Chương 3

Tích phân đường

3.1 Trường Vectơ

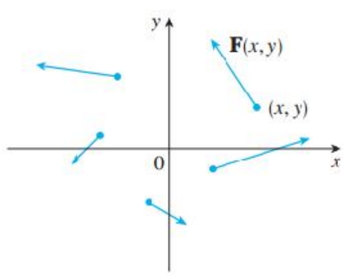
3.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Một **trường vectơ** trong $\mathbb{R}^2$ là một hàm F gán cho mỗi điểm (x, y) trong D một vectơ hai chiều

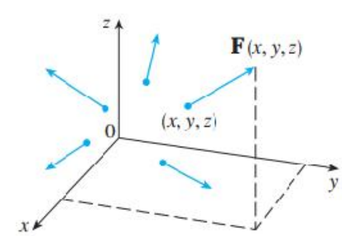
$$F(x, y) = P(x, y).i + Q(x, y).j = (P(x, y), Q(x, y))$$

Định nghĩa 3.2. Cho $E \subset \mathbb{R}^3$. Một **trường vectơ** trong $\mathbb{R}^3$ là một hàm F gán cho mỗi điểm (x, y) trong D một vectơ ba chiều

$$F(x, y, z) = P(x, y, z).i + Q(x, y, z).j + R(x, y, z).k = (P(x, y, z), Q(x, y, z), (x, y, z))$$



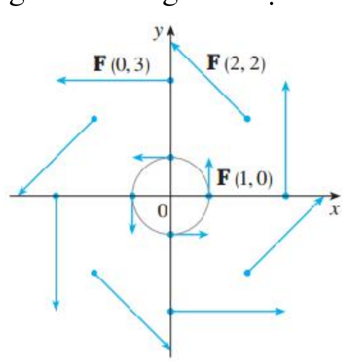
Vector field on $\mathbb{R}^2$



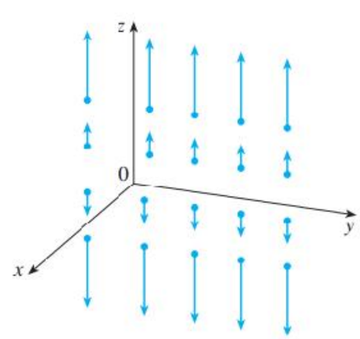
Vector field on $\mathbb{R}^3$

Ví dụ 3.1. 1. Một trường vectơ trong $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi $F(x, y) = -yi + xj$

2. Một trường vectơ trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi phương trình $F(x, y, z) = zk$



$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$



$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$

▷ **Trường hấp dẫn.**

Ví dụ 3.2. Định luật hấp dẫn của Newton phát biểu rằng lực hấp dẫn giữa hai vật có khối lượng m và M là

$$|F| = \frac{m.M.G}{r^2}$$

trong đó r là khoảng cách giữa hai vật, G là hằng số hấp dẫn.

Giả sử

Vật M nằm tại gốc tọa độ.

Vật m có vectơ vị trí $X = (x, y, z)$.

Khi đó

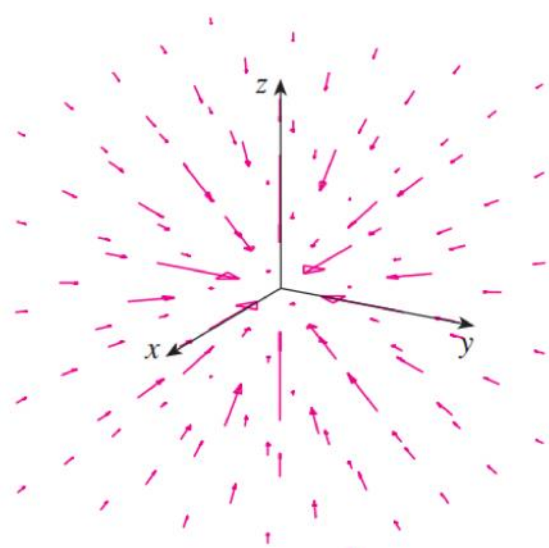
- khoảng cách $r = |X|$
- lực hấp dẫn tác dụng lên vật m hướng tới gốc tọa độ, có vectơ đơn vị là $\frac{X}{|X|}$.

Vậy, lực hấp dẫn tác dụng lên vật m là

$$F(X) = -\frac{m.M.G}{|X|^3}.X$$

Hay

$$F(x, y, z) = \frac{-m.M.G.x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.i + \frac{-m.M.y.G}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.j + \frac{-m.M.G.z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.k$$



▷ **Trường lực từ.**

Ví dụ 3.3. Giả sử một điện tích Q nằm ở gốc tọa độ. Theo định luật Coulomb, lực từ $F(X)$ tác dụng lên điện tích q nằm tại điểm (x, y, z) với vecto vị trí $X = (x, y, z)$ là

$$F(X) = \frac{\varepsilon.q.Q}{|X|^3}.X$$

trong đó

ε : hằng số.

q, Q điện tích. Nếu q, Q cùng dấu F là lực đẩy, nếu q, Q trái dấu, F là lực hút.

Hay

$$F(x, y, z) = \frac{\varepsilon.q.Q.x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.i + \frac{\varepsilon.q.Q.y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.j + \frac{\varepsilon.q.Q.z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.k$$

$\triangleright$ **Trường Gradient.** Nếu f là hàm vô hướng hai biến, thì gradient của f

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\, i + f_y(x, y)\, j$$

là một trường vectơ trong $\mathbb{R}^2$, gọi là trường vectơ Gradient.

Nếu f là hàm vô hướng ba biến, thì gradient của f

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, i + f_y(x, y, z)\, j + f_z(x, y, z)\, k$$

là một trường vectơ trong $\mathbb{R}^3$.

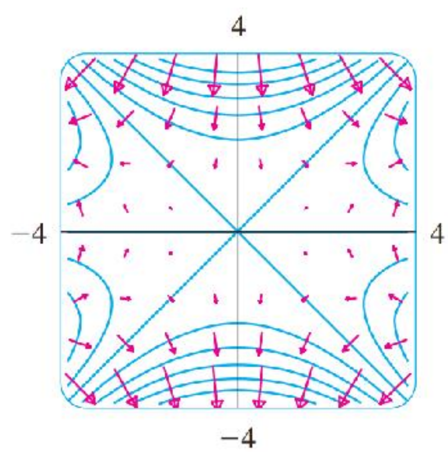
Ví dụ 3.4. Tìm trường vectơ gradient của $f(x, y) = x^2 y - y^3$. Vẽ trường vectơ gradient và bản đồ đường mức của f.

Giải

Trường vectơ gradient của f

$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\, i + f_y(x, y)\, j = 2xyi + \left(x^2 - 3y^2\right) j$

Hình vẽ



3.2 Đường trong mặt phẳng - không gian

Cho đường cong $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, đường cong C được gọi là

- *trơn*, nếu

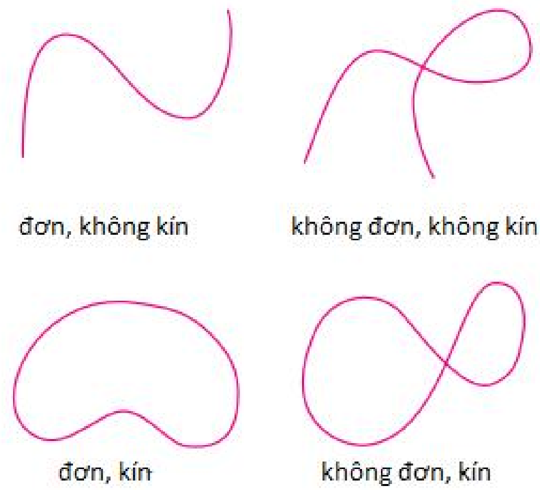
$x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục, và

$x'(t), y'(t)$ không đồng thời triệt tiêu $\forall t \in [a, b]$ (nghĩa là $\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 \neq 0$)

- *trơn từng khúc*, nếu nó gồm một số hữu hạn các đường trơn.

- *khép kín (hay đóng)*, nếu điểm đầu và điểm cuối của nó trùng nhau, nghĩa là $x(a) = x(b), y(a) = y(b)$.

- *không có điểm tự cắt (đường cong đơn)*, nếu với mọi $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$ đều có $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ trừ trường hợp $t_1 = a, t_2 = b$.



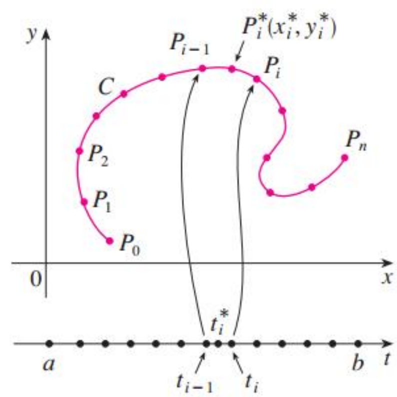
3.3 Tích phân đường loại I

3.3.1 Định nghĩa

Cho C là một đường cong trơn trong $\mathbb{R}^2$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

và hàm $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b]$.

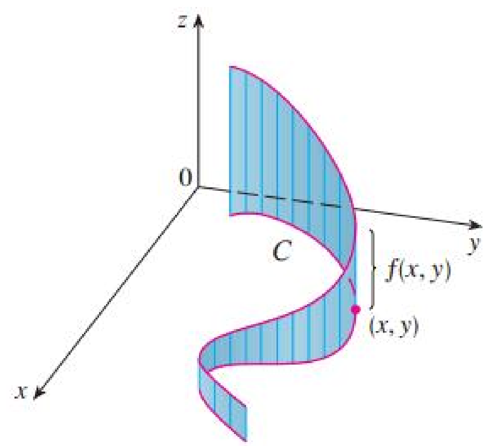


- Chia $[a, b]$ thành n đoạn $[t_{i-1}, t_i]$.
- Với mỗi điểm $t_i, i = \overline{0, n}$, ta có điểm $P_i = P(x(t_i), y(t_i))$.
- Các điểm P_i chia đường cong C thành n cung nhỏ $P_{i-1}P_i$
- Đặt $\Delta_i s$ là chiều dài cung $P_{i-1}P_i$.

- Ta chọn điểm bất kỳ $P_i^*\left(x_i^*, y_i^*\right)$ trong cung $P_{i-1}P_i$.
- Khi đó, **tích phân đường của f dọc theo C là**

$$\int\limits_C f\left(x, y\right) ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right) \Delta s_i \tag{3.1}$$

nếu giới hạn này tồn tại.



Chú ý: nếu C là đường cong kín, ta ký hiệu $\oint\limits_C f\left(x, y\right) ds$.

Tính chất 3.1. .

1. $\int\limits_C \left(f \pm g\right) ds = \int\limits_C f ds \pm \int\limits_C g ds$.
2. $\int\limits_C c f\left(x, y\right) ds = c \int\limits_C f\left(x, y\right) ds$.
3. Nếu $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ thì $\int\limits_C f\left(x, y\right) ds = \int\limits_{C_1} f\left(x, y\right) ds + \cdots + \int\limits_{C_n} f\left(x, y\right) ds$.
4. Nếu $f = 1$ thì $\int\limits_C ds$ là chiều dài của cung C.
5. Tích phân đường loại I *không phụ thuộc vào chiều* của đường cong.

3.3.2 Cách tính

A. Trong $\mathbb{R}^2$

- Nếu C có dạng $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, ta có

$$\int\limits_C f\left(x, y\right) ds = \int\limits_a^b f\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) . \sqrt{\left[x^{/}\left(t\right)\right]^2 + \left[y^{/}\left(t\right)\right]^2} \mathbf{dt}.$$

- Nếu C có dạng $y = y(x), x \in [a, b]$, ta có

$$\int\limits_C f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \,.\sqrt{1 + \left[y^{/}(x)\right]^2}\mathbf{dx}.$$

- Nếu C có dạng $x = x(y), y \in [a, b]$, ta có

$$\int\limits_C f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b f(x(y), y) \,.\sqrt{1 + \left[x^{/}(y)\right]^2}\mathbf{dy}.$$

B. Trong $\mathbb{R}^3$

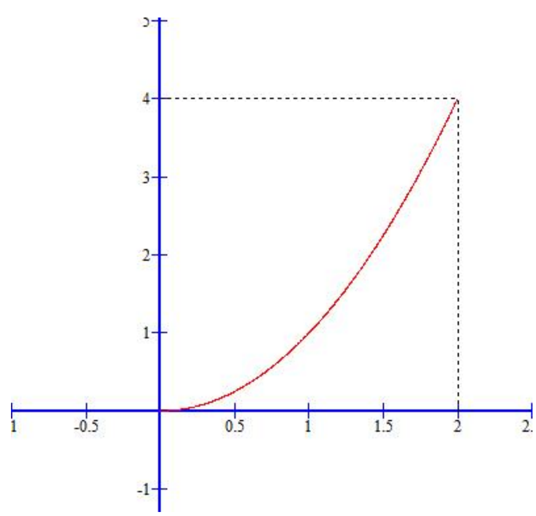
C có dạng $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$, ta có

$$\int\limits_C f(x, y, z)\, ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \,.\sqrt{\left[x^{/}(t)\right]^2 + \left[y^{/}(t)\right]^2 + \left[z^{/}(t)\right]^2}\mathbf{dt}.$$

Ví dụ 3.5. Tính $\int\limits_C xyds$, trong đó C có phương trình

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2]$$

Giải



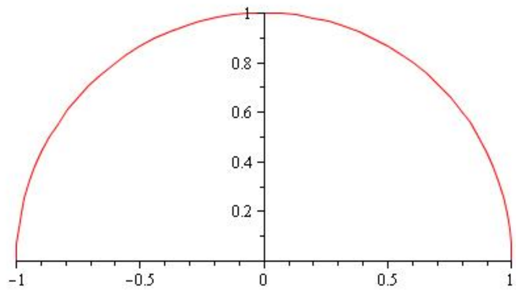
Ta có $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$

Suy ra

$$\int\limits_C xyds = \int\limits_0^2 t.t^2\sqrt{1^2 + (2t)^2}dt = \frac{1}{120}\left(391\sqrt{17} + 1\right).$$

Ví dụ 3.6. Tính $\int\limits_C \left(2 + x^2 y\right) ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải



Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi.$

Ta có $\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$

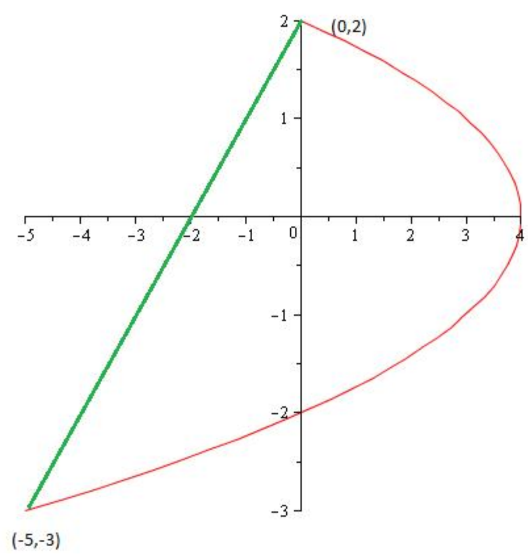
Suy ra

$$\begin{aligned} \int_C \left(2 + x^2 y\right) ds &= \int_0^\pi \left(2 + \cos^2 t . \sin t\right) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \left(2 + \cos^2 t . \sin t\right) dt \\ &= 2\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.7. Tính $\int_C y ds$, trong đó

1. C là đường thẳng từ điểm $(-5, -3)$ tới $(0, 2)$.
2. C là parabol $x = 4 - y^2$ từ điểm $(-5, -3)$ tới $(0, 2)$.

Giải



Nhắc lại: Ta có phương trình đường thẳng đi từ $A(x_A, y_A)$ tới $B(x_B, y_B)$ là

$$\begin{cases} x = (1-t)\, x_A + t x_B \\ y = (1-t)\, y_A + t y_B \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

1. Ta có $C : \begin{cases} x = 5t - 5 \\ y = 5t - 3 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1. \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 5 \end{cases}.$

Suy ra

$$\int\limits_C yds = \int\limits_0^1 (5t-3)\sqrt{(5)^2 + (5)^2}dt = \sqrt{50}\int\limits_0^1 (5t-3)\,dt = -\frac{\sqrt{50}}{2}.$$

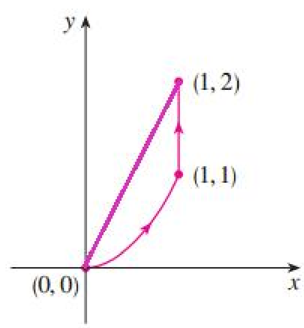
2. Ta có $C : x = 4 - y^2, -3 \leq y \leq 2 \Rightarrow x' = -2y^2.$

Suy ra

$$\int\limits_C yds = \int\limits_{-3}^{2} y\sqrt{(-2y)^2 + (1)^2}dy = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 37\sqrt{37}\right).$$

Ví dụ 3.8. Tính $\int_C 2xds$, trong đó C gồm cung $C_1 : y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$, nối tiếp bởi C_2 là đường thẳng $(1,1)$ đến $(1,2)$, và C_3 là đường thẳng từ $(1,2)$ đến $(0,0)$.

Giải



Ví dụ 3.9. Tính $\int\limits_C xyzds$, trong đó C là một đoạn của đường xoắn ốc

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Giải

Ta có $\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \\ z' = b \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_C xyzds &= \int\limits_0^{2\pi} (a\cos t.a\sin t.bt)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt\\ &= a^2b\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}(t.\sin t.\cos t)dt\\ &= -\frac{a^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.10. Tính $\int_C x^2ds$, trong đó C là đường tròn $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=0\end{cases}$

Giải

Nhắc lại:

- Giao của hai đường là 1 điểm.
- Giao của hai mặt là một đường.

Ta thấy trong ví dụ trên, đề bài cho C dưới dạng giao của hai mặt, ta làm như sau

Ta có $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=0\end{cases}$

Suy ra hình chiếu của C lên mặt Oxy là

$$\begin{aligned} x^2+y^2+(-x)^2=1\\ x^2+\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}\\ y=\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\end{cases}, t\in[0,2\pi]\,(*)$

Từ $x+z=0\Rightarrow z=-x=-\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}$

Vậy $C:\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}\\ y=\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\\ z=-\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}\end{cases}, t\in[0,2\pi]$. Suy ra $\begin{cases} x'=-\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}\\ y'=\cos t\\ z'=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}\end{cases}$.

Vậy

$$\begin{aligned}\int\limits_C x^2ds &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos^2t\sqrt{\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2+(\cos t)^2+\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos^2tdt\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3.3.3 Một số ứng dụng

Khối lượng đường: $M=\int\limits_C \rho(x,y,z)\,ds$, trong đó $\rho(x,y,z)$ là hàm mật độ.

Tọa độ trọng tâm: $\overline{x} = \dfrac{M_{yz}}{M}; \quad \overline{y} = \dfrac{M_{xz}}{M}; \quad \overline{z} = \dfrac{M_{xy}}{M}.$

Moment tĩnh so với mặt tọa độ:

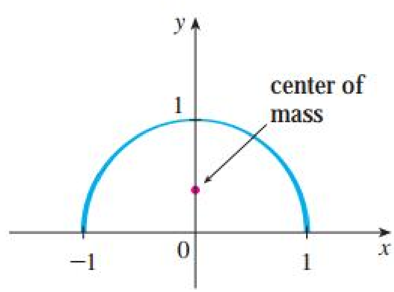
$$M_{yz} = \int_C x\rho ds; \quad M_{xz} = \int_C y\rho ds; \quad M_{xy} = \int_C z\rho ds.$$

Moment quán tính so với trục tọa độ và đường thẳng L

$$I_x = \int_C \left(y^2 + z^2\right) \rho ds; \quad I_y = \int_C \left(x^2 + z^2\right) \rho ds;$$
$$I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right) \rho ds; \quad I_L = \int_C r^2 \rho ds.$$

trong đó $r(x, y, z) =$ khoảng cách từ điểm (x, y, z) đến đường thẳng L.

Ví dụ 3.11. Một sợi dây kim loại có dạng nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, và càng về gần chân càng dày hơn đỉnh của nó. Tìm khối tâm của sợi dây nếu mật độ tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z) = k(1 - y), \ k = const.$



3.4 Tích phân đường loại II

3.4.1 Định nghĩa

Ký hiệu

$\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$ với C là đường cong trong $\mathbb{R}^2$,

$\int_C f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$ với C là đường cong trong $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa

Trong định nghĩa tích phân đường loại I, nếu ta thay $\Delta_i s$ bởi $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ và $\Delta_i y = y_i - y_{i-1}$ thì ta có **tích phân đường loại II** của f trên C tương ứng với x và y như sau

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\,\Delta x_i$$

$$\int\limits_C g(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*,y_i^*)\,\Delta y_i$$

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*,y_i^*)\,\Delta x_i + g(x_i^*,y_i^*)\,\Delta y_i\right]$$

Chú ý:

Trong tích phân đường loại I, $\Delta_i s$ luôn dương.

Trong tích phân đường loại II, $\Delta_i x$ và $\Delta_i y$ có thể âm, dương phụ thuộc vào cách chọn điểm đầu $\to$ cuối của đường đi.

Tính chất 3.2. .

1. $\int\limits_C \alpha f(x,y)\,dx + \beta g(x,y)\,dy = \alpha\int\limits_C f(x,y)\,dx + \beta\int\limits_C g(x,y)\,dy$, α,β là hằng số.

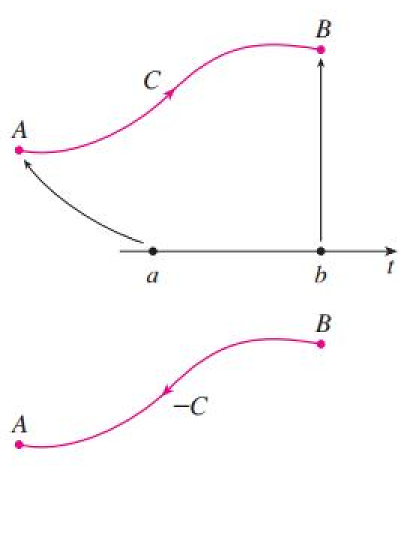
2. Nếu $C = C_1 \cup C_2$, thì

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int\limits_{C_1} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy + \int\limits_{C_2} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

.

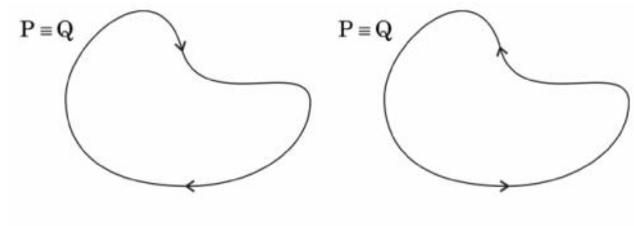
3. Tích phân đường loại II phụ thuộc chiều của đường lấy tích phân

$$\int\limits_{C=AB} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = -\int\limits_{C^-=BA} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy.$$

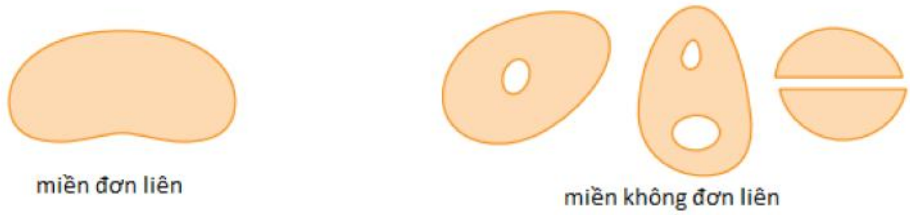


Chú ý:

- Nếu C là đường cong kín, ta quy ước **chiều dương** của C là chiều sao cho miền Ω giới hạn bởi C luôn nằm bên tay trái

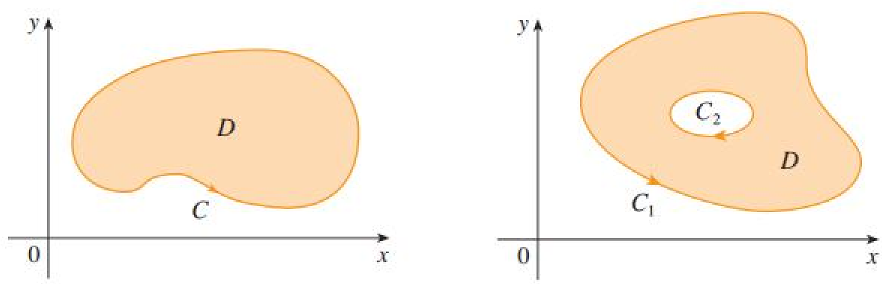


- Miền đơn liên là miền không có lỗ thủng



Định lý 3.3. *(Định lý Green.) Cho C là đường cong đóng, định hướng, trơn từng khúc trên mặt phẳng và D là miền giới hạn bởi C. Nếu f, g có đạo hàm liên tục trên miền mở chứa D thì*

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$$



Chú ý:

1. Định lý Green cho ta mối quan hệ giữa tích phân trên đường cong kín và tích phân hai lớp.

2. Nếu Ω là miền đa liên, ta có

$$\oint\limits_{C=C_1\cup C_2} fdx + gdy = \oint\limits_{C_1} fdx + gdy + \oint\limits_{C_2} fdx + gdy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

3. Khi sử dụng địn lý Green ta cần kiểm tra từng điều kiện của định lý để tránh đi đến kết quả sai...

3.4.2 Cách tính tích phân đường loại II trong $\mathbb{R}^2$

A. C **đã biết (đã cho hoặc tham số được)**

1. Nếu $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$, thì

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \Big[f(x(t),y(t))\,x^{/}(t) + g(x(t),y(t))\,y^{/}(t) \Big]\,dt.$$

2. Nếu $C : y(x), \quad x \in [a,b]$, thì

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \Big[f(x,y(x)) + g(x,y(x))\,y^{/}(x) \Big]\,dx$$

Ví dụ 3.12. Tính $\int\limits_C xydx + x^2dy$, trong đó

1. C là đoạn thẳng từ $(0,0)$ tới $(1,1)$.
2. C là parabol $y = x^2$ từ $(0,0)$ tới $(1,1)$.

Giải

1. Cách 1: $C : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x^{/} = 1 \\ y^{/} = 1 \end{cases}.$

Suy ra

$$\int\limits_C xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(t.t.1 + t^2.1 \right) dt = \int\limits_0^1 2t^2dt = \frac{2}{3}.$$

Cách 2: $C : y = x, x \in [0,1]$, dành cho SV.

2. Cách 1: $C : y = x^2, x \in [0,1] \Rightarrow y^{/} = 2x$.

Suy ra

$$\int\limits_C xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(x.x^2 + x^2.2x \right) dx = \int\limits_0^1 3x^3dx = \frac{3}{4}.$$

Cách 2: C là phương trình tham số, dành cho SV.

Ví dụ 3.13. Tính $\int\limits_C \left(x^2 - y^2\right) dx + xdy$, trong đó C : cung tròn $x^2 + y^2 = 4$ nối từ $(0,2)$ tới $(2,0)$ nằm phía trên trục Ox.

Giải

Ta có $C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} x^{/} = -2\sin t \\ y^{/} = 2\cos t \end{cases}$

Suy ra

$$\int\limits_{C^-} \left(x^2 - y^2\right) dx + xdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(4\cos^2 t - 4\sin^2 t\right)(-2\sin t) + 2\cos t.2\cos t \right) dt$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin^3 t - 8\sin t\cos^2 t + 4\cos^2 t \right) dt = \frac{8}{3} + \pi.$$

Vậy $\int\limits_C \left(x^2 - y^2\right) dx + xdy = -\frac{8}{3} - \pi.$

Ví dụ 3.14. Tính

$$I = \int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

trong đó C là elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ lấy theo chiều dương.

Giải

Cách 1: Ta thấy C là đường cong kín, và $\begin{cases} f(x,y)=xy+x+y \\ g(x,y)=xy+x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}=y+1 \end{cases}$

là các hàm liên tục trên Elip.

Áp dụng công thức Green ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy \\ &= \int\limits_D [y+1-(x+1)]\,dxdy \\ &= \int\limits_D [y-x]\,dxdy \end{aligned}$$

trong đó $D=\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$.

Tiếp tục tính toán ta được $I=\int\limits_D [y-x]\,dxdy=0$!!!

Cách 2: tính trực tiếp

Đặt $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x^/=-a\sin t, \\ y^/=a\cos t. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left[(a\cos t.b\sin t+a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t.b\sin t+a\cos t-b\sin t)(b\cos t)\right] \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left[-a^2b\sin^2 t\cos t-\left(a^2+b^2\right)\sin t\cos t+ab\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)+ab^2\cos^2 t\sin t\right]dt \\ &= \ldots = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.15. Tính $I=\oint\limits_C \dfrac{(x+y)}{x^2+y^2}dx-\dfrac{(x-y)}{x^2+y^2}dy$, trong đó C là đường tròn $x^2+y^2=a^2$ lấy theo chiều dương.

Giải

Ta thấy $f(x,y)=\dfrac{(x+y)}{x^2+y^2}; g(x,y)=-\dfrac{(x-y)}{x^2+y^2}$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng không liên tục tại điểm $O(0,0)$ nên ta không dùng công thức Green được.

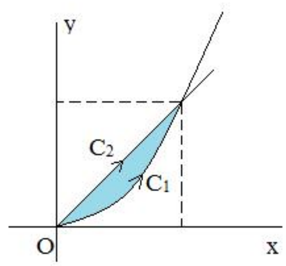
Đặt $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x^/=-a\sin t, \\ y^/=a\cos t. \end{cases}$

Ta có

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}dy \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)\,a\cos t}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-\left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt \\
&= -\int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 3.16. Tính $I = \int\limits_C xdy - ydx$, biết C là biên của miền giới hạn bởi các đường $y = x, y = x^2$ theo chiều dương.

Giải



Gọi $C_1 : y = x^2, x \in [0,1]$, và $C_2 : y = x, x \in [0,1]$. Ta có $C = C_1 \cup C_2^-$.

Từ $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$, suy ra

$$\int\limits_{C_1} xdy - ydx = \int_0^1 \left(x.2x - x^2\right)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.(*)$$

Từ $y = x \Rightarrow y' = 1$, suy ra

$$\int\limits_{C_2^-} xdy - ydx = -\int\limits_{C_2} xdy - ydx = -\int_0^1 \left(x.1 - x^2\right)dx = -\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = -\frac{1}{6}.(**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra

$$\int\limits_C xdy - ydx = \int\limits_{C_1} xdy - ydx + \int\limits_{C_2^-} xdy - ydx = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

B. C chưa biết

Định lý 3.4. *Giả sử các hàm số f, g có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền D. Dạng*

$f dx + g dy$ được gọi là dạng vi phân toàn phần nếu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \forall (x, y) \in D.$$

Định nghĩa 3.3. Hàm $F(x, y)$ được gọi là hàm thế của (f, g) nếu

$$\nabla F = (f, g),$$

với $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Định lý 3.5. *Cho các hàm f, g có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở, đơn liên D, hai điểm $A, B \in D$, và C là đường cong nối A, B. Khi đó bốn mệnh đề sau tương đương*

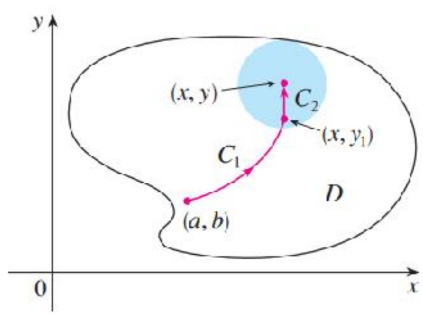
i. $\int\limits_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$ *không phụ thuộc vào cách chọn đường cong C*

ii. Tồn tại hàm thế F của (f, g) khả vi liên tục trên D, hơn nữa

$$\int\limits_{C=AB} f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = F(B) - F(A)$$

iii. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \forall (x, y) \in D.$

iv. $\oint\limits_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0.$



Ví dụ 3.17. Cho $(f, g) = \left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}, 3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)$ xác định trên miền $x, y > 0$

1. Kiểm tra điều kiện $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$,
2. Tính hàm thế F của (f, g),
3. Tính $\int\limits_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$ với C là đường cong bất kì nối $(1, 1)$ với $(2, 4)$ trong miền $x, y > 0$.

Giải

1. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} f = 4x^3y^3 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^3y^2 \\ g = 3x^4y^2 - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 12x^3y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Vậy tồn tại hàm thế $F(x,y)$ của (f,g) khả vi liên tục .

2. Tìm hàm thế $F(x,y)$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = f, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = g. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4x^3y^3 + \dfrac{1}{x}, & (*) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3x^4y^2 - \dfrac{1}{y}. & (**) \end{cases}$$

Từ $(*)$, suy ra

$$F(x,y) = \int (4x^3y^2 + \frac{1}{x})dx = x^4y^3 + ln(x) + C(y).$$

Lấy đạo hàm $F(x,y)$ theo y, ta được

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^4y^2 + C^{/}(y).$$

Kết hợp với $(**)$, ta được

$$\begin{aligned} & 3x^4y^2 + C^{/}(y) = 3x^4y^2 - \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow \quad & C^{/}(y) = -\frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow \quad & C(y) = -\ln(y) + C_1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x,y) = x^4y^3 + ln(x) - \ln(y) + C_1.$$

3. Do $\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi, ta có

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = F(2,4) - F(1,1) = 1023 - \ln(2).$$

Ví dụ 3.18. Tính tích phân $\int\limits_C (e^x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$, trong đó C là đường cong bất kỳ khả vi từng khúc nối $(0,1)$ và $(2,4)$.

Giải

Ta có

$$\left.\begin{aligned} f = e^x + y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \\ g = x + 2y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Vậy tồn tại hàm thế $F(x,y)$ của (f,g) khả vi liên tục, tìm hàm thế $F(x,y)$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = f, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = g. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^x + y, & (*) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2y. & (**) \end{cases}$$

Từ $(*)$, suy ra

$$F(x,y) = \int (e^x + y)\,dx = e^x + xy + C(y).$$

Lấy đạo hàm $F(x,y)$ theo y, ta được

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + C^{/}(y).$$

Kết hợp với $(**)$, ta được

$$\begin{aligned} & x + C^{/}(y) = x + 2y \\ \Leftrightarrow \quad & C^{/}(y) = 2y \\ \Leftrightarrow \quad & C(y) = y^2 + C_1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x,y) = e^x + xy + y^2 + C_1$$

Vậy

$$\int\limits_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = F(2,4) - F(0,1) = e^2 + 22.$$

Ví dụ 3.19. Tính $I = \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, với

a. C là đường tròn tâm (O,r) có chiều ngược chiều kim đồng hồ.

b. C là chu tuyến kín, trơn bao quanh gốc O có chiều dương.

c. C là chu tuyến kín, trơn không bao quanh gốc O có chiều dương.

Nhận xét: Ta thấy

• $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}; g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng không liên tục tại điểm $O(0,0)$,

• C trong câu a là đường cong kín, đã biết, bao quanh miền chứa O $\Rightarrow$ tham số C.

• C trong câu b là đường cong kín, chưa biết, bao quanh miền chứa O $\Rightarrow$ khoét lỗ.

Giải

a. Đặt $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases} \quad t \in [0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x^{/} = -r\sin t, \\ y^{/} = r\cos t. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{r\cos t.r\cos t + r\sin t.r\sin t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

b. Lấy C_r là đường tròn (O,r) với r đủ nhỏ sao cho C_r nằm trong miền trong của C. C_r có chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Gọi D là miền giới hạn bởi C và C_r. Ta thấy f, g, C, C_r thỏa định lý Green, ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{C\cup C_r} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_{D} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) dxdy = 0 \\
\Rightarrow &\int\limits_{C} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \int\limits_{C_r} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0 \\
\Leftrightarrow &\qquad \int\limits_{C} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = -\int\limits_{C_r} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_{C_r^-} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2,
\end{aligned}$$

trong đó $\int\limits_{C_r^-} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ tính ở câu a.

c. Ta thấy miền trong của C không chứa O, nên áp dụng Đl Green ta được

$$\int\limits_{C} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_{D} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) dxdy = 0.$$

3.4.3 Cách tính tích phân đường loại II trong $\mathbb{R}^3$

Cho $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$. Ta có

$$\int\limits_{C} f(x, y, z)\, dx + g(x, y, z)\, dy + h(x, y, z)\, dz =$$

$$\int\limits_{a}^{b} \Big[f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \Big] dt.$$

Ví dụ 3.20. Cho $A(3, -6, 0)$ và $B(-2, 4, 5)$. Tính $\int\limits_{C} xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$ với

a. C là đoạn thẳng OB.

b. C là cung tròn AB trong không gian cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 45 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Cung tròn AB là một phần đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{45}$ và mặt phẳng $y = -2x$.

Giải

a. Ta có

$$C : \begin{cases} x = -2t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2dt \\ y = 4dt \\ z = 5dt \end{cases}$$

Suy ra

$$\int\limits_C xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz = \int\limits_C xy^2dx + \int\limits_C yz^2dy - \int\limits_C zx^2dz$$
$$= \int\limits_0^1 (-2t)(4t)^2(-2)\,dt + \int\limits_0^1 (4t)(5t)^2 4dt - \int\limits_0^1 (5t)(-2t)^2 5dt$$
$$= 91.$$

b. Chú ý: hình chiếu của C xuống mặt Oxy là đoạn thẳng nối $(3,-6)$ và $(-2,4)$.

Đặt $x = t$, $t : 3 \to -2$, ta có $\begin{cases} y = -2x = -2t \\ z = \sqrt{45 - x^2 - y^2} = \sqrt{45 - 5t^2} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} dx = dt \\ dy = -2dt \\ dz = \dfrac{-5t}{2\sqrt{45-5t^2}}dt \end{cases}$

Vậy

$$\int\limits_C xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz = \int\limits_C xy^2dx + \int\limits_C yz^2dy - \int\limits_C zx^2dz$$
$$= \int\limits_3^{-2} 4t^3dt + \int\limits_3^{-2} 4t\left(45 - t^2\right)dt - \int\limits_3^{-2} 5t^3dt$$
$$= -271,25.$$

Ví dụ 3.21. Tính $\int\limits_C ydx + z^2dy + x^2dz$, trong đó C là đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$$

có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ điểm $(0,0,2)$.

3.4.4 Ứng dụng

Định lý 3.6. *Cho $F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$ là một trường vecto liên tục và xác định trên đường cong*

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b].$$

Khi đó, tích phân đường của $F(x,y,z)$ dọc theo đường cong C là

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz$$

Định lý tương tự trong trường hợp 2 chiều.

Ví dụ 3.22. Tìm công sinh ra bởi trường lực $F(x,y) = x^2i - xyj$ khi di chuyển một hạt dọc theo một phần tư đường tròn $r(t) = cost.i + sint.j, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2.}$

Giải

Ta có

$$F(x,y) = \left(x^2, -xy\right)$$
$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} ; 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases}$$

Công của lực F

$$\int\limits_C x^2 dx - xy dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2 t\,(-\sin t) - \cos t.\sin t.\cos t\right] dt$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\cos^2 t.\sin t\right] dt$$
$$= -\frac{2}{3}$$

Ví dụ 3.23. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$ và điện tích $Q > 0$ đặt tại O. Một điện tích điểm $q > 0$ di chuyển dọc theo đường cong γ xác định bởi phương trình $\gamma(t) = \left(1, t, t^2\right), t \in \mathbb{R}$ từ điểm $M(1,1,1)$ tới điểm $N(1,2,4)$

Tính công của lực điện trường.

Giải

Ta có

$$F(x,y,z) = \frac{\varepsilon.q.Q.x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.i + \frac{\varepsilon.q.Q.y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.j + \frac{\varepsilon.q.Q.z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.k$$
$$\gamma : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} ; 1 \le t \le 2 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \\ z' = 2t \end{cases}$$

Công của lực điện trường F khi q di chuyển từ điểm M đến N là

$$\int\limits_C \frac{\varepsilon.q.Q.x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dx + \frac{\varepsilon.q.Q.y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.dy + \frac{\varepsilon.q.Q.z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.dz$$
$$= \varepsilon.q.Q \int\limits_1^2 \left[\frac{1}{\left(1+t^2+t^4\right)^{3/2}}.0 + \frac{t}{\left(1+t^2+t^4\right)^{3/2}}.1 + \frac{t^2}{\left(1+t^2+t^4\right)^{3/2}} 2t\right] dt$$
$$= \varepsilon.q.Q \int\limits_1^2 \frac{t+t^3}{\left(1+t^2+t^4\right)^{3/2}} dt$$
$$= \varepsilon.q.Q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{21}}\right).$$

Tích phân đường loại I

Bài tập 3.1. Tính các tích phân đường sau

a. $\int\limits_C y^3 ds, \quad C: x = t^3,\ y = t,\ 0 \le t \le 2$

b. $\int\limits_C xyds, \quad C: x = t^2,\ y = 2t,\ 0 \le t \le 1$

c. $\int\limits_C (x-y)\, ds$, C là đoạn thẳng nối hai điểm $(0,0)$ và $(4,3)$

d. $\int\limits_C xsinyds$, C là đoạn thẳng nối hai điểm $(0,3)$ và $(4,6)$

e. $\int\limits_C xyds$, C là biên của hình chữ nhật ABCD $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$

f. $\int\limits_C (x^2+y^2)ds$, C là biên của hình tam giác OAB với $O(0,0)$, $B(1,1)$, $C(-1,1)$

g. $\int\limits_C xy^4 ds$, C là nửa bên phải của đường tròn $x^2+y^2=16$

h. $\int\limits_C xyds$, C là cung đường elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất

i. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, C là nửa vòng tròn $x^2+y^2=2x$, $x \ge 1$

j. $\int\limits_C x^3 ds$, C là cung $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$

k. $\int\limits_C xyzds$, $C: x = 2\sin t,\ y = t,\ z = -2\cos t,\ 0 \le t \le \pi$

l. $\int\limits_C (2x+9z)ds, C: x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$

m. $\int\limits_C xyz^2 ds$, C là đường thẳng nối hai điểm $(-1,5,0)$ và $(1,6,4)$

n. $\int\limits_C xe^{yz} ds$, C là đường thẳng nối hai điểm $(0,0,0)$ và $(1,2,3)$

o. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)ds$, C là đường xoắn ốc $x = acost, y = asint, z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi$, a,b,c là các hằng số dương

p. $\int\limits_C x^2 ds$, C là giao xuyến của hai mặt $x^2+y^2=z^2, y^2=ax$ từ điểm $(0,0,0)$ tới điểm $(a,a,a\sqrt{2})$, $a \ge 0$

q. $\int\limits_C xyzds$, C là giao xuyến của hai mặt $x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$ lấy phần

$x \le 0, y \le 0, z \le 0$

Bài tập 3.2. Tính

1. $\int\limits_C xyzds$, với $C: x = 2sint, y = t, z = -2cost, 0 \le t \le \pi$

2. $\int\limits_C xyz^2ds$, với C là đoạn thẳng từ $(-1, 5, 0)$ đến $(1, 6, 4)$.

3. $\int\limits_C xe^{yx}ds$, với C là đoạn thẳng từ $(0, 0, 0)$ đến $(1, 2, 3)$.

4. $\int\limits_C x^2 + y^2 + z^2ds$, với $C: x = t, y = cos2t, z = snt, 0 \le t \le 2\pi$

5. Tích phân của hàm $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ trên đường cong C_i từ điểm $(0, 0, 0)$ tới $(1, 1, 1)$ biết

$C_1: r(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1;$ $\quad C_2: r(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

$C_3: r(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

Bài tập 3.3. a. Tính độ dài đường xoắn ốc hình nón $x = ae^tcost, y = ae^tsint, z = ae^t$ từ điểm $O(0, 0, 0)$ tới điểm $A(a, 0, a)$

b. Tính khối lượng của dây có phương trình $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), 0 \le x \le a$ biết $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$

Tích phân đường loại II

Bài tập 3.4. Tính tích phân

a. $\int\limits_C (x^2y^3 - \sqrt{x})dy$, C là đường $y = \sqrt{x}$ từ điểm $(1, 1)$ tới $(4, 2)$

b. $\int\limits_C xe^ydx$, C là đường $x = e^y$ từ điểm $(1, 0)$ tới $(e, 1)$

c. $\int\limits_C xydx + (x - y)dy$, C gồm đường thẳng từ $(0, 0)$ tới $(2, 0)$ và từ $(2, 0)$ tới $(3, 2)$

d. $\int\limits_C \sin xdx + \cos ydy$, C gồm nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ từ $(1, 0)$ tới $(-1, 0)$ và đường thẳng từ $(-1, 0)$ tới $(-2, 3)$

e. $\int\limits_C -ydx + xdy$, $C: y^2 = 4x$ từ $(1, 2)$ tới $(0, 0)$

f. $\int\limits_C \left(x^2 - y^2\right)dx + xdy$, C là vòng tròn $x^2 + y^2 = 4$ từ $(0, 2)$ tới $(2, 0)$

Bài tập 3.5. Tính

a. $\int\limits_C zdx + xdy + ydz,\ C: x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^2,\ 0 \le t \le 1$

b. $\int\limits_C (x+yz)\,dx + 2xdy + xyzdz$, C gồm đường thẳng từ $(1,0,1)$ tới $(2,3,1)$ và từ $(2,3,1)$ tới $(2,5,2)$

c. $\int\limits_C x^2dx + y^2dy + z^2dz$, C gồm đường thẳng từ $(0,0,0)$ tới $(1,2,-1)$ và từ $(1,2,-1)$ tới $(3,2,0)$

Bài tập 3.6. Tính các tích phân sau

a. $\int\limits_C \left(x^3 - y^2\right) dx + 2xy^2dy$, C là đường ngược chiều kim đồng hồ xung quanh hình vuông tạo bởi $x=0, y=0, x=2, y=2$

b. $\int\limits_C x^2y^2dx + x^3ydy$, C là đường ngược chiều kim đồng hồ xung quanh hình vuông tạo bởi $x=0, y=0, x=1, y=1$

c. $\int\limits_C -xdy + ydx$, C là tam giác với ba đỉnh $(0,0), (0,a), (b,0)$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ

d. $\int\limits_C xy^2dx$, $C: x^2+y^2=a^2$ thuận chiều kim đồng hồ

e. $\int\limits_C xdy$, $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ thuận chiều kim đồng hồ

f. $\int\limits_C x^2y^2dx + xy^2dy$, C là đường ngược chiều kim đồng hồ xung quanh đường cong kín tạo bởi $x=1$ và parabol $y^2=x$

g. $\int\limits_C ydx$, C là nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ từ $(1,0)$ tới $(-1,0)$

h. $\int\limits_C (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$, C là nửa dưới đường tròn $x^2+y^2=x$ từ $(1,0)$ tới $(0,0)$

Bài tập 3.7. Tính

a. $\oint\limits_C ydx + xdy$, C là biên của miền $\Omega = \{(x,y)\,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

b. $\oint\limits_C e^x \cos ydx + e^x \sin ydy$, C là biên của miền tam giác Ω có đỉnh $(0,0), (0,1), (1,1)$

c. $\oint\limits_C ydx$, C là biên của miền Ω là hình tròn nằm trong góc phần tư thứ nhất có bán kín bằng 1

Bài tập 3.8. Cho (f,g), kiểm tra điều kiện để $fdx + gdy$ là dạng vi phân đúng và tìm hàm thế F trong trường hợp vi phân đúng

a. $\left(2xy, x^2+1\right)$

b. $\left(4x^3 - ye^{xy}, \tan y - xe^{xy}\right)$

c. $\left(4x^2 - 4y^2, -8xy - \ln y\right)$ d. $\left(2x\cos y, x^2\sin y\right)$

e. $(x - y\cos x, -\sin x)$ f. $\left(e^{x^2y}, e^{x^2y}\right)$

g. $\left(\dfrac{1}{x^2} + y^2, 2xy\right)$ h. $\left(x^2 + y^2 + 1, -xy - y\right)$

i. $\left(-\dfrac{1}{x^3} + 4x^3y, \sin y + \sqrt{y} + x^4\right)$

Bài tập 3.9. Trong các bài tập sau, chứng minh tích phân không phụ thuộc vào đường cong và tính tích phân

a. $\int\limits_C (e^x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$, C là đường cong bất kỳ khả vi từng khúc nối $(0,1)$ đến $(2,4)$

b. $\int\limits_C \left(2xy^2 + 1\right)dx + 2x^2ydy$, C là đường cong bất kỳ khả vi từng khúc nối $(-1,2)$ đến $(2,3)$

c. $\int\limits_C (y + 2xe^y)\,dx + \left(x + x^2e^y\right)dy$, C là đường cong bất kỳ khả vi nối $(1,0)$ đến $(2, ln2)$

d. $\int\limits_C 2xydx + \left(x^2 + 1\right)dy$, C là đường cong bất kỳ khả vi nối $(0,1)$ đến $(2,3)$

e. $\int\limits_C \left(4x^2 - 4y^2\right)dx + (\text{lny} - 8xy)\,dy$, C là đường cong bất kỳ khả vi nối $(-1,1)$ đến $(4,e)$ trong miền $y > 0$

f. $\int\limits_C (x\cos(x+y) + \sin(x+y))\,dx + x\cos(x+y)\,dy$, C là đường cong bất kỳ khả vi nối $(0,0)$ đến $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

Chương 4

Tích phân mặt

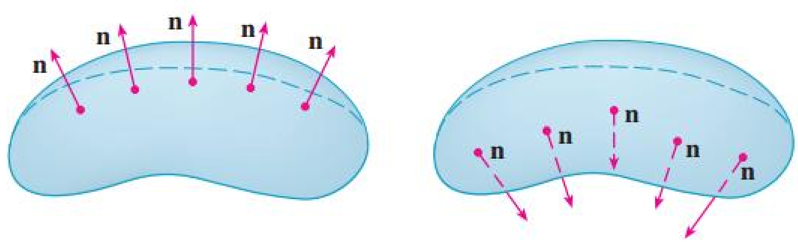
4.1 Mặt

1. Phương trình tham số mặt S có dạng $\begin{cases} x = x\,(s,t) \\ y = y\,(s,t) \\ z = z\,(s,t) \end{cases} \quad (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2.$

2. Phương trình S dạng: $z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$.

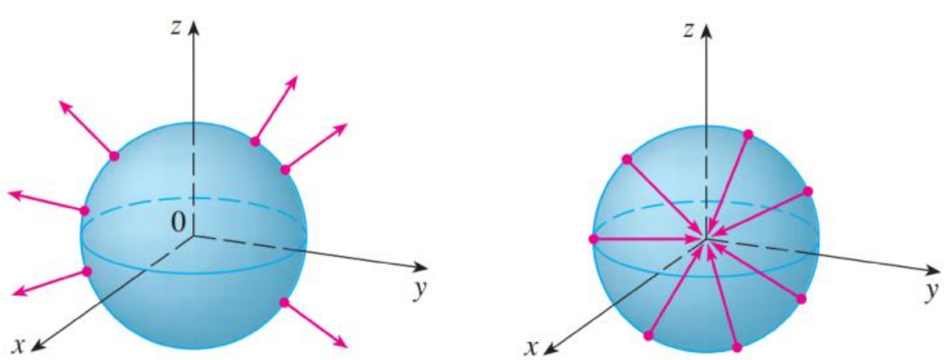
Mặt hai phía định hướng

▷ Mặt không kín



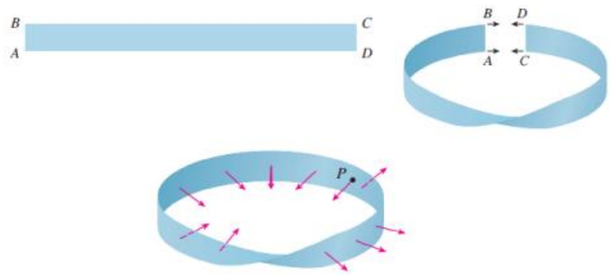
Hình 4.1: a. Mặt không kín, phía trên b. Mặt không kín, phía dưới

▷ Mặt kín



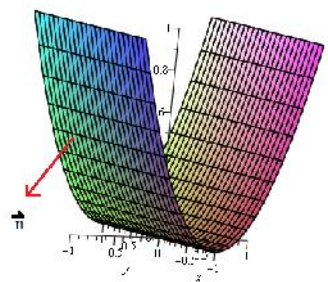
Hình 4.2: a. Mặt kín, phía ngoài b. Mặt kín, phía trong

▷ Dải Mobius



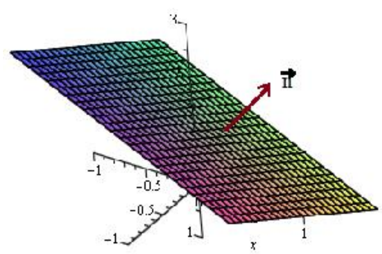
Hình 4.3: Dải Mobius

Ví dụ 4.1. Mặt parabol $z = x^2$



Hình 4.4: Mặt không kín, hướng xuống

Mặt phẳng $x + y + z = 1$



Hình 4.5: Mặt không kín, hướng lên

4.2 Tích phân mặt loại I

4.2.1 Ký hiệu

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma, \text{ với } S \text{ là mặt trong } \mathbb{R}^3.$$

4.2.2 Cách tính

- Nếu S có dạng $\begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \\ z = z(s,t), \end{cases} \quad (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2.$

  Tính
$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\mathbf{dsdt},$$
trong đó
$$\begin{array}{l} E = (x_s)^2 + (y_s)^2 + (z_s)^2, \\ G = (x_t)^2 + (y_t)^2 + (z_t)^2, \\ F = x_s x_t + y_s y_t + z_s z_t. \end{array}$$
Suy ra
$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathbf{d}\sigma = \iint\limits_D f\left(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\right)\sqrt{EG - F^2}\mathbf{dsdt}.$$

- Nếu S có dạng $z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$. Tính
$$\mathbf{d}\sigma = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\mathbf{dxdy}$$
Suy ra
$$\iint_S f(x,y,z)\mathbf{d}\sigma = \iint_{D_{xy}} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\mathbf{dxdy}.$$

- Nếu S có dạng $y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$. Tính
$$\mathbf{d}\sigma = \sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2}\mathbf{dxdz}.$$
Suy ra
$$\iint_S f(x,y,z)\mathbf{d}\sigma = \iint_{D_{xz}} f\left(x,y(x,z),z\right)\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2}\mathbf{dxdz}.$$

- Nếu S có dạng $x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$. Tính
$$\mathbf{d}\sigma = \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2}\mathbf{dydz}.$$
Suy ra
$$\iint_S f(x,y,z)\mathbf{d}\sigma = \iint_{D_{yz}} f\left(x(y,z),y,z\right)\sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2}\mathbf{dydz}.$$

Ví dụ 4.2. Tính $\iint_S (x+z)d\sigma$ trong đó S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ trong góc phần tám thứ nhất.

Giải

Tham số S: $z = 1 - x - y, \quad (x,y) \in D_{xy} = \{(x,y)\,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$.

Ta có
$$z_x = -1, \quad z_y = -1,$$

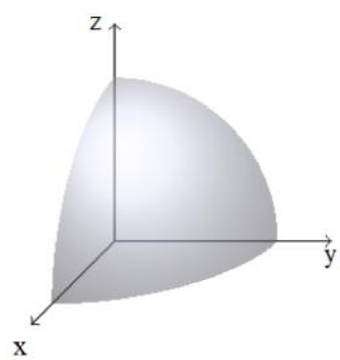
$$d\sigma = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (x+z)d\sigma &= \iint\limits_{D_{xy}} (x+1-x-y)\sqrt{3}dxdy \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y} (1-y)\,dydx \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 4.3. Tính $I = \iint\limits_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$, trong đó S là mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Giải



Cách 1: $(S) : \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta, \end{cases} \quad (\theta,\varphi) \in D = \left\{(\theta,\varphi)\,|0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$

Ta có

$$\begin{array}{ll} x_\theta = R\cos\theta\cos\varphi, & x_\varphi = -R\cos\theta\sin\varphi, \\ y_\theta = R\cos\theta\sin\varphi, & y_\varphi = R\sin\theta\cos\varphi, \\ z_\theta = -R\sin\theta, & z_\varphi = 0. \end{array}$$

$$\begin{aligned} E &= (x_\theta)^2 + (y_\theta)^2 + (z_\theta)^2 = R^2, \\ G &= (x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 + (z_\varphi)^2 = R^2\sin^2\theta, \\ F &= x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = 0. \end{aligned}$$

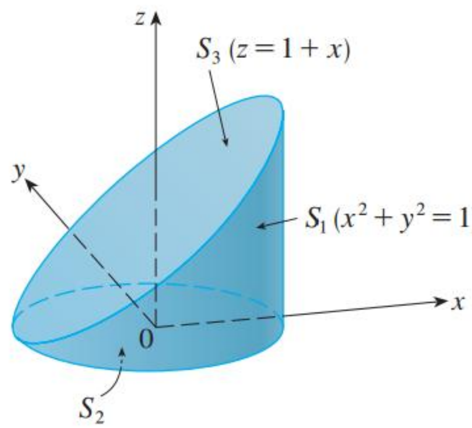
$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}d\theta d\varphi = \sqrt{R^4\sin^2\theta}d\theta d\varphi = \left|R^2\sin\theta\right| d\theta d\varphi = R^2\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{R\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{(R\sin\theta\cos\varphi)^2 + (R\sin\theta\sin\varphi)^2}}R^2\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\theta\cos\varphi d\theta d\varphi \\ &= R^2. \end{aligned}$$

Cách 2: $(S) : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$..., dành cho SV.

Ví dụ 4.4. Tính $\iint_S z d\sigma$, trong đó S là biên của hình khối giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, mặt phẳng $z = 0$ và mặt phẳng $z = 1 + x$.



Giải

Ta có: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, trong đó

- $S_2 : z = 0,\ (x, y) \in D = \left\{(x, y)\,|x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

Suy ra
$$\iint\limits_{S_2} z ds = \iint\limits_{S_2} 0 ds = 0$$

- $S_3 : z = 1 + x,\ (x, y) \in D = \left\{(x, y)\,|x^2 + y^2 \le 1\right\}$

Suy ra
$$I = \iint\limits_{S_3} z ds = \iint\limits_{D_{xy}} (1 + x)\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dxdy$$
$$= \iint\limits_{D_{xy}} (1 + x)\sqrt{1 + 1^2 + 0^2} dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ ta được

$z = 1 + x = 1 + r\cos\varphi;$ trong đó $D_{r\varphi} = \{(r, \varphi)\,|0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

Suy ra
$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r\cos\varphi) r dr d\varphi = \sqrt{2}\pi.$$

- $S_1 : \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$,trong đó $D = \{(\varphi, z)\,|0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le z \le 1 + \cos\varphi\}$.

$$E = (x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 + (z_\varphi)^2 = 1,$$
$$G = (x_z)^2 + (y_z)^2 + (z_z)^2 = 1,$$
$$F = x_\varphi x_z + y_\varphi y_z + z_\varphi z_z = 0.$$

$\Rightarrow d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\varphi dz = d\varphi dz$

Suy ra

$$\iint\limits_{S_1} z d\sigma = \iint\limits_{D} z d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1+\cos\varphi} z dz d\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Vậy $\iint\limits_{S} z d\sigma = \frac{3}{2}\pi + \sqrt{2}\pi.$

4.3 Tích phân mặt loại II

4.3.1 Ký hiệu

$$\iint_S f(x,y,z)\,dydz + g(x,y,z)\,dxdz + h(x,y,z)\,dxdy, \text{ với } S \text{ là một mặt trong } \mathbb{R}^3.$$

Tính chất 4.1. Cho mặt S, gọi S^+ là mặt S với hướng đã chọn trước, S^- là mặt S với hướng ngược lại, khi đó ta có

$$\iint\limits_{S^-} f dydz + g dzdx + h dxdy = -\iint\limits_{S^+} f dydz + g dzdx + h dxdy.$$

4.3.2 Cách tính

A. S không kín:

Cách 1: đưa về tích phân mặt loại 1 (c1)

Cách 2: đưa về tích phân bội 2 (c2)

Đặt $\overrightarrow{F} = (f, g, h)$.

▷ Nếu S có dạng $z = z(x, y)$, ta có

$$\iint\limits_{S} f dydz + g dxdz + h dxdy \overset{\text{c1}}{=} \iint\limits_{S} \overrightarrow{F}\overrightarrow{N} d\sigma \overset{\text{c2}}{=} \iint\limits_{D_{xy}} \overrightarrow{F}\overrightarrow{n_s} dxdy,$$

trong đó

- $\overrightarrow{n} = \pm(-z_x, -z_y, 1)$,
- $\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}$: pháp vectơ đơn vị,
- $\overrightarrow{n_s}$ được chọn từ $\overrightarrow{n}$ dựa vào phía của mặt S. (trên, dưới).

▷ Nếu S có dạng $y = y(x, z)$, ta có

$$\iint\limits_{S} f dydz + g dxdz + h dxdy \overset{\text{c1}}{=} \iint\limits_{S} \overrightarrow{F}\overrightarrow{N} d\sigma \overset{\text{c2}}{=} \iint\limits_{D_{xz}} \overrightarrow{F}\overrightarrow{n_s} dxdz,$$

trong đó

- $\overrightarrow{n} = \pm(-y_x, 1, -y_z)$,
- $\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}$: pháp vectơ đơn vị,
- $\overrightarrow{n_s}$ được chọn từ $\overrightarrow{n}$ dựa vào phía của mặt S. (trái, phải).

▷ Nếu S có dạng $x = x(y,z)$, ta có

$$\iint_S f dydz + g dxdz + h dxdy \overset{c1}{=} \iint_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{N} d\sigma \overset{c2}{=} \iint_{D_{yz}} \overrightarrow{F}\overrightarrow{n_s} dydz,$$

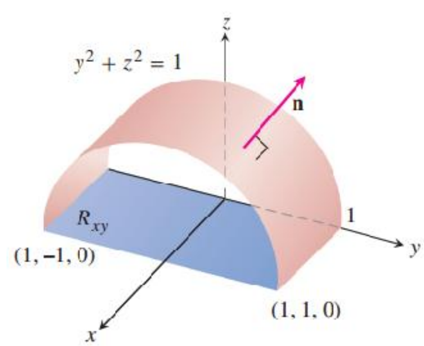
trong đó

- $\overrightarrow{n} = \pm(1, -x_y, -x_z)$,
- $\overrightarrow{N} = \dfrac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}$: pháp vectơ đơn vị,
- $\overrightarrow{n_s}$ được chọn từ $\overrightarrow{n}$ dựa vào phía của mặt S. (trước, sau).

Nhắc lại: cho $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, khi đó $\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{cases}$

Ví dụ 4.5. Tính $I = \int_S yzdzdx + z^2dxdy$, với S là phía trên của mặt $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, giới hạn bởi hai mặt $x = 0, x = 1$.

Giải



Tham số mặt $(S): z = \sqrt{1-y^2}, \quad (x,y) \in D = [0,1] \times [-1,1]$. Ta có

$$z_x = 0, z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \overrightarrow{n} = \pm\left(0, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1\right)$$

Do S là phía phần phía trên nên chọn $\overrightarrow{n_S} = \left(0, \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1\right)$.

Ta lại có $\overrightarrow{F} = \left(0, yz, z^2\right)$, suy ra

$$\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n_S} = \left(0, yz, z^2\right).\left(0, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1\right) = 1.$$

Vậy

$$I = \iint_S yzdzdx + z^2dxdy = \iint_D \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n_S} dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^1 1dydx = 2.$$

Ví dụ 4.6. Tính $I = \int_S ydzdx$, với S là phía dưới của mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Giải

Tham số mặt $(S): z = 1 - x - y, \quad (x,y) \in D = \{(x,y)\,|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Ta có

$z_x = -1, z_y = -1 \Rightarrow \overrightarrow{n} = \pm(1,1,1)$.

Do S là phía phần phía dưới nên chọn $\overrightarrow{n_S} = (-1,-1,-1)$.

Ta lại có $\overrightarrow{F} = (0,y,0)$, suy ra

$$\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n_S} = (0,y,0)\,.\,(-1,-1,-1) = -y.$$

Vậy

$$I = \int\limits_S ydzdx = \int\limits_D (-y)dxdy = -\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} ydydx = \frac{-1}{6}.$$

B. S **kín:** ta tách S thành các mặt không kín, hoặc dùng định lý sau

Định lý 4.2. (Định lý Divergence) *Nếu*

1. Ω là khối đơn, và S là biên của Ω,

2. S định hướng dương (hướng ra ngoài),

3. các hàm f,g,h liên tục và tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng cũng liên tục trên miền $\Omega \cup S$,

thì ta có

$$\oiint\limits_S fdydz + gdxdz + hdxdy = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Ví dụ 4.7. Tính $I = \int\limits_S ydzdx$, với S là phía trong của mặt kín tứ diện giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Giải

Cách 1: dùng định lý Divergence. Gọi S^- là mặt S phía ngoài. Ta có

- $f = 0, g = y, h = 0$,
- $\Omega = \{(x,y,z)\,|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$.

Áp dụng định lý Divergence ta có

$$\iint\limits_{S^-} ydzdx = \iiint\limits_\Omega 1dxdydz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} 1dzdydx = \frac{1}{6}$$

Suy ra $I = -\dfrac{1}{6}$.

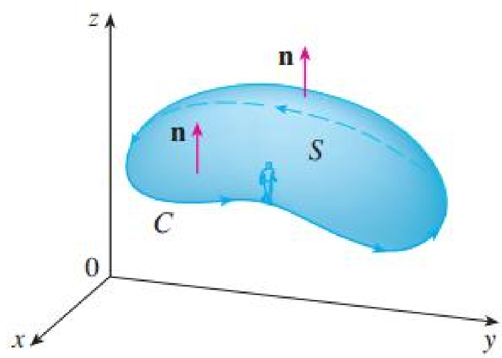
Cách 2: tách S thành 4 mặt. Dành cho SV.

4.3.3 Tính tích phân đường loại II trong không gian bằng định lý Stokes

Định lý 4.3. (Định lý Stokes) *Nếu các hàm f, g, h liên tục và tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng cũng liên tục trên mặt S thì*

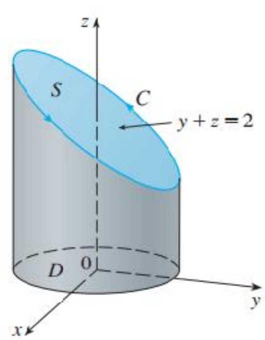
$$\oint\limits_C f dx + g dy + h dz = \iint_S \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

trong đó C là biên của S và chiều lấy tích phân trên C được chọn sao cho một người đứng trên mặt cong S bị pháp tuyến dương $\overrightarrow{n}$ xuyên từ chân đến đầu, nhìn thấy chiều trên C ngược chiều kim đồng hồ.



Ví dụ 4.8. Tính $I = \oint\limits_C -y^2 dx + xdy + z^2 dz$, với C là giao xuyến của mặt $y + z = 2$ và $x^2 + y^2 = 1$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

Giải



Ta có

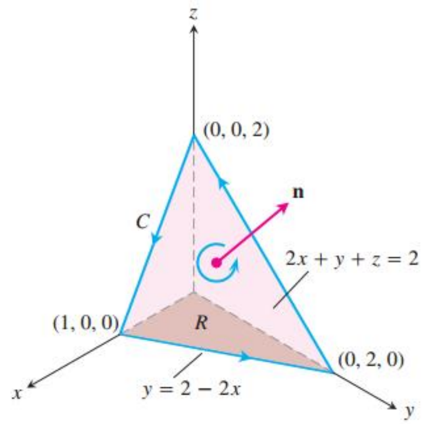
- $S : z = 2 - y, \quad (x, y) \in D = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 \leq 1\right\},$
- $\dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0; \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0; \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2y.$

Áp dụng định lý Stokes, ta có

$$I = \oint\limits_C -y^2 dx + xdy + z^2 dz = \iint\limits_S (1 + 2y)\, dxdy.$$

Ví dụ 4.9. Tính $I = \oint\limits_C xzdx + xydy + 3xzdz$, trong đó C là biên của mặt phẳng $2x+y+z =$

2 nằm trong góc phần tám thứ nhất, có chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống.



Tích phân mặt loại I

Bài tập 4.1. Tính các tích phân mặt sau đây

1. $\iint_S yzd\sigma$, trong đó $S : x = u^2, \quad y = u\sin v, \quad z = u\cos v; \quad 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$

2. $\iint_S (x^2+y^2)d\sigma$, S là mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 = 9$

3. $\iint_S zd\sigma$, S là mặt parabolic $z = 2 - x^2 - y^2$ trong miền $z \ge 0$

4. $\iint_S (x^2+y^2+(z-2)^2)d\sigma$, S là mặt $x^2+y^2+z^2 = 4, z \ge 1$

5. $\iint_S xyd\sigma$, S là tam giác giới hạn bởi các đỉnh $(1,0,0); (0,2,0); (0,0,2)$

6. $\iint_S x^2z^2d\sigma$, S là phần mặt nón $z^2 = x^2+y^2$ nằm giữa các mặt $z = 1, z = 3$

7. $\iint_S x^2yzd\sigma$, S là phần mặt phẳng $z = 1+2x+3y$ nằm trên hình chữ nhật $[0,3]\times[0,2]$.

8. $\iint_S yd\sigma$, S là phần mặt $z = \dfrac{2}{3}\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right), \ \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$

9. $\iint_S zd\sigma$, S là mặt $x = y+2z^2, \ \ 0l1yl11, 0 \le z \le 1.$

10. $\iint_S xzd\sigma$, S là biên của miền được bao quanh bởi mặt trụ $y^2+z^2 = 9$ và các mặt $x = 0, \ \ x+y = 5$..

11. $\iint_S \left(z+x^2y\right)d\sigma$, S là phần mặt mặt trụ $y^2+z^2 = 1$ và nằm giữa các mặt $x = 0, \ \ x = 3$ trong góc phần tám thứ nhất.

12. $\iint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma$, S là phần mặt trụ $y^2+z^2 = 9$ và nằm giữa các mặt $z = 0, \ \ z = 2$, cùng với các mặt đĩa tròn trên đỉnh và đáy.

Tích phân mặt loại II

Bài tập 4.2. Tính các tích phân sau

1. $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, S là phía trên của mặt phẳng $x+2z-1$ nằm giữa hai mặt phẳng $y = 0, y = 2$ và thuộc góc phần tám thứ nhất

2. $\iint_S zdxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1, x \ge 0$

3. $\iint_S ydzdx$, S là phần dưới của mặt phẳng $x+y+z = 3$ thuộc góc phần tám thứ nhất.

4. $\iint_S xdydz+y^2dxdz+dxdy$, S là phía ngoài của mặt xung quanh của khối trụ $x^2+y^2 \le 2x, 0 \le z \le 1$

5. $\iint_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, S là phần mặt phẳng Parabol $z = 4-x^2-y^2$ nằm phía trên hình vuông $0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 1.$

6. $\iint_S -xdydz - ydxdz + z^3dxdy$, S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ giữa các mặt phẳng $z = 1, \ \ z = 3$ với định hướng xuống.

7. $\iint_S xdydz - zdxdz + ydxdy$, S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ năm trong góc phần tám thứ nhất, với định hướng tới gốc tọa độ.

8. $\iint_S xzdydz + xdxdz + ydxdy$, S là nửa cầu $x^2+y^2+z^2=25,\ y\geq 0$, định hướng theo hướng trục Oy.

9. $\iint_S ydxdz - zdxdy$, S chứa mặt Parabol $y=x^2+z^2,\quad 0\leq y\leq 1$ và đĩa $x^2+z^2\leq 1,\quad y=1$.

10. $\iint_S yxdydz + 4x^2dxdz + yzdxdy$, S là mặt $z=xe^y, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$

11. $\iint_S xdydz + ydxdz + 5dxdy$, S là biên của miền được bao quanh bởi mặt trụ $x^2+z^2=1$ và các mặt $y=0$ và $x+y=2$

Bài tập 4.3. Tính

1. $\iint_S x^2dydz - 2xydxdz + 3xzdxdy$, S là phía trong của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$

2. $\iint_S zdxdy$, S là phía ngoài của mặt ellipsoid $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$

3. $\iint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, S là sáu mặt phía ngoài của hình hộp chữ nhật $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$

4. $\iint_S xydydz + (y^2+e^{xz})dxdz + cos(xy)dydz$, S là phía ngoài của mặt giới giới hạn bởi mặt $z=1-x^2, z=0, y=0, y+z=2$

5. $\iint_S xye^zdydz + xy^2z^3dxdz - ye^zdydz$, S là mặt của hộp được bao quanh bởi mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x=3, y=2, z=1$.

6. $\iint_S x^2yzdydz + xy^2zdxdz + xyz^2dydz$, S là mặt hộp được bao quanh bởi các mặt phẳng $x=0, x=a, y=0, y=b, z=c$ trong đó a,b,c là hằng số dương.

7. $\iint_S 3xy^2dydz + xe^zdxdz + z^3dydz$, S là mặt hình khối bị chặn bởi mặt trụ $y^2+z^2=1$ và các mặt phẳng $x=-1, x=2$.

8. $\iint_S \left(x^3+y^3\right)dydz + \left(y^3+z^3\right)dxdz + \left(z^3+x^3\right)dydz$, S là mặt cầu có tâm tại gốc tọa và bán kính 2.

9. $\iint_S zdydz + ydxdz + zxdydz$, S là bề mặt của khối tứ diện được bao quanh bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, trong đó a,b,c dương.

10. $\iint_S \left(cosz+xy^2\right)dydz + xe^{-z}dxdz + \left(siny+x^2z\right)dydz$, S là mặt khối bị chặn bởi mặt Parabol $z=x^2+y^2$ và $z=4$

11. $\iint_S x^4dydz - x^3z^2dxdz + 4xy^2zdydz$, S là mặt của khối bị chặn bởi mặt trụ $x^2+y^2=1$ và mặt phẳng $z=x+2,\quad z=0$.

Bài tập 4.4. Tính

1. $\int_C x^2zdydz + xy^2dxdz + z^2dxdy$, C là đường giao tuyến của mặt $x + y + z = 1$ và $x^2 + y^2 = 9$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía trên xuống

2. $\int_C x^2ydydz + \frac{1}{3}x^3dxdz + xydxdy$, C là giao xuyến của $z = y^2 - x^2$ và $x^2 + y^2 = 1$có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía trên xuống

Chương 5

Phương trình vi phân và hệ phương trình vi phân

5.1 Khái niệm cơ bản

5.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.1. Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập, hàm số phải tìm và các đạo hàm của nó. *Cấp cao nhất* của đạo hàm có mặt trong phương trình được gọi là *cấp* của phương trình vi phân.

Ví dụ 5.1. .

1. $y' + \dfrac{1}{x} = 0,\ \ \dfrac{dy}{dx} = 3x + 2$ là phương trình vi phân cấp 1.
2. $y'' = 3xy - \dfrac{1}{x^2},\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2} - 5xy\dfrac{dy}{dx} = x^2$ là phương trình vi phân cấp 2.
3. $\left(y'''\right)^2 + \left(y''\right)^4 + y' = 7x$ là phương trình vi phân cấp 3.
4. $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dz}{dy} = x^2 + 2y$ là phương trình vi phân cấp 1.
5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^3 + 1$ là phương trinh vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng* (partial differential equation - PDE) nếu **hàm cần tìm** phụ thuộc vào hai hay nhiều biến.

Phương trình vi phân được gọi là *phương trình vi phân thường* (ordinary differential equation - ODE) nếu **hàm cần tìm** chỉ phụ thuộc vào một biến duy nhất.

Phương trình vi phân thường có dạng

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{5.1}$$

trong đó x là biến độc lập, y là **hàm cần tìm**, $y', ..., y^{(n)}$ là đạo hàm các cấp của y, biểu thức $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ thực sự chứa $y^{(n)}$.

Ví dụ 5.2. Trong ví dụ 5.1, các phương trình 1,2,3 là phương trình vi phân thường, các phương trình 4,5 là phương trình vi phân đạo hàm riêng.

5.1.2 Nghiệm của phương trình vi phân

Định nghĩa 5.2. Nghiệm của phương trình vi phân 5.1 trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$, là hàm $y = y(x)$ thỏa phương trình 5.1 tại mọi điểm $x \in I$.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là một trong các nghiệm của nó.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là tập hợp tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ 5.3. Chứng minh phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$ có nghiệm tổng quát là $y = \sqrt[3]{x^3 + C}$, trong đó C là hằng số.

5.2 Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa 5.3. Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{5.2}$$

trong đó x là biến độc lập, y là hàm cần tìm, $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Thường người ta cho phương trình vi phân cấp 1 đã giải ra đối với y'

$$y' = f(x, y)$$

hoặc dạng

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

Định nghĩa 5.4. Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

với điều kiện đầu

$$y(x_0) = y_0.$$

Định lý 5.1. *Nghiệm của bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất nếu hàm $f(x, y)$ và đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên một tập mở $D \in \mathbb{R}^2$ chứa điểm (x_0, y_0).*

Định nghĩa 5.5. *Nghiệm tổng quát* của phương trình 5.2 là biểu thức $y = f(x, C)$, trong đó C là hằng số tùy ý sao cho với mỗi hằng số C, hàm số $y = f(x, C)$ là một nghiệm (*riêng*) của phương trình 5.2.

Nghiệm tổng quát của phương trình 5.2 viết dưới dạng hàm ẩn $F(x, y) = C$ được gọi là tích phân tổng quát.

Một số nghiệm của phương trình 5.2 mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ, được gọi là *nghiệm kì dị*.

Ví dụ 5.4. Bài toán Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

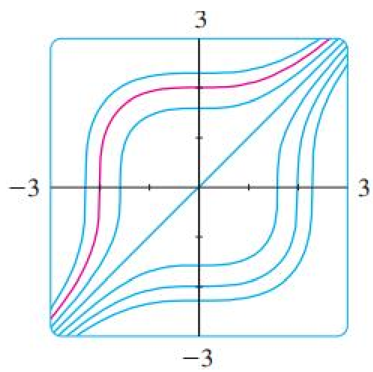
có nghiệm $y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$.

Đường cong tích phân

Đồ thị của mỗi nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân đã cho, vẽ trên mặt phẳng Oxy gọi là đường cong tích phân của phương trình này.

Như vậy, nghiệm tổng quát $y = y(x)$ trên mặt phẳng Oxy tương ứng với một họ các đường cong tích phân phụ thuộc vào một tham số là hằng số C bất kỳ. Nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện bao đầu $y(x_0) = y_0$ tương ứng với đường cong tích phân đi qua điểm (x_0, y_0) cho trước của họ đó.

Ví dụ 5.5. Phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$ có nghiệm tổng quát là $y = \sqrt[3]{x^3 + C}$. Với $C = 8$, ta có nghiệm riêng của nó là $y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$.



5.3 Một số dạng phương trình vi phân cấp 1

5.3.1 Phương trình vi phân tách biến

Phương trình sau đây được gọi là *phương trình tách biến*

$$g(y)y' = f(x). \tag{5.3}$$

Ta có thể viết dưới các dạng sau:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x); \quad g(y)dy = f(x)dx; \quad g(y)dy + f(x)dx = 0$$

Cách giải: Nếu phương trình có dạng 5.3 lấy tích phân hai vế theo biến x, ta được

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx$$
$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$
$$G(y) = F(x) + C$$

trong đó: $G(y)$ là nguyên hàm của y, $F(x)$ là nguyên hàm của f, C là hằng số.

Nếu phương trình dạng $g(y)dy = f(x)dx$, lấy tích phân hai vế ta được

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

Ví dụ 5.6. Giải các phương trình vi phân sau

1. $y' = x - 2x^3$
2. $y^2dy = xdx$
3. $y' - x(y^2 - 1) = 0$
4. $e^x dx - ydy = 0,\ y(0) = 1$

Giải

1. Lấy tích phân 2 vế phương trình $y' = x - 2x^3$ theo biến x, ta được

$$\begin{aligned} \int y'dx &= \int \left(x - 2x^3\right) dx \\ \int dy &= \int \left(x - 2x^3\right) dx \\ y &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + C \end{aligned}$$

2. Lấy tích phân 2 vế phương trình $y^2dy = xdx$, ta được

$$\begin{aligned} \int y^2dy &= \int xdx \\ \frac{y^3}{3} &= \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

3. Dành cho sinh viên.
4. Dành cho sinh viên.

Ví dụ 5.7. Thay bằng ví dụ ứng dụng khác

Trong 1 phản ứng hóa học tại nhiệt độ cố định, nồng độ chất [A] phụ thuộc thời gian theo phương trình vi phân

$$\frac{d[A]}{dt} = -2k[A]^2.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = 2kt$$

biết rằng khi tại thời điểm ban đầu $t = 0$ thì $[A] = [A]_0$.

5.3.2 Phương trình đẳng cấp

Phương trình vi phân

$$y' = f(x, y)$$

được gọi là *đẳng cấp* nếu hàm $f(x, y)$ có thể viết được dưới dạng

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

nghĩa là

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.4}$$

Nhắc lại: hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc m nếu $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Cách giải:

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, ta có $y = ux, \quad y' = u'x + u$.

Khi đó, phương trình (5.4) trở thành

$$\begin{aligned} xu' + u &= \varphi(u) \\ xu' &= \varphi(u) - u \\ \frac{1}{\varphi(u) - u}u' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C$$

Ví dụ 5.8. Giải các phương trình vi phân sau

1. $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ trên miền $x > 0$.
2. $y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 4, \quad y(1) = 2$

Giải

1. Chia cả tử và mẫu vế phải của phương trình $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ cho x^2, ta được

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2.\frac{y}{x}}$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, ta có $y = ux, \quad y' = u'x + u$.

Khi đó, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} xu' + u &= \frac{u - u^2}{1 - 2u} \\ xu' &= \frac{u - u^2}{1 - 2u} - u \\ xu' &= \frac{u^2}{1 - 2u} \end{aligned}$$

Trường hợp $u = 0 \Rightarrow y = 0$ là nghiệm.

Trường hợp $u \neq 0$, ta có

$$\frac{1 - 2u}{u^2}u' = \frac{1}{x}$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - 2u}{u^2}du &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\frac{1}{u} - 2\ln|u| &= \ln x + C \\ -\frac{x}{y} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| &= \ln x + C \end{aligned}$$

$$\ln x + \ln \frac{y^2}{x^2} + \ln K = -\frac{x}{y}; \left(K = e^C\right)$$
$$\ln\left(K\frac{y^2}{x}\right) = -\frac{x}{y}$$

Lấy e mũ hai vế, ta được

$$K\frac{y^2}{x} = e^{-\frac{x}{y}}$$
$$e^{\frac{x}{y}}\frac{y^2}{x} = D,$$

trong đó $D = K^{-1}$ là hằng số.

2. Dành cho sinh viên.

5.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{5.5}$$

được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính.*

Nếu $q(x) = 0$, phương trình 5.5 gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Nếu $q(x) \neq 0$, phương trình 5.5 gọi là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

Định lý 5.2. *Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất*

$$y' + p(x)y = 0$$

trong đó $p(x)$ là hàm liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

với C là hằng số tùy ý.

Chứng minh

Nhân 2 vế của phương trình $y' + p(x)y = 0$ cho $e^{\int pdx}$, ta được

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = 0$$
$$ye^{\int p(x)dx} = C$$
$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Định lý 5.3. *Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right)$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Chứng minh

Nhân 2 vế của phương trình $y' + p(x)y = q(x)$ cho $e^{\int p(x)dx}$, ta được

$$\begin{aligned} \left(ye^{\int p(x)dx}\right)' &= q(x)e^{\int p(x)dx} \\ ye^{\int p(x)dx} &= \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \\ y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right), \end{aligned}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 5.9. Giải các phương trình vi phân sau

1. $y' + 3x^2y = 0$ 2. $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$

Giải

1. Xét $y' + 3x^2y = 0$, ta có $p(x) = 3x^2$.

Suy ra $\displaystyle\int p(x)dx = \int 3x^2dx = x^3 + C$.

Nhân 2 vế $y' + 3x^2y = 0$ cho e^{x^3}, ta được

$$\begin{aligned} y'e^{x^3} + 3x^2e^{x^3}y &= 0 \\ \left(ye^{x^3}\right)' &= 0 \\ y = e^{-x^3}.\int 0dx &= De^{-x^3}. \end{aligned}$$

trong đó D là hằng số.

2. Dành cho sinh viên.

Ví dụ 5.10. Giải các phương trình vi phân sau

1. $y' - y = \sin x$ 2. $y' - \dfrac{3}{x^2}y = \dfrac{1}{x^2}$ 3. $y' + 2xy = 2x^3, y(0) = 1$

Giải

1. Ta có $p(x) = -1,\ q(x) = sinx$.

Suy ra $\displaystyle\int p(x)dx = \int -1dx = -x + C$.

Nhân 2 vế của $y' - y = \sin x$ cho e^{-x} ta được

$$\begin{aligned} y'e^{-x} - e^{-x}y &= \sin x.e^{-x} \\ \left(ye^{-x}\right)' &= sinx.e^{-x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ye^{-x} &= \int sinx.e^{-x}dx \\
y &= e^{x}\int sinx.e^{-x}dx \\
y &= e^{x}.\left(-\frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)+C\right) \\
y &= -\frac{1}{2}\left(\cos x+\sin x\right)+Ce^{x}
\end{aligned}
$$

2. Dành cho sinh viên.

3. Dành cho sinh viên.

5.4 Phương trình vi phân cấp 2

5.4.1 Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

A. Phương trình không chứa y và y'

$F\left(x, y''\right) = 0$ hay $y'' = f\left(x\right)$

Cách giải: Lấy tích phân 2 vế của phương trình theo biến x hai lần.

B. Phương trình không chứa y

$F(x, y', y'') = 0$ hay $y'' = f\left(x, y'\right)$

Cách giải: đặt $p\left(x\right) = y'$, chuyển về phương trình vi phân bậc nhất.

C. Phương trình không chứa x

$F\left(y, y', y''\right) = 0$ hay $y'' = f\left(y, y'\right)$

Cách giải:

- Đặt $y' = p\left(y\right) \Rightarrow y'' = p.\dfrac{dp}{dy}$.

Thay y', y'' vào phương trình ban đầu, ta có phương trình vi phân cấp 1.

Giải phương trình vi phân cấp 1 trên, ta có nghiệm $p\left(y\right) = \varphi\left(y, C_1\right)$.

Do $y' = p\left(x\right)$, ta có phương trình

$$y' = \varphi\left(y, C_1\right) \quad (*)$$

trong đó $y\left(x\right)$ là hàm cần tìm. Giải phương trình $(*)$ ta được nghiệm của phương trình ban đầu.

Ví dụ 5.11. Một tàu hỏa đang chạy trên quãng đường nằm ngang với vận tốc 72 km/h. Dùng một lực hãm bằng 0,2 trọng lượng tàu để dừng lại. Hỏi tàu sẽ dừng lại sau thời gian bao lâu, và trong thời gian ấy, tàu đã đi được một quãng đường là bao nhiêu.

Giải

Theo định luật Newton: $F = mT$, ta có phương trình chuyển động của tàu là

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -0,2mg$$

trong đó s là quãng đường đi được trong thời gian t, m là khối lượng tàu, g là gia tốc trọng trường, lực $F = -0,2mg$ mang dấu trừ vì là lực cản.

Đây là phương trình vi phân cấp 2 không chứa s và s'

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0,2g$$

Ví dụ 5.12. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$\begin{cases} y.y'' = (y')^2 - (y')^3 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

Giải

Đặt $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p.\dfrac{dp}{dy}$.

Thay y', y'' vào phương trình đã cho, ta có

$$y.p.\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3 \quad (1)$$

Suy ra

$$p\left[y.\frac{dp}{dy} - p + p^2\right] = 0$$

Trường hợp 1: $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ là nghiệm của phương trình 1.

Trường hợp 3: $p \neq 0$, ta có

$$y.\frac{dp}{dy} - p + p^2 = 0$$

5.4.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng có dạng

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{5.6}$$

trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên khoảng I

Nếu $f(x) = 0$, ta nói 5.6 là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Nếu $f(x) \neq 0$, ta nói 5.6 là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

A. Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{5.7}$$

Cách giải:

B1: giải phương trình đặc trưng $ak^2 + bk + c = 0 \qquad (*)$, k là ẩn.

B2: Xét các trường hợp

TH1: PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt k_1, k_2,

$$\Rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

TH2: PT $(*)$ có 2 nghiệm kép k_0,

$$\Rightarrow y = e^{k_0 x}(C_1 x + C_2)$$

TH3: PT $(*)$ có nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$,

$$\Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Ví dụ 5.13. Giải các phương trình vi phân sau

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$
2. $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$

B. Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{5.8}$$

Cách giải

Cách 1: Phương pháp biến thiên hệ số Larange

Bước 1: giải ptvp thuần nhất $ay'' + by' + cy = 0$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng: $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Bước 2: tìm nghiệm riêng của phương trình 5.8 dạng $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, trong đó $C_1(x), C_2(x)$ thỏa

$$\begin{cases} {C_1}' y_1 + {C_2}' y_2 = 0, \\ {C_1}' {y_1}' + {C_2}' {y_2}' = f(x). \end{cases}$$

Giải hệ trên (ẩn C_1, C_2), ta được nghiệm duy nhất

$${C_1}' = \varphi_1(x); \quad {C_2}' = \varphi_2(x).$$

Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + K_1,$$
$$C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + K_2.$$

Đặt $\Phi_1(x) = \int \varphi_1(x) dx, \; \Phi_2(x) = \int \varphi_2(x) dx$, chọn $K_1 = K_2 = 0$, ta được

$$y_p = \Phi_1(x) y_1 + \Phi_2(x) y_2$$

Bước 3: vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = y_0 + y_p$$

Ví dụ 5.14. Tìm nghiệm của các phương trình sau

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

2 $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} cosx$.

Giải.

1. Xét phương trình $y'' - 2y' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0$, suy ra $k_0 = 1$.

Vậy nghiệm phương tổng quát của trình thuần nhất là

$$y_0 = (xC_1 + C_2)\, e^x$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ dưới dạng

$$y_0 = (xC_1(x) + C_2(x))\, e^x$$

trong đó $C_1(x),\ C_2(x)$ thỏa hệ

$$\begin{cases} C_1^{/} xe^x + C_2^{/} e^x = 0 \\ C_1^{/}\left(e^x + xe^x\right) + C_2^{/} e^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được

$$\begin{cases} C_1^{/} = \dfrac{1}{x} \\ C_2^{/} = -1 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} C_1 = \ln x + k_1 \\ C_2^{/} = -x + k_2 \end{cases}$$

Chọn $k_1 = k_2 = 0$, ta được

$$y_p = xe^x \ln x - xe^x$$

Vậy, nghiệm tổng quát của pt ban đầu là

$$y = C_1 xe^x + C_2 e^x + xe^x \ln x - xe^x$$

trong đó C_1, C_2 là hằng số.

2. Dành cho SV.

B. Phương pháp hệ số bất định

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát y_0 của phương trình thuần nhất $ay'' + by' + c = 0$.

Bước 2: Xét phương trình đặc trưng $ak^2 + bk + c = 0$

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\lambda x}.P_n(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ và $P_n(x)$ đa thức bậc n.

Trường hợp	**Dạng nghiệm riêng** y_p
λ không trùng với nghiệm của PT đặc trưng	$y_p = e^{\lambda x}.Q_n(x)$
λ trùng với một nghiệm của PT đặc trưng	$y_p = x.e^{\lambda x}.Q_n(x)$
λ trùng vớit nghiệm kép của PT đặc trưng	$y_p = x^2.e^{\lambda x}.Q_n(x)$

trong đó $Q_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1.x + A_0$ là đa thức cùng bậc với $P_n(x)$

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\lambda x}.\left[P_n(x)\, cos\gamma x + Q_m(x)\, sin\gamma x\right]$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ và $P_n(x), Q_m(x)$ đa thức bậc n, m tương ứng.

Trường hợp	Dạng nghiệm riêng y_p
$\lambda \pm i\gamma$ không trùng với nghiệm của PT đặc trưng	$y_p = e^{\lambda x}.\left[R_l(x)\, cos\gamma x + S_l(x)\, sin\gamma x\right]$
$\lambda \pm i\gamma$ trùng với nghiệm của PT đặc trưng	$y_p = x.e^{\lambda x}.\left[R_l(x)\, cos\gamma x + S_l(x)\, sin\gamma x\right]$

trong đó

$R_l(x) = A_l x^l + A_{l-1} x^{l-1} + \cdots + A_1.x + A_0$

$S_l(x) = B_l x^l + B_{l-1} x^{l-1} + \cdots + B_1.x + B_0$

là hai đa thức cùng bậc $l = max\{m, n\}$.

Bước 3: Tính $y_p',\ y_p''$ thế vô phương trình ban đầu, suy ra

hệ số $A_i,\ i = \overline{1, n}$ của đa thức $Q_n(x)$, hoặc

hệ số $A_i,\ i = \overline{1, l}$ và $B_i,\ i = \overline{1, l}$ của đa thức $R_l(x),\ S_l(x)$

Bước 4: Nghiệm $y = y_0 + y_p$.

Ví dụ 5.15. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - y' - 2y = 4x^2$

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - y' - 2y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - k + 2 = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \end{array}\right.$.

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Ta có $f(x) = 4x^2$ có dạng $e^{\alpha x} P_n(x)$ với $\alpha = 0, P_2(x) = 4x^2$.

Vì $\alpha = 0$ không trùng với nghiệm của PT đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

Suy ra

$$\begin{array}{l} {y_p}' = A_1 + 2A_2 x, \\ {y_p}'' = 2A_2. \end{array}$$

Thay vào pt ban đầu, ta có

$$2A_2 - (A_1 + 2A_2 x) - 2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = 4x^2$$

$\Rightarrow (-2A_2)x^2 + (-2A_1 - 2A_2)x + (-2A_0 - A_1 + 2A_2) = 4(x^2) + 0(x) + 0$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\left\{\begin{array}{l} -2A_2 = 4 \\ -2A_2 - 2A_1 = 0 \\ 2A_2 - A_1 - 2A_0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_2 = -2 \\ A_1 = 2 \\ A_0 = -3 \end{array}\right.$$

Suy ra

$$y_p = -3 + 2x - 2x^2.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 5.16. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$

Giải

Phương trình thuần nhất $y'' - y' - 2y = 0$ có nghiệm tổng quát $y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$

Ta có $f(x) = e^{3x}$ có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha = 3, P_2(x) = 2$.

Vì $\alpha = 3$ không trùng với nghiệm của PT đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y_p = A_0e^{3x}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} {y_p}' &= 3A_0e^{3x}, \\ {y_p}'' &= 9A_0e^{3x}. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình ban đầu, ta có

$$\begin{aligned} 9A_0e^{3x} - 3A_0e^{3x} - 2A_0e^{3x} &= 2e^{3x} \\ 4A_0e^{3x} &= 2e^{3x} \end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$A_0 = \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số.

Ví dụ 5.17. Tìm nghiệm của phương trình

1. $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(x-1) \\ y(0) = -1, y'(0) = 2. \end{cases}$
2. $y'' + y = (x+2)\,cosx$
3. $y'' + y = \left(x^2+1\right)e^x$

Định lý 5.4. ***Nguyên lý chồng chất nghiệm***

Xét phương trình $y'' + ay' + b = f_1(x) + f_2(x)$ *trong đó* a, b *là các hằng số thực,* $f_1(), f_2(x)$ *là những hàm liên tục trên* $I\ subset \mathbb{R}$. *Khi đó, nghiệm riêng* y_p *của phương trình trên được tìm dưới dạng*

$$y_p = y_1^* + y_2^*$$

trong đó y_1^* *là nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + ay' + b = f_1(x)$$

và y_2^* *là nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + ay' + b = f_2(x)$$

Ví dụ 5.18. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + y = (x+2)\,cosx + \left(x^2+1\right) e^x$$

5.5 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng

Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng có dạng

$$\begin{cases} y' + a_1 y + b_1 z = q_1(x) \\ z' + a_2 y + b_2 z = q_2(x) \end{cases}$$

trong đó x là biến độc lập, y, z là hàm số theo biến x, a_1, b_1, a_2, b_2 là các hằng số, $q_1(x)$, $q_2(x)$ là hàm số đã biết theo biến x.

Ví dụ 5.19. Tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y' - 4z - 2y = \cos x \\ z' + 2z + y = \sin x \end{cases}$$

Giải

Đạo hàm hai vế phương trình thứ hai theo x, ta được

$$z'' + 2z' + y' = cosx \qquad (*)$$

Từ phương trình thứ hai, ta có

$$y = sinx - z' - 2z$$

Thay y vừa tìm được vào phương trình thứ nhất, ta có

$$y' = cosx + 4z + 2\left(sinx - z' - 2z\right) = cosx + 2sinx - 2z'$$

Thay y' vào phương trình (*), ta được phương trình vi phân cấp 2

$$z'' + 2z' + cosx + 2sinx - 2z' = cosx$$

$$z'' = -2sinx$$

Bài tập

Bài tập 5.1. Giải các phương trình vi phân dạng tách biến sau

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = y$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2}$
4. $y' = \dfrac{xe^x}{2y}$
5. $xy' = 2y$
6. $xdx - y^3dy = 0$
7. $(x+1)dx - \dfrac{1}{y^2}dy = 0$
8. $\dfrac{1}{x}dx - \dfrac{1}{y}dy = 0$
9. $dx - \dfrac{1}{y^2 - 6y + 13}dy = 0$
10. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$
11. $\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}dy + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$
12. $y'\cos x = y$
13. $y'\tan x = 1 - y$
14. $tgx\sin^2 ydx + \cot gy\cos^2 xdy = 0$
15. $y' + y = 0, \quad y(1) = 1$
16. $\sin xdx + ydy = 0, \quad y(0) = -2$
17. $x\cos x = (e^{3y} + 2y)y', \quad y(0) = 0$
18. $y'\sin x = y\ln y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
19. $y'\text{tg}x = y + a, y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = a, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
20. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}, \quad y(0) = 0$
21. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x)+2} = 0, \quad y(1) = 1$
22. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2\ln t, \quad L(1) = -1$

Bài tập 5.2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau

1. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$
2. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1$
3. $y' = \dfrac{y-x}{x}$
4. $y' = \dfrac{2y+x}{x}$
5. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
6. $y' = \dfrac{y^2+2x}{xy}$
7. $y' = \dfrac{y^2+x^2}{2xy}$
8. $y' = \dfrac{4xy}{y^2-x^2}$
9. $(x + \sqrt{y^2 - xy})dy - ydx = 0$
10. $y^2dx + (x\sqrt{y^2-x^2} - xy)dy = 0$
11. $(x + \sqrt{xy})dy = ydx$
12. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$
13. $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y$
14. $2ye^{\frac{x}{y}}dx + \left(y - 2xe^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$
15. $xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + x$
16. $ydx + x\log\dfrac{y}{x}dy - 2xdy = 0$

Bài tập 5.3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau

1. $y' + 3x^2y = 0$
2. $y' - 3x^4y = 0$
3. $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$
4. $y' - \dfrac{2}{x^2}y = 0$
5. $y' - 7y = 14x$
6. $y' + y = \sin 2x$
7. $y' - 3y = x^2$
8. $y' - \dfrac{3}{x^2}y = \dfrac{1}{x^2}$
9. $y' = \sin x$
10. $y' + 2y = 3e^{-2x}$
11. $y' + \cos x.y = \dfrac{1}{2}\sin x$
12. $xy' + y = x\sin x$

13. $xy' - y = x^2 \cos x$
14. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
15. $\cos x . y' + y = 1 - \sin x$
16. $y' - y \sin x = \sin x . \cos x$
17. $y' - \dfrac{y}{\sin x} = x^2 \ln \mathrm{tg} \left(\dfrac{x}{2}\right)$
18. $y' + \dfrac{y}{x} = 2 \ln x + 1$
19. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2$
20. $\dfrac{dy}{dt} + 50y = 0$
21. $\dfrac{dN}{dt} = kN$, k là hằng số.
22. $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{2}{20-t} Q = 4$
23. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x, \quad y(0) = 0$
24. $y' + 6xy = 0, \quad y(\pi) = 5$
25. $y' - 2y = e^x - x, \quad y(0) = \dfrac{1}{4}$
26. $y' + 3y\mathrm{tg}3x = \sin 6x, \quad y(0) = \dfrac{1}{3}$
27. $y' - \mathrm{tg}x . y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$
28. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$
29. $y' + 2xy = 2x^3, \quad y(0) = 1$
30. $\dfrac{dv}{dt} + 2v = 32, \quad v(0) = 0$
31. $\dfrac{dq}{dt} + qy = 4 \cos 2t, \quad q(0) = 1$
32. $\dfrac{dN}{dt} + \dfrac{1}{t} N = t, \quad N(2) = 8$

Bài tập 5.4. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1. $y'' - y' + y = 0.$
2. $y'' - y' - 2y = 0.$
3. $y'' - 5y = 0.$
4. $y'' - y' - 12y = 0.$
5. $y'' - 2y' + y = 0.$
6. $y'' + 6y' + 9y = 0.$
7. $y'' - 25y' = 0.$
8. $y'' - 25y = 0.$
9. $y'' + 16y = 0.$
10. $y'' - 7y' + 10y = 0.$
11. $y'' - 4y' + 20y = 0.$
12. $y'' - y' + \dfrac{1}{4} y = 0.$
13. $y'' - 2y' + 5y = 0.$
14. $y'' = 0.$
15. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0.$
16. $\dfrac{d^2N}{dt^2} - 5\dfrac{dN}{dt} + 7N = 0.$

Bài tập 5.5. Tìm nghiệm của các bài toán sau

1. $y'' = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$
2. $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -6.$
3. $y'' + 2y = 0,\ y(3) = 0,\ y'(3) = 0.$
4. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 2.$
5. $12y'' + 5y' - 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$
6. $4y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 0.$
7. $y'' + 2y = 0,\ y(3) = 0,\ y'(3) = 0.$

Bài tập 5.6. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình không thuần nhất sau

1. $y'' - 3y' - 10y = -3.$
2. $y'' + 3y' + 2y = 4.$
3. $y'' - 3y' - 10y = 2x - 3.$
4. $y'' - 2y' + y = x + 1.$
5. $y'' + 2y' + y = x^2.$
6. $y'' - 2y' + y = x^2 - 1.$
7. $y'' - y = x^2 - x + 1.$
8. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$
9. $y'' - y' = x^3.$
10. $y'' - y = e^x.$
11. $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}.$
12. $y'' + 3y' + y = 12e^x.$

13. $y'' + 3y' + y = e^{ix}$.
14. $y'' + 3y' - 4y = e^{-x}$.
15. $y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x}$.
16. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$.
17. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$.
18. $y'' + 8y' + 16y = 2xe^{4x}$.
19. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$.
20. $y'' - 2y' + y = e^{x}(x+1)$.
21. $y'' - 3y' + 2y = (4-12x)e^{x}$.
22. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.
23. $y'' - y' = \sin x$.
24. $y'' + y' = \cos 3x$.
25. $y'' - y' - 2y = 20\cos x$.
26. $y'' + 2y' + y = 6\sin 2x$.
27. $y'' + y = 4x\sin x$.
28. $y'' + 4y = x\sin 2x$.
29. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.
30. $y'' + y = (x+2)\cos x$.
31. $y'' + 9y = x^2\sin x$.
32. $y'' + 2y' + 10y = x^2e^{-x}\cos 3x$.
33. $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\sin x$.
34. $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(2\cos x + 4x\sin x)$.

Bài tập 5.7. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1. $y'' - y = e^{x} + x^2$.
2. $y'' + y = 2x + 3e^{x}$.
3. $y'' + y' - 6y = x + e^{2x}$.
4. $y'' - 3y' = e^{3x} - 12x$.
5. $y'' + 2y' = x^2 - e^{x}$.
6. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + x^2$.
7. $y'' - 3y' + 2y = e^{x} - e^{2x}$.
8. $y'' - y = xe^{2x} + 1$.
9. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + e^{-2x} - x$.
10. $y'' + y = \sin x + e^{-x}$.
11. $y'' - y' - 6y = e^{-x} - 7\cos x$.
12. $y'' - y = \sin x + \cos 2x$.
13. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.
14. $y'' + y = \sin^2 x$.
15. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.
16. $y'' - y = \cos^2 x$.
17. $y'' + 4y = \cos^2 x$.
18. $y'' + y = \sin x \cos 3x$.

Bài tập 5.8. Một bể chứa 1000L nước nuối với 15 kg muối hòa tan. Người ta đổ nước muối có nồng độ 0,03 kg muối/lít vào bể với tốc độ 10 lít/phút. Dung dịch nước muối tiếp tục hòa tan và được tháo ra khỏi bể với tốc độ bằng tốc độ nước đổ vào. Tính lượng muối trong bể

1. Sau t phút.
2. Sau 20 phút.

Hướng dẫn. Gọi $y(t)$ là lượng muối (kg) sau t phút, ta có $y(0) = 15$ và

$$\frac{dy}{dt} = \text{(Tốc độ muối đổ vào bể)} - \text{(Tốc độ muối chảy ra khỏi bể)}$$

Trong đó

$$\text{(Tốc độ muối đổ vào bể)} = \left(0,03\frac{\text{kg}}{\text{lít}}\right)\left(10\frac{\text{lít}}{\text{phút}}\right) = 0,3\frac{\text{kg}}{\text{phút}}$$

và

$$\text{(Tốc độ muối chảy ra khỏi bể)} = \left(\frac{y(t)}{1000}\frac{\text{kg}}{\text{lít}}\right)\left(10\frac{\text{lít}}{\text{phút}}\right) = \frac{y(t)}{100}\frac{\text{kg}}{\text{phút}}$$

Suy ra

$$\frac{dy}{dt} = 0,3 - \frac{y(t)}{100}$$

Giải phương trình trên, ta được $y(t) =$

Bài tập 5.9. Một bể nước chứa 1000 L nước muối với 15 kg muối hòa tan. Người ta đổ nước tinh khiết vào bể với tốc độ 10 L/phút. Dung dịch nước muối tiếp tục hòa tan và được tháo ra khỏi bể với tốc độ bằng tốc độ đổ nước vào. Tính lượng muối trong bể

1. Sau t phút. 2. Sau 15 phút.

Bài tập 5.10. Một cái thùng chứa 500 ga-lông bia có pha 4% cồn (tính theo thể tích). Người ta bơm bia có pha 6% cồn vào thùng với tốc độ 5 ga-lông/phút, và dung dịch hòa tan này lại được bơm ra ngoài với cùng vận tốc bơm vào. Tính phần trăm nồng độ cồn sau nửa giờ.

Bài tập 5.11. Một bể chứa 1000L nước tinh khiết. Người ta đổ nước muối có chứa 0,05 kg muối/L nước vào bể với vận tốc 5 L/phút, và đổ nước muối có chứa 0,04 kg muối/L nước vào bể với vận tốc 10 L/phút. Dung dịch này được hòa tan vào nhau và tháo ra khỏi bể với vận tốc 15 L/phút. Tính lượng muối trong bể

1. Sau t phút. 2. Sau 1 giờ.

Bài tập 5.12. Giả sử $C(t)$ là nồng độ thuốc trong máu. Vì cơ thể đào thải thuốc nên $C(t)$ giảm dần theo tốc độ tỉ lệ với lượng thuốc có mặt trong cơ thể. Như vậy, $C'(t) = -kC(t)$, trong đó k là hằng số đào thải thuốc $(k > 0)$.

1. Nếu C_0 là nồng độ thuốc tại thời điểm $t = 0$, tìm nồng độ thuốc tại thời điểm t.

2. Nếu cơ thể đào thải nửa lượng thuốc trong 30 giờ, sau bao lâu thì 90% lượng thuốc bị đào thải.