.9 Xét mẫu sau về hàm lượng chất béo (theo phần trăm) của mẫu gồm $n = 10$ xúc xích được chọn ngẫu nhiên ("Đánh giá cảm quan và cơ học về chất lượng xúc xích Frankfurters", J. of Texture Studies , 1990:395-409):

25.2 21.3 22.8 17.0 29.8 21.0 25.5 16.0 20.9 19.5

Giả sử tổng thể có phân phối chuẩn. Một khoảng tin cậy 95% cho trung bình tổng thể của hàm lượng chất béo là:

$$\overline{x} \pm t_{0.025,9}.\frac{s}{\sqrt{n}} = 21.9 \pm 2.262\frac{4.134}{\sqrt{10}} = 21.9 \pm 2.96$$
$$= (18.94, 24.86)$$

Tuy nhiên, giả sử bạn chỉ định ăn đúng một cây xúc xích loại này và muốn dự đoán hàm lượng chất béo trong cây xúc xích sẽ ăn. Một dự đoán dạng điểm, tương tự ước lượng điểm, chỉ là $\overline{x} = 21.9$. Dự đoán này không cho biết thông tin nào về độ tin cậy hay độ chính xác.

Thiết lập chung như sau: Ta có một mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ từ một tổng thể chuẩn, và muốn dự đoán giá trị đơn sẽ quan sát trong tương lai X_{n+1}. Một dự đoán dạng điểm là $\overline{X}$, và lỗi dự báo tương ứng là $\overline{X} - X_{n+1}$. Giá trị kỳ vọng của lỗi dự báo là:

$$E(\overline{X} - X_{n+1}) = E(\overline{X}) - E(X_{n+1}) = \mu - \mu = 0$$

Vì X_{n+1} độc lập với $X_1, \ldots, X_n$, nó cũng độc lập với $\overline{X}$, do đó phương sai của lỗi dư báo là:

$$V(\overline{X} - X_{n+1}) = V(\overline{X}) + V(X_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Lỗi dự báo là một tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và độc lập với nhau, vì vậy nó cũng có phân phối chuẩn. Do đó:

$$Z = \frac{(\overline{X} - X_{n+1}) - 0}{\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{\overline{X} - X_{n+1}}{\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}$$

có phân phối chuẩn chính tắc. Nếu thay σ bởi độ lệch tiêu chuẩn mẫu S (của mẫu $X_1, ..., X_n$) thì ta có biến ngẫu nhiên:

$$T = \frac{\overline{X} - X_{n+1}}{S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \sim$$

phân phối t với $(n-1)$ bậc tự do.

Biến đổi T thành $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ để xây dựng khoảng tin cậy cho kết quả sau đây.

Mệnh đề 7.3.4. *Một khoảng dự đoán (PI) cho một quan sát đơn từ tổng thể có phân phối chuẩn là*

$$\overline{x} \pm t_{\alpha/2,n-1}.s\sqrt{1+\frac{1}{n}} \tag{7.16}$$

Mức dự đoán là $100(1-\alpha)\%$. *Chặn dưới của dự đoán có được từ việc thay* $t_{\alpha/2}$ *bởi* t_α *và bỏ dấu* $+$ *trong (7.16); làm tương tự để có chặn trên của dự đoán.*

Cách hiểu mức dự đoán 95% tương tự độ tin cậy 95%; nếu khoảng (7.16) được tính lần lượt sau nhiều lần lấy mẫu, về lâu dài 95% các khoảng này sẽ chứa giá trị tương lai phù hợp của X.

Ví dụ 7.10 (Tiếp ví dụ 7.12) Với $n = 10, \overline{x} = 21.9, s = 4.134$, và $t_{0.025,9} = 2.262$, một khoảng dự đoán 95% cho hàm lượng chất béo trong 1 cây xúc xích là:

$$21.9 \pm (2.262)(4.134)\sqrt{1+\frac{1}{10}} = 21.9 \pm 9.81 = (12.09, 31.71)$$

Khoảng này khá rộng, cho thấy sự không chắc chắn đáng kể về hàm lượng chất béo. Chú ý là độ rộng của khoảng dự đoán gấp 3 lần so với khoảng tin cậy.

Lỗi dự đoán $\overline{X} - X_{n+1}$, là sai lệch giữa hai biến ngẫu nhiên, trong khi lỗi ước lượng $\overline{X} - \mu$, là sai lệch giữa một biến ngẫu nhiên và một giá trị cố định (tuy chưa biết). Khoảng dự đoán rộng hơn khoảng tin cậy vì có nhiều biến trong lỗi dự đoán hơn trong lỗi ước lượng.

7.3.4 Khoảng dung sai

Gọi k là một số nằm giữa 0 và 100. Một khoảng dung sai chứa ít nhất $k\%$ các giá trị của một tổng thể có phân phối chuẩn với độ tin cậy 95% có dạng:

$$\overline{x} \pm \text{ (giá trị tới hạn dung sai)}.s$$

Giá trị tới hạn dung sai cho $k = 90, 95$ và 99 kết hợp với các cỡ mẫu được cho trong Bảng A.6 phần Phụ lục. Bảng này cũng bao gồm các giá trị tới hạn cho độ tin cậy 99%. Thay $\pm$ bằng $+$ cho ta chặn trên dung sai, $-$ cho ta chặn dưới dung sai. Gía trị tới hạn để tính các chặn một phía cũng có trong Bảng A.6 phần phụ lục.

Ví dụ 7.11 Như một phần trong dự án lớn nghiên cứu về sự thay đổi của các tấm vỏ chịu lực, một thành phần cấu trúc đang được sử dụng rộng rãi ở Bắc Mỹ, bài viết "Tính uốn phụ thuộc thời gian của gỗ xẻ" (J.of Testing and Eval., 1996:187-193) báo cáo về các tính chất cơ học khác nhau của các mẫu gỗ thông Scotch. Xét những quan sát sau đây về mô-đun đàn hồi (MPa) thu được sau 1 phút tải một cấu hình nhất định:

10490	16620	17300	15480	12970	17260	13400	13900
13630	13260	14370	11700	15470	17840	14070	14760

Các lượng liên quan là $n = 16, \overline{x} = 14532.5, s = 2055.67$. Với độ tin cậy 95%, khoảng dung sai hai phía chứa ít nhất 95% giá trị mô-đun đàn hồi của các mẫu gỗ xẻ trong tổng thể với giá trị tới hạn dung sai 2.903 là:

$$14532.5 \pm (2.903)(2055.67) = 14532.5 \pm 5967.6 = (8564.9, 20500.1)$$

7.3.5 Khoảng dựa trên phân phối phi chuẩn của tổng thể

Khoảng tin cậy t trên một mẫu cho μ là robust tới nhỏ hay thậm chí lệch ra khỏi chuẩn trừ khi n khá nhỏ. Điều này có nghĩa là nếu giá trị phân vị mức cho khoảng tin cậy ví dụ như 95% thực sự gần với phân vị mức chuẩn với độ tin cậy là 95%. Nếu n nhỏ và phân phối tổng thể khá là phi chuẩn, thì độ tin cậy thực sự có sự khác biệt đáng kể so với mức giá trị phân vị có trong bảng t, nó sẽ gây ra phiền phức để tin rằng độ tin cậy của bạn là 95% trong khi thực ra là chỉ đạt được 88%. Phương pháp bootstrap, giới thiệu trong mục 7.1 là một cách tìm khoảng ước lượng tham số với trường hợp tổng thể phi chuẩn.

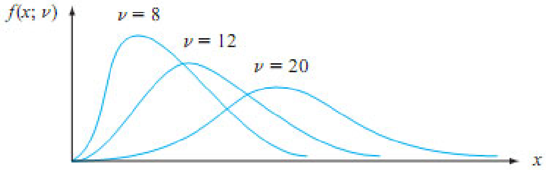
7.4 Khoảng tin cậy của phương sai và độ lệch chuẩn của phân phối chuẩn

Định lý 7.4.1. *Đặt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên từ phân phối chuẩn với tham số μ và σ^2. Thì rv*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

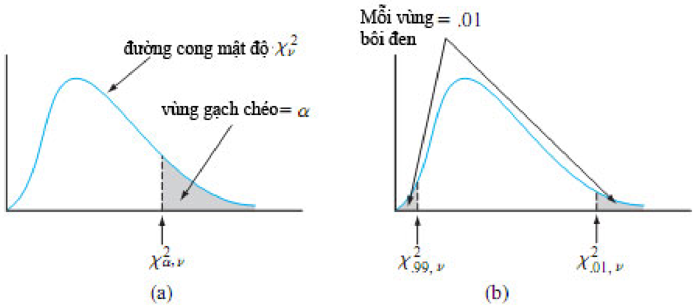
có phân phối chi bình phương (χ) với $n-1$ bậc tự do df

Như đã bàn trong các mục 4.4 và 7.1, phân phối Khi-bình phương là một phân phối liên tục với tham số ν, gọi là bậc tự do, có thể nhận giá trị $1, 2, 3, \ldots$ Đồ thị một số hàm mật độ xác suất χ^2 được minh họa trong Hình 7.10. Mỗi hàm mật độ xác suất $f(x; \nu)$ đều chỉ xác định dương khi $x > 0$, và có đồ thị nghiêng dương (phần đuôi trên kéo dài), tuy nhiên, phân phối di chuyển về bên phải và trở nên đối xứng hơn khi ν tăng.



Hình 7.10 Đồ thị các hàm mật độ Khi-bình phương

KÍ HIỆU Gọi $\chi^2_{\alpha,\nu}$ là giá trị phân vị mức $100(1-\alpha)$ của phân phối Khi-bình phương ν bậc tự do, tức là phần diện tích dưới đường cong mật độ Khi-bình phương ν bậc tự do, trên trục hoành và ở bên phải $\chi^2_{\alpha,\nu}$ bằng α.



Hình 7.11 Minh họa cho kí hiệu $\chi^2_{\alpha,\nu}$

Bảng A.7 phần Phụ lục chứa các giá trị phân vị mức của phân phối $\chi^2_{\alpha,\nu}$. Ví dụ, $\chi^2_{0.025,14} = 26.119$, và $\chi^2_{0.95,20} = 10.851$.

Biến ngẫu nhiên $(n-1)S^2/\sigma^2$ thỏa hai tính chất mà dựa vào đó phương pháp tổng quát để tìm khoảng tin cậy được xây dựng, đó là: biến này là một hàm theo tham số cần ước lượng σ^2; nhưng phân phối xác suất của nó (Khi-bình phương) lại không phụ thuộc vào tham số này. Phần diện tích dưới đường cong Khi-bình phương ν bậc tự do ở bên phải $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ là $\alpha/2$, bằng với phần diện tích ở bên trái $\chi^2_{1-(\alpha/2),\nu}$. Do đó, phần diện tích giữa hai giá trị tới hạn này là $(1-\alpha)$. Tức là:

$$P\left(\chi^2_{1-(\alpha/2),n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha \tag{7.17}$$

Bất đẳng thức trong (7.17) tương đương với

$$\frac{(n-1){S^2}^2}{\chi_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-(\alpha/2),n-1}}$$

Thay giá trị tính được s^2 vào các đầu mút cho ta khoảng tin cậy cho σ^2, và việc lấy tiếp căn bậc hai sẽ cho khoảng tin cậy của σ.
Một khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho phương sai σ^2 của một tổng thể chuẩn có giới hạn dưới là

$$(n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2,n-1}$$

và giới hạn trên là

$$(n-1)s^2/\chi^2_{1-(\alpha/2),n-1}$$

Một khoảng tin cậy cho σ có giới hạn dưới và giới hạn trên là căn bậc hai của giới hạn tương ứng của khoảng tin cậy cho σ^2. Một chặn tin cậy dưới hay trên sẽ được tìm bằng cách thay $\alpha/2$ bởi α trong giới hạn tương ứng của khoảng tin cậy.
Ví dụ 7.12 Dữ liệu đi kèm về điện áp phóng điện của các mạch điện quá tải được đọc từ một biểu đồ xác suất chuẩn xuất hiện trong bài viết "Hư hỏng bảng mạch in linh hoạt liên quan đến sự tăng điện áp do tia sét" (IEEE, Transactions on Components, Hybrids, and Manuf. Tech., 1985:214-220). Tính tuyến tính của biểu đồ cung cấp cơ sở vững chắc cho giả thiết rằng điện áp phóng điện có phân phối xấp xỉ chuẩn.
1470 1510 1690 1740 1900 2000 2030 2100 2190
2200 2290 2380 2390 2480 2500 2580 2700 Đặt σ^2 là phương sai của phân phối điện áp phóng điện. Giá trị phương sai mẫu tính được là $s^2 = 137324.3$, cũng là ước lượng điểm của σ^2. Với bậc tự do là $n-1 = 16$, để tìm khoảng tin cậy 95% cho σ^2 ta cần các giá trị tới hạn Khi-bình phương gồm $\chi^2_{0.975,16} = 6.908$ và $\chi^2_{0.025,16} = 28.845$. Khoảng tìm được là:

$$\left(\frac{16(137324.3)}{28.845}, \frac{16(137324.3)}{6.908}\right) = (76172.3, 318064.4)$$

Lấy căn bậc hai mỗi đầu mút được $(276.0, 564.0)$ là khoảng tin cậy 95% cho σ.
Các khoảng trên khá rộng, do sự biến động đáng kể của điện áp phóng điện và cỡ mẫu khá nhỏ.

Khoảng tin cậy cho σ và σ^2 là khó tìm được trong trường hợp phân phối tổng thể là phi chuẩn. Các bạn có thể tìm hiểu trong các sách chuyên khảo về thống kê.

Bài tập

Ước lượng trung bình tổng thể:

Bài tập 7.4.1 Trọng lượng X (kg/con) của một số con heo ở thời kì xuất chuồng là :

X (kg/con)	65-85	85 – 95	95 – 105	105 – 115	115-135
Số con	8	40	60	42	10

Giả sử X có phân phối chuẩn.Hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng 87% cho trọng lượng trung bình của loại heo trên . Biết trọng lượng 1 con heo được chọn ngẫu nhiên trong trại có phương sai là 225 kg^2.

Bài tập 7.4.2 Khảo sát chi tiêu X (triệu đồng/tháng) của một số người chọn ngẫu nhiên từ vùng A có thống kê sau:

X	3,2-3,7	3,7-4,2	4,2-4,7	4,7-5,2	5,2-5,7	5,7- 6,2	6,2-6,7
n_i	23	33	55	73	45	22	18

Tìm khoảng tin cậy đối xứng 98 % cho chi tiêu trung bình mỗi người dân vùng A. Đs: (4,750 ; 4,976)

Bài tập 7.4.3 Quan sát mức hao phí của 25 xe máy thuộc cùng một loại xe, chạy trên cùng một quãng đường, người ta thu được kết quả

Mức xăng (l)	1,9 – 2,1	2,1 – 2,3	2,3 – 2,5	2,5 – 2,7
Số xe	5	9	8	3

Hãy tìm ước lượng trung bình tối đa với độ tin cậy 99 % cho mức xăng hao phí trung bình của loại xe trên. Đs: 2,3669 lít

Bài tập 7.4.4 Quan sát 100 công nhân trong một xí nghiệp người ta tính được năng suất trung bình của một công nhân ở mẫu này là: $\overline{x} = 12$ sản phẩm/ngày và phương sai mẫu hiệu chỉnh là 25. Muốn ước lượng năng suất trung bình của một công nhân trong xí nghiệp với độ tin cậy 99% và độ chính xác $\epsilon = 0,8$ thì cần quan sát năng suất của bao nhiêu công nhân nữa?

Bài tập 7.4.5 Mức tiêu thụ X của mỗi hộ gia đình vùng A trong mùa khô năm nay có phân phối chuẩn. Điều tra 1 số hộ gia đình vùng A :

X(kwh/t)	65-115	115-165	165-215	215-265	265-315	315-365	365-415	415-465
Số hộ	24	36	75	94	97	125	84	75

Nếu muốn ước lượng mức tiêu thụ điện trung bình các hộ vùng A trong mùa khô năm nay với độ chính xác 10 kwh/tháng thì độ tin cậy bằng ? đs: 99%

Ước lượng tỉ lệ tổng thể

Bài tập 7.4.6 Công ty M kiểm tra ngẫu nhiên 1200 sản phẩm do ca sáng sản xuất thấy có 45 sản phẩm không đạt chuẩn . Tính tỷ lệ sản phẩm đạt chuẩn tối đa do ca sáng sản xuất với độ tin cậy 99%.

Bài tập 7.4.7 Đo chiều dài 1 số sản phẩm do nhà máy A sản xuất:

X(cm)	53,8	53,81	53,82	53,83	53,84	53,85	53,86	53,87
Số sản phẩm	9	14	30	47	40	33	15	12

Biết X có phân phối chuẩn. Tìm khoảng ước lượng đối xứng 98 % cho tỉ lệ sản phẩm có chiều dài trên 53,84 cm. đs (22,45 % ; 37,55%)

Bài tập 7.4.8 Phỏng vấn 400 người ở một khu vực thấy 240 người ủng hộ dự luật A.

1. Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng tỷ lệ người ủng hộ dự luật A. đs (0,5520; 0,6480)

2. Nếu độ chính xác là 0,057 khi ước lượng tỉ lệ đối xứng thì độ tin cậy là bao nhiêu?

Ước lượng phương sai tổng thể

Bài tập 7.4.9 Độ dày của bản kim loại tuân theo luật phân phối chuẩn. Đo 10 bản kim loại người ta tính được phương sai hiệu chỉnh của mẫu là 0,1367. Hãy xác định khoảng tin cậy 95% cho phương sai của độ dày đó. Đs (0,064; 0,456)

Bài tập tổng hợp

Bài tập 7.4.10 Khảo sát chi tiêu X (triệu đồng/tháng) của một số người vùng A có thống kê sau (Biết X có phân phối chuẩn)

X	3,2-3,7	3,7-4,2	4,2-4,7	4,7-5,2	5,2-5,7	5,7- 6,2	6,2-6,7
Số người	23	33	55	73	45	22	18

1. Tìm khoảng tin cậy 95 % cho tỉ lệ người có chi tiêu trên 5,7 triệu đồng/ tháng vùng A.

2. Biết vùng A có 50 000 người. Tìm số người ở vùng A có chi tiêu trên 5,7 triệu đồng/tháng với độ tin cậy 95%.

3. Biết vùng A có 10 000 người chi tiêu trên 5,7 triệu đồng/ tháng . Tìm số người vùng A có với độ tin cậy 95 %

Bài tập 7.4.11 Khảo sát năng suất lúa thu được bảng số liệu sau:

Năng suất (tấn/ha)	5,1	5,4	5,5	5,6	5,8	6,2	6,4
Diện tích có năng suất tương ứng (ha)	10	20	30	15	10	10	5

Tìm ước lượng trung bình tối thiểu cho năng suất lúa trung bình ở vùng đó với độ tin cậy 95%

Bài tập 7.4.12 Đo chiều dài 1 số sản phẩm do nhà máy A sản xuất, có thống kê sau: (X có phân phối chuẩn).

Chiều dài X(cm)	53,80	53,81	53,82	53,83	53,84	53,85	53,86	53,87
Số sản phẩm	9	14	30	47	40	33	15	12

1. Tìm khoảng tin cậy 95% cho chiều dài trung bình các sản phẩm do nhà máy A sản xuất.

2. Tìm khoảng tin cậy 98% cho tỉ lệ sản phẩm có chiều dài trên 53,84 cm.

Bài tập 7.4.13 Công ty M có 3000 đại lý, cho tiến hành điều tra ngẫu nhiên một số đại lý của mình và thu được bảng số liệu sau (X là doanh số, đơn vị: triệu đồng/tháng), biết X có phân phối chuẩn.

Chiều dài X(cm)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
Số sản phẩm	7	12	18	27	22	17	13	4

1. Những đại lý có X>45 triệu đồng/tháng gọi là đại lý có doanh số cao. Hãy ước lượng số đại lý có doanh số cao với độ tin cậy 95%. Đs: (609;1089)

2. Hãy ước lượng doanh số trung bình/tháng của các đại lý với độ tin cậy 99%. Đs(37,4 ; 41,6)

Bài tập 7.4.14 Khảo sát mức tiêu thụ điện X của một số hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên ở vùng A ta được bảng số liệu sau:

X(kwh/tháng)	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450
Số hộ	24	36	55	64	50	35	20	15

1. Ước lượng mức tiêu thụ điện trung bình của các hộ gia đình ở vùng A với độ tin cậy 99%.

2. Hộ có mức tiêu thụ điện dưới 100kwh/tháng gọi là hộ có mức tiêu thụ điện thấp. hãy ước lượng số hộ có mức tiêu thụ điện thấp ở vùng A với độ tin cậy 98% .Biết vùng A có 10.000 hộ dân. Đs: (437; 1169)

Bài tập 7.4.15 Khảo sát thu nhập tại một doanh nghiệp có số liệu:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
Số lao động	24	10	26	18	22

1. Nếu dùng số liệu trên để ước lượng thu nhập trung bình của một người với sai số ko quá 0,5 triệu đồng/tháng thì điều tra ít nhất bao nhiêu người, với độ tin cậy 94 %. Đs: 122

2. Nếu dùng số liệu trên để ước lượng tỷ lệ người thu nhập thấp với sai số 1%. Hỏi độ tin cậy của ước lượng này khoảng bao nhiêu? Biết người thu nhập thấp có thu nhập từ 6 trd/tháng trở xuống.

Bài tập 7.4.16 Có số liệu thống kê về thu nhập (X: triệu đồng/ tháng) của 100 người ở một công ty như sau:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	1-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-13
Số người	4	10	17	24	25	9	6	5

1. Nếu muốn độ chính xác khi ước lượng thu nhập trung bình là 0,25 (triệu đồng/ tháng) và độ tin cậy là 97% thì cần khảo sát bao nhiêu người?

2. Nếu muốn ước lượng thu nhập trung bình của các nhân viên ở công ty này có độ chính xác là 0,25 (triệu đồng/ tháng) thì độ tin cậy đạt được bao nhiêu %?

Bài tập 7.4.17 Khảo sát chi tiêu X (triệu đồng/tháng) của một số hộ gia đình gồm 3 người (hai vợ chồng và một đứa con) chọn ngẫu nhiên từ vùng A, ta thu được số liệu sau :

X (triệu đồng)	7-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-18
Số hộ gia đình	10	42	62	78	85	81	65	40	9

Giả sử X có phân phối chuẩn.

1. Tìm khoảng tin cậy 98% cho chi tiêu trung bình mỗi hộ gia đình gồm 3 người ở vùng A.

2. Tìm khoảng tin cậy 96% cho tỷ lệ hộ gia đình gồm 3 người ở vùng A có mức chi tiêu từ 10 triệu đồng trở lên trong một tháng.

3. Nếu độ rộng của khoảng ước lượng cho tỷ lệ hộ gia đình gồm 3 người ở vùng A có mức chi tiêu từ 10 triệu đồng trở lên trong một tháng là 0,02 thì độ tin cậy của khoảng này là bao nhiêu?

4. Nếu muốn tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ hộ gia đình gồm 3 người ở vùng A có mức chi tiêu từ 10 triệu đồng trở lên trong một tháng với sai số không vượt quá 0,01 thì cần quan sát tối thiểu bao nhiêu hộ gia đình?

Bài tập 7.4.18 Quan sát trọng lượng X (kg/con) của một số con heo ở thời kì xuất chuồng ở trang trại M ta có số liệu

X (kg)	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115	115-120	120-125	125-130	130-135
Số heo	8	40	60	83	88	82	66	39	11

1. Hãy ước lượng trọng lượng trung bình tối đa của 1 con heo thời kỳ xuất chuồng với độ tin cậy 96%.

2. Tỷ lệ heo xuất chuồng có trọng lượng ít nhất là 100kg tối đa là bao nhiêu? tối thiểu là bao nhiêu với độ tin cậy 98%. Biết trang trại có 1200 con heo đến thời kì xuất chuồng, hãy ước lượng số heo xuất chuồng có trọng lượng ít nhất là 100kg với độ tin cậy 98%.

3. Tìm khoảng tin cậy 97% cho trọng lượng các con heo thời kì xuất chuồng có trọng lượng từ 100kg trở lên.

Bài tập 7.4.19 Thống kê số sản phẩm loại S bán được tại 38 cửa hàng trong chuỗi các cửa hàng tiện lợi A trong một ngày ta thu được giá trị trung bình mẫu là 15,865 sản phẩm với độ lệch chuẩn mẫu là 0,238 sản phẩm. Giả sử số sản phẩm loại S bán được tại một cửa hàng trong chuỗi các hàng tiện lợi A trong một ngày có phân phối chuẩn.

1. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho số sản phẩm loại S trung bình bán được trong một ngày tại một của hàng trong chuỗi các cửa hàng tiện lợi A.

2. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho phương sai của số sản phẩm loại S bán được trong một ngày tại một của hàng trong chuỗi các cửa hàng tiện lợi A.

Bài tập 7.4.20 Để ước lượng số chim trong một vườn chim người ta bắt 400 con và đeo vòng vào chân chim, sau đó thả lại vào vườn chim. Sau 1 thời gian họ bắt 500 con chim trong vườn thấy có 46 con có đánh dấu. Tìm khoảng tin cậy 98% cho số chim trong vườn chim.

Chương 8

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT DỰA TRÊN MỘT MẪU

8.1 Giả thuyết và thủ tục kiểm định

Một giả thuyết thống kê, hay giả thuyết, là một phát biểu hay sự khẳng định về

- giá trị của một tham số đơn (đặc điểm của tổng thể hay đặc điểm phân phối xác suất)
- giá trị của một số tham số
- hay về hình dạng của phân phối xác suất

Ví dụ như

- Giả thiết là phát biểu $\mu = 0,75$, khi μ là trung bình đúng của đường kính bên trong một loại ống PVC xác định. Ví dụ khác là phát biểu $p < 0,10$, khi p là tỉ lệ mạch bị lỗi trong tất cả các mạch được sản xuất từ một nhà máy.
- Nếu μ_1 và μ_2 ký hiệu cho trung bình đúng sức mạnh phá vỡ nút thắt của hai loại dây khác nhau. Một giả thiết khẳng định $\mu_1 - \mu_2 = 0$, và một phát biểu khác là $\mu_1 - \mu_2 > 5$.
- Một ví dụ khác của giả thiết là khẳng định rằng dưới một điều kiện xác định khoảng cách dừng có phân phối chuẩn.

Giả thuyết không về tham số sẽ được xét trong Chương 14. Trong chương này và một số chương, ta sẽ tập trung trên giả thuyết về tham số.

Trong bất kỳ vấn đề nào về kiểm định giả thuyết, cũng đều có hai giả thuyết mâu thuẫn được xét. Một giả thuyết có thể phát biểu $\mu = 0,75$ và giả thuyết khác là $\mu \neq 0,75$. Hay hai phát biểu mâu thuẫn có thể là $p \geq 10$ và $p < 10$. Dựa trên thông tin về mẫu sẽ quyết định giả thuyết nào sẽ đúng. Giống như trong một phiên tòa xét xử. Một tuyên bố khẳng định cá nhân bị buộc tội là vô tội. Trong hệ thống tư pháp U.S, khẳng định ban đầu này được cho là đúng, chỉ khi đối mặt với những bằng chứng mạnh mẽ ngược lại bị cáo thì bồi thẩm đoàn sẽ bác bỏ tuyên bố này để ủng hộ khẳng định khác là bị cáo phạm tội.

Tương tự, trong kiểm định giả thuyết thống kê, vấn đề là xây dựng phát biểu ban đầu được ủng hộ. Phát biểu ban đầu này sẽ không bị bác bỏ hay bị yêu cầu thay thế trừ khi có bằng chứng mạnh mẽ từ mẫu cung cấp cho khẳng định khác.

Định nghĩa 8.1.1. Giả thuyết không, ký hiệu H_0 là phát biểu ban đầu được giả định là đúng. Giả thuyết thay thế hay đối thuyết, ký hiệu là H_a là khẳng định mâu thuẫn với H_0.

Giả thuyết không sẽ được thay thế bởi giả thiết khác nếu bằng chứng từ mẫu cho thấy H_0 sai. Nếu không có mâu thuẫn mạnh với H_0, ta sẽ tiếp tục tin vào tính hợp lý của giả thuyết không. Hai kết luận có thể có của quá trình kiểm định giả thuyết là từ chối H_0 hay không từ chối H_0.

Một kiểm định của giả thiết là phương pháp sử dụng thông tin từ dữ liệu mẫu để đưa ra quyết định bác bỏ hay chấp nhận giả thiết không. Kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 0,75$ với đối thuyết $H_a : \mu \neq 0,75$. Chỉ khi dữ liệu mẫu gợi ý mạnh rằng μ khác 0,75 thì sẽ bác bỏ giả thiết không. Trong trường hợp không có bằng chứng đó ta chấp nhận H_0.

Trong nhiều tình huống, H_a được gọi là "giả thiết của nhà nghiên cứu" khi đó phát biểu của nghiên cứu viên được xác nhận. Từ không trong giả thuyết không có nghĩa là "không bất kỳ giá trị nào, hiệu quả hay hậu quả," gợi ý rằng H_0 nên xác định giả thiết không đổi (từ ý kiến cũ), không khác , không cải tiến, và ... Ví dụ như 10% bảng mạch được sản xuất bởi cùng một nhà máy trong thời gian gần đây là có khiếm khuyết. Một kỹ sư đề nghị thay đổi dây chuyền sản xuất với niềm tin là nó sẽ có kết quả trong việc giảm tỉ lệ khiếm khuyết. Đặt p là ký hiệu tỉ lệ đúng của khiếm khuyết của mạch kết quả từ việc thay đổi qui trình. Khi đó ta kiểm định giả thuyết $p \geq 0,10$ với đối thuyết là $H_a : p < 0,10$.

Trong cách xử lý của chúng tôi về kiểm định giả thuyết, H_0 được xem như một phát biểu bình đẳng. Nếu θ ký hiệu là tham số quan tâm, giả thuyết không sẽ có dạng $H_0 : \theta = \theta_0$, khi θ_0 là số đặc biệt gọi là giá trị không của tham số. Như ví dụ xét tình hình bảng mạch được nói như trên luận. Đối thuyết được đề nghị thay thế cho giả thuyết $H_0 : p = 0,10$ là $H_a : p < 0,10$, tỉ lệ khiếm khuyết giảm khi sửa đổi quá trình sản xuất. Nếu quá trình mới xảy ra một trong hai tình huông hoặc tốt hơn hoặc xấu hơn quá trình cũ thì ta xét đối thuyết thay thế cho $H_0 : p = 0,10$ là $H_a : p \neq 0,10$.

Việc thay thế giả thiết không $H_0 : \theta = \theta_0$ giống như ba khẳng định sau:

1. $H_a : \theta > \theta_0$ (trong những trường hợp tiềm ẩn giả thiết không là $\theta \leq \theta_0$)

2. $H_a : \theta < \theta_0$ (trong những trường hợp tiềm ẩn giả thiết không là $\theta \geq \theta_0$) hay

3. $H_a : \theta \neq \theta_0$

8.1.1 Quá trình kiểm định

Quá trình kiểm định là một qui tắc, dựa trên dữ liệu mẫu, cho quyết định có nên bác bỏ H_0.
Kiểm định giả thuyết $H_0 : p = 0,10$ với đối thuyết $H_a : p < 0,10$ trong ví dụ về bảng mạch có thể dựa trên kiểm định mẫu ngẫu nhiên của $n = 200$ bảng mạch. Ký hiệu X là số bảng mạch bị khiếm khuyết trong mẫu, X là một biến ngẫu nhiên nhị thức. x đại diện cho giá trị quan sát của X. Nếu H_0 đúng, $E(X) = np = 200.(0,10) = 20$ trong khi ta mong muốn có ít hơn 20 bảng mạch khiếm khuyết nếu H_a là đúng. Một giá trị x chỉ cần ít hơn 20 không mâu thuẫn mạnh với H_0 đó là lý do bác bỏ H_0 nếu $x \leq 15$ và không bác bỏ H_0 trong trường hợp ngược lại.
Quá trình kiểm định có hai phần:
(1) Xác định một kiểm định thống kê, hay hàm của dữ liệu mẫu dùng để đưa ra quyết định.
(2) Tìm vùng bác bỏ bao gồm cả giá trị x cho H_0 sẽ bị bác bỏ H_a.
Với ví dụ trên, giá trị bị bác bỏ bao gồm x=0,1,2,..., và 15. H_0 sẽ không bị bác bỏ nếu $x = 16, 17, \ldots, 199$, hay 200.
Một quá trình kiểm định bao gồm những qui định sau:

1. Một kiểm định thống kê, hay hàm của dữ liệu mẫu dùng để đưa ra quyết định bác bỏ H_0 hay chấp nhận H_0

2. Giả thuyết không sẽ bị bác bỏ nếu và chỉ nếu quan sát hoặc tính toán được giá trị kiểm định thống kê rơi vào vùng bác bỏ. Vùng bác bỏ là một tập hợp tất cả giá trị kiểm định thống kê cho H_0 sẽ bị bác bỏ

8.1.2 Sai lầm trong kiểm định giả thiết

Định nghĩa 8.1.2. Sai lầm loại I là bác bỏ giả thiết không H_0 khi nó đúng. Sai lầm loại II là việc chấp nhận H_0 khi H_0 sai.

Quá trình kiểm định tối ưu nhất là không xảy ra sai lầm. Tuy nhiên, ý tưởng này chỉ đạt được khi quyết định đưa ra dựa trên việc kiểm tra toàn bộ tổng thể ban đầu. Hơn nữa khó khăn của việc đưa ra quyết định của một quá trình là dựa trên dữ liệu mẫu. Một mẫu không đại diện cho tổng thể, ví dụ một giá trị của $\overline{X}$ khác μ hay giá trị của $\hat{p}$ khác giá trị ban đầu p sẽ là nguy cơ dẫn đến sai lầm của quá trình kiểm định.

Thay vì đòi hỏi một quá trình kiểm định không xảy ra sai lầm, ta phải tìm ra một quá trình sao cho cả hai loại sai lầm đều có thể không thể xảy ra. Nghĩa là, một quá trình kiểm định tốt tức là xác suất xáy ra cả hai loại sai lầm đều nhỏ. Lựa chọn một vùng bác bỏ có giá trị xác suất phù hợp cho sai lầm loại I và loại II, xác suất xảy ra những sai lầm này được ký hiệu tương ứng bởi α và β. Vì H_0 có giá trị duy nhất là tham số, đó là giá trị đơn α. Tuy nhiên, có một giá trị khác của β cho mỗi giá trị của tham số phù hợp với H_a.

Ví dụ 8.1 25% khách hàng hài lòng với chất lượng phục vụ tại cửa hàng A. Trong thời gian gần đây nhân viên cửa hàng nỗ lực tăng chất lượng phục vụ. Gọi p tỉ lệ khách hàng hài lòng. Hãy kiểm định gỉa thiết cho p.
Giả thuyết $H_0 : p = 0,25$ và đối thuyết $H_a : p > 0,25$.
Khảo sát 20 khách hàng, giả thuyết H_0 sẽ bị bác bỏ khi số khách hàng hài lòng là lớn. Xét quá trình sau:

$$\text{Kiểm định thống kê: } X = \text{số khách hàng hài lòng}$$
$$\text{Miền bác bỏ: } R_8 = \{8, 9, \ldots, 19, 20\}; \quad \text{tức là, bác bỏ } H_0 \text{ nếu } x \geq 8$$

Khi H_0 đúng, X có phân phối nhị thức với $n = 20$ và $p = 0,25$.

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Sai lầm loại I} = P(\text{bác bỏ} \quad H_0 \quad \text{khi nó đúng})\\ &= P(X \geq 8 \quad \text{khi} \quad X \sim Bin(20; 0,25)) = 1 - B(7; 20; 0,25)\\ &= 1 - 0,989 = 0,102\end{aligned}$$

Ngược lại giá trị β có nhiều giá trị tương ứng với mỗi giá trị của p khác 0,25.

$$\begin{aligned}\beta(0,3) &= P(\text{Sai lầm loại II khi} \quad p = 0,3)\\ &= P(\text{Không bác bỏ} \quad H_0 \quad \text{khi nó sai vì} \quad p = 0,3)\\ &= P(X \leq 7 \quad \text{khi} \quad X \sim Bin(20; 0,3)) = 1 - B(7; 20; 0,3 = 0,772\end{aligned}$$

Tương tự $\beta(0,4) = 0,416$; $\beta(0,5) = 0,132$; $\beta(0,6) = 0,021$; $\beta(0,7) = 0,001$.

8.2 Kiểm định về trung bình tổng thể

Những thảo luận chung trong chương 7 về Khoảng tin cậy cho một tổng thể có kỳ vọng μ tập trung ở ba trường hợp khác nhau. Ta sẽ xây dựng quá trình kiểm định cho những trường hợp này.

8.2.1 Trường hợp I: Một tổng thể chuẩn với Σ đã biết

Mặc dù giả thiết về giá trị σ đã biết rất hiếm gặp trong thực tế, tuy nhiên trường hợp này đơn giản và tính chất của nó có thể xây dựng được. Giả thiết không trong cả ba trường hợp nói rằng μ có giá trị đặc biệt ký hiệu là μ_0. Đặt $X_1, \ldots, X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên kích thước n có phân phối chuẩn. Thì trung bình mẫu $\overline{X}$ cũng có phân phối chuẩn với giá trị kỳ vọng $\mu_{\overline{X}} = \mu$ và độ lệch chuẩn $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. Khi H_0 đúng, $\mu_{\overline{X}} = \mu_0$. Xét thống kê Z chuẩn hóa bởi $\overline{X}$ với giả thiết H_0 đúng.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Giả sử đối thuyết có dạng $H_a : \mu > \mu_0$. Thì một giá trị $\overline{x}$ ít hơn μ_0 chắc chắn không thể hỗ trợ cho việc chấp nhận H_a. Vì thế một $\overline{x}$ phù hợp để bác bỏ H_0 là một giá trị làm z âm (khi $\overline{x} - \mu_0$ là số âm nên khi chia cho $\sigma/\sqrt{n}$ là số âm). Tương tự, một giá trị $\overline{x}$ mà vượt quá μ_0 chỉ một số lượng nhỏ (tương ứng với z, là số dương nhưng nhỏ) cũng không gợi ý rằng nên bác bỏ H_0 và ủng hộ H_a. Bác bỏ H_0 phù hợp chỉ khi $\overline{x}$ vượt quá μ_0 đáng kể, nghĩa là, khi giá trị z dương và lớn. Vùng bác

bỏ phù hợp, dựa trên kiểm định thống kê Z có dạng $z \geq c$.
Như trong lập luận của phần 8.1, giá trị c nên chọn để xác định xác suất của sai lầm loại I tại mức α mong muốn. Điều này dễ dàng làm được vì phân phối của kiểm định thống kê Z khi H_0 đúng là phân phối chuẩn tắc. Như một ví dụ, đặt $c = 1,645$, giá trị phân vị thứ 95 của phân phối chuẩn tắc ($z_{0,05} = 1,645$). Thì

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{sai lầm loại I}) = P(\text{bác bỏ} \quad H_0 \quad \text{khi} \quad H_0 \quad \text{đúng}) \\ &= P(Z \geq 1,645 \quad \text{khi} \quad Z \sim N(0,1)) = 1 - \Phi(1,645) = 0,05\end{aligned}$$

Nói chung, vùng bác bỏ $z \geq z_\alpha$ có xác suất sai lầm loại I mức α.

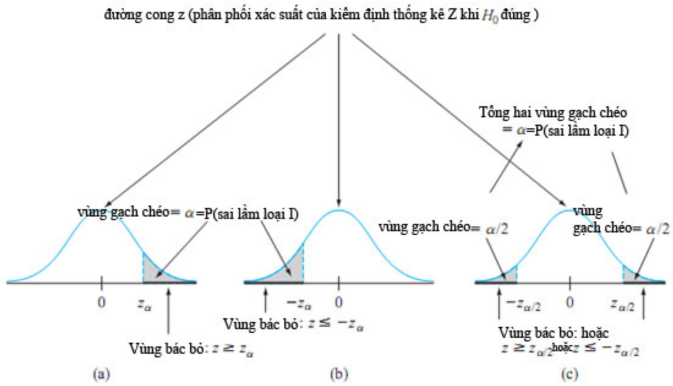
Lập luận tương tự cho đối thuyết $H_a : \mu < \mu_0$, vùng bác bỏ có dạng $z \leq c$, khi đó c là số âm được chọn thỏa mãn ($\overline{x}$ ở phía dưới μ_0 nếu và chỉ nếu z là số âm). Vì Z có phân phối chuẩn tắc khi H_0 đúng, lấy $c = -z_\alpha P(\text{ sai lầm loại I }) = \alpha$. Đây là kiểm định bên trái. Lấy ví dụ , $z_{0,10} = 1,28$ suy ra vùng bác bỏ $z \leq -128$ với mức ý nghĩa 0,10.

Cuối cùng, khi đối thuyết là $H_a : \mu \neq \mu_0$, nên bác bỏ H_0 nếu $\overline{x}$ quá xa so với μ_0, điều này tương đương với bác bỏ H_0 hay nếu $z \geq c$ hoặc nếu $z \leq -c$. Giả sử $\alpha = 0,5$ thì:

$$\begin{aligned}0,05 &= P(Z \geq c \quad \text{hay} \quad Z \leq -c) \\ &= \Phi(-c) + 1 - \Phi(c) = 2[1 - \Phi(c)]\end{aligned}$$

Giả thiết không: $H_0 : \mu = \mu_0$
Giá trị kiểm định thống kê: $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Đối thuyết	Vùng bác bỏ cho kiểm định mức α
$H_a : \mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$ (kiểm định phía bên phải)
$H_a : \mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$ (kiểm định phía bên trái)
$H_a : \mu \neq \mu_0$	$z \geq z_{\alpha/2}$ hoặc $z \leq -z_{\alpha/2}$ (kiểm định hai bên)



Hình 8.2 Vùng bác bỏ cho kiểm định: (a) kiểm định bên trái; (b) kiểm định bên phải; (c) kiểm đ

Thủ tục kiểm định giả thuyết về tham số.

1. Xác định tham số cần quan tâm và mô tả nó trong bối cảnh xảy ra vấn đề.
2. Xác định giá trị không và giả thuyết không.
3. Xác định đối thuyết.
4. Cho một công thức để tính giá trị của kiểm định thống kê.
5. Xác định vùng bác bỏ với mức ý nghĩa α.
6. Tính tham số mẫu cần thiết, thay thế vào công thức cho giá trị kiểm định thống kê để tính giá trị kiểm định thống kê.
7. Quyết định có nên bác bỏ H_0 hay không.

Công thức của bước 2 và 3 nên thực hiện trước khi kiểm tra dữ liệu.
Ví dụ 8.2 Nhà sản xuất hệ thống vòi phun nước dùng bảo vệ lửa trong cao ốc văn phòng phát biểu rằng trung bình đúng của hệ thống sẽ được kích hoạt khi nhiệt độ là 130^o. Một mẫu $n = 9$ hệ thống, khi kiểm tra có năng suất của trung bình mẫu kích hoạt với nhiệt độ $131,08^oF$. Nếu phân phối của thời gian hoạt động là chuẩn với độ lệch chuẩn 1.5^oF dữ liệu mâu thuẫn nào với phát biểu của nhà sản xuất có mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$?

1. Tham số cần quan tâm μ là giá trị đúng của hệ thống.
2. Giả thuyết $H_0 : \mu = 130, \quad \mu_0 = 130.$

3. Đối thuyết $H_a : \mu \neq 130$.

4. Giá trị kiểm định
$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - 130}{1,5/\sqrt{n}}$$

5. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ miền bác bỏ là $z \geq z_{0,005} = 2,58$ hoặc $z \leq -z_{0,005} = -2,58$.

6. Thay $n = 9$ và $\overline{x} = 131,08$
$$z = \frac{131,08 - 130}{1,5/\sqrt{9}} = \frac{1,08}{0,5} = 2,16$$

7. z không rơi vào miền bác bỏ giả thuyết. Vì thế không bác bỏ giả thuyết H_0 với mức ý nghĩa 0,01.

$$\beta(\mu') = P(\text{chấp nhận} H_0 \text{khi } \mu = \mu')$$

‘

8.2.2 Trường hợp II: Kiểm định cho mẫu lớn

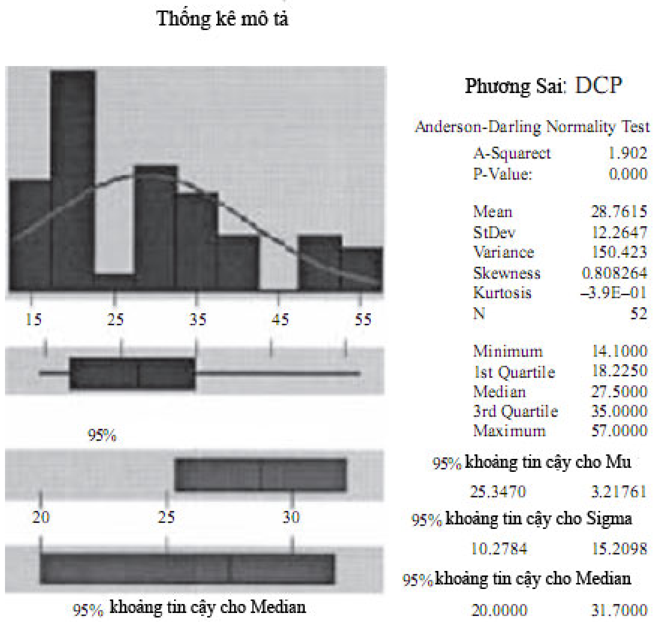
Khi cỡ mẫu lớn, kiểm định z cho trường hợp I có thể dễ dàng xác định giá trị cho quá trình kiểm định mà không cần yêu cầu là phân phối chuẩn hay σ đã biết. Với cỡ mẫu n lớn, như lập luận trong chương 7 biến chuẩn tắc hóa là:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

có phân phối xấp xỉ chuẩn tắc. Thay giá trị μ bằng giá trị không μ_0 ta được kiểm định thống kê
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$
Có phân phối xấp xỉ chuẩn tắc khi H_0 đúng.

Ví dụ 8.3 Một máy đo trọng lực hình nón (DCP) dùng để đo độ thấm xuyên ($mm/blow$) có hình nón được đưa vào vỉa hè hay lề đường. Giả sử cho một ứng dụng đặc biệt mà có giá trị trung bình đúng DCP cho một loại hình nón đặc biệt ít hơn 30. Hình nón này sẽ không được ứng dụng nếu không có bằng chứng kết luận kết luận về đặc điểm kỹ thuật đã được đáp ứng. Đặt bài toán thích hợp về kiểm định giả thiết sử dụng dữ liệu sau ("Mô hình xác suất phân tích các giá trị kiểm tra sức cản thẩm xuyên của nón trọng lực trong đánh giá cấu trúc vỉa hè" J.of Testing and Evaluation, 1999:7-14)

14.1	14.5	15.5	16.0	16.0	16.7	16.9	17.1	17.5	17.8
17.8	18.1	18.2	18.3	18.3	19.0	19.2	19.4	20.0	20.0
20.8	20.8	21.0	21.5	23.5	27.5	27.5	28.0	28.3	30.0
30.0	31.6	31.7	31.7	32.5	33.5	33.9	35.0	35.0	35.0
36.7	40.0	40.0	41.3	41.7	47.5	50.0	51.0	51.8	54.4
55.0	57.0								



Hình 8.3 Biểu diễn một bảng tóm tắt từ phần mềm minitab.

1. μ là giá trị trung bình đúng của DCP.
2. Giả thuyết $H_0 : \mu = 30$.
3. Đối thuyết $H_a : \mu < 30$.
4. Giá trị kiểm định
$$z = \frac{\overline{x} - 30}{s/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - 130}{1,5/\sqrt{n}}$$
5. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ miền bác bỏ là $z \geq -1,6445$.

6. Thay $n = 52$ và $\overline{x} = 28,76$ và $s = 12,2647$.

$$z = \frac{28,76 - 30}{12,2647/\sqrt{52}} = \frac{-1,24}{1,701} = -0,73$$

7. Vì $-0,7 > -1,645$ ta không bác bỏ giả thuyết H_0.

8.2.3 Trường hợp III: Phân phối chuẩn của tổng thể

Khi n nhỏ, định lý giới hạn trung tâm không còn có thể viện dẫn để kiểm định cho mẫu lớn. Ta sẽ giả định rằng phân phối của tổng thể ít nhất xấp xỉ chuẩn và mô tả quá trình kiểm định có hiệu lực dựa trên giả định này. Nếu quan sát viên có lý do tốt để tin rằng phân phối của tổng thể khá là phi chuẩn thì một kiểm định cho họ phân phối khác với họ chuẩn sẽ được xét trong chương 15 hoặc có thể phát triển bằng quá trình bootstrap.
Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là biến ngẫu nhiên từ phân phối chuẩn, biến ngẫu nhiên

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

có phân phối t với $n - 1$ bậc tự do. Kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$ với đối thuyết $H_a : \mu > \mu_0$ bằng cách xét kiểm định thống kê $T = (\overline{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$. Dùng $S/\sqrt{n}$, để ước lượng cho độ lệch chuẩn của $\overline{X}$ hơn là dùng $\sigma/\sqrt{n}$. Khi H_0 đúng, kiểm định thống kê T có phân phối t với $n - 1$ bậc tự do. Khi H_0 đúng, vùng bác bỏ là vùng xảy ra sai lầm xác suất loại I. Sử dụng giá trị phân vị mức của phân phối t với $n - 1$ bậc tự do $t_{\alpha,n-1}$ để xác định vùng bác bỏ $t \geq t_{\alpha,n-1}$ ta có

$$\begin{aligned} P(\text{ sai lầm loại I }) &= P(\text{Bác bỏ} \quad H_0 \quad \text{khi nó đúng}) \\ &= P(T \geq t_{\alpha,n-1} \quad \text{khi} \quad T \quad \text{có phân phối} \quad t \quad \text{với} \quad n-1 \quad \text{bậc tự do}) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Kiểm định thống kê này giống như trong trường hợp mẫu lớn nhưng đặt là T để nhấn mạnh rằng phân phối không của nó là một phân phối t với $n - 1$ bậc tự đo chứ không phỉa là phân phối chuẩn z. Vùng bác bỏ cho kiểm định t khác kiểm định z là giá phân vị mức $t_{\alpha,n-1}$ thay cho giá trị phân vị mức z_α.

Kiểm định một mẫu t
Giả thuyết không: $H_0 : \mu = \mu_0$
Giá trị kiểm định: $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Đối thuyết	Vùng bác bỏ cho kiểm định mức α
$H_a : \mu > \mu_0$	$t \geq t_{\alpha,n-1}$ (kiểm định bên phải)
$H_a : \mu < \mu_0$	$t \leq t_{\alpha,n-1}$ (kiểm định bên trái)
$H_a : \mu \neq \mu_0$	$t \geq t_{\alpha/2,n-1}$ hoặc $t \leq t_{\alpha/2,n-1}$ (kiểm định hai bên)

8.3 Kiểm định về tỷ lệ

Ký hiệu p là tỉ lệ cá thể hoặc đối tượng trong một tổng thể có có tính chất xác định (ví dụ tỷ lệ xe hơi truyền động bằng tay hay tỷ lệ người hút thuốc bằng bộ lọc điếu thuốc). Nếu một cá thể hay đối tượng với tính chất được cho là thành công (S) thì p là tỉ lệ thành công của tổng thể. Kiểm định liên quan đến p bằng cách dựa vào cỡ n của mẫu ngẫu nhiên lấy từ tổng thể. Gọi X là số cá thể thành công trong mẫu cỡ n, thì X có phân phối nhị thức với 2 tham số n, p. Khi n lớn ($np \geq 10$ và $n(1-p) \geq 10$), thì X có phân phối xấp xỉ chuẩn. Đầu tiên ta xét kiểm định với trường hợp mẫu lớn, sau đó với trường hợp mẫu nhỏ mà ta dùng trực tiếp phân phối nhị thức.

8.3.1 Kiểm định tỷ lệ p trường hợp mẫu lớn

Kiểm định p trường hợp mẫu là một trường hợp đặc biệt của quá trình tham số θ nói chung với cỡ mẫu lớn. Đặt $\hat{\theta}$ là ước lượng không chệch của θ và có xấp xỉ phân phối chuẩn với giả thuyết không có dạng $H_0 : \theta = \theta_0$ khi ký hiệu θ_0 là một số (giá trị không). Giả sử khi H_0 đúng, độ lệch chuẩn của $\hat{\theta}$, là $\sigma_{\hat{\theta}}$. Ví dụ như $\theta = \mu$ và $\hat{\theta} = \overline{X}, \sigma_{\hat{\theta}} = \sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.
Tiêu chuẩn kiểm định

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

Nếu đối thuyết là $H_a : \theta > \theta_0$ một kiểm định bên phải với mức ý nghĩa xấp xỉ α được qui định bởi vùng bác bỏ $z \geq z_\alpha$.
Hai đối thuyết khác là $H_a : \theta < \theta_0$ và $H_a : \theta \neq \theta_0$ tương ứng với kiểm định bên trái và kiểm định hai bên cho z.

Trong trường hợp $\theta = p, \sigma_{\hat{\theta}}$ sẽ không liên quan đến bất kỳ tham số chưa biết nào khi H_0 đúng, đây không phải là trường hợp điển hình. Khi $\sigma_{\hat{\theta}}$ liên quan đến tham số chưa biết, thường thì có thể sử dụng ước lượng có độ lệch chuẩn $S_{\hat{\theta}}$ ở vị trí $\sigma_{\hat{\theta}}$ và Z vẫn có phân phối xấp xỉ chuẩn khi H_0 đúng (vì khi n lớn, $s_{\hat{\theta}} \approx \sigma_{\hat{\theta}}$ với hầu hết mẫu). Kiểm định mẫu lớn cho phần trước được trang bị ví dụ này: Vì σ thường không biết, ta dùng $s_{\hat{\theta}} = s_{\overline{X}} = s/\sqrt{n}$ thay cho $\sigma/\sqrt{n}$ trong mẫu của z.
Ước lượng $\hat{p}$ là không chệch $(E(\hat{p}) = p)$, có phân phối xấp xỉ chuẩn, và độ lệch chuẩn của nó là $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}$. Thực tế đã được dùng trong Phần 7.2 để có khoảng tin cậy cho p. Khi H_0 đúng, $E(\hat{p}) = p_0$và $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$, vì thế $\sigma_{\hat{p}}$ không liên quan đến bất kỳ tham số chưa biết nào. Ta có kiểm định sau khi n lớn và H_0 đúng

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

có phân phối xấp xỉ chuẩn. Nếu giả thiết thay thế là $H_a : p > p_0$ và dùng vùng bác bỏ phía bên phải $z \geq z_\alpha$, thì

$$\begin{aligned} P(\text{sai lầm loại I}) &= P(H_0 \quad \text{bị bác bỏ khi nó đúng }) \\ &= P(Z \geq z_\alpha \text{ khi Z có phân phối xấp xỉ chuẩn }) \approx \alpha \end{aligned}$$

Vì thế mức ý nghĩa mong muốn của α đạt được bằng cách sử dụng giá trị tới hạn mà có trong vùng lấy trên đường cong phía bên phải của α. Vùng bác bỏ cho hai giả thiết thay thế khác, bên trái cho $H_a : p < p_0$ và hai bên cho $H_a : p \neq p_0$, là hợp lý trong những loại như vậy.

Giả thiết không: $H_0 : p = p_0$
Giá trị kiểm định thống kê: $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$

Đối thuyết	Vùng bác bỏ
$H_a : p > p_0$	$z \geq z_\alpha$(bên phải)
$H_a : p < p_0$	$z \leq z_\alpha$(bên trái)
$H_a : p \neq p_0$	hoặc $z \geq z_\alpha$ hoặc $z \leq -z_{\alpha/2}$(hai bên)

Qúa trình kiểm định này cung cấp giá trị mà $np_0 \geq 10$ và $n(1-p_0) \geq 10$

8.3.2 Kiểm định tỷ lệ p trường hợp mẫu nhỏ

Quá trình kiểm định khi cỡ mẫu n nhỏ dựa trực tiếp vào phân phối nhị thức hơn là xấp xỉ chuẩn. Xét giả thiết thay thế $H_a : p > p_0$ và đặt X là số thành công trong mẫu. Thì là kiểm định thống kê, và vùng bác bỏ phía bên phải có dạng $x \geq c$ khi H_0 đúng. X có phân phối nhị thức với tham số n và p_0, vì thế

$$
\begin{aligned}
P(\text{sai lầm loại I}) &= P(H_0 \quad \text{bị bác bỏ khi nó đúng}) \\
&= P(X \geq c \quad \text{khi} \quad X \sim Bin(n, p_0)) \\
&= 1 - P(X \leq c - 1 \quad \text{khi} \quad X \sim Bin(n, p_0)) \\
&= 1 - B(c - 1; n, p_0)
\end{aligned}
$$

Khi giá trị tới hạn c giảm, nhiều giá trị X sẽ có trong vùng bác bỏ và P(sai lầm loại I) tăng vì X có phân phối xác suất rời rạc, thường không thể tìm được giá trị c chính xác cho P(sai lầm loại I) với mức ý nghĩa mong muốn α (ví dụ 0,05 hay 0,01). Thêm vào đó vùng bác bỏ lớn nhất có dạng $\{c, c+1, \ldots, n\}$ thỏa $1 - B(c - 1 : n, p_0) \leq \alpha$ được sử dụng. Quá trình kiểm định cho $H_a : p < p_0$ và cho $H_a : p \neq p_0$ tương tự như cách xây dựng trước, vùng bác bỏ xấp xỉ có dạng $x \leq c$ (một kiểm định bên trái). Giá trị tới hạn c là số lớn nhất thỏa $B(c; n, p_0) \leq \alpha$. Vùng bác bỏ khi giả thiết thay thế là $H_a : p \neq p_0$ bao gồm cả giá trị X lớn và nhỏ.

8.4 P giá trị

Sử dụng vùng bác bỏ để kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa α, theo đó tính giá trị của kiểm định thống kê, và giả thiết không H_0 bị bác bỏ nếu có giá trị tính được thuộc miền bác bỏ, ngược lại không bác bỏ H_0. Bây giờ ta xét cách khác để có kết luận trong phân tích kiểm định giả thiết. Cách thay thế này dựa trên việc tính toán một xác suất gọi là P giá trị. Một cách tự nhiên ta thấy P giá trị cung cấp một độ đo về chiều dài của bằng chứng trong dữ liệu chống lại H_0.

Định nghĩa 8.4.1. Giả sử rằng thiết H_0 đúng, từ các giá trị của mẫu đã tính sẵn, P giá trị là một xác suất tính một giá trị của kiểm định thống kê ít nhất là mâu thuẫn với H_0.

Định nghĩa này khá ngắn gọn. Ta cần xem những điểm chính sau

- P giá trị là một xác suất

- Xác suất này tính được bằng cách giả sử H_0 đúng
- Chú ý là P giá trị không phải là xác suất để H_0 đúng, cũng không là xác suất sai lầm
- Để xác định P giá trị, đầu tiên ta phải quyết định giá trị nào của kiểm định thống kê là ít nhất là mâu thuẫn với H_0 tính được từ mẫu có sẵn.

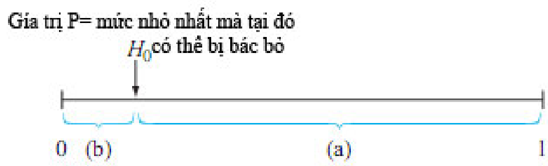
Qui tắc quyết định trên P giá trị.
Chọn mức ý nghĩa α (xác suất mắc sai lầm loại I). Khi đó

$$\text{Bác bỏ } H_0 \text{ nếu giá trị P} \le \alpha$$
$$\text{Không bác bỏ } H_0 \text{ nếu giá trị P} > \alpha$$

Do đó nếu giá trị P vượt quá lựa chọn mức ý nghĩa, giả thiết không không thể bác bỏ tại mức đó, nhưng nếu giá trị P bằng hoặc nhỏ hơn α thì có đủ bằng chứng để chấp nhận H_0. Ví dụ ta tính giá trị $P = 0,0012$ thì phải sử dụng mức ý nghĩa 0,01. Ta sẽ bác bỏ giả thiết không và chấp nhận giả thiết thay thế vì $0,0012 < 0,01$. Tuy nhiên, giả sử ta chọn mức ý nghĩa là 0,001 thì khi đó phải có nhiều bằng chứng hơn từ dữ liệu trước khi H_0 có thể bị bác bỏ. Trong trường hợp này ta không nên bác bỏ H_0 vì $0,0012 > 0,001$.
Làm thế nào để so sánh quy tắc quyết định dựa trên giá trị P với quy tắc quyết định tiếp cận thông qua vùng bác bỏ? Hai quá trình của phương pháp vùng bác bỏ và phương pháp P giá trị trên thực tế là như nhau. Bất kể kết luận đạt được bằng cách nào thì vùng bác bỏ với giá trị α cụ thể cũng là kết luận với việc sử dụng P giá trị với cùng mức ý nghĩa α.

Mệnh đề 8.4.2. *P giá trị là mức ý nghĩa α nhỏ nhất mà tại đó giá trị không có thể bị bác bỏ. Vì vậy P giá trị là mức ý nghĩa được giới thiệu thay thế mức ý nghĩa quan sát được cho dữ liệu.*

Thông thường dữ liệu gọi là ý nghĩa khi H_0 bị bác bỏ và ngược lại là không có nghĩa. P giá trị là mức nhỏ nhất tại dữ liệu là ý nghĩa.



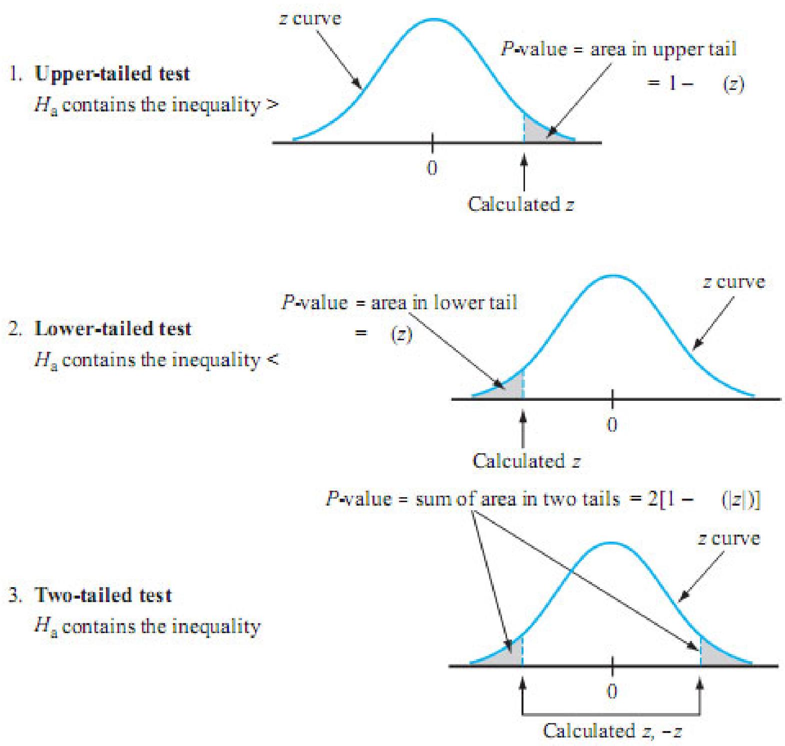
Hình 8.8 So sánh α và P giá trị P: (a) bác bỏ H_0; (b) không bác bỏ H_0

8.4.1 P giá trị cho kiểm định z

P giá trị cho kiểm định z (dựa trên kiểm định thống kê ít nhất có phân phối xấp xỉ chuẩn). Xét một kiểm định bên phải và đặt z là giá trịtính được từ kiểm định thống kê z. Giả thiết không bị bác bỏ nếu $z \geq z_\alpha$ và P giá trị là giá trị α nhỏ nhất trong trường hợp này. Khi z_α tăng thì α giảm, P giá trị là giá trị của α khi $z = z_\alpha$, tức là $P -$ giá trị $= 1 - \Phi(z)$. Lập luận tương tự cho kiểm định bên trái.
Với kiểm định hai bên, đầu tiên giả sử z là số dương thì P giá trị là giá trị α thỏa $z = z_{\alpha/2}$ (nghĩa là tính z bằng giá trị tới hạn bên phải). Điều này nói lên rằng xét vùng phía bên phải là một nửa của P giá trị, vì thế P giá trị $= 2[1 - \Phi(z)]$. Nếu z là số âm, P giá trị là α khi cho $z = -z_{\alpha/2}$, hay , tương đương với $-z = z_{\alpha/2}$, vì thế P giá trị$= 2[1 - \Phi(-z)]$. Khi đó $-z = |z|$ khi z là số âm, P giá trị $= 2[1 - \Phi(|z|)]$ cho cả z âm và z dương.

$$\boxed{P \text{ giá trị: } P = \begin{cases} 1 - \Phi(z) & \text{cho kiểm định bên phải của } z \\ \Phi(z) & \text{cho kiểm định bên phải của } z \\ 2[1 - \Phi(|z|)] & \text{cho kiểm định hai bên của } z \end{cases}}$$

Ba trường hợp này được minh họa trong hình 8.9.



Hình 8.9 Xác định P giá trị cho kiểm định z

Ví dụ 8.4 Độ dày cho các tấm silicon được sử dụng trong một loại mạch tích hợp nhất định được kỳ vọng là 245 μm. Một mẫu gồm 50 tấm và mỗi tấm có một độ dày xác định, kết quả trung bình mẫu của độ dày là 246.18 μm và độ lệch chuẩn 3.60μm. Dữ liệu này có cho thấy độ dày trung bình của tấm khác với giá trị kỳ vọng không?

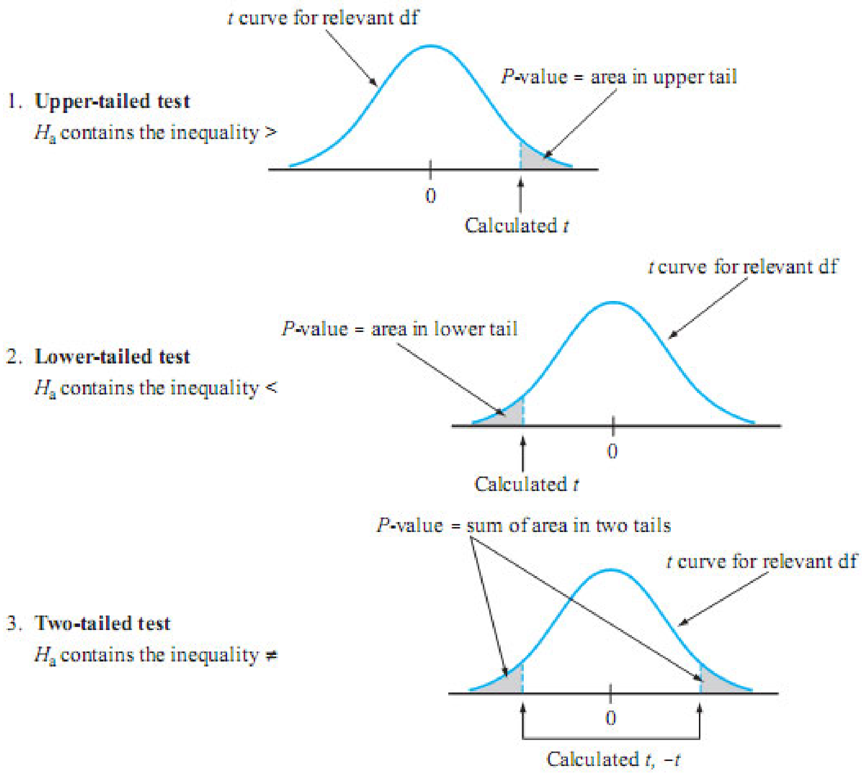
1. Tham số quan tâm μ là độ dày trung bình của các tấm silicon.
2. Giả thuyết $H_0 : \mu = 245$.
3. Đối thuyết $H_a : \mu \neq 245$.
4. Giá trị kiểm định $z = \frac{\overline{x}-245}{s/\sqrt{n}}$
5. Tính giá trị kiểm đinh $\frac{246{,}18-245}{3{,}6/\sqrt{50}} = 2,32$
6. Xác định P giá trị với kiểm định hai phía,

$$P - \text{giá trị} \quad = 2(1 - \Phi(2,32)) = 0,0204$$

7. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ ta không bác bỏ giả thuyết H_0 vì 0,0204>0,01. Với mức ý nghĩa này ta chưa đủ bằng chứng để bác bỏ độ dày của các tấm silicon khác độ dày kỳ vọng.

8.4.2 P giá trị cho kiểm định t

Cũng giống như P giá trị cho kiểm định z là vùng đường cong z, P giá trị cho kiểm định t sẽ là vùng đường cong t với bậc tự do là $n-1$ được minh họa trong hình 8.10.



Hình 8.10 P giá trị cho kiểm định t.

Bảng của giá trị tới hạn t dùng ở phần trước cho khoảng tin cậy và dự đoán sẽ không có đủ thông tin về bất kỳ phân phối t cụ thể nào để xác định chính xác vùng mong muốn trong đó có cả vùng bên phải của đường cong t, ta có bảng Phụ lục A.8. Mỗi cột khác nhau của của bảng cho một số bậc tự do khác nhau và những dòng này dùng để tính giá trị của kiểm định thống kê t được sắp xếp từ 0.0 đến 4.0 tăng dần đến 1. Cho ví dụ, số 074 xuất hiện tại giao của dòng tại 1.6 và cột tại bậc

tự do (df) 8, vì thế vùng dưới đường cong t với 8 bậc tự do về phía bên phải của 1.6 (một vùng bên phải) là 0,074 vì đường cong t đối xứng nên 0,074 cũng có vùng dưới đường cong về phía bên trái của -1.6 (vùng dưới bên trái).
Ví dụ như, kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 100$ với đối thuyết $H_a : \mu > 100$ dựa vào phân phối t với 8 bậc tự do. Nếu tính được giá trị thống kê t là 1.6 thì P giá trị cho kiểm định bên phải là 0,074 vì 0,074 vượt quá 0,05 nên ta không thể bác bỏ H_0 tại mức ý nghĩa 0,05. Nếu giả thiết thay thế là $H_a : \mu < 100$ và kiểm định dựa trên vùng 20 bậc tự do với $t = -3.2$, theo bảng phụ lục A.8 P giá trị vùng bên trái là 0,002. Giả thuyết không có thể bị bác bỏ tại mức 0,05 hoặc 0,01. Kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ với đối thuyết $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Giả thuyết không nói rằng trung bình của 2 tổng thể được xác định trong khi giả thiết thay thế nói rằng chúng khác nhau mà không thể xác định được H_0. Nếu một kiểm định t dựa trên 20 bậc tự do và $t = 3,2$ thì P giá trị cho kiểm định hai bên là $2(0,002) = 0,004$. Đây cũng là P giá trị với $t = -3,2$ vùng đuôi được gấp đôi lên vì giá trị của cả hai lớn hơn 3,2 và nhỏ hơn -3,2 điều này mâu thuẫn với H_0 đã tính (giá trị được sinh ra từ đuôi của đường cong t).

8.5 Một số chú ý về chọn thủ tục kiểm định

Một trong những thử nghiệm để trả lời cho câu hỏi cần quan tâm và phương pháp thu thập dữ liệu (thiết kế một thí nghiệm) để xây dựng kiểm định xấp xỉ bao gồm ba điểm chính sau:

1. Chỉ định một thử nghiệm thống kê (hàm của giá trị quan sát sẽ giúp cho việc đưa ra quyết định)

2. Quyết định dạng chung của vùng bác bỏ (hàm của các giá trị quan sát sử dụng cho việc đưa ra quyết định).

3. Chọn một số những giá trị quan trọng hoặc những giá trị mà sẽ không phụ thuộc vào vùng bác bỏ từ vùng chấp nhận được (bằng cách lấy phân phối của kiểm định thống kê khi H_0 đúng, và sau đó chọn ra một mức ý nghĩa).

Trong những ví dụ trước đó cả bước 1 và bước 2 đều được thực hiện theo một cách thức đặc biệt thông qua trực giác, ví dụ giả sử khi tổng thể về cơ bản có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và σ đã biết, từ $\overline{X}$ ta có biến chuẩn hóa cho kiểm định thống kê:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$ với đối thuyết $H_a : \mu > \mu_0$, bằng trực giác ta đề nghị bác bỏ H_0 khi Z lớn, cuối cùng giá trị quan trọng được xác định bằng mức ý nghĩa của α và dùng giá trị thực Z có phân phối chuẩn, khi H_0 đúng. Độ tin cậy của kiểm định trong việc đưa ra một quyết định đúng có thể đánh giá được bằng những nghiên cứu về sai lầm loại II trong xác suất. Vấn đề cần xem xét ở đây là khi thực hiện các bước từ 1-3 có những câu hỏi cần giải quyết sau.

1. Ý nghĩa thực tế và hệ quả của chọn một mức ý nghĩa cụ thể khi đã xác định được thử nghiệm là gì?

2. Có tồn tại nguyên tắc chung không phụ thuộc vào trực giác mà có thể sử dụng để thu được một quá trình kiểm định tốt nhất hoặc tốt hay không?

3. Khi hai hay nhiều kiểm định là phù hợp trong cùng một bối cảnh phải so sánh những kiểm định đó như thế nào để đưa ra quyết định nên sử dụng cái nào?

4. Nếu một kiểm định xuất phát từ giả thiết có phân phối cụ thể hay từ mẫu tổng thể, kiểm định sẽ có dạng như thế nào khi vi phạm giả thiết?

8.5.1 Ý nghĩa thống kê trong thực tế

Mặc dù quá trình đưa ra quyết định bằng cách sử dụng phương pháp luận cổ điển liên quan đến việc chọn mức ý nghĩa và sau đó bác bỏ hoặc không bác bỏ H_0 tại mức α đó, một báo cáo về việc sử dụng α để đưa ra quyết định lại truyền tải ít thông tin về dữ liệu mẫu. Đặc biệt khi kết quả của một thử nghiệm lại truyền đạt đến nhiều người, bác bỏ H_0 tại mức .05 sẽ thuyết phục hơn nếu giá trị quan sát của kiểm định thống kê sẽ vượt quá 5% giá trị điều kiện nếu nó vượt quá giá trị đó sẽ bác bỏ H_0. Điều này đúng với những yêu cầu dẫn đến khái niệm của giá trị P như cách có được mức ý nghĩa mà không cần áp đặt cho nó để có một giá trị α đặc biệt mà người khác muốn đưa ra quyết định cho riêng họ.

Thậm chí nếu giá trị P có trong bảng tóm tắt kết quả, có thể rất khó để giải thích giá trị này để đưa ra quyết định. Đó là vì, một giá trị P nhỏ sẽ chỉ ra một ý nghĩa thống kê, khi đó sẽ đề nghị bác bỏ H_0 và chấp nhận H_a, Khi kết quả là một mẫu lớn bắt đầu từ H_0 thì ít có ý nghĩa trong thực tế hơn. Trong nhiều tình huống, thử nghiệm chỉ bắt đầu từ H_0 lại ít có ý nghĩa trong thực tế trong khi với mức độ nhỏ từ H_0 lại có ý nghĩa thực tế hơn

Xét ví dụ, Kiểm định $H_0 : \mu = 100$ ngược lại $H_a : \mu > 100$ khi μ là kỳ vọng của phân phối chuẩn với $\sigma = 10$, giả sử giá trị đúng của $\mu = 101$, sẽ không thấy được tầm quan trọng của H_0 bằng trực quan ta không bác bỏ H_0 khi $\mu = 101$ sẽ liên quan đến một sai lầm nghiêm trọng. Cho một mẫu lớn hợp lý kích thước n, với giá trị μ này sẽ cho một giá trị $\overline{x}$ gần 101 vì thế ta không muốn có bất kỳ bằng chứng gì về mẫu này để có sự tranh luận mạnh mẽ về việc bác bỏ H_0 khi $\overline{x} = 101$ là biến quan sát được. Khi có nhiều cỡ mẫu bảng 8.1 sẽ ghi lại tất cả giá trị P khi $\overline{x} = 101$ và xác suất của việc không bác bỏ H_0 tại mức .01 khi $\mu = 101$

Cột thứ hai trong bảng 8.1 biểu diễn rằng ngay cả khi cỡ mẫu đủ lớn giá trị P của $\overline{x} = 101$ cũng gây ra tranh cãi mạnh mẽ cho việc bác bỏ H_0, khi $\overline{x}$ là biến quan sát và nó cũng gợi ý rằng giới hạn đúng trong thực tế ít khác với giá trị không $\mu_0 = 100$. Cột thứ ba chỉ ra rằng khi thực tế có sự khác biệt giữa giá trị đúng μ và giá trị không μ_0 cho mức ý nghĩa thích hợp và với một cỡ mẫu lớn sẽ luôn dẫn đến bác bỏ giả thiết không tại mức ý nghĩa đó. Tóm lại, ta phải đặc biệt cẩn trọng trong việc giải thích bằng chứng khi cỡ mẫu lớn, khi đó bất kỳ những gì liên quan đến H_0 thường sẽ phát hiện bằng một kiểm định nhưng nguyên tắc này thường ít có ý nghĩa thực tế.

Bảng 8.1 Minh họa của việc ảnh hưởng của cỡ mẫu lên giá trị P và β

n	Gía trị P khi $\overline{x} = 101$	β cho mức kiểm định .01
25	.3085	.9664
100	.1587	.9082
400	.0228	.6293
900	.0013	.2514
1600	.0000335	.0475
2500	.000000297	.0038
10,000	$7.69.10^{-24}$	.0000

8.5.2 Nguyên tắc tỉ lệ hợp lý

Đặt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những biến ngẫu nhiên được quan sát có kích thước n từ phân phối xác suất $f(x;\theta)$. Phân phối chung của những giá trị mẫu này là tích

$f(x_1;\theta).f(x_2;\theta).\ldots.f(x_n;\theta)$. Điều này đã được nói đến về ước lượng của hàm hợp lý, hàm hợp lý là phân phối chung này, được xem như hàm theo θ, xét kiểm định H_0. θ thuộc Ω_0, ngược lại H_a thuộc Ω_a, khi Ω_0 và Ω_a rời nhau (ví dụ, $H_0 : \theta \leq 100$ ngược lại $H_a : \theta \geq 100$). Nguyên tắc tỉ lệ hợp lý cho kiểm định được xây dựng theo quá trình như sau:

1. Tìm một giá trị lớn nhất của hợp lý cho bất kỳ θ thuộc Ω_0 (bằng cách tìm ước lượng lớn nhất thuộc Ω_0 sau đó thay vào hàm hợp lý)

2. Tìm giá trị lớn nhất của hợp lý cho θ bất kỳ thuộc Ω_a

3. Tỉ lệ có dạng:

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\text{Giá trị hợp lý lớn nhất cho } \theta \in \Omega_0}{\text{Giá trị hợp lý lớn nhất cho } \theta \in \Omega_a}$$

Tỉ lệ $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ được gọi là giá trị tỉ lệ hợp lý thống kê, quá trình kiểm định bao gồm bác bỏ H_0 khi tỉ lệ này nhỏ, nghĩa là chọn một hằng số k sao cho H_0 bị bác bỏ nếu $\lambda(x_1,\ldots,x_n) \leq k$. Do đó, H_0 bị bác bỏ khi mẫu số của λ lớn hơn nhiều so với tử số, điều này chỉ ra rằng dữ liệu phù hợp với H_a hơn là với H_0.

Hằng số k được chọn sao cho có xác suất sai lầm loại I. Thường thì bất đẳng thức $\lambda \leq k$ có thể biến đổi để có điều kiện tương đương mà đơn giản hơn. Ví dụ, kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu \leq \mu_0$, với đối thuyết $H_a : \mu > \mu_0$. Trong trường hợp thông thường $\lambda \leq k$ tương đương với $t \geq c$. Nên với $c = t_{\alpha,n-1}$ thì kiểm định tỉ lệ hợp lý cũng là kiểm định một mẫu t.

Qui tắc về tỉ lệ hợp lý cũng có thể áp dụng khi X_i có những phân phối khác và thậm chí ngay cả khi nó độc lập, thông qua hàm hợp lý có thể làm cho phức tạp hơn trong trường hợp này. Một số quá trình kiểm định sẽ được trình bày trong chương sau có thể thu được từ qui tắc kiểm định hợp lý. Kiểm định đó thường xoay quanh việc "giảm thiểu β trong tất cả những kiểm định để có mức α mong muốn", vì thế đó là kiểm định đúng nhất. Để chi tiết hơn, ta có thể tham khảo một số ví dụ trong những tài liệu được liệt kê trong Chương 6.

Để có kiểm định t từ qui tắc tắc tỉ lệ hợp lý ta phải xây dựng một kiểm định thống kê hợp lý, có dạng của một phân phối xác suất, và mẫu phải được chỉ định lấy từ đó. Để lấy kiểm định t từ qui tắc tỉ lệ hợp lý, điều tra viên phải giả sử có một chuẩn pdf. Nếu điều tra viên cho rằng phân phối đó đối xứng nhưng không muốn có dạng chính xác (như chuẩn đồng dạng hay cauchy) thì sẽ thất bại vì không có cách nào để liên kết các giá trị cho tất cả các phân phối có tính đối xứng. Trong chương 15 ta sẽ trình bày một kiểm định thống kê phi tham số, vì thế, cái gọi là sai lầm xác suất loại I là sự kiểm soát tất cả những phân phối phụ thuộc khác nhau. Những quá trình này có ích khi điều tra viên có kiến thức hạn chế về phân phối phụ thuộc. Ta cũng sẽ thảo luận nhiều hơn về vấn đề 3 và 4 trong phần đầu.

Bài tập

Kiểm định trung bình tổng thể

Bài tập 8.5.1 Trọng lượng trung bình khi xuất chuồng ở một trại chăn nuôi gà công nghiệp năm trước là 2,8kg/con. Năm nay người ta sử dụng một loại thức ăn mới. Cân thử 25 con khi xuất chuồng người ta tính được trung bình mẫu 3,2kg và phương sai mẫu 0,25 . Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận về tác dụng của loại thức ăn này có thực sự làm tăng trọng lượng trung bình của đàn gà lên hay không?

Bài tập 8.5.2 Cân thử 25 con khi xuất chuồng người ta tính được trung bình mẫu 3,2kg và phương sai mẫu 25 . Với mức ý nghĩa 5%, nếu trại chăn nuôi báo cáo trọng lượng trung bình khi xuất chuồng là 3,3 kg/con thì chấp nhận được không?

Bài tập 8.5.3 Theo báo cáo trước đây mức tiêu thụ điện trung bình trong một tháng ở phường X là 150kwh. Sau khi thực hiện chương trình tiết kiệm điện, kiểm tra ngẫu nhiên một số hộ ở phường này về mức tiêu dùng điện trong một tháng thì thu được bảng số liệu:

X	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180
n_i	13	44	56	69	57	45	23	12

Với mức ý nghĩa 5% hãy cho ý kiến về kết luận mức tiêu thụ điện trung bình trong một tháng ở phường X có giảm xuống hay không.

Kiểm định tỉ lệ tổng thể

Bài tập 8.5.4 Tỷ lệ khách hàng hài lòng với chất lượng dịch vụ tại chuỗi các salon chăm sóc sắc đẹp Y là 80%. Nhằm nâng cao hơn nữa chất lượng dịch vụ, các nhân viên được tập huấn đào tạo để nâng cao hơn nữa kỹ năng tay nghề. Sau đó, để khảo sát hiệu quả của việc tập huấn cho nhân viên, 1200 khách hàng ngẫu nhiên được hỏi về chất lượng dịch vụ của salon có 981 khách hàng hài lòng. Với mức ý nghĩa

3% có thể cho rằng việc tập huấn cho nhân viên là mang lại hiệu quả?

Bài tập 8.5.5 Người ta tiến hành điều tra ngẫu nhiên 400 người ở vùng A thì thấy có 22 người ở độ tuổi trưởng thành không biết chữ. Với mức ý nghĩa 2%, có thể cho rằng tỷ lệ dân số ở độ tuổi trưởng thành không biết chữ ở vùng này là 5% được hay không?

Bài tập 8.5.6 Tỉ lệ phế phẩm của một nhà máy trước đây là 8%. Năm nay nhà máy ứng dụng biện pháp kỹ thuật cải tiến hơn. Để xét hiệu quả của việc cải tiến kỹ thuật, người ta lấy một mẫu gồm 710 sản phẩm để kiểm tra và thấy có 30 phế phẩm. Với mức ý nghĩa 4% có thể cho rằng biện pháp kỹ thuật cải tiến có làm giảm tỉ lệ phế phẩm hay không ?

Kiểm định dùng P-value

Bài tập 8.5.7 Nước mưa có bị nhiễm độc bởi nhiều nguồn trong đó có cả những viên pin bị bỏ đi. Một mẫu 51 pin Panasonic AAA có khối lượng kẽm trung bình là 2,06g và độ lệch chuẩn là 0,141g.

1. Tìm p-value đs: p-value=0,0012
2. Dữ liệu này có giúp kết luận được là khối lượng kẽm trung bình của loại pin này đã vượt quá 2g không? Kết luận với các trường hợp: Với $\alpha = 0,001$; Với $\alpha = 0,01$; Với $\alpha = 0,05$; Với $\alpha = 0,1$.

Bài tập 8.5.8 Độ dày tiêu chuẩn của miếng Silicon wafers được sử dụng trong mạch là $245\mu m$. Một mẫu 50 wafers có độ dày trung bình là 246,18 μm và độ lệch chuẩn là $3,6\mu m$. Từ dữ liệu hãy kết luận liệu độ dày trung bình của loại Silicon wafer này có khác với độ dày tiêu chuẩn không?

Bài tập 8.5.9

1. Cho $H_0 : \mu = 100; H_a : \mu > 100$ với $n = 9$, $(\sigma)^2$ chưa biết. Tính được tiêu chuẩn kiểm định t=1,6 . Hãy tìm p-value? Và kết luận?
2. Cho $H_0 : \mu = 100; H_a : \mu < 100$ với $n = 21$, σ^2 chưa biết. Tính được tiêu chuẩn kiểm định t=1,6 . Hãy tìm p-value? Và kết luận?
2. Cho $H_0 : \mu = 100; H_a : \mu \neq 100$ với $n = 21$, σ^2 chưa biết. Tính được tiêu chuẩn kiểm định t=1,6 . Hãy tìm p-value? Và kết luận?

Bài tập tổng hợp

Bài tập 8.5.10 Năng suất lúa trung bình trong những vụ trước là 5,5 tấn/ha. Vụ lúa năm nay người ta áp dụng một biện pháp kĩ thuật mới. Điều tra 100 hecta lúa ta có bảng:

Năng suất (tạ/ha)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-85
Diện tích (ha)	7	12	18	27	20	8	5	3

Với mức ý nghĩa 5%, kết luận xem biện pháp kĩ thuật mới có làm tăng năng suất lúa trung bình của vùng này lên không?

Bài tập 8.5.11 Trọng lượng sản phẩm A của nhà máy M là biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn với khối lượng trung bình quy định 50kg và độ lệch chuẩn là 0,25 kg. Nghi ngờ dây chuyền sản xuất không bình thường nên tiến hành kiểm tra khối lượng một số sản phẩm được số liệu

X	49-49,25	49,25-49,5	49,5-49,75	49,75-50	50-50,25	50,25-50,5	50,5-50,75	50,75-51
n_i	5	8	10	16	14	11	9	6

Với mức ý nghĩa 3%, hãy cho nhận xét về nghi ngờ trên.

Bài tập 8.5.12 Tuổi thọ trung bình của một loại thiết bị điện tử B do nhà máy N sản xuất là 100 giờ. Sau khi cải tiến kỹ thuật quan sát thời gian sử dụng của 650 thiết bị B do nhà máy sản xuất ta thu được giá trị trung bình mẫu là 102,215 giờ và giá trị độ lệch chuẩn mẫu là 15,69 giờ. Đưa ra nhận xét về ý kiến việc cải tiến kỹ thuật có mang lại hiệu quả với mức ý nghĩa 3%.

Bài tập 8.5.13 Quan sát mức chi tiêu nhu yếu phẩm (triệu đồng/ năm) của một hộ thì thu được bảng:

Chi tiêu	4	6	8	10	12
Số hộ	15	16	20	14	15

Những hộ chi tiêu dưới 7 triệu/ tháng là chi tiêu thấp? Trước đây tỉ lệ chi tiêu thấp là 30%. Hãy kiểm định xem tỷ lệ hộ chi tiêu thấp bây giờ đã tăng lên chưa? Với $\alpha = 5\%$. Đs: 1,708

Bài tập 8.5.14 Trọng lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 500gr. Sau một thời gian sản xuất người ta nghi ngờ trọng lượng của loại sản phẩm này có xu hướng giảm sút nên tiến hành cân thử 25 sản phẩm và thu được kết quả cho ở bảng sau:

Trọng lượng (gr)	480	485	490	495	500	510
Số sản phẩm	2	3	8	5	3	4

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên có đúng hay không? Đs:3,37

Bài tập 8.5.15 Khảo sát thu nhập của một số người của một công ty, người ta thu được bảng sau:

Thu nhập (triệu đ/năm)	26-32	32-36	36-40	40-44	44-48	48-54	54-60
Số người	8	12	20	25	20	10	5

Nếu công ty báo cáo mức thu nhập bình quân của một người là 3,6 triệu đ/tháng thì có chấp nhận được không? Kết luận với mức ý nghĩa $\alpha = 4\%$.

Bài tập 8.5.16 Một công ty lớn chuyên sản xuất phần mềm máy tính, cho rằng những người làm việc ở công ty này có thu nhập trung bình 5 triệu đồng/tháng. Lấy mẫu ở công ty được bảng:

Thu nhập (triệu đ/tháng)	3	4	5	8	10
Số người	6	7	8	2	2

Giả sử thu nhập của những người làm việc ở công ty này có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho nhận xét về thông tin thu nhập trung bình ở trên có đáng tin hay không? Đs: t = -0,2959

Bài tập 8.5.17* Trong 2115 trẻ sơ sinh chọn ngẫu nhiên có 1115 bé trai. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận mất cân đối giới tính không?

Bài tập 8.5.18 Năm trước tỷ lệ đạt giải của đội tuyển Olympic tỉnh là 70%. Sau khi triển khai phương pháp học tập mới, người ta tiến hành khảo sát kết quả của đội tuyển thì 120 em chọn ngẫu nhiên thì thấy có 30 em bị trượt. Hãy kiểm định xem phương pháp mới có mang lại hiệu quả hơn? Với $\alpha = 5\%$. Đs: z = 1,195

Bài tập 8.5.19 Khảo sát tuổi thọ X (đơn vị: tháng) của một số sản phẩm chọn ngẫu nhiên từ công ty A:

X	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27
n_i	23	33	55	73	57	42	35

1. Tìm khoảng tin cậy 98% cho tuổi thọ trung bình của sản phẩm công ty A. Đs: (16,359;17,697)

2. Dây chuyển sản xuất công ty A hoạt động bình thường nếu tuổi thọ trung bình của sản phẩm sản xuất ra là 18 tháng. Với mức ý nghĩa 1% hãy xem dây chuyền có hoạt động bình thường không? Đs: 3,36

3. Công ty A chỉ có lãi khi tỉ lệ sản phẩm phải bảo hành dưới 20%. Có ý kiến đề nghị công ty A bảo hành sản phẩm trong 1 năm. Hãy kết luận về đề nghị này với mức ý nghĩa 5%. Đs: 1,07

Bài tập 8.5.20 Công ty M có 3000 đại lý, cho tiến hành điều tra ngẫu nhiên một số đại lý của mình và thu được bảng số liệu sau (X là doanh số, đơn vị: triệu đồng/tháng), biết X có phân phối chuẩn.

X	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
Số đại lý	7	12	18	27	22	17	13	4

1. Những đại lý có X>45 triệu đồng/tháng gọi là đại lý có doanh số cao. Hãy ước lượng số đại lý có doanh số cao với độ tin cậy 95%. Đs: (609;1089)

2. Có ý kiến cho rằng tỉ lệ đại lý có doanh số cao bằng 1/3 tỉ lệ đại lý có doanh thu còn lại. cho nhận xét về ý kiến này với mức ý nghĩa 1%. Đs: 0.83

3. Hãy ước lượng doanh số trung bình/tháng của các đại lý với độ tin cậy 99%. Đs(37,4 ; 41,6)

Bài tập 8.5.21 Mức tiêu thụ X của mỗi hộ gia đình vùng A trong mùa khô năm nay có phân phối chuẩn. Điều tra 1 số hộ gia đình vùng A có thống kê sau

X(kwh/t)	65-115	115-165	165-215	215-265	265-315	315-365	365-415	415-465
Số hộ	24	36	75	94	97	125	84	75

1. Mức tiêu thụ điện trung bình các hộ gia đình vùng A trước là 280 kwh/tháng. Với mức ý nghĩa 2% hãy xét xem mức tiêu thụ điện trung bình các hộ gia đình vùng A năm nay có tăng lên không.

2.* Với mức ý nghĩa 5% so sánh tỉ lệ hộ gia đình có mức tiêu thụ $X > 315$kwh/t với tỉ lệ hộ gia đình có mức tiêu thụ $X \leq 315$kwh/t vùng A.

3. Hộ có $X > 315$kwh/t là hộ có mức tiêu thụ cao. Hãy ước lượng số hộ có mức tiêu thụ điện cao với độ tin cậy 95%, biết vùng này có 3000 hộ.

4. Nếu muốn ước lượng mức tiêu thụ điện trung bình các hộ vùng A trong mùa khô năm nay với độ chính xác 10 kwh/tháng thì độ tin cậy bằng ?

Bài tập 8.5.22 P-value nào làm bị bác bỏ với mức ý nghĩa 0,05?

a/ 0,001

b/ 0,021

c/ 0,078

d/ 0,047

e/ 0,148

Bài tập 8.5.23 Tìm P-value trong các trường hợp sau:

1. Kiểm định phía phải với z =1,52
2. Kiểm định 2 phía với z = 2,2
3. Kiểm định phía phải với z = -1.2
4. Kiểm định 2 phía với z = -0,65
5. Kiểm định phải với df = 8; t=2
6. Kiểm định trái với n = 12 ; t = -2,5
7. Kiểm định 2 phía với df =15 ; t = -1,6

Bài tập 8.5.24 Quan sát dữ liệu về cường độ của bê tông (MPa)được mẫu sau:

112,3	97	92	80	101	99,2	95,8	103,5	89	86

Giả sử bê tông sẽ được sử dụng nếu cường độ trung bình của loại bê tông này lớn hơn 100MPa. Liệu bê tông này có được sử dụng không? Sử dụng kiểm định theo phương pháp p-value

Bài tập 8.5.25 Một mẫu 462 sinh viên trường X có 51 em sử dụng rượu bia thường xuyên. Có thể kết luận chắc chắn rằng 10% tỉ lệ sinh viên sử dụng rượu bia thường xuyên của toàn trường lớn hơn 10% được không? Dùng p-value để đưa ra kết luận.

Chương 9

CÁC KẾT LUẬN DỰA TRÊN HAI MẪU

Giới thiệu

Chương 7 và 8 đã trình bày về khoảng tin cậy và các bước kiểm định giả thuyết cho giá trị trung bình μ, tỷ lệ p, và phương sai σ^2. Ở đây chúng ta mở rộng các phương pháp cho trung bình, tỷ lệ, và phương sai của hai tổng thể khác nhau. Ví dụ, cho μ_1 kí hiệu cho thu nhập trung bình thực sự của dân cư quận Thủ Đức thuộc Thành phố Hồ Chí Minh năm 2018 và μ_2 thu nhập trung bình thực sự của dân cư quận Thủ Đức năm 2019. Thì quan sát viên có thể muốn sử dụng các mẫu quan sát về thu nhập trung bình của dân cư quận Thủ Đức mỗi năm làm cơ sở để ước lượng khoảng $\mu_1 - \mu_2$ (hiệu giữa hai thu nhập). Ví dụ khác, cho p_1 kí hiệu cho tỷ lệ sản phẩm lỗi thực sự của các điện thoại Samsung được sản xuất trong điều kiện hiện tại và p_2 kí hiệu cho tỷ lệ sản phẩm lỗi thực sự của các điện thoại Samsung được sản xuất trong điều kiện sản xuất đã thay đổi. Nếu nhờ vào điều kiện sản xuất sửa đổi mà làm giảm được tỷ lệ các sản phẩm lỗi, một kỹ sư quản lý chất lượng sẽ muốn sử dụng thông tin mẫu để kiểm định giả thuyết ban đầu $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ (tức là $p_1 = p_2$) so với giả thuyết đối, $H_a : p_1 - p_2 > 0 (p_1 > p_2)$.

9.1 Kiểm định z và khoảng tin cậy cho hiệu giữa hai trung bình

Các kết luận được đề cập trong phần này liên quan đến $\mu_1 - \mu_2$ là hiệu của trung bình hai mẫu khác nhau.

Giả Thiết 9.1.1.

1. *$X_1, X_2, ..., X_m$ là một mẫu ngẫu nhiên từ một phân phối với giá trị trung bình là μ_1 và phương sai σ_1^2.*
2. *$Y_1, Y_2, ..., Y_m$ là một mẫu ngẫu nhiên từ một phân phối với giá trị trung bình là μ_2 và phương sai σ_2^2.*
3. *Mẫu X và Y độc lập với nhau.*

Việc sử dụng m cho số lần quan sát trong mẫu thứ nhất và n cho số lần quan sát trong mẫu thứ hai, cho phép hai cỡ mẫu khác nhau. Đôi khi điều này là vì việc lấy mẫu của một tổng thể này khó khăn hơn hoặc tốn chi phí hơn so với một tổng thể khác. Một số tình huống khác mà kích cỡ mẫu được lấy là bằng nhau ngay từ đầu, nhưng vì lý do vượt quá phạm vi thử nghiệm, mà kích thước mẫu thực tế có thể khác nhau.

$\overline{X} - \overline{Y}$ là ước lượng tự nhiên của $\mu_1 - \mu_2$, cũng là hiệu của trung bình các mẫu tương ứng. Các quy trình kết luận được dựa trên chuẩn hóa của ước lượng tự nhiên này, vì vậy chúng ta cần biểu thức cho giá trị kỳ vọng và độ lệch chuẩn của $\overline{X} - \overline{Y}$.

Mệnh đề 9.1.2. *Giá trị kỳ vọng của $\overline{X} - \overline{Y}$ là $\mu_1 - \mu_2$, cho nên $\overline{X} - \overline{Y}$ là một ước lượng không chệch của $\mu_1 - \mu_2$. Độ lệch chuẩn của $\overline{X} - \overline{Y}$ là:*

$$\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{\tfrac{\sigma_1^2}{m} + \tfrac{\sigma_2^2}{n}}$$

Nếu chúng ta coi $\mu_1 - \mu_2$ là một tham số θ, thì ước lượng của nó là $\hat{\theta} = \overline{X} - \overline{Y}$ với độ lệch chuẩn $\sigma_{\hat{\theta}}$ được tính như mệnh đề trên. Với giá trị của σ_1^2 và σ_2^2 đều đã biết, thì giá trị của độ lệch chuẩn này có thể được tính như trên. Khi σ_1^2 và σ_2^2 đều không biết trước, phương sai mẫu được dùng để ước lượng $\sigma_{\hat{\theta}}$.

9.1.1 Các bước kiểm định tổng thể chuẩn với phương sai đã biết

Trong chương 7 và 8, khoảng tin cậy và các bước kiểm định đầu tiên cho trung bình tổng thể μ dựa trên giả định rằng tổng thể là phân phối chuẩn với giá trị của phương sai tổng thể σ^2 đã biết trước . Tương tự như vậy, trước tiên chúng ta giả sử rằng ở đây cả hai phân phối tổng thể là chuẩn và giá trị phương sai của cả hai là σ_1^2 và σ_2^2 đã biết. Các trường hợp trong đó một hoặc cả hai giả định này có thể được loại bỏ sẽ được trình bày ngắn gọn sau.
Bởi vì phân phối tổng thể là chuẩn, cả $\overline{X}$ và $\overline{Y}$ đều có phân phối chuẩn. Hơn nữa, sự độc lập của hai mẫu suy ra hai trung bình mẫu cũng độc lập với nhau. Do đó, hiệu $\overline{X} - \overline{Y}$ cũng là phân phối chuẩn, với giá trị kỳ vọng $\mu_1 - \mu_2$ và độ lệch chuẩn $\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ được suy ra từ mệnh đề nêu trên. Chuẩn hóa $\overline{X} - \overline{Y}$ cho biến chuẩn hóa.

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \tag{9.1}$$

Trong một bài toán kiểm định giả thuyết, giả thuyết ban đầu sẽ chỉ ra rằng $\mu_1 - \mu_2$ có một giá trị xác định. Gán giá trị giả thuyết này bằng Δ_0, chúng ta có $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$. Thông thường $\Delta_0 = 0$, trong trường hợp đó H_0 sẽ là $\mu_1 = \mu_2$. Một kết quả thống kê thử nghiệm từ việc thay thế $\mu_1 - \mu_2$ trong công thức (9.1) bằng giá trị Δ_0. Kiểm định thống kê Z thu được bằng cách chuẩn hóa $\overline{X} - \overline{Y}$ với giả định rằng H_0 là đúng, vì vậy trường hợp này nó có phân phối chuẩn chuẩn tắc. Kiểm định thống kê này có thể được viết là $(\hat{\theta} - \Delta_0)/\sigma_{\hat{\theta}}$, cùng dạng như một số kiểm định thống kê trong Chương 8.

Giả thuyết không $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$	
Giá trị kiểm định thống kê: $z = \frac{\overline{x}-\overline{y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	
Các giả thuyết đối:	Miền bác bỏ với kiểm định α
$H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z \geq z_\alpha$ (phía phải)
$H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z \leq -z_\alpha$ (phía trái)
$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z \geq z_{\alpha/2}$ hoặc $z \leq -z_{\alpha/2}$ (2 phía)

Bởi vì đây là những kiểm định z, giá trị P-value đã được tính như cho kiểm định

z ở chương 8 (ví dụ: giá trị P-value $= 1 - \Phi(z)$ cho bài kiểm định một phía phải).

Ví dụ 9.1 Phân tích một mẫu ngẫu nhiên gồm $m = 20$ mẫu pin AAA của hãng M cho một loại sản phẩm để xem tuổi thọ trung bình $\overline{x} = 35.5$ giờ. Một mẫu ngẫu nhiên thứ hai gồm $n = 25$ pin AAA của hãng N cho cùng loại sản phẩm đó có tuổi thọ trung bình là $\overline{y} = 34.7$ giờ . Giả sử rằng hai phân phối cho tuổi thọ trung bình của 2 mẫu trên có phân phối chuẩn với $\sigma_1 = 3.0$ và $\sigma_2 = 4.0$. Dữ liệu trên có chỉ ra được giá trị trung bình thật sự của hai tuổi thọ trên μ_1 và μ_2 là khác nhau không? Hãy thực hiện kiểm định với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

Giải

Để kiểm định hai tuổi thọ trung bình trên có khác nhau hay không , nghĩa là ta so sánh hiệu hai tuổi thọ trên với $\Delta_0 = 0$. Hơn nữa, đây là bài toán kiểm định hai phía.

Giả thiết không: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Giải thiết đối: $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Với $\alpha = 0.05$ thì $\phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0.975$ nên $z_{\alpha/2} = 1.96$

Tiêu chuẩn kiểm định: $z = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} = 0.76626$

Kết luận: Theo tiêu chuẩn kiểm định 2 phía, do $z < z_{\alpha/2}$ nên tạm chấp nhận giả thiết không $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = \mu_2$. Vậy tuổi thọ trung bình pin AAA của hai hãng là bằng nhau.

9.1.2 β và việc chọn kích cỡ mẫu

Xác suất của sai lầm loại II dễ dàng được tính toán khi cả hai mẫu đều là phân phối chuẩn với các giá trị σ_1 và σ_2 đã biết. Xem xét trường hợp giả thuyết đối $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$. Đặt Δ' biểu thị cho giá trị của $\mu_1 - \mu_2$ mà lớn hơn hẳn Δ_0 (một giá trị mà H_0 là sai). Miền bác bỏ bên phải $z \geq z_\alpha$ có thể được viết lại dưới dạng $\overline{x} - \overline{y} \geq \Delta_0 + z_\alpha \sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ .Như vậy.

$$
\begin{aligned}
\beta(\Delta') &= P(\text{không bác bỏ } H_0 \text{ khi mà } \mu_1 - \mu_2 = \Delta') \\
&= P(\overline{X} - \overline{Y} < \Delta_0 + z_\alpha \sigma_{\overline{X}-\overline{Y}} \text{ khi mà } \mu_1 - \mu_2 = \Delta')
\end{aligned}
$$

Khi $\mu_1 - \mu_2 = \Delta'$, $\overline{X} - \overline{Y}$ có phân phối chuẩn với giá trị trung bình Δ' và độ lệch chuẩn $\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ (cũng là độ lệch chuẩn khi H_0 đúng); sử dụng các giá trị này để chuẩn hóa bất đẳng thức trong ngoặc đơn cho ta xác suất mong muốn.

Giả thuyết đối	$\beta(\Delta') = P(\text{sai lầm loại II khi mà } \mu_1 - \mu_2 = \Delta')$
$H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$\Phi(z_\alpha - \frac{\Delta'-\Delta_0}{\sigma})$
$H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$1 - \Phi(-z_\alpha - \frac{\Delta'-\Delta_0}{\sigma})$
$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$\Phi(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta'-\Delta_0}{\sigma}) - \Phi(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta'-\Delta_0}{\sigma})$
Trong đó $\sigma = \sigma_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{(\sigma_1^2/m) + (\sigma_2^2/n)}$	

Như trong chương 8, mẫu kích cỡ m và n có thể được xác định để thỏa cả P(sai lầm loại I) = giá trị cụ thể α và P (sai lầm loại II khi $\mu_1 - \mu_2 = \Delta'$)= giá trị cụ thể β. Cho một kiểm định một phía phải, phương trình của biểu thức trước cho $\beta(\Delta')$ một giá trị cụ thể β :

$$\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n} = \frac{(\Delta' - \Delta_0)^2}{(z_\alpha + z_\beta)^2}$$

Khi 2 cỡ mẫu là bằng nhau, phương trình thu được:

$$m = n = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(z_\alpha + z_\beta)^2}{(\Delta' - \Delta_0)^2}$$

Biểu thức cũng đúng với trường hợp α kiểm định một phía trái, và thay α bởi $\alpha/2$ ở trường hợp kiểm định 2 phía.

9.1.3 Kiểm định với mẫu cỡ lớn

Các giả định về phân phối chuẩn của tổng thể và các giá trị σ_1 và σ_2 may mắn không cần thiết khi cả hai cỡ mẫu đều đủ lớn. Trong trường hợp này, Định lý Giới hạn Trung tâm (Central Limit Theorem - CLT) đảm bảo rằng $\overline{X} - \overline{Y}$ xấp xỉ phân phối chuẩn bất kể phân phối của tổng thể như thế nào. Hơn nữa, sử dụng S_1^2 và S_2^2 thay thế cho σ_1^2 và σ_2^2 và trong Biểu thức (9.1) đưa ra một biến mà phân phối của nó xấp xỉ phân phối chuẩn chuẩn tắc:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}}$$

Một kết quả từ kiểm định thống kê với mẫu lớn bằng cách thay thế $\mu_1 - \mu_2$ bởi Δ_0, giá trị kỳ vọng của $\overline{X} - \overline{Y}$ khi H_0 đúng. Thống kê Z này sẽ có xấp xỉ phân phối chuẩn chuẩn tắc khi H_0 là đúng. Kiểm định với mức ý nghĩa mong muốn mà thu được bằng cách sử dụng một giá trị tới hạn z vẫn chính xác như trước đây.

Sử dụng giá trị kiểm định thống kê:

$$z = \frac{\overline{x}-\overline{y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}}}$$

cùng với các trường hợp miền bác bỏ bên phải, trái, và 2 phía dựa trên các giá trị tới hạn z cho kiểm định mẫu lớn mức ý nghĩa xấp xỉ α. Những kiểm định này thường thích hợp nếu cả $m > 40$ và $n > 40$. P-value cũng được tính chính xác như các bài kiểm định z trước đây.

Ví dụ 9.2 Báo cáo dữ liệu tóm tắt dưới đây về lượng calo tiêu thụ khi hoạt động thể thao 30 phút đối với người 56kg. Lượng calo tiêu thụ (kcal)

Môn thể thao	Cỡ mẫu	Trung bình mẫu	Độ lệch chuẩn mẫu
Bơi lội	92	320 kcal	80
Chạy 10km/h	110	290 kcal	60

Từ dữ liệu này có kết luận được lượng calo tiêu thụ trung bình thực sự của người bơi lội hơn 5 kcal so với người chạy bộ không? Hãy kiểm định điều này với mức ý nghĩa 0.01 .

Giải

Gọi μ_1, μ_2 lần lượt là lượng calo tiêu thụ trung bình thực sự của người bơi lội và người chạy bộ 10km/h trong 30 phút .

$n_1 = 92; s_1 = 80; \overline{x} = 320$

$n_2 = 110; s_2 = 60; \overline{y} = 290$

Giả thiết không: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 5$; $(\Delta_0 = 5)$

Giải thiết đối: $H_a : \mu_1 - \mu_2 > 5$

Với $\alpha = 0.01$ thì $\phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.99$ nên $z_\alpha = 2.33$

Tiêu chuẩn kiểm định: $z = \frac{\overline{x}-\overline{y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}} = 2.4718$

Kết luận: Theo tiêu chuẩn kiểm định 1 phía phải, do $z > z_\alpha$ nên bác bỏ H_0 nhận $H_a : \mu_1 - \mu_2 > 5$. Vậy trong 30 phút, lượng calo tiêu thụ trung bình khi bơi lội sẽ hơn lượng calo trung bình khi chạy bộ 10km/h là 5kcal.

9.1.4 Khoảng tin cậy cho $\mu_1 - \mu_2$

Khi cả hai phân phối tổng thể là phân phối chuẩn, chuẩn hóa $\overline{X} - \overline{Y}$ cho một biến ngẫu nhiên Z với phân phối chuẩn chuẩn tắc. Vì phần diện tích dưới đường cong của z nằm giữa $-z_{\alpha/2}$ và $z_{\alpha/2}$ là $1-\alpha$, nên theo đó .

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Biến đổi các bất đẳng thức nằm trong ngoặc đơn để tách biệt $\mu_1 - \mu_2$ nhận được đẳng thức xác suất sau

$$\boxed{P\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right) = 1 - \alpha}$$

Điều này nghĩa là khoảng tin cậy $100(1-\alpha)$ % cho $\mu_1 - \mu_2$ có giới hạn dưới $\overline{x} - \overline{y} - z_{\alpha/2}.\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ và giới hạn trên $\overline{x} - \overline{y} + z_{\alpha/2}.\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$, trong đó $\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ là biểu thức dạng căn bậc hai. Khoảng này là một trường hợp đặc biệt của công thức tổng quát $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}.\sigma_{\hat{\theta}}$.

Nếu cả m và n đều lớn, Định lý giới hạn trung tâm chỉ ra rằng khoảng này có giá trị ngay cả khi không có giả định về các tổng thể chuẩn; trong trường hợp này, độ tin cậy xấp xỉ $100(1-\alpha)\%$. Hơn nữa, việc sử dụng sai số mẫu S_1^2 và S_2^2 trong biến chuẩn hóa Z thu được một khoảng hợp lệ trong đó s_1^2 và s_2^2 thay thế cho σ_1^2 và σ_2^2.

Nếu m và n đủ lớn, khoảng tin cậy cho $\mu_1 - \mu_2$ với mức độ tin cậy xấp xỉ $100(1-\alpha)\%$ là

$$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}$$

Trong đó dấu "–" cho giới hạn dưới và dấu "+" cho giới hạn trên của khoảng. Biên của khoảng tin cậy phía phải hoặc phía trái có thể được tính bằng cách giữ lại dấu hiệu (+ hoặc –) và thay thế $z_{\alpha/2}$ bởi z_α.

Nguyên tắc chung: kích thước mẫu được gọi là lớn khi $m > 40$ và $n > 40$.

Ví dụ 9.3 Một thí nghiệm được thực hiện để nghiên cứu các đặc điểm khác nhau của bê tông theo cấp độ bền. Quan sát 70 mẫu về cường độ chịu nén của bê tông có cấp độ bền B15 (MPa), và 80 mẫu về cường độ chịu nén của bê tông có cấp độ bền B20 . Tóm tắt các giá trị thể hiện ở bảng bên dưới. Hãy tìm khoảng tin cậy cho hiệu giữa cường độ chịu nén thực sự của hai loại cấp độ bền trên, với độ tin cậy 99%

Cấp độ bền	**Cỡ mẫu**	**Trung bình mẫu**	**Độ lệch chuẩn mẫu**
B15	70	860 MPa	20
B20	80	1150 MPa	30

Giải

Gọi μ_1, μ_2 lần lượt là cường độ chịu nén của bê tông có cấp độ bền B15 và B20
$n_1 = 70; s_1 = 20; \overline{x} = 860$
$n_2 = 80; s_2 = 30; \overline{y} = 1150$
Với $\gamma = 0.99$ thì $\phi(z_{\alpha/2}) = \frac{1+\gamma}{2} = 0.995$ nên $z_{\alpha/2} = 2.58$
Sai số ước lượng: $\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}} = 10,6264$
Khoảng tin cậy cho hiệu giữa cường độ chịu nén thực sự của hai loại cấp độ bền trên là : $\mu_1 - \mu_2 \in (\overline{x} - \overline{y} - \epsilon; \overline{x} - \overline{y} + \epsilon)$
$\mu_1 - \mu_2 \in (-300,6264; -279,3736)$.

Nếu các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 đều đã biết (hoặc biết giá trị xấp xỉ) và điều tra viên sử dụng các cỡ mẫu giống nhau, thì kích thước mẫu chung n để mà thu được một khoảng $100(1-\alpha)\%$ của chiều rộng w là

$$n = \frac{4z_{\alpha/2}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{w^2}$$

(thông thường sẽ được làm tròn thành số nguyên).

9.2 Kiểm định t cho 2 mẫu và khoảng tin cậy

Thông thường các giá trị của phương sai tổng thể sẽ không được biết trước. Trong phần trước, chúng ta đã minh họa cho các cỡ mẫu lớn khi sử dụng một bài kiểm định z và khoảng tin cậy, trong đó các phương sai mẫu đã được sử dụng thay cho phương sai tổng thể. Thực tế, đối với các mẫu lớn, Định lý giới hạn trung tâm cho phép chúng ta sử dụng các phương pháp này ngay cả khi hai tổng thể là không chuẩn.

Trong thực tế, mặc dù, thường xảy ra trường hợp ít nhất một mẫu có kích thước nhỏ và phương sai tổng thể là chưa biết. Nếu không dùng đến Định lý giới hạn trung tâm để loại bỏ, chúng ta có thể tiến hành bằng cách đưa ra các giả định cụ thể cho phân phối tổng thể. Việc sử dụng các bước suy luận dựa theo những giả định này sẽ được giới hạn trong các tình huống mà các giả định ít nhất ở mức chấp nhận được. Ví dụ, chúng ta có thể giả định rằng cả hai phân phối tổng thể đều có phân phối Weibull hoặc cả hai đều là phân phối Poisson. Dù trong thực tế thì phân phối chuẩn thường là giả định hợp lý nhất.

Giả Thiết 9.2.1. *Cả 2 phân phối tổng thể là chuẩn, do đó $X_1, X_2, \ldots, X_m$ là mẫu ngẫu nhiên từ phân phối chuẩn và tương tự vậy cho $Y_1, \ldots, Y_n$ (với mẫu X và mẫu Y là độc lập với nhau). Khả năng hợp lý của các giả định này có thể được đánh giá bằng cách xây dựng một biểu đồ xác suất chuẩn của mẫu x_i và một biểu đồ khác của mẫu y_i.*

Công thức kiểm định thống kê và khoảng tin cậy dựa trên cùng một biến được chuẩn hóa đã được đề cập trong Phần 9.1, nhưng phân phối có liên quan bây giờ là t chứ không phải là z.

Định lý 9.2.2. *Khi các phân phối tổng thể là chuẩn, biến được chuẩn hóa*

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}} \tag{9.2}$$

sẽ xấp xỉ một phân phối t với bậc tư do ν được ước lượng từ dữ liệu bởi công thức

$$v = \frac{(\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n})^2}{\frac{(s_1^2/m)^2}{m-1} + \frac{(s_2^2/n)^2}{n-1}} = \frac{[(se_1)^2 + (se_2)^2]^2}{\frac{(se_1)^4}{m-1} + \frac{(se_2)^4}{n-1}}$$

Trong đó

$$se_1 = \frac{s_1}{\sqrt{m}}, se_2 = \frac{s_2}{\sqrt{n}}$$

(ν được làm tròn xuống số nguyên gần nhất)

Biến đổi T trong biểu thức xác suất để tách riêng $\mu_1 - \mu_2$ cho khoảng tin cậy , trong khi một kiểm định thống kê thu được từ thay thế $\mu_1 - \mu_2$ bằng giá trị không Δ_0.

Khoảng tin cậy của $\mu_1 - \mu_2$ với kiểm định t cho 2 mẫu và độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ là

$$\overline{x} - \overline{y} \pm t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}$$

Khoảng tin cậy một phía có thể được tính như đã đề cập ở các phần trước.
Kiểm định t cho 2 mẫu để kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ như sau:

Giá trị kiểm định thống kê: $t = \dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}}}$

Các giả thuyết đối:	Vùng bác bỏ với kiểm định xấp xỉ mức ý nghĩa α
$H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t \geq t_{\alpha,\nu}$ một phía phải
$H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t \leq -t_{\alpha,\nu}$ một phía trái
$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t \geq t_{\alpha/2,\nu}$ hoặc $t \leq -t_{\alpha/2,\nu}$ hai phía.

Giá trị P có thể được tính như đã đề cập trong Chương 8 cho kiểm định t cho 1 mẫu.

Ví dụ 9.4 Quan sát doanh thu trung bình mỗi tháng (triệu đồng) của 15 cửa hàng tiện lợi Bách hoá xanh và 10 cửa hàng tiện lợi Satra năm 2018 thì được dữ liệu sau:

Cửa hàng	**Cỡ mẫu**	**Trung bình mẫu**	**Độ lệch chuẩn mẫu**
Bách hoá xanh	15	800	5
Satra	10	950	10

Giả sử phân phối doanh thu trung bình mỗi tháng cho hai loại cửa hàng này có phân phối chuẩn.
a/ Hãy tính khoảng tin cậy cho hiệu giữa doanh thu trung bình thực sự mỗi tháng của hai loại cửa hàng này với độ tin cậy 98%.
b/ Có thể kết luận là doanh thu trung bình thực sự mỗi tháng của Bách hoá xanh thấp hơn Satra được không? Kiểm định điều này với mức ý nghĩa 0,05.
Giải
a/ Gọi μ_1, μ_2 lần lượt là doanh thu trung bình thực sự mỗi tháng cho hai loại cửa hàng Bách hoá xanh và Satra
$m = 15; s_1 = 5; \overline{x} = 800$
$n = 10; s_2 = 10; \overline{y} = 950$

$v = \frac{(\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n})^2}{\frac{(s_1^2/m)^2}{m-1}+\frac{(s_2^2/n)^2}{n-1}} = 12.035 \approx 12$
Với $\gamma = 0.98$ thì $\alpha = 1 - \gamma = 0,02$ nên $t_{\alpha/2;v} = t_{0,01;12} = 2,681$
Sai số ước lượng: $\epsilon = t_{\alpha/2;v}\sqrt{\frac{{s_1}^2}{m} + \frac{{s_2}^2}{n}} = 9,1573$
Khoảng tin cậy cho hiệu giữa doanh thu trung bình thực sự mỗi tháng của Bách hoá xanh và Satra là : $\mu_1 - \mu_2 \in (\overline{x} - \overline{y} - \epsilon; \overline{x} - \overline{y} + \epsilon)$
$\mu_1 - \mu_2 \in (-159,1573; -140,8427)$.

b/ Giả thiết không: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $(\Delta_0 = 0)$
Giải thiết đối: $H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0$
Với $\alpha = 0,05$ thì $t_{\alpha;v} = t_{0,05;12} = 1,782$
Tiêu chuẩn kiểm định: $t = \frac{\overline{x}-\overline{y}-\Delta_0}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{m}+\frac{{s_2}^2}{n}}} = -43,9155$
Kết luận: Theo tiêu chuẩn kiểm định 1 phía trái, do $z < -z_\alpha$ nên bác bỏ H_0 nhận $H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0$. Vậy có thể kết luận doanh thu trung bình thực sự mỗi ngày của Bách hoá xanh trong năm 2018 thấp hơn Satra .

9.3 Phân tích số liệu ghép đôi

Trong Phần 9.1 và 9.2, chúng ta đã xem xét kết luận về hiệu giữa hai giá trị trung bình μ_1 và μ_2 . Điều này được thực hiện bằng cách sử dụng các kết quả của mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, .., X_m$ từ phân phối với trung bình μ_1 và mẫu hoàn toàn độc lập (với mẫu X) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ từ phân phối với giá trị trung bình μ_2. Đó là, hoặc m đối tượng được chọn từ tổng thể 1 và n đối tượng khác từ tổng thể 2, hoặc m cá thể thực nghiệm được điều trị theo cách này và một tập hợp khác của n cá thể được điều trị theo cách khác. Ngược lại, có một số tình huống thử nghiệm trong đó chỉ có một bộ n cá thể hoặc đối tượng thí nghiệm; và thực hiện hai quan sát trên một bộ và được một cặp các giá trị

Giả Thiết 9.3.1. *Giả định: Dữ liệu gồm n cặp được chọn độc lập $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ (X_n, Y_n), với $E(X_i) = \mu_1$ và $E(Y_i) = \mu_2$. Đặt $D_1 = X_1 - Y_1, D_2 = X_2 - Y_2, \ldots D_n = X_n - Y_n$ thì D_i là khác nhau từng cặp. Giả định mẫu D_i có phân phối chuẩn với giá trị trung bình μ_D và phương sai σ_D^2 (bởi vì mẫu X_i và mẫu Y_i có phân phối chuẩn). Chúng ta tiếp tục kết luận về hiệu của $\mu_1 - \mu_2$. Khoảng tin cậy cho kiểm định t hai mẫu và kiểm định thống kê thu được nhờ giả định mẫu độc lập áp dụng quy tắc*

$V(\overline{X}-\overline{Y}) = V(\overline{X}) + V(\overline{Y})$. *Tuy nhiên với dữ liệu cặp, quan sát X và Y trong mỗi cặp thường không độc lập, cho nên $\overline{X}$ và $\overline{Y}$ không độc lập với nhau. Chúng ta vì vậy phải bỏ qua quy trình kiểm định t cho hai mẫu và tìm kiếm phương pháp thống kê thay thế.*

9.3.1 Kiểm định t cặp

Vì mỗi cặp khác nhau là độc lập, nên mẫu D_i cũng độc lập với nhau. Đặt $D = X - Y$, trong đó X và Y tương ứng là quan sát đầu tiên và thứ hai trong một cặp tùy ý. Vậy hiệu kỳ vọng là:

$$\mu_D = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_1 - \mu_2$$

(quy tắc của các giá trị kỳ vọng được dùng ở đây là hợp lệ ngay cả khi X và Y phụ thuộc). Do đó bất kỳ giả thuyết nào về $\mu_1 - \mu_2$ có thể được diễn đạt như một giả thuyết về hiệu trung bình μ_D. Nhưng kể từ khi mẫu D_i tạo thành một mẫu ngẫu nhiên chuẩn (của hiệu) với trung bình μ_D, giả thuyết về μ_D có thể được kiểm định bằng cách sử dụng một kiểm định t một mẫu. Nghĩa là, để kiểm tra các giả thuyết về $\mu_1 - \mu_2$ khi dữ liệu là các cặp, ta tạo giá trị hiệu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ và thực hiện một bài kiểm định t một mẫu (dựa trên bậc tự do $n-1$) trên các hiệu này.

Kiểm định t cặp.
Giả thuyết không: $H_0 : \mu_D = \Delta_0$ (trong đó $D = X - Y$ là hiệu giữa quan sát thứ nhất và quan sát thứ hai trong một cặp, và $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$).
Giá trị thống kê: $t = \frac{\overline{d}-\Delta_0}{s_D/\sqrt{n}}$ (trong đó $\overline{d}$ và s_D là trung bình mẫu và độ lệch chuẩn tương ứng của mẫu d_i).

Các giả thuyết đối:	Miền bác bỏ với mức ý nghĩa α
$H_a : \mu_D > \Delta_0$	$t \geq t_{\alpha,n-1}$
$H_a : \mu_D < \Delta_0$	$t \leq -t_{\alpha,n-1}$
$H_a : \mu_D \neq \Delta_0$	$t \geq t_{\alpha/2,n-1}$ và $t \leq -t_{\alpha/2,n-1}$

Giá trị P-value được tính như các kiểm định t trước.

Khi số lượng các cặp là lớn, giả định về phân phối chuẩn cho hiệu là không cần thiết. Định lý Giới hạn Trung tâm công nhận kết quả của kiểm định z.

Ví dụ 9.5 Một nghiên cứu để xác định môn học khác nhau có ảnh hưởng đến kết quả học tập không. Quan sát một mẫu gồm $n = 12$ sinh viên làm bài tập đại số và giải tích và được kết quả về điểm số như bảng sau.

Đối tượng sinh viên	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đại số	7.7	7.6	7.3	6.8	7.9	7.4	7.4	6.9	7.6	7.2	7.2	7.6
Giải tích	7	7.1	7.2	7.2	6.6	6.9	7.1	7.3	7.6	7.6	8	6.9
Hiệu	0.7	0.5	0.1	-0.4	1.3	0.5	0.3	-0.4	0	-0.4	-0.8	0.7

Dữ liệu có cho thấy điểm trung bình có khác nhau với môn học khác nhau không? Kiểm định điều này với mức ý nghĩa 0,05.

Giải

Gọi μ_D là hiệu của điểm trung bình thực sự của môn đại số với điểm trung bình thực sự của môn giải tích.

$n = 12; s = 0,6047; \overline{d} = 0,175$

Giả thiết không: $H_0 : \mu_D = 0$; $(\Delta_0 = 0)$

Giả thiết đối: $H_a : \mu_D \neq 0$

Với $\alpha = 0.05$ thì $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,11} = 2,201$

Tiêu chuẩn kiểm định: $t = \frac{\overline{d}-\Delta_0}{s_D/\sqrt{n}} = 1,002483$

Kết luận: Theo tiêu chuẩn kiểm định 2 phía, do $|z| < z_{\alpha/2}$ nên chấp nhận $H_0 : \mu_D = 0$. Vậy không có sự khác nhau về điểm số trung bình của sinh viên về môn đại số và giải tích.

9.3.2 Khoảng tin cậy của cặp.

Cùng cách mà khoảng tin cậy t cho giá trị trung bình tổng thể đơn μ được dựa trên biến t là $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$, khoảng tin cậy t cho $\mu_D(= \mu_1 - \mu_2)$ dựa trên thực tế là

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$$

có phân phối t với bậc tự do $n - 1$. Biến đổi biến t như các phần trước đã làm với khoảng tin cậy, thu được khoảng tin cậy $100(1 - \alpha)$ % như sau:

Khoảng tin cậy cặp t cho μ_D là

$$\overline{d} \pm t_{\alpha/2,n-1}.s_D/\sqrt{n}$$

Khoảng tin cậy một phía thu được từ công thức trên bằng cách thay thế $t_{\alpha/2}$ bởi t_α.

Khi n nhỏ, tính hợp lệ của khoảng này yêu cầu phân phối của các hiệu phải xấp xỉ chuẩn. Với n lớn, Định lý Giới hạn Trung tâm đảm bảo cho kết quả của khoảng z là hợp lệ mà không có ràng buộc về phân phối của hiệu.

Ví dụ 9.6 Quan sát một mẫu gồm $n = 10$ điện thoại iphone 7 về thời lượng pin khi chỉ dùng nghe gọi (đặt là thời gian sử dụng 1) và khi có sử dụng các ứng dụng (nghe nhạc, chơi game, mạng xã hội,...) (đặt là thời gian sử dụng 2).

Điện thoại iphone 7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thời gian sử dụng 1	14.3	13	12	13.8	13.7	14.1	14.7	14.3	14.3	14.4
Thời gian sử dụng 2	4.4	3.2	5	7.7	4.4	6	5.9	5.4	5.3	9
Hiệu	9.9	9.8	7	6.1	9.3	8.1	8.8	8.9	9	5.4

Đặt μ_D là hiệu trung bình thật sự của thời gian sử dụng 1 và thời gian sử dụng 2 (giờ). Sử dụng khoảng tin cậy t cặp để ước lượng khoảng tin cậy 99 % cho μ_D với phân phối hiệu này xấp xỉ phân phối chuẩn.

Giải

$n = 10; s = 1,5578; \overline{d} = 8,23$

Với $\gamma = 0,99$ nên $\alpha = 0,01$thì $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.005,9} = 3,25$

Sai số ước lượng: $\epsilon = t_{\alpha/2,n-1}.s_D/\sqrt{n} = 1,60101$.

Vậy khoảng ước lượng cho hiệu trung bình của thời gian sử dụng điện thoại khi chỉ nghe gọi với khi có xài các ứng dụng khác là: $\mu_D \in (\overline{d} - \epsilon; \overline{d} + \epsilon) \to \mu_D \in (6,628999,83101)$.

9.3.3 Dữ liệu cặp và quy trình kiểm định t cho hai mẫu

Xem xét kiểm định t cho hai mẫu trên dữ liệu cặp. Các tử số của hai kiểm định thống kê là đồng nhất, vì $\overline{d} = \Sigma d_i/n = [\Sigma(x_i - y_i)]/n = (\Sigma x_i)/n - (\Sigma y_i)/n = \overline{x} - \overline{y}$. Sự khác nhau giữa số liệu thống kê là hoàn toàn do mẫu số . Mỗi kiểm định thống kê thu được bằng cách chuẩn hóa $\overline{X} - \overline{Y} (= \overline{D})$. Nhưng với sự hiện diện của sự phụ thuộc, việc chuẩn hóa hai mẫu t là không chính xác. Để thấy điều này, nhớ lại Chương 5 rằng

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2Cov(X, Y)$$

Tương quan giữa X và Y là:

$$\rho = Corr(X,Y) = Cov(X,Y)/[\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}]$$

Theo đó:

$$V(X-Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

Áp dụng vào $\overline{X} - \overline{Y}$ nhận được

$$\boxed{V(\overline{X}-\overline{Y}) = V(\overline{D}) = V(\tfrac{1}{n}\Sigma D_i) = \tfrac{V(D_i)}{n} = \tfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}}$$

Kiểm định t cho hai mẫu dựa trên giả định về tính độc lập, trong trường hợp $\rho = 0$. Tuy nhiên, trong nhiều thí nghiệm cặp, sẽ có sự phụ thuộc dương mạnh mẽ giữa X và Y (X lớn liên quan đến Y lớn), do đó ρ sẽ dương và phương sai của $\overline{X} - \overline{Y}$ sẽ nhỏ hơn $\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/n$. Do vậy, *bất cứ khi nào có sự phụ thuộc dương trong cặp, mẫu số cho thống kê t cặp phải nhỏ hơn so với t của kiểm định mẫu độc lập.* Thông thường t hai mẫu sẽ gần với số không hơn so với t cặp, giảm bớt đáng kể ý nghĩa của dữ liệu.
Tương tự như vậy, khi dữ liệu dạng cặp, khoảng tin cậy t cặp thường sẽ hẹp hơn khoảng tin cậy (không chính xác) của t cho hai mẫu . Điều này là vì thông thường sự biến thiên trong giá trị hiệu ít hơn so với biến thiên của giá trị x và y.

9.4 Các kết luận liên quan đến hiệu hai tỷ lệ

Sau khi trình bày các phương pháp so sánh trung bình của hai tổng thể khác nhau, chúng ta chuyển sự chú ý đến việc so sánh tỉ lệ của tổng thể. Cho rằng một cá nhân hoặc đối tượng được đánh giá là thành công "S" nếu anh/chị/đối tượng có được một số đặc trưng (ví dụ: người đã tốt nghiệp đại học, sở hữu chiếc tủ lạnh có chức năng tạo đá viên,...). Đặt

p_1= thành phần đạt tiêu chí S trong tổng thể #1
p_2= thành phần đạt tiêu chí S trong tổng thể #2

Ngoài ra, $p_1(p_2)$ có thể được coi là xác suất một cá nhân (hoặc đối tượng) ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể đầu tiên (thứ hai) và thành công.
Giả sử một mẫu có kích thước m được chọn từ tổng thể thứ nhất và một mẫu độc

lập kích thước n được chọn từ tổng thể thứ hai. Đặt X biểu thị số S trong mẫu đầu tiên và Y là số S trong mẫu thứ hai. Sự độc lập của hai mẫu suy ra rằng X và Y là độc lập. Nếu hai kích cỡ mẫu nhỏ hơn nhiều so với kích cỡ tổng thể tương ứng, X và Y có thể được coi là có phân phối nhị thức. Ước lượng tự nhiên cho $p_1 - p_2$ (hiệu về tỉ lệ tổng thể), là tương ứng với hiệu tỷ lệ mẫu $X/m - Y/n$.

Mệnh đề 9.4.1. *Đặt $\hat{p_1} = X/m$ và $\hat{p_2} = Y/n$, trong đó $X \sim Bin(m, p_1), Y \sim Bin(n, p_2)$, với Xvà Y là các biến độc lập. Vậy*

$$E(\hat{p_1} - \hat{p_2}) = p_1 - p_2$$

vì $\hat{p_1} - \hat{p_2}$ là ước lượng không chệch của $p_1 - p_2$, và

$$V(\hat{p_1} - \hat{p_2}) = \frac{p_1q_1}{m} + \frac{p_2q_2}{n} \tag{9.3}$$

với $q_i = 1 - p_i$

Đầu tiên chúng ta sẽ tập trung vào các tình huống trong đó cả m và n đều lớn. Sau đó vì mỗi $\hat{p_1}$ và $\hat{p_2}$ đều có phân phối xấp xỉ chuẩn, ước lượng của $\hat{p_1} - \hat{p_2}$ cũng có phân phối xấp xỉ chuẩn. Chuẩn hóa $\hat{p_1} - \hat{p_2}$ nhận được biến Z có phân phối xấp xỉ chuẩn:

$$Z = \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{m} + \frac{p_2q_2}{n}}}$$

9.4.1 Quy trình kiểm định mẫu lớn

Giả thuyết không mà một nhà điều tra hay gặp nhất sẽ có dạng $H_o : p_1 - p_2 = \Delta_0$. Mặc dù với trung bình tổng thể thì trường hợp $\Delta_0 \neq 0$ là không có gì khó khăn, thì với tỉ lệ của tổng thể $\Delta_0 = 0$ và $\Delta_0 \neq 0$ phải được xem xét riêng. Vì đa số các vấn đề thực tế của loại này thường liên quan $\Delta_0 = 0$ (như giả thuyết không $p_1 = p_2$), chúng ta sẽ tập trung vào trường hợp này. Khi $H_o : p_1 - p_2 = 0$ là đúng, đặt p kí hiệu giá trị chung của p_1 và p_2 (và tương tự cho q). Thì biến chuẩn hóa

$$Z = \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2} - 0}{\sqrt{pq(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}} \tag{9.4}$$

sẽ có xấp xỉ phân phối chuẩn chuẩn tắc khi H_0 là đúng. Tuy nhiên, Z này không thể dùng như một kiểm định thống kê vì giá trị của p là chưa biết , H_0 chỉ khẳng định ở đây là có một giá trị chung của p, nhưng không nói giá trị đó là bao nhiêu. Một kiểm định thống kê là kết quả việc thay thế p và q trong (9.4) bằng các ước lượng thích hợp.

Giả định rằng $p_1 = p_2 = p$, thay vì các mẫu riêng biệt kích thước m và n từ hai tổng thể khác nhau (hai phân phối nhị phân khác nhau), chúng ta thực sự có một mẫu đơn cỡ $m + n$ từ một quần thể với tỷ lệ p. Tổng số cá thể trong mẫu kết hợp này có đặc trưng là $X + Y$. Ước lượng tự nhiên của p là:

$$\hat{p} = \frac{X+Y}{m+n} = \frac{m}{m+n}.\hat{p_1} + \frac{n}{m+n}.\hat{p_2} \tag{9.5}$$

Biểu thức thứ hai cho $\hat{p}$ thấy rằng nó thực sự là một trung bình trọng số của các ước lượng $\hat{p_1}$ và $\hat{p_2}$ thu được từ hai mẫu. Sử dụng $\hat{p}$ và $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ thay cho của p và q trong (9.4) đưa ra một kiểm định thống kê có phân phối chuẩn chuẩn tắc khi H_0 là đúng.

Giả thuyết không: $H_0 : p_1 - p_2 = 0$	
Giá trị kiểm định thống kê (mẫu lớn) : $z = \frac{\hat{p_1}-\hat{p_2}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})}}$	
Các giả thuyết đối:	Miền bác bỏ với kiểm định xấp xỉ mức α
$H_a : p_1 - p_2 > 0$	$z \geq z_\alpha$
$H_a : p_1 - p_2 < 0$	$z \leq -z_\alpha$
$H_a : p_1 - p_2 \neq 0$	$z \geq z_{\alpha/2}$ hoặc $z \geq -z_{\alpha/2}$
Giá trị P-value được tính như các kiểm định z trước. Kiểm định có thể dùng được khi mà $m\hat{p_1}, m\hat{q_1}, n\hat{p_2}$ và $n\hat{q_2}$ đều tối thiểu là 10.	

Ví dụ 9.7 Nghiên cứu về tỉ lệ đạt 6.0 Ielts của sinh viên năm tư của một trường đại học có phụ thuộc vào phương pháp học hay không. Quan sát mẫu thứ nhất gồm $n = 200$ sinh viên tự học tiếng anh qua các tài liệu và kênh học miễn phí trên Internet, thì có 110 sinh viên đạt 6.0 Ielts. Quan sát mẫu thứ hai gồm $n = 350$ sinh viên theo học một trung tâm tiếng anh thì có 180 sinh viên đạt 6.0 Ielts. Hãy kiểm định các giả thuyết trên với mức ý nghĩa là 0.05.

Giải

Gọi p_1 , p_2 lần lượt là tỉ lệ đạt điểm Ielts 6.0 của sinh viên tự học tiếng anh qua các tài liệu, kênh học miễn phí trên Internet; và theo học một trung tâm tiếng anh.

Giả thiết không: $H_0 : p_1 - p_2 = 0$

Giả thiết đối: $H_a : p_1 - p_2 \neq 0$

Với $\alpha = 0.05$ thì $\phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0,975$ nên $z_{\alpha/2} = 1,96$
$\hat{p_1} = \frac{X}{m} = \frac{110}{200}$; $\hat{p_2} = \frac{Y}{n} = \frac{180}{350}$
$\hat{p} = \frac{X+Y}{m+n} = \frac{110+180}{200+350} = \frac{290}{550}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = \frac{260}{550}$.
Tiêu chuẩn kiểm định: $z = \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}} = 0,807$
Do $|z| < z_{\alpha/2}$ nên chấp nhận $H_0 : p_1 - p_2 = 0$.
Vậy tỉ lệ đạt 6.0 Ielts của sinh viên năm tư không phụ thuộc vào phương pháp học.

9.4.2 Xác suất sai lầm loại II và cỡ mẫu

Ở đây việc xác định β là một chút rườm rà hơn so với trước đây ở các kiểm định với mẫu lớn khác. Lý do là mẫu số của Z là ước lượng độ lệch chuẩn của $\hat{p} - \hat{p_2}$, giả sử rằng $p_1 = p_2 = p$. Khi H_0 là sai, $\hat{p_1} - \hat{p_2}$ phải được chuẩn hóa lại bằng cách dùng

$$\sigma_{\hat{p_1} - \hat{p_2}} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n}} \tag{9.6}$$

Biểu thức của σ ngụ ý rằng β không phải là một hàm của chỉ $p_1 - p_2$, vì vậy chúng ta biểu thị nó bằng $\beta(p_1, p_2)$.

Các giả thuyết đối	$\beta(p_1, p_2)$.
$H_a : p_1 - p_2 > 0$	$\Phi[\frac{z_\alpha \sqrt{\overline{p}.\overline{q}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} - (p_1 - p_2)}{\sigma}]$
$H_a : p_1 - p_2 < 0$	1- $\Phi[\frac{-z_\alpha \sqrt{\overline{p}.\overline{q}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} - (p_1 - p_2)}{\sigma}]$
$H_a : p_1 - p_2 \neq 0$	$\Phi[\frac{z_{\alpha/2} \sqrt{\overline{p}.\overline{q}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} - (p_1 - p_2)}{\sigma}] - \Phi[\frac{-z_{\alpha/2} \sqrt{\overline{p}.\overline{q}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} - (p_1 - p_2)}{\sigma}]$

với $\overline{p} = (mp_1 + np_2)/(m+n), \overline{q} = (mq_1 + nq_2)/(m+n)$ và σ được cho bởi công thức (9.6) .

Ngoài ra, đối với cụ thể p_1, p_2 mà $p_1 - p_2 = d$, có thể xác định cỡ mẫu cần có được $\beta(p_1, p_2) = \beta$.

Trường hợp $m = n$, kiểm định với mức ý nghĩa α có xác suất sai lầm loại II β ở các giá trị thay thế p_1, p_2 với $p_1 - p_2 = d$ khi

$$n = \frac{[z_\alpha\sqrt{(p_1+p_2)(q_1+q_2)/2}+z_\beta\sqrt{p_1q_1+p_2q_2}]^2}{d^2} \quad (9.7)$$

với kiểm định bên phải hoặc bên trái, thay thế $\alpha/2$ vào α với kiểm định 2 phía.

9.4.3 Khoảng tin cậy cho mẫu lớn

Giống như trung bình, nhiều vấn đề hai mẫu liên quan đến vấn đề của so sánh thông qua kiểm định giả thuyết, nhưng đôi khi ước lượng khoảng cho $p_1 - p_2$ là thích hợp. Cả $\hat{p_1} = X/m$ và $\hat{p_2} = Y/n$ đều có phân phối xấp xỉ chuẩn khi m và n lớn. Nếu chúng ta xác định θ với $p_1 - p_2$, thì $\hat{\theta} = \hat{p_1} - \hat{p_2}$ đáp ứng các điều kiện cần thiết để có được một khoảng tin cậy của mẫu lớn. Cụ thể, ước lượng độ lệch tiêu chuẩn $\hat{\theta}$ là $\sqrt{(\hat{p_1}\hat{q_1}/m) + (\hat{p_2}\hat{q_2}/n)}$. Khoảng tin cậy tổng quát $100(1-\alpha)\%$ là $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}.\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ có dạng như sau.

Khoảng tin cậy $p_1 - p_2$ với độ tin cậy xấp xỉ $100(1-\alpha)\%$ là

$$\hat{p_1} - \hat{p_2} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p_1}.\hat{q_1}}{m} + \frac{\hat{p_2}\hat{q_2}}{n}}$$

Khoảng này có thể dùng được khi mà $m\hat{p_1}, m\hat{q_1}, n\hat{p_2}$ và $n\hat{q_2}$ đều tối thiểu là 10.

Chú ý rằng độ lệch chuẩn được ước lượng của $\hat{p_1} - \hat{p_2}$ (dạng căn thức) thì khác với khi kiểm định giả thuyết khi $\Delta_0 = 0$.

Các nghiên cứu gần đây cho thấy độ tin cậy thực sự của khoảng tin cậy truyền thống đôi khi chệch khỏi mức đa thức (mức mà ta nhận được khi sử dụng giá trị đặc trưng z, ví dụ 95% khi $z_{\alpha/2} = 1.96$). Cải tiến đề xuất là thêm một thành công và một thất bại cho hai mẫu và sau đó thay thế các giá trị mẫu $\hat{p}$ và mẫu $\hat{q}$ trong công thức nói trên bằng mẫu $\tilde{p}$ và mẫu $\tilde{q}$, trong đó $\tilde{p_1} = (x+1)/(m+2)$,v.v... Khoảng hiệu chỉnh này cũng có thể được sử dụng khi kích thước mẫu là khá nhỏ.

Ví dụ 9.8 Nghiên cứu về tỉ lệ đạt 6.0 Ielts của sinh viên năm tư của một trường đại học có phụ thuộc vào phương pháp học hay không. Quan sát mẫu thứ nhất gồm $n = 200$ sinh viên tự học tiếng anh qua các tài liệu và kênh học miễn phí trên Internet, thì có 110 sinh viên đạt 6.0 Ielts. Quan sát mẫu thứ hai gồm $n = 350$ sinh viên theo học một trung tâm tiếng anh thì có 180 sinh viên đạt 6.0 Ielts. Với độ tin cậy 99 % tìm khoảng tin cây cho hiệu giữa hai tỉ lệ trên?

Giải

Gọi p_1 , p_2 lần lượt là tỉ lệ đạt điểm Ielts 6.0 của sinh viên tự học tiếng anh qua các tài liệu, kênh học miễn phí trên Internet; và theo học một trung tâm tiếng anh.

Với $\gamma = 0,99$ thì $\phi(z_{\alpha/2}) = (1+\gamma)/2 = 0,995$ nên $z_{\alpha/2} = 2,58$

$\hat{p_1} = \frac{X}{m} = \frac{110}{200}$; $\quad \hat{p_2} = \frac{Y}{n} = \frac{180}{350}$

Khoảng tin cậy 99 % cho hiệu giữa hai tỉ lệ trên là:

$p_1 - p_2 \in \frac{110}{200} - \frac{180}{350} \pm 2,58 * \sqrt{\frac{\frac{110}{200} \cdot \frac{90}{200}}{200} + \frac{\frac{180}{350}\frac{180}{350}}{350}} = (-0.0783; 0.6640)$

9.4.4 Suy luận với mẫu nhỏ

Thỉnh thoảng suy luận liên quan $p_1 - p_2$ có thể phải dựa trên trường hợp có ít nhất một mẫu nhỏ. Các phương pháp thích hợp cho các tình huống như vậy không đơn giản như đối với các mẫu lớn và có nhiều tranh cãi giữa các nhà thống kê về các bước tiến hành. Một kiểm định thường xuyên được sử dụng, được gọi là kiểm định Fisher-Irwin, được dựa trên phân phối siêu bội.

9.5 Các kết luận liên quan đến hai phương sai tổng thể

Đôi khi cần đến phương pháp để so sánh hai phương sai tổng thể (hoặc độ lệch chuẩn), mặc dù các vấn đề này ít gặp hơn so với trung bình hoặc tỷ lệ. Đối với trường hợp trong đó các tổng thể đang được điều tra là chuẩn, các bước dựa trên một họ mới của phân phối xác suất mới.

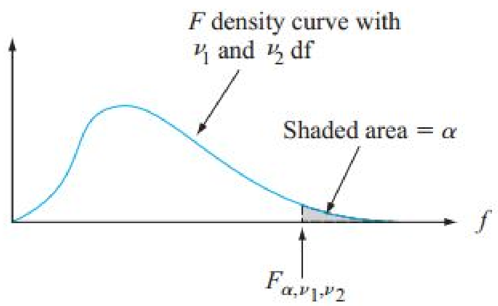
9.5.1 Phân phối F

Phân phối xác suất F có hai tham số, ký hiệu là ν_1 và ν_2. Tham số ν_1 được gọi là *số bậc tự do của tử* , và ν_2 là *số bậc tự do của mẫu* ; ở đây ν_1 và ν_2 là số nguyên dương. Một biến ngẫu nhiên có phân phối F không thể giả sử là một giá trị âm. Vì hàm mật độ là phức tạp và sẽ không được sử dụng rõ ràng, chúng ta bỏ qua công thức. Có một mối quan hệ quan trọng giữa một biến F và biến chi bình phương. Nếu X_1 và X_2 là các biến ngẫu nhiên có phân phối chi bình phương độc lập với bậc tự do ν_1 và ν_2 tương ứng, thì biến ngẫu nhiên

$$F = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$$

(tỉ số của 2 biến chi bình phương chia cho bậc tự do tương ứng), có thể được cho thấy để có phân phối F.

Hình dưới minh họa đồ thị của một hàm mật độ F điển hình. Tương tự với ký hiệu $t_{\alpha,v}$ và $\chi^2_{\alpha,v}$, chúng ta sử dụng F_{α,v_1,v_2} cho giá trị trên trục hoành mà α nằm trong vùng diện tích dưới đường cong mật độ F với bậc tự do ν_1 và ν_2 ở miền bên phải. Đường cong mật độ không đối xứng, vì vậy có vẻ như các giá trị tới hạn của phía trái và phải đều phải được lập bảng. Tuy nhiên điều này không cần thiết vì thực tế là $F_{1-\alpha,v_1,v_2} = 1/F_{\alpha,v_2,v_1}$.



Bảng phụ lục cho F_{α,v_1,v_2} , và $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ và 0.001, và các giá trị khác của ν_1 (trong các cột khác nhau của bảng) và ν_2 (trong các nhóm hàng khác nhau của bảng). Ví dụ, $F_{0.05,6,10} = 3.22$ và $F_{0.05,10,6} = 4.06$. Giá trị tới hạn $F_{0.95,6,10}$ mà chiếm 0.95 diện tích miền phải nó (và như vậy 0.05 ở bên trái) dưới đường cong F với $v_1 = 6$ và $v_2 = 10$, là $F_{0.95,6,10} = 1/F_{0.05,6,10} = 1/4.06 = 0.246$.

9.5.2 Kiểm định F cho các phương sai bằng nhau

Các bước kiểm định cho giả thuyết liên quan tỉ lệ σ_1^2/σ_2^2 dựa trên kết quả sau:

Định lý 9.5.1. *Đặt $X_1, \ldots, X_m$ là một mẫu ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai σ_1^2, đặt $Y_1, \ldots, Y_n$ là một mẫu ngẫu nhiên khác (độc lập với mẫu X_i) có phân phối chuẩn với phương sai σ_2^2 , và đặt S_1^2 và S_2^2 biểu thị hai phương sai mẫu. Thì biến ngẫu nhiên*

Giả thuyết không: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	
Giá trị kiểm định thống kê: $f = s_2^1/s_2^2$	
Các giả thuyết đối:	Miền bác bỏ cho a với mức ý nghĩa α
$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f \geq F_{\alpha,m-1,n-1}$
$H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$f \leq F_{\alpha,m-1,n-1}$
$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f \geq F_{\alpha/2,m-1,n-1}$ hay $f \leq F_{\alpha/2,m-1,n-1}$

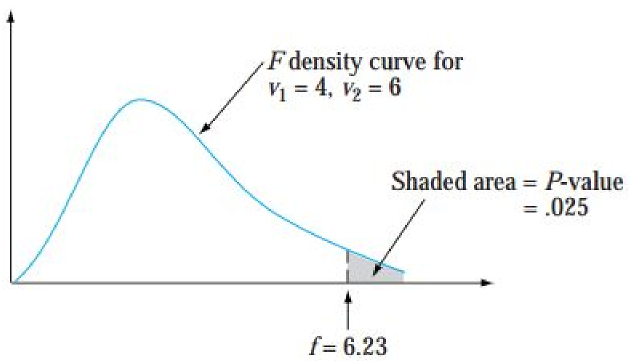
$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

có phân phối F *với* $v_1 = m-1$ *và* $v_2 = n-1$.

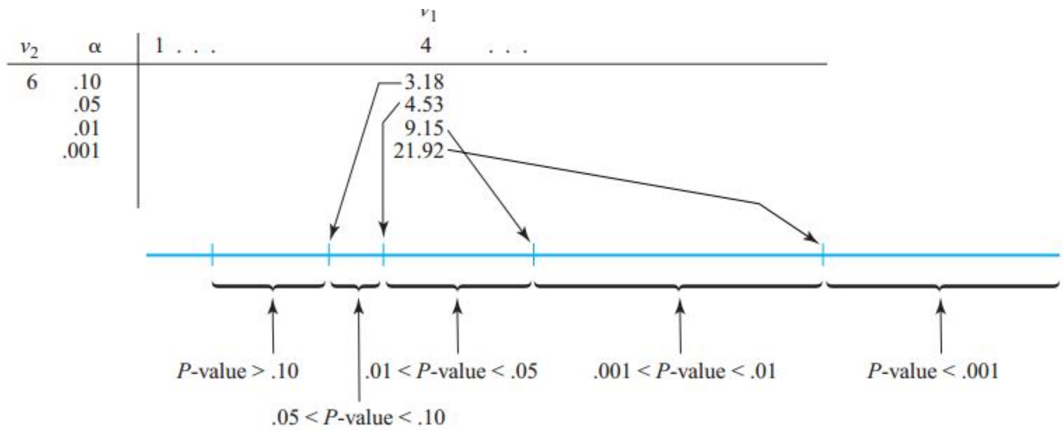
Khi giá trị tới hạn được cho trong bảng chỉ cho $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ và 0.001, kiểm định 2 phía chỉ có thể thực hiện ở mức $0.20, 0.10, 0.02, 0.002$. Các giá trị tới hạn F khác có thể thu được bằng phần mềm thống kê.

9.5.3 P-value cho kiểm định F

Nhắc lại về $P - value$ cho một kiểm định t bên phải trên là phần diện tích dưới đường cong t tương ứng (phần với bậc tự do phù hợp) đến bên phải của giá trị t được tính toán. Cùng một cách, giá trị P cho một kiểm định F miền phải là phần diện tích dưới đường cong F với bậc tự do của tử số và mẫu số thích hợp khi kiểm định bên phải của f đã được tính. Hình dưới minh họa điều này với một bài kiểm định dựa trên $v_1 = 4$ và $v_2 = 6$.



Lập bảng của phần diện tích miền phải đường cong F phức tạp hơn nhiều so với đường cong t bởi vì liên quan đến hai bậc tự do . Đối với mỗi sự kết hợp của v_1 và v_2, bảng F của chúng ta chỉ đưa ra bốn giá trị tới hạn mà diện tích là $0.10, 0.05, 0.01$, và 0.001. Hình dưới cho thấy những gì có thể nói về P-value phụ thuộc vào nơi f rơi vào tương ứng với bốn giá trị tới hạn.



Ví dụ, kiểm định với $v_1 = 4$ và $v_2 = 6$,
$f = 5.70 \Rightarrow 0.01 <$P-value$< 0.05$
$f = 2.16 \Rightarrow$P-value> 0.10
$f = 25.03 \Rightarrow$P-value< 0.001
Chỉ khi f bằng một giá trị đã lập bảng thì chúng ta mới có được một giá trị P chính xác (ví dụ, nếu $f = 4.53$, thì $P - value = 0.05$). Một khi chúng ta biết rằng $0.01 < P - value < 0.05$, H_0 sẽ bị loại bỏ ở mức ý nghĩa 0.05 nhưng không ở mức 0.01. Khi $P - value < 0.001$, H_0 bị từ chối ở bất kỳ mức ý nghĩa hợp lý nào.

9.5.4 Khoảng tin cậy cho σ_1/σ_2

Khoảng tin cậy cho σ_1^2/σ_2^2 là dựa trên thay thế F trong biểu thức xác suất

$$P(F_{1-\alpha/2,v_1,v_2} < F < F_{\alpha/2,v_1,v_2}) = 1 - \alpha$$

bằng biến F ở công thức trên và biến đổi các bất đẳng thức để tách riêng σ_1^2/σ_2^2 . Một khoảng cho σ_1/σ_2 là kết quả từ lấy căn bậc hai của mỗi giới hạn. Các phần chi tiết được chừa lại như một bài tập.

9.6 Bài tập

9.6.1 Kiểm định z và khoảng tin cậy cho hiệu giữa hai trung bình

Bài 1 Một bài báo trong Báo cáo tiêu dùng tháng 11 năm 1983 so sánh các loại pin khác nhau. Tuổi thọ trung bình của pin Duracell Alkaline AA và pin Eveready Energizer Alkaline AA lần lượt là 4,1 giờ và 4,5 giờ. Giả sử đây là tuổi thọ trung bình của tổng thể.

a/ Cho $\overline{X}$ là tuổi thọ trung bình của mẫu 100 pin Duracell và $\overline{Y}$ là tuổi thọ trung bình của mẫu là 100 pin Eveready. Hãy tìm giá trị trung bình của $\overline{X} - \overline{Y}$ (nghĩa là, $\overline{X} - \overline{Y}$ phân phối của sẽ tập trung ở đâu?)

b/ Giả sử độ lệch chuẩn của tổng thể là 1,8 giờ cho pin Duracell và 2,0 giờ cho pin Eveready. Với các mẫu được nêu trong phần (a), tìm phương sai và độ lệch chuẩn của thống kê $\overline{X} - \overline{Y}$?

Bài 2 Báo cáo thống kê sức khỏe quốc gia ngày 22 tháng 10 năm 2008, bao gồm các thông tin sau đây về chiều cao (in.) cho phụ nữ da trắng không phải gốc Tây Ban Nha:

Age	Sample Size	Sample Mean	Std. Error Mean
20–39	866	64.9	.09
60 and older	934	63.1	.11

a/ Tìm khoảng tin cậy với độ tin cậy 95% cho hiệu giữa chiều cao trung bình tổng thể của phụ nữ trẻ và phụ nữ lớn tuổi.

b/ Cho μ_1 là chiều cao trung bình tổng thể những người độ tuổi 20–39 và μ_2 là chiều cao tổng thể cho những người độ tuổi từ 60 tuổi trở lên. Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 1; H_a : \mu_1 - \mu_2 > 1$ với mức ý nghĩa 0,001, sử dụng phương pháp miền bác bỏ.

c/ Giá trị P-value cho kiểm định thực hiện trong (b) là bao nhiêu? Dựa trên giá trị P-value này, có bác bỏ giả thuyết không ở bất kỳ mức ý nghĩa hợp lý nào không? Giải thích.

Bài 3 Cho μ_1 kí hiệu tuổi thọ trung bình thực sự cho một thương hiệu lốp radial cao cấp P205 / 65R15, và μ_2 kí hiệu tuổi thọ trung bình thực sự cho một thương hiệu kinh tế có cùng kích thước. Kiểm định $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 5000; H_a : \mu_1 - \mu_2 > 5000$ với mức ý nghĩa 0,01. Cho biết $m = 45; \overline{x} = 42500; s_1 = 2200; n = 45; \overline{y} = 36800; s_2 = 1500$

Bài 4 Những người có hội chứng Reynaud có khuynh hướng bị suy giảm đột ngột tuần hoàn máu ở ngón tay và ngón chân. Trong một thí nghiệm để nghiên cứu mức độ suy giảm này, mỗi đối tượng nhúng một ngón trỏ trong nước rồi đo sản nhiệt (cal / cm2 / min). Đối với m=10 đối tượng có hội chứng, sản lượng nhiệt trung bình là $\overline{x} = 0,64$, và cho n=10 đối tượng không có hội chứng, sản lượng trung bình là 2,05. Gọi $\mu_1; \mu_2$ kí hiệu cho sản nhiệt trung bình thực sự cho hai đối tượng trên. Giả sử rằng phân phối sản nhiệt của hai loại đối tượng trên có phân phối chuẩn $\sigma_1 = 0,2; \sigma_2 = 0,4$.

a/ Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = -1; H_a : \mu_1 - \mu_2 < -1$ với mức ý nghĩa 0,1 .

b/ Tính giá trị P-value cho giá trị của Z thu được trong phần (a).

c/ Tính xác suất sai lầm loại II khi $\mu_1 - \mu_2 = -1,2$?

d/ Giả sử rằng m=n , cỡ mẫu sẽ là bao nhiêu để $\beta = 0,1$ khi $\mu_1 - \mu_2 = -1,2$?

Bài 5 Một thí nghiệm để so sánh độ bền liên kết sức căng của vữa có thể biến đổi (modified mortar) và vữa không biến đổi cho $\overline{x} = 18,12 kgf/cm^2; m = 40$ và $y = 16,87 kgf/cm^2, n = 32$ tương ứng. Gọi $\mu_1; \mu_2$ kí hiệu cho độ bền liên liên kết sức căng thật sự cho vữa có thể biến đổi và vữa không biến đổi, và giả sử độ bền liên kết sức căng của hai biến trên có phân phối chuẩn.

a/ Giả sử rằng $\sigma_1 = 1,6$ và $\sigma_2 = 1,4$. Hãy kiểm định $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0; H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$ với mức ý nghĩa 0,01.

b/ Tính xác suất sai lầm loại II của kiểm định câu (a) khi $\mu_1 - \mu_2 = 1$.

c/ Giả sử người quan sát sử dụng độ tin cậy 0,05 và $\beta = 0,1$ khi $\mu_1 - \mu_2 = 1$. Nếu m=40 thì giá trị n cần thiết là bao nhiêu?

d/ Phân tích và kết luận của câu (a) thay đổi như thế nào khi σ_1, σ_2 chưa biết nhưng $s_1 = 1,6$ và $s_2 = 1,4$.

Bài 6 Bài viết "Có sự khác biệt về giảng dạy toàn thời gian và bán thời gian?"(Cao đẳng Giảng dạy, 2009: 23–26) báo cáo rằng cho một mẫu 125 các khóa học do giảng viên dạy toàn thời gian, điểm GPA trung bình là 2,7186 và độ lệch chuẩn là 0,63342, trong khi đối với mẫu của 88 khóa học được giảng dạy bán thời gian, trung bình và

độ lệch chuẩn là 2,8639 và 0,49241, tương ứng.
Liệu có sự khác biệt điểm GPA trung bình thực sự giữa dạy bán thời gian với dạy toàn thời gian không? Kiểm định với mức ý nghĩa 0,01 bởi một giá trị P-value có được đầu tiên.

9.6.2 Kiểm định t cho 2 mẫu và khoảng tin cậy

Bài 7 Đặt μ_1 và μ_2 kí hiệu mật độ trung bình thực sự cho hai loại gạch khác nhau. Giả sử phân phối của hai mật độ của hai loại gạch là chuẩn. Hãy kiểm định $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0; H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ sử dụng các dữ liệu sau: $m = 6; \overline{x} = 22,73; s_1 = 0,164; n = 5; \overline{y} = 21,95; s_2 = 0,24$.

Bài 8 Giả sử μ_1 và μ_2 là khoảng cách dừng trung bình thực tại 50 mph đối với các ô tô thuộc một loại nhưng được trang bị hai các kiểu hệ thống phanh khác nhau. Sử dụng kiểm định t hai mẫu với mức ý nghĩa 0,01 để kiểm định $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = -10; H_a : \mu_1 - \mu_2 < -10$, biết rằng $m = 6; \overline{x} = 115,7; s_1 = 5,03; n = 6; \overline{y} = 129,3; s_2 = 5,38$.

Bài 9 Thử nghiệm cắt nghiêng được chấp nhận rộng rãi để đánh giá liên kết vật liệu sửa chữa bằng nhựa với bê tông; nó sử dụng mẫu xi lanh được làm bằng hai nửa giống hệt nhau được liên kết ở 30^o. Bài báo "Thử nghiệm liên kết giữa vật liệu sửa chữa và chất nền bê tông "(ACI Materials J., 1996: 553–558) báo cáo rằng đối với 12 mẫu thử được chuẩn bị bằng cách sử dụng bàn chải sắt, cường độ cắt trung bình mẫu (N / mm^2) và độ lệch chuẩn mẫu tương ứng là 19,20 và 1,58. Trong khi đó cho 12 mẫu đục tay, các giá trị tương ứng là 23,13 và 4,01. Lực trung bình thực sự giữa hai mẫu có khác nhau không? Hãy kiểm định giả thiết trên với mức ý nghĩa 0,05.

Bài 10 Keo dựng (fusible Interlinings) đang được sử dụng với tần số ngày càng tăng để hỗ trợ các loại vải bên ngoài và cải thiện hình dạng và treo lên của các mảnh quần áo khác nhau. Bài viết "Tính tương thích của vải bên ngoài và keo dựng trong may mặc" (Textile Res, J., 1997: 137–142) cho dữ liệu đi kèm về khả năng mở rộng (%) ở 100 gm/cm cho vải chất lượng cao (H) và vải chất lượng kém (P)

H	1.2	.9	.7	1.0	1.7	1.7	1.1	.9	1.7
	1.9	1.3	2.1	1.6	1.8	1.4	1.3	1.9	1.6
	.8	2.0	1.7	1.6	2.3	2.0			
P	1.6	1.5	1.1	2.1	1.5	1.3	1.0	2.6	

Sử dụng kiểm định hai mẫu t để quyết định xem độ mở rộng trung bình thực có khác nhau đối với hai loại vải không?

Bài 11 Đau lưng thấp (Low-back pain)(LBP) là một vấn đề sức khỏe nghiêm trọng ở nhiều nền công nghiệp. Bài báo "Đánh giá động lực học của Trunk Muscles và Low-back pain trong số các công nhân trong một Nhà máy thép "(Ergonomics, 1995: 2107–2117) báo cáo cho dữ liệu tóm tắt đi kèm trên phạm vi chuyển động ngang (độ) cho một mẫu công nhân không có tiền sử LBP và một mẫu khác có tiền sử bệnh này

Condition	Sample Size	Sample Mean	Sample SD
No LBP	28	91.5	5.5
LBP	31	88.3	7.8

Tính khoảng tin cậy 90% cho hiệu giữa trung bình thực sự của chuyển động ngang đối với hai điều kiện LBP và không LBP. Khoảng tin cậy tìm được có cho thấy trung bình chuyển động ngang thực sự có khác nhau giữa hai mẫu không? Điều này có thay đổi nếu độ tin cậy là 95% không?

Bài 12 Khi dân số già đi, có sự lo ngại ngày càng tăng về tai nạn chấn thương liên quan đến người già. Bài báo "Sự khác biệt về tuổi tác và giới tính trong việc lấy lại thăng bằng bằng 1 bước để khỏi bị ngã về phía trước" (J. của Gerontology, 1999: M44 – M50) được báo cáo trong một thí nghiệm trong đó góc nghiêng tối đa - xa nhất mà đối tượng có thể nghiêng và vẫn giữ lại thăng bằng bằng 1 bước được xác định từ mẫu phụ nữ trẻ 21-29 tuổi (young females) và mẫu phụ nữ lớn tuổi 67-81 tuổi (older females).

YF: 29, 34, 33, 27, 28, 32, 31, 34, 32, 27
OF: 18, 15, 23, 13, 12

Dữ liệu có cho thấy góc nghiêng tối đa trung bình thực sự của phụ nữ lớn tuổi thì lớn hơn phụ nữ nhỏ tuổi là 10 độ không? Hãy kiểm định làm rõ điều trên với mức ý nghĩa 0,1; suy ra P-value.

Bài 13 Bệnh thoái hóa khớp thường xuyên ảnh hưởng đến các khớp có trọng lượng như đầu gối. Bài viết "Dữ kiện về tái phân phối tải cơ học ở khớp đầu gối trong người cao tuổi khi tăng dần cầu thang và dốc " (Annals of Biomed. Engr., 2008: 467–476) trình bày dữ liệu tóm tắt sau về thời gian đứng (phút) cho các mẫu của cả người lớn tuổi và người trẻ tuổi.

Age	Sample Size	Sample Mean	Sample SD
Older	28	801	117
Younger	16	780	72

Giả sử rằng cả hai nhóm tuổi già và tuổi trẻ đều có phân phối chuẩn.
a/ Tính khoảng ước lượng cho thời gian đứng trung bình của nhóm người già với độ tin cậy 99% .
b/ Thực hiện kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 0,05 để quyết định xem thời gian đứng trung bình thực sự của người già có lớn hơn thời gian đứng trung bình thực sự của người trẻ không.

9.6.3 Phân tích số liệu ghép đôi

Bài 14 Xem xét các dữ liệu về tải trọng phá vỡ (kg / 25mm chiều rộng) cho các loại vải khác nhau trong cả điều kiện không mài mòn và điều kiện bị mài mòn ("Hiệu ứng của mài mòn ướt trên các đặc tính kéo của Cotton và Polyester-Cotton"- Tạp chí Kiểm tra và đánh giá, 1993: 84–93). Sử dụng kiểm định t cặp, như tác giả trong bài báo đã đề cập, để kiểm định $H_0 : \mu_D = 0; H_a : \mu_D > 0$ với mức ý nghĩa 0,01.

	Fabric							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
U	36.4	55.0	51.5	38.7	43.2	48.8	25.6	49.8
A	28.5	20.0	46.0	34.5	36.5	52.5	26.5	46.5

Bài 15 Crom hóa trị sáu đã được xác định là chất độc gây ung thư nếu hít phải và là độc tố không khí liên quan đến một số địa phương khác nhau. Bài viết "Không khí Crom hóa trị sáu ở Tây Nam Ontario "(J. of Air and Waste Mgmnt. Assoc., 1997: 905–910) cho dữ liệu về cả nồng độ trong nhà lẫn ngoài trời (nanogram / m^3) cho một mẫu các nhà được chọn từ một khu vực nhất định.

	House								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Indoor	.07	.08	.09	.12	.12	.12	.13	.14	.15
Outdoor	.29	.68	.47	.54	.97	.35	.49	.84	.86

	House							
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Indoor	.15	.17	.17	.18	.18	.18	.18	.19
Outdoor	.28	.32	.32	1.55	.66	.29	.21	1.02

	House							
	18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Indoor	.20	.22	.22	.23	.23	.25	.26	.28
Outdoor	1.59	.90	.52	.12	.54	.88	.49	1.24

	House							
	26	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**
Indoor	.28	.29	.34	.39	.40	.45	.54	.62
Outdoor	.48	.27	.37	1.26	.70	.76	.99	.36

Tính toán khoảng tin cậy cho hiệu trung bình thực sự của nồng độ trong nhà và ngoài trời, sử dụng độ tin cậy 95% và giải thích khoảng thu được.

9.6.4 Các kết luận liên quan đến hiệu hai tỷ lệ

Bài 16 Liệu người chuyển đổi thương hiệu vì tài chính thì ít trung thành hơn một người chuyển đổi không có lý do? Đặt p_1 và p_2 kí hiệu cho tỷ lệ thực sự của người chuyển đổi thương hiệu khi có và không có lý do. Kiểm định $H_0 : p_1 - p_2 = 0; H_a : p_1 - p_2 < 0$ với $\alpha = 0,01$ và dữ liệu sau:
Nhóm chuyển thương hiệu có lý do: m=200 thì có 30 người chuyển.
Nhóm chuyển thương hiệu không lý do: n=600 thì có 180 người chuyển.
(Dữ liệu tương tự được đưa ra trong "Tác động của giao dịch và rút lại giao dịch về chuyển đổi thương hiệu, "J. của Marketing, 1980: 62–70.)

Bài 17 Những sự cố ô nhiễm thực phẩm gần đây là mối quan tâm giữa người tiêu dùng. Bài báo "Gà an toàn thế nào?" (Consumer Report, tháng 1 năm 2010: 19–23) đã báo cáo rằng 35 trong số 80 gà thịt thương hiệu Perdue được chọn ngẫu nhiên có kết quả kiểm tra dương tính với campylobacter hoặc salmonella (hoặc cả hai), đó là các vi khuẩn gây bệnh thực phẩm hàng đầu. Song song đó thì có 66 trong số 80 gà thịt thương hiệu Tyson được thử nghiệm dương tính.
a/ Có vẻ như tỷ lệ không nhiễm độc thật sự của Gà thịt Perdue khác với gà thương hiệu Tyson? Thực hiện kiểm định giả thuyết sử dụng mức ý nghĩa 0,01 bằng cách lấy giá trị P-value.
b/ Nếu tỷ lệ thực sự của gà không bị nhiễm bệnh của các thương hiệu Perdue và Tyson là 0,50 và 0,25. Thì khả năng giả thiết không về tỉ lệ bằng nhau sẽ bị bác bỏ thế nào khi mức ý nghĩa là 0,01 và cỡ mẫu đều bằng 80?

Bài 18 Người ta cho rằng bìa trước và sự tự nhiên của câu hỏi đầu tiên về khảo sát qua thư ảnh hưởng đến tỷ lệ phản hồi. Các bài viết "Tác động của thiết kế bìa và câu hỏi đầu tiên về tỷ lệ phản hồi cho một cuộc khảo sát qua thư của Skydivers"(Leisure Science, 1991: 67–76) đã thử nghiệm lý thuyết này bằng cách thử nghiệm với các thiết kế bìa khác nhau. Một bìa là hình đồng bằng; cái khác sử dụng hình ảnh của một người nhảy dù. Các nhà nghiên cứu suy đoán rằng tỷ lệ hồi đáp sẽ thấp hơn cho bìa hình đồng bằng.

Cover	Number Sent	Number Returned
Plain	207	104
Skydiver	213	109

Từ dữ liệu hãy kiểm định suy đoán trên với mức ý nghĩa 0,01 từ cách tính P-value đầu tiên.

Bài 19 Liệu giáo viên có thấy thỏa mãn về công việc của họ không? Các bài viết "Thái độ làm việc liên quan" (Báo cáo tâm lý, 1991: 443–450) báo cáo kết quả khảo sát 395 giáo viên tiểu học và 266 giáo viên trung học. Trong số các giáo viên tiểu học, 224 nói rằng họ rất hài lòng với công việc của họ, trong khi 126 trường trung học giáo viên rất hài lòng với công việc của họ. Ước lượng sự khác biệt giữa tỷ lệ hài lòng của giáo viên tiểu học và giáo viên trung học với độ tin cậy 99%

Bài 20 Olestra là chất béo thay thế được FDA chấp thuận để sử dụng trong thức ăn nhẹ. Bởi vì đã có những báo cáo về vấn đề tiêu hóa liên quan đến tiêu thụ olestra, một thí nghiệm nghiên cứu kiểm soát giả dược thử nghiệm được thực hiện để so sánh khoai tây chiên có olestra với khoai tây chiên thường qua các triệu chứng GI ("Triệu chứng tiêu hóa sau tiêu thụ khoai tây có Olestra hoặc khoai tây thường "J. of the Amer.Med.Assoc.,1998: 150–152). Trong số 529 người trong nhóm kiểm soát TG, 17,6% có biểu hiện GI bất lợi. Và trong số 563 cá nhân trong nhóm tiêu thụ olestra có 15,8% có biểu hiện GI bất lợi.
a/ Hãy kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 5% để quyết định xem liệu biểu hiện GI bất lợi cho nhóm tiêu thụ khoai tây chiên có olestra có khác gì với nhóm điều trị có kiểm soát TG?
b/ Nếu tỷ lệ phần trăm thực sự cho hai phương pháp điều trị tương ứng là 15% và 20%, kích thước mẫu nào (m=n) sẽ cần thiết để phát hiện sự khác biệt như vậy với xác suất 0,09?

9.6.5 Các kết luận liên quan đến hai phương sai tổng thể

Bài 21 Tính các giá trị sau:
a/ $F_{0,05;5;8}$
b/ $F_{0,05;8;5}$
c/ $F_{0,95;5;8}$
d/ $F_{0,95;8;5}$
e/ $P(F \leq 6,16)$ với $v_1 = 6; v_2 = 4$
f/ $P(0,177 \leq F \leq 4,74)$ với $v_1 = 10; v_2 = 5$

Bài 22 Tìm P-value của kiểm định F trong các trường hợp sau:
a/ $v_1 = 5; v_2 = 10$, kiểm định bên phải , $f = 4,75$
b/ $v_1 = 5; v_2 = 10$, kiểm định bên phải, $f = 2$
c/ $v_1 = 5; v_2 = 10$, kiểm định hai phía, $f = 5,64$
d/ $v_1 = 5; v_2 = 10$, kiểm định bên trái, $f = 2$
e/ $v_1 = 35; v_2 = 20$, kiểm định bên phải, $f = 3.24$

Bài 23 Toxaphene là một loại thuốc trừ sâu đã được xác định là một chất gây ô nhiễm trong hệ sinh thái Great Lakes. Để điều tra ảnh hưởng của phơi nhiễm độc tố lên động vật, thí nghiệm nhóm chuột được cho độc tố trong chế độ ăn uống của chúng. Bài viết "Nghiên cứu sinh sản của Toxaphene ở chuột" (J. of Environ. Sci. Health, 1988: 101–126) báo cáo tăng cân (tính bằng gam) đối với chuột cho liều thấp (4 ppm) và với chuột ăn thức ăn không chứa thuốc trừ sâu. Độ lệch chuẩn mẫu cho 23 con chuột cái ăn thức ăn không độc là 32 g và cho 20 con chuột liều thấp là 54g. Dữ liệu này có cho rằng có nhiều sự thay đổi trong tăng cân của chế độ ăn liều thấp hơn so với chế độ ăn không chứa độc? Giả sử phân phối chuẩn, hãy kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 0,05?

Bài 24 Trong một nghiên cứu về thiếu đồng trong gia súc, giá trị đồng (μg Cu / 100 mL máu) được xác định cho cả gia súc chăn thả trong một khu vực được biết là có molybdenum dị thường (giá trị kim loại vượt quá phạm vi bình thường của biến đổi khu vực) và trong khu vực bình thường ("Một điều tra về sự thiếu đồng trong gia súc ở Nam Pennines, " J. Agricultural Soc. Cambridge, 1972: 157–163), kết quả là $s_1 = 21,5 (m = 48)$ cho khu vực dị thường và $s_2 = 19,45 (n = 45)$ cho khu vực bình thường. Kiểm định hai phương sai tổng thể về sự bằng nhau và khác nhau với mức ý nghĩa 0,01 bằng cách sử dụng phương pháp P-value.

9.6.6 Bài tập ôn Chương 9

Bài 25 Liệu rằng tỉ lệ trả lời bảng câu hỏi có bị ảnh hưởng bởi những khuyến khích đi kèm với câu hỏi đó không? Trong một thử nghiệm, 110 bảng câu hỏi không có khuyến khích thì có 75 hồi đáp, trong khi 98 bảng câu hỏi bao gồm cơ hội trúng xổ số thì có 66 hồi đáp ("Charities, No, Lotteries, No; Cash, Yes" Public Opinion Quarterly, 1996: 542-562). Có thể kết luận rằng nếu có khuyến khích đi kèm câu hỏi thì tỷ lệ hồi đáp cao hơn không? Kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa 0,01 bằng cách sử dụng phương pháp P-value.

Bài 26 Dữ liệu đi kèm được thu thập trong một nghiên cứu để đánh giá khả năng hóa lỏng tại một nhà máy điện hạt nhân được đề xuất ("Cường độ tuần hoàn so với hai kỹ thuật lấy mẫu", J. of the Geotechnical Division, Am. Soc. Civil Engrs Proceedings, 1981: 563-576). Trước khi kiểm tra sức mạnh theo chu kỳ, các mẫu đất được thu thập bằng cả hai phương pháp ống bình (a pitcher tube) và phương pháp khối (a block method), cho các giá trị quan sát được sau đây của mật độ khô (lb / ft^3):

Pitcher sampling	101.1	111.1	107.6	98.1
	99.5	98.7	103.3	108.9
	109.1	104.1	110.0	98.4
	105.1	104.5	105.7	103.3
	100.3	102.6	101.7	105.4
	99.6	103.3	102.1	104.3
Block sampling	107.1	105.0	98.0	97.9
	103.3	104.6	100.1	98.2
	97.9	103.2	96.9	

Tìm khoảng tin cậy 95% cho hiệu giữa mật độ khô trung bình thực sự của hai phương pháp lấy mẫu.

Bài 27 Bài báo "Urban Battery Litter" đưa ra dữ liệu tóm tắt sau về khối lượng kẽm (g) cho hai thương hiệu khác nhau của pin cỡ D:

Brand	Sample Size	Sample Mean	Sample SD
Duracell	15	138.52	7.76
Energizer	20	149.07	1.52

Giả sử rằng cả hai phân phối khối lượng kẽm đều xấp xỉ chuẩn, thực hiện một kiểm định với mức ý nghĩa 0,05 sử dụng phương pháp P-value để quyết định liệu khối lượng kẽm trung bình thực sự có khác nhau đối với hai loại pin hay không.

Bài 28 Thông tin về tư thế tay và lực được tạo ra bởi ngón tay trong khi thao tác với các vật thể hàng ngày khác nhau là cần thiết để thiết kế các thiết bị tay giả công nghệ cao. Bài viết "Giữ tư thế và lực trong khi đang nắm giữ vật thể hình trụ

có kẹp tròn "(Ergonomics, 1996: 1163–1176) đã báo cáo rằng đối với một mẫu gồm 11 phụ nữ, cường độ trung bình kẹp bốn ngón tay (N) là 98,1 và độ lệch chuẩn mẫu là 14.2. Đối với một mẫu 15 nam giới, trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu lần lượt là 129,2 và 39,1.
a/ Một thử nghiệm được thực hiện để xem liệu lực trung bình cho hai giới tính có khác nhau không thì cho kết quả $t = 2,51$ và P-value =0,019. Kiểm tra xem kết quả này đúng không?
b/ Có kết luận rằng sức mạnh trung bình thực sự của nam giới lớn hơn nữ giới hơn 25 N? Hãy kiểm định giả thiết trên.

Bài 29 Thử nghiệm để xác định ảnh hưởng của nhiệt độ lên sự tồn tại của trứng côn trùng được mô tả trong bài viết "Tốc độ phát triển và mô hình phụ thuộc nhiệt độ của Pales Weevil "(Environ. Entomology, 1987: 956–962). Tại 11^oC , 73 trong số 91 trứng sống sót trong giai đoạn phát triển tiếp theo. Ở 30^oC, 102 trong số 110 trứng sống sót. Có thể kết luận là tỉ lệ sống sót ở hai nhiệt độ trên là khác nhau không? Tính P-value và dùng nó để kiểm định giả thiết phù hợp.

Bài 30 Bài báo "Đánh giá sự thay đổi trong hoạt động lấp đầy" (Food Tech., 1984: 51–55) mô tả hai cách lấp đầy khác nhau được sử dụng trong một nhà máy đóng gói thịt bò xay. Cả hai hoạt động lấp đầy được thiết lập để làm đầy các gói với 1400g thịt bò xay. Trong một mẫu ngẫu nhiên có kích thước 30 lấy từ mỗi hoạt động lấp đầy, cho trung bình và độ lệch chuẩn là 1402,24g và 10,97g cho hoạt động 1 và 1419,63g và 9,96g cho hoạt động 2.
a/ Sử dụng mức ý nghĩa 0,05, có đủ dữ kiện cho rằng trọng lượng trung bình thực sự của các gói khác nhau trong hai hoạt động không?
b/ Có thể cho rằng hoạt động 1 có trọng lượng trung bình thực sự của các gói cao hơn 1400 g được không? Sử dụng mức ý nghĩa 0,05.