ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
----------------o0o----------------

Giáo trình
Giải tích hàm nhiều biến

Mã số: GT2013-03

Chủ nhiệm đề tài: PGS. TS. Phạm Hoàng Quân
Thành viên: TS. Lê Minh Triết
ThS. Phan Trung Hiếu
ThS. Hoàng Đức Thắng

Tp. Hồ Chí Minh, 8/2015

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
----------------o0o----------------

Giáo trình
Giải tích hàm nhiều biến

Mã số: GT2013-03

Xác nhận của Chủ tịch Hội đồng **Chủ nhiệm đề tài**

Tp. Hồ Chí Minh, 8/2015

Lời nói đầu

Giáo trình ***Giải tích hàm nhiều biến*** được biên soạn dành cho sinh viên trong giai đoạn đào tạo cơ bản. Tuy nhiên, nó cũng có thể được sử dụng như một tài liệu tham khảo cho sinh viên một số nhóm ngành khác, cho các học viên cao học và các cán bộ nghiên cứu trong các khối khoa học Toán lý và Kỹ thuật.

Nội dung của cuốn giáo trình này được biên soạn theo đề cương chi tiết học phần Giải tích hàm nhiều biến đang được dùng giảng dạy trong Khoa Toán - Ứng dụng, trường Đại học Sài Gòn.

Giáo trình gồm 5 chương. Chương 1 và chương 2 giới thiệu các khái niệm cơ bản về giới hạn, liên tục, sự khả vi và vi phân của hàm nhiều biến. Ứng dụng của phép tính vi phân hàm nhiều biến được trình bày trong chương 3. Chương 4 và chương 5 đề cập đến phép tính tích phân hàm nhiều biến bao gồm: tích phân bội, tích phân đường và tích phân mặt.

Đặc biệt, nhiều bài toán trong lĩnh vực vật lý, hóa học, sinh học và kinh tế có thể được mô tả bằng mô hình toán học. Một khi mô hình được xây dựng, ta thường phải giải một phương trình vi phân để dự báo và định lượng các tính chất đặc trưng của bài toán. Điều này cho thấy, phương trình vi phân có nhiều ứng dụng trong thực tế. Chính vì vậy, chúng tôi biên soạn thêm phần đọc thêm về phương trình vi phân, nhằm giúp cho sinh viên có thêm kiến thức về phương trình này để ứng dụng về sau.

Trong mỗi chương, chúng tôi trình bày đầy đủ, ngắn gọn các kiến thức cơ bản cùng với nhiều ví dụ minh hoạ cụ thể, bài tập chọn lọc nhằm giúp sinh viên rèn luyện kỹ năng tính toán và vận dụng lý thuyết trong việc giải các bài toán.

Mặc dù đã cố gắng nhiều trong quá trình biên soạn, nhưng giáo trình khó tránh khỏi sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc để giáo trình ngày càng hoàn thiện hơn.

Tp. HCM, tháng 7 năm 2015

CÁC TÁC GIẢ

Chương 1

GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu vài nét về không gian $\mathbb{R}^n$, về giới hạn và sự liên tục của hàm số nhiều biến số.

§1. KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$

I. Định nghĩa không gian $\mathbb{R}^n$

Tích Descartes của n tập số thực $\mathbb{R}$ được định nghĩa là tích

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$$

hay $\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| x_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1,2,...,n \right\}$.

Vậy, *không gian* $\mathbb{R}^n$ *là không gian tất cả các bộ n số thực có thứ tự*

$$(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Ký hiệu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là một điểm hay một vectơ trong $\mathbb{R}^n$; x_k là tọa độ thứ k của x trong $\mathbb{R}^n$, với $k = 1,2,...,n$.

Điểm O(0,0,...,0) được gọi là gốc tọa độ.

Ví dụ 1.1. Với $n = 1$, ta có $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: đường thẳng thực.

Ví dụ 1.2. Với $n = 2$, ta có $\mathbb{R}^2 = \left\{ (x_1, x_2) \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$: mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes.

Ví dụ 1.3. Với $n = 3$, ta có $\mathbb{R}^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$: không gian 3 chiều với hệ tọa độ Descartes.

II. Phép toán đại số trên $\mathbb{R}^n$

2.1. Hai vectơ bằng nhau

Hai vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là bằng nhau nếu

$$x_k = y_k, \forall k = 1,2,...,n.$$

2.2. Các phép toán đại số về vectơ

Cho hai vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta định nghĩa

$$x + y = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, ...,\, x_n + y_n),$$

$$x - y = (x_1 - y_1,\, x_2 - y_2, ...,\, x_n - y_n)$$

và

$$\lambda.x = (\lambda.x_1,\, \lambda.x_2, ..., \lambda.x_n).$$

Tính chất 2.1. *Cho vectơ* $x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, ta có*

(i) $x + y = y + x$;

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(iii) $x + 0 = x$; 0: *vectơ không*;

(iv) $x + (-x) = 0$*, trong đó* $-x = (-1).x$;

(v) $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$;

(vi) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$;

(vii) $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$;

(viii) $1.x = x$.

Ví dụ 2.1. Cho $x = (2, -3, 1), y = (-4, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$. Tính $x + y,\; y - x,\; 3x, -2y$.

Giải

$$x + y = (-2, -2, -1),$$
$$y - x = (-6, 4, -3),$$
$$3x = (6, -9, 3),$$
$$-2y = (8, -2, 4).$$

2.4. Tích vô hướng

Định nghĩa 2.2. Tích vô hướng của hai vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ là một con số, ký hiệu là $\langle x, y \rangle$, được định nghĩa bởi

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_n.y_n.$$

Tính chất 2.3. *Cho vectơ* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *ta có*

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(ii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

(iii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

2.5. Chuẩn

Chuẩn (Euclide) của x là

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Nếu $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ là một vectơ thì $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ là độ dài của vectơ x. Nếu $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ là một điểm thì $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ là khoảng cách từ điểm x đến gốc tọa độ O.

Từ định nghĩa chuẩn và tích vô hướng ta có

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Định lý 2.4. *Với mọi* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *ta có*

(i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0$ *khi và chỉ khi* $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(iv) $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$.

Chứng minh

(i) hiển nhiên.

(ii) $\|\lambda x\|^2 = \lambda^2.\|x\|^2$, suy ra $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$.

(iii)

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}x_k y_k + \sum_{k=1}^{n}y_k^2\\ &\le \sum_{k=1}^{n}x_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2} + \sum_{k=1}^{n}y_k^2\\ &= \left(\|x\|+\|y\|\right)^2,\end{aligned}$$

suy ra $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

(iv) trong (iii), ta thay x bởi $x-z$ và thay y bởi $z-y$. ■

2.6. Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $x, y \in \mathbb{R}^n$ là

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$$

Trong $\mathbb{R}$ thì $d(x,y) = |x-y|$.

Trong $\mathbb{R}^n$ thì $d(x,y)$ là khoảng cách Euclide hay mêtric Euclide trong $\mathbb{R}^n$.

Tính chất 2.5. *Với mọi* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$*, ta có*

(i) $d(x,y) \ge 0$, $d(x,y) = 0$ *khi và chỉ khi* $x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|.d(x,y)$;

(iv) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

Chứng minh

Dễ dàng chứng minh được (i), (ii), (iii).

(iv) được suy ra từ Định lý 2.4 (iv).

Ví dụ 2.2. Cho hai điểm $x = (2,3,-1,5)$, $y = (3, 2, 1, 4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Tính khoảng cách từ *x* đến gốc tọa độ O.

b) Tính khoảng cách từ *x* đến *y*.

Giải

a) $\|x\| = \sqrt{4+9+1+25} = \sqrt{39}$.

b) $\|x-y\| = \sqrt{(2-3)^2 + (3-2)^2 + (-1-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{7}$.

III. Hội tụ trong $\mathbb{R}^n$

Một ánh xạ

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^n \\ m &\mapsto x(m) = \left(x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)\right) \end{aligned}$$

được gọi là một dãy trong $\mathbb{R}^n$.

Ký hiệu $x_k(m)$ là tọa độ thứ *k* của $x(m)$, với $k = 1, 2, \dots, n$. Dãy $(x_k(m))_{m\in\mathbb{N}}$ được gọi là dãy thành phần của dãy $(x(m))$. Như vậy, một dãy trong $\mathbb{R}^n$ được xác định gồm *n* dãy số thực.

Dãy $(x(m))$ được gọi là *hội tụ* về $x \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : d(x(m), x) < \varepsilon, \forall m \geq m_0.$$

Khi đó, *x* được gọi là giới hạn của $(x(m))$ và ta ký hiệu là $\lim\limits_{m\to\infty} x(m) = x$ hay $x(m) \to x$ khi $m \to \infty$.

Dễ thấy $\lim\limits_{m\to\infty} x(m) = x \Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x\| = 0$. Hơn nữa, từ đẳng thức

$$\|x(m) - x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k(m) - x_k\right)^2,$$

với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta được

Mệnh đề 3.1. *Dãy $(x(m))$ trong $\mathbb{R}^n$ hội tụ nếu và chỉ nếu tất cả các dãy thành phần $(x_k(m))_{m\in\mathbb{N}}$ đều hội tụ. Khi đó*

$$\lim_{m\to\infty} x(m) = x \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_k(m) = x_k, \ \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Ví dụ 3.1. Trong $\mathbb{R}^2$, khảo sát sự hội tụ của các dãy sau

a) $x(m) = \left(\dfrac{-1}{m}, \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \right)$. b) $y(m) = \left(2^m, \dfrac{1}{2^m} \right)$.

Giải

a) Vì $\dfrac{-1}{m} \to 0$ và $\dfrac{m^2-1}{m^2+1} \to 1$ khi $m \to \infty$ nên $x(m) \to (0,1)$ khi $m \to \infty$.

b) Vì dãy 2^m là dãy phân kỳ nên dãy $y(m)$ phân kỳ.

Chú ý rằng, để đơn giản ký hiệu, ta có thể viết dãy (x_m) thay cho $(x(m))$ khi không gây nhầm lẫn.

IV. Tôpô trong $\mathbb{R}^n$

4.1. Quả cầu. Với điểm $x \in \mathbb{R}^n$ và một số thực $r > 0$, ta có

(i) Quả cầu mở: $B(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \|y - x\| < r \right\}$;

(ii) Quả cầu đóng: $B'(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \|y - x\| \le r \right\}$;

(iii) Mặt cầu: $S(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \|y - x\| = r \right\}$.

Ví dụ 4.1. Trong $\mathbb{R}^2$, mặt cầu tâm *I*, bán kính *r* là đường tròn tâm *I*, bán kính *r*; quả cầu mở tâm *I* bán kính *r* là tất cả những điểm nằm trong đường tròn tâm *I*, bán kính *r*; quả cầu đóng tâm *I* bán kính *r* là hình tròn tâm *I*, bán kính *r*.

4.2. Lân cận trong $\mathbb{R}^n$. Cho $x_o \in \mathbb{R}^n$, lân cận của điểm x_0 là tập tất cả các điểm thuộc quả cầu mở tâm x_0, bán kính nhỏ tùy ý

$$B(x_0,\varepsilon) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \|y - x_0\| < \varepsilon \right\}.$$

4.3. Các loại điểm của một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Xét điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó

(i) Điểm x_0 được gọi là *điểm trong* của *A* nếu

$$\exists r > 0 : B(x_0, r) \subset A;$$

(ii) Điểm x_0 được gọi là *điểm dính* của A nếu

$$\forall r > 0:\ B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing;$$

(iii) Điểm x_0 được gọi là *điểm tụ* của A nếu

$$\forall r > 0:\ (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing;$$

(iv) Điểm x_0 được gọi là *điểm biên* của A nếu x_0 là điểm dính của A và là điểm dính của $\mathbb{R}^n \setminus A$, nghĩa là

$$\forall r > 0:\ B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing \text{ và } B(x_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing.$$

Tập hợp tất cả các điểm biên của A ký hiệu là ∂A và gọi là biên của tập A.

Ví dụ 4.2. Trong $\mathbb{R}$, cho $A = (0,1] \cup \{2\}$. Tìm điểm trong, điểm dính, điểm tụ, điểm biên của A.

Giải

(i) Tập hợp các điểm trong của A là $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

(ii) Tập hợp các điểm dính của A là $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{2\}$.

(iii) Tập hợp các điểm tụ của A là $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

(iv) Tập hợp các điểm biên của A là $\{0, 1, 2\}$.

Chứng minh

(i) $x_0 \in \mathbb{R}$ thỏa $0 < x_0 < 1$ là điểm trong của A. Thật vậy, chọn $r = \min\{x_0, 1 - x_0\}$, ta dễ dàng chứng minh được $B(x_0, r) \subset A$.

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ không là điểm trong của A vì $\forall r > 0$, $B(x_0, r) \not\subset A$.

1 không là điểm trong của A vì $\forall r > 0$, $B(1, r) \not\subset A$.

Tương tự, ta có 2 không là điểm trong của A.

Chứng minh (ii), (iii), (iv) xem như bài tập.

Nhận xét 4.1

(i) Điểm tụ của A thì không nhất thiết phải thuộc A.

(ii) Điểm trong của A thì phải thuộc A. Chiều ngược lại, nói chung không đúng.

(iii) Điểm biên của *A* thì có thể thuộc *A* hoặc không thuộc *A*.

(iv) Nếu x_0 là điểm tụ của *A* thì x_0 là điểm dính của *A*. Chiều ngược lại, nói chung không đúng.

4.4. Tập mở, tập đóng, tập bị chặn trong $\mathbb{R}^n$

Cho $A \subset \mathbb{R}^n$. Ta nói

(i) *A* là một *tập mở* trong $\mathbb{R}^n$ nếu mọi điểm của *A* đều là điểm trong, nghĩa là

$$\forall x \in A, \exists r > 0: B(x,r) \subset A;$$

(ii) *A* là một *tập đóng* trong $\mathbb{R}^n$ nếu mọi điểm dính của *A* đều thuộc *A*;

(iii) *A* là một *tập bị chặn* nếu nó chứa trong một quả cầu, nghĩa là

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0 : A \subset B(x,r).$$

Ví dụ 4.3. Trong $\mathbb{R}$, (a,b) là tập mở, tập bị chặn, không là tập đóng; $(-\infty,a)$, $(b,+\infty)$ là tập mở; $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $[b,+\infty)$ là tập đóng.

Trong $\mathbb{R}^2$, hình tròn mở, hình vuông mở (không kể biên) là những tập mở; tập $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$ là tập đóng; tập $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < 1,\ 2 \le y < 3\}$ là tập không đóng cũng không mở.

Mệnh đề 4.2. *$A \subset \mathbb{R}^n$ là tập đóng nếu và chỉ nếu $\mathbb{R}^n \setminus A$ là tập mở.*

Chứng minh

Chiều $/\Rightarrow/$. Giả sử $\mathbb{R}^n \setminus A$ không mở nên $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ và $\forall r > 0$, $B(x,r) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Ta suy ra $B(x,r) \cap A \ne \varnothing\ \ \forall r > 0$.

Vậy *x* là điểm dính của *A*. Vì *A* đóng nên $x \in A$, vô lý.

Chiều $/\Leftarrow/$. Giả sử *A* không đóng nên $\exists x$ là điểm dính của *A* nhưng $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Vì $\mathbb{R}^n \setminus A$ mở nên $\exists r > 0$: $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Suy ra, $A \cap B(x,r) = \varnothing$. Vậy *x* không là điểm dính, vô lý. ■

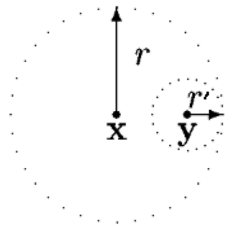
Ví dụ 4.4. Trong $\mathbb{R}^n$, chứng minh

(i) Quả cầu mở là tập mở.

(ii) Quả cầu đóng là tập đóng.

Giải

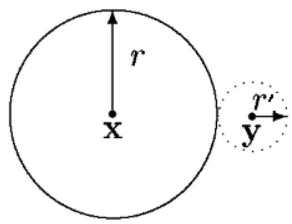
(i)



$B(\mathbf{x}, r)$

Lấy $y \in B(x,r)$, chọn $r' = r - d(x,y) > 0$. Khi đó $B(y,r') \subset B(x,r)$.

(ii)



$B'(\mathbf{x}, r)$

Ta chứng minh $\mathbb{R}^n \setminus B'(x,r)$ là tập mở. Lấy $y \in \mathbb{R}^n \setminus B'(x,r)$, chọn $r' = d(x,y) - r > 0$. Khi đó, $B(y,r') \subset \mathbb{R}^n \setminus B'(x,r)$.

Mệnh đề 4.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ *là tập đóng* $\Leftrightarrow \left(\forall (x(m)) \subset A, x(m) \to x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \in A\right)$.

Ví dụ 4.5. Cho $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$.

a) Tìm các điểm trong, điểm biên của *A*.

b) *A* có là tập đóng không?

Giải

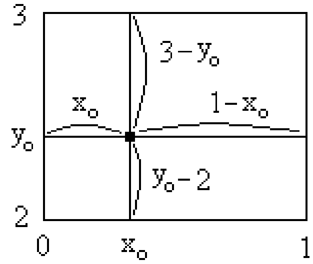
a) Tập hợp các điểm trong của *A* là

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 2 < y < 3\}.$$

Tập hợp các điểm biên của *A* là

$$\{(x,2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,3) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\}$$
$$\cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le y \le 3\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le y \le 3\}.$$

Chứng minh $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ thỏa $0 < x_0 < 1$ và $2 < y_0 < 3$ là điểm trong của *A*.



Chọn $r = \min\{x_0, 1 - x_0, 3 - y_0, y_0 - 2\} > 0$. Ta chứng minh $B(z_0, r) \subset A$. Lấy $w = (x, y) \in B(z_o, r)$, suy ra

$$\begin{cases} x_0 - r < x < r + x_0, \\ y_0 - r < y < r + y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vì $r = \min\{x_0, 1 - x_0, 3 - y_0, y_0 - 2\}$ nên $\begin{cases} 0 \le x_0 - r, \\ r + x_0 \le 1, \\ 2 \le y_0 - r, \\ r + y_0 \le 3. \end{cases}$ (1.2)

Từ (1.1) và (1.2), suy ra $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 < y < 3. \end{cases}$ Do đó $w \in A$. Vậy, $B(z_0, r) \subset A$.

Chứng minh $z_0 \notin A$ không là điểm trong của *A*. Thật vậy, vì $z_0 \notin A$ nên $\forall r > 0$: $B(z_0, r) \not\subset A$.

Chứng minh $z_0 = (x_0, y_0)$ là điểm nằm trên 4 cạnh hình vuông không là điểm trong của *A*. Không mất tính tổng quát, ta xét $z_0 = (x_0, 3)$ thỏa $0 \le x_0 \le 1$.

$\forall r > 0$, ta có điểm $w = \left(x_0, 3 + \dfrac{r}{2}\right) \in B(z_0, r)$ nhưng $w \notin A$, suy ra $\forall r > 0$, $B(z_0, r) \not\subset A$. Vậy, $z_0 = (x_0, 3)$ thỏa $0 \le x_0 \le 1$ không là điểm trong của *A*.

Chứng minh $z_0 = (x_0, y_0)$ là điểm nằm trên 4 cạnh hình vuông không là điểm biên của *A*. Không mất tính tổng quát, ta xét $z_0 = (x_0, 2)$ thỏa $0 \le x_0 \le 1$.

$\forall r > 0$, ta có $B(z_0, r) \cap A \ne \varnothing$ do $z_0 \in B(z_0, r) \cap A$.

Lại có $w = \left(x_0, 2 - \dfrac{r}{2}\right) \in B(z_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ nên $B(z_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing$.

Vậy, $z_0 = (x_0, 2)$ thỏa $0 \le x_0 \le 1$ là điểm biên của *A*.

b) Lấy dãy $((x_m, y_m)) \subset A$, $(x_m, y_m) \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Suy ra $\begin{cases} x_m \to x, \\ y_m \to y \end{cases}$ mà $\begin{cases} 0 \le x_m \le 1, \\ 2 \le y_m \le 3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 2 \le y \le 3. \end{cases}$ Do đó, $(x, y) \in A$. Vậy, *A* là tập đóng.

4.6. Tập liên thông. Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *liên thông* nếu $\forall x, y \in A$, có thể nối với nhau bằng một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong *A*.

Ví dụ 4.3. Trong $\mathbb{R}$, mọi khoảng, đoạn, nửa khoảng là những tập liên thông. Nói riêng, $\mathbb{R}$ là tập liên thông. Trong $\mathbb{R}^2$, hình ellip, hình tròn, các đa giác lồi hoặc lõm, nửa mặt phẳng là những tập liên thông. Trong $\mathbb{R}^3$, hình cầu, khối đa diện là những tập liên thông.

4.7. Tập compăc. Tập đóng và bị chặn được được gọi là tập compăc.

§2. HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

I. Định nghĩa

Một hàm *n* biến là một quy tắc đặt tương ứng mỗi bộ *n* số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với một số thực duy nhất, ký hiệu là $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Hay nói cách khác, ánh xạ

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

được gọi là hàm *n* biến xác định trên *D*.

Tập hợp *D* gọi là *miền xác định* của hàm số *f*, nghĩa là tập các điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho biểu thức $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có nghĩa. *Miền giá trị* của f là tập các giá trị mà f nhận được, nghĩa là

$$\left\{ f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R} \middle| (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \right\}.$$

Trường hợp $n = 2$, ta có hàm *hai biến*, thường ký hiệu là $z = f(x, y)$.

Trường hợp $n = 3$, ta có hàm *ba biến*, thường ký hiệu là $u = f(x, y, z)$.

Ví dụ 1.1. Cho hàm $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.

a) Tính $f(1,1)$, $f(e,1)$.

b) Tìm và vẽ miền xác định của *f*.

c) Tìm miền giá trị của *f*.

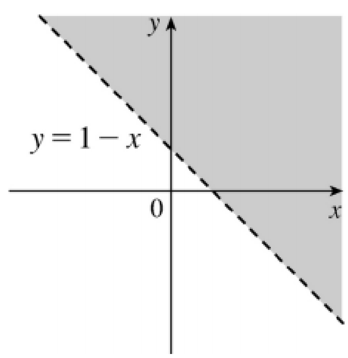
Giải

a) $f(1,1) = \ln(1+1-1) = \ln 1 = 0$.

$f(e,1) = \ln(e+1-1) = \ln e = 1$.

b) f xác định $\Leftrightarrow x + y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1 - x$.

Miền xác định $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1 - x\right\}$. *D* là tập hợp những điểm nằm phía trên đường thẳng $y = 1 - x$.



c) Miền giá trị: $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.2. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$.

b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

c) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$.

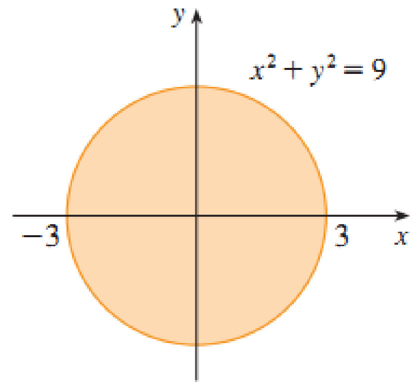
d) $f(x, y) = y \ln(x^2 - y)$.

Giải

a) Miền xác định $D = \mathbb{R}^2$.

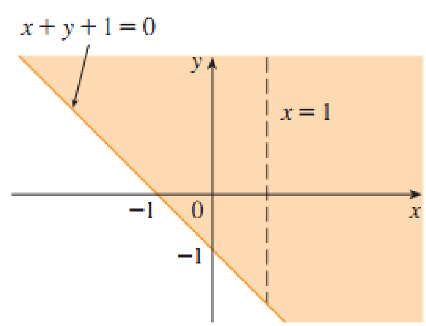
b) f xác định $\Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$.

Miền xác định $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. D là tập hợp những điểm nằm trong hay nằm trên đường tròn tâm (0,0) bán kính 3.



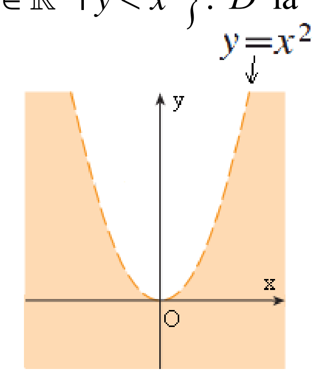
c) f xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 \geq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Miền xác định $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0,\ x \neq 1\}$. D là tập hợp những điểm nằm phía trên hay thuộc đường thẳng $y = -x - 1$, bỏ đi những điểm thuộc đường thẳng $x = 1$.



d) f xác định $\Leftrightarrow x^2 - y > 0 \Leftrightarrow y < x^2$.

Miền xác định $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$. D là tập hợp những điểm nằm phía dưới của parabol $y = x^2$.



Ví dụ 1.3. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x,y,z) = 3zx^2 - e^y$.

b) $f(x,y,z) = \ln(z-y) + xy\sin z$.

c) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.

Giải

a) Miền xác định $D = \mathbb{R}^3$.

b) f xác định $\Leftrightarrow z - y > 0 \Leftrightarrow z > y$.

Miền xác định $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\right\}$. D là tập hợp những điểm nằm phía trên của mặt phẳng $z = y$.

c) f xác định $\Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

Miền xác định $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$. D là hình cầu mở (không kể biên) tâm O bán kính 1.

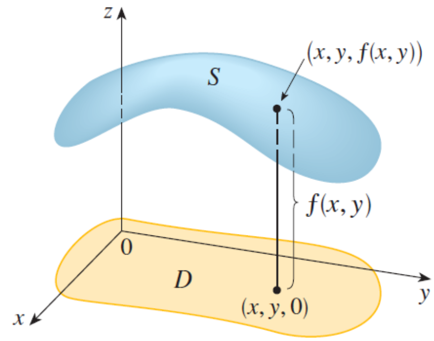
II. Đồ thị của hàm nhiều biến

Đồ thị của hàm số n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định trên D là tập

$$G_f = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n, u) \middle| u = f(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_n) \in D\right\}.$$

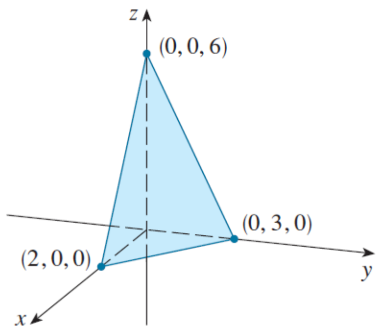
Trong trường hợp $n = 1$, đồ thị của hàm f được biểu diễn tường minh trên mặt phẳng và đã được nghiên cứu kỹ trong giải tích hàm một biến.

Trong trường hợp $n = 2$, đồ thị của hàm hai biến $f(x,y)$ xác định trên D là tập hợp tất cả các điểm $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x,y)$ và $(x,y) \in D$. Do đó, việc nghiên cứu đồ thị của hàm f sẽ gặp khó khăn hơn vì không dễ biểu diễn vật thể ba chiều trên mặt phẳng. Khi đó, ta có thể dựa vào sự trợ giúp của máy tính để nhận được đồ thị của hàm hai biến trong không gian ba chiều một cách nhanh chóng.

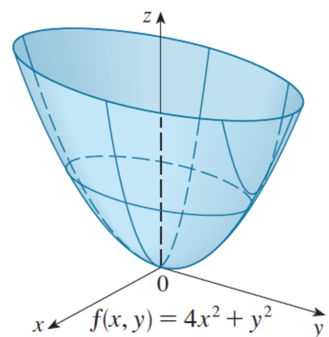


Đối với trường hợp $n \geq 3$, ta không có phương pháp nào để vẽ đồ thị một cách trực tiếp.

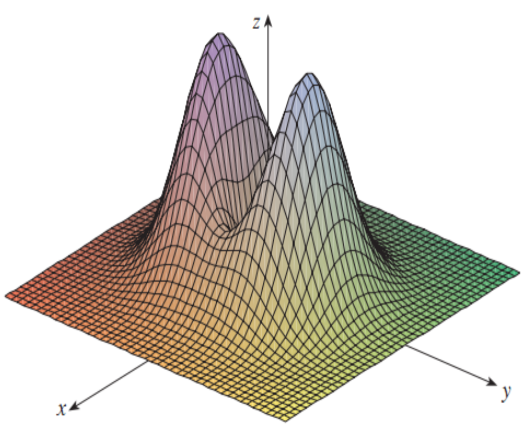
Ví dụ 2.1. Đồ thị của một số hàm hai biến



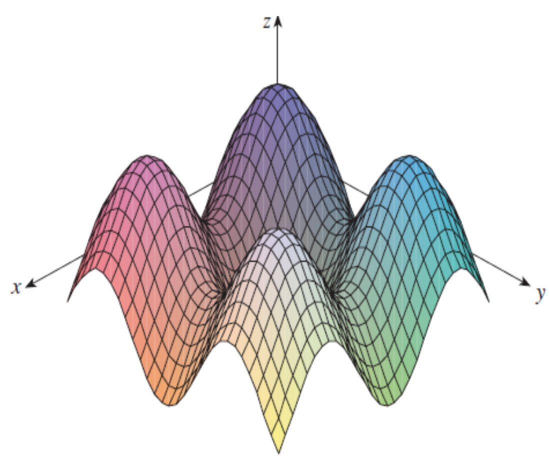
$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$



$f(x, y) = 4x^2 + y^2$



$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



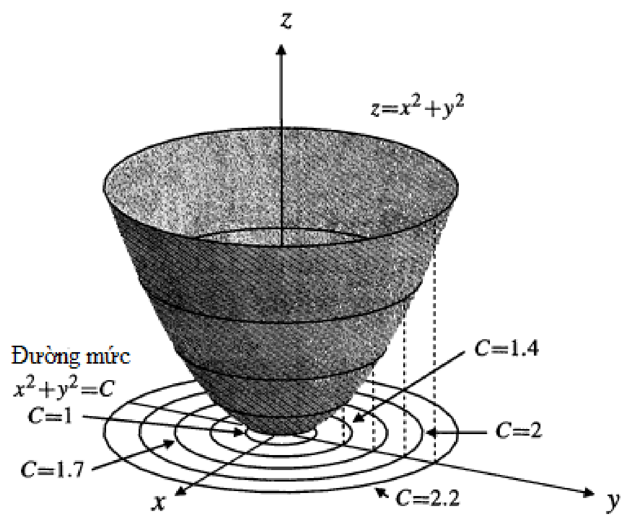
$f(x, y) = \sin x + \sin y$

III. Đường mức của hàm hai biến

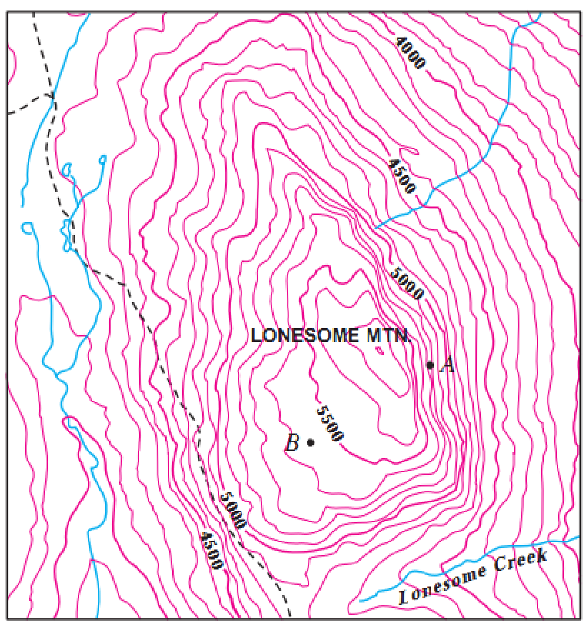
Đường mức của hàm hai biến $z = f(x,y)$ là những đường cong trong mặt phẳng Oxy có phương trình $f(x, y) = C$, với C là một hằng số (thuộc miền giá trị của f). Nói cách khác, khi ta lấy mặt phẳng $z = C$ song song với mặt phẳng Oxy cắt đồ thị hàm số *f*, ta được một vết, sau đó chiếu vuông góc vết này lên mặt phẳng O*xy* cho ta một đường mức. Đường mức này cho biết cao độ của mặt $z = C$.

Trong áp dụng thực tế, các bản đồ địa lý và khí tượng thường ở dạng tập các đường mức.

Ví dụ 3.1. Đồ thị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ và các đường mức $x^2 + y^2 = C$ là họ các đường tròn tâm O(0,0), bán kính *C*.



Ví dụ 3.2



Bản đồ địa hình của vùng núi, những đường mức là những đường cong chỉ độ cao so với mực nước biển.

§3. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

I. Giới hạn hàm hai biến

Định nghĩa 1.1. Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là điểm tụ của *D*. Ta nói hàm $z = f(x,y)$ có giới hạn là L khi (x,y) tiến về (x_0, y_0) nếu

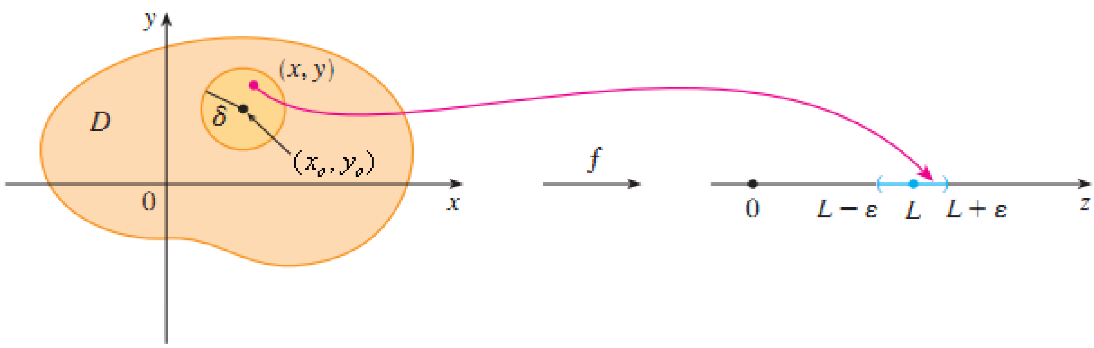
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D,\ 0 < \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Chú ý 1.2

(i) $\left|f(x,y) - L\right|$ là khoảng cách từ số $f(x,y)$ đến số *L*;

(ii) $\left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\|$ là khoảng cách từ điểm (x,y) đến điểm (x_0,y_0);

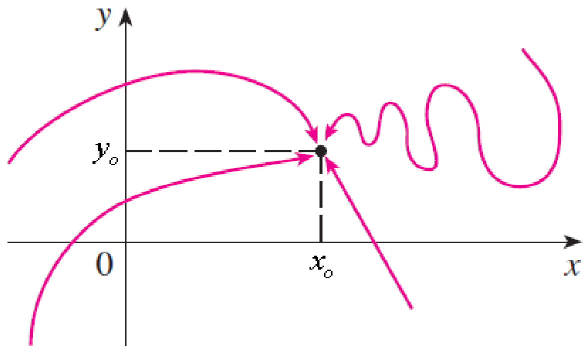


(iii) Giới hạn của $f(x,y)$ (nếu có) thì duy nhất;

(iv) Giới hạn *L* của hàm số $f(x,y)$ khi $(x,y) \to (x_0,y_0)$ không phụ thuộc đường đi của (x,y) tiến đến (x_0,y_0). Vì vậy, nếu chỉ ra hai đường đi của (x,y) tiến đến (x_0,y_0) mà $f(x,y)$ tiến đến hai giá trị khác nhau thì hàm số không có giới hạn tại (x_0,y_0), nghĩa là nếu ta chỉ ra được hai đường C_1 và C_2 sao cho

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)\text{theo } C_1} f(x,y) = L_1 \text{ và } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)\text{theo } C_2} f(x,y) = L_2$$

trong đó $L_1 \neq L_2$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại.



Điểm tiến đến (x_0, y_0) *theo những đường khác nhau.*

Ví dụ 1.1. Dùng định nghĩa 1.1, chứng minh rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Giải

Cho $\varepsilon > 0$, cần tìm $\delta > 0$ sao cho nếu $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ thì $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$,

nghĩa là tìm $\delta > 0$ sao cho

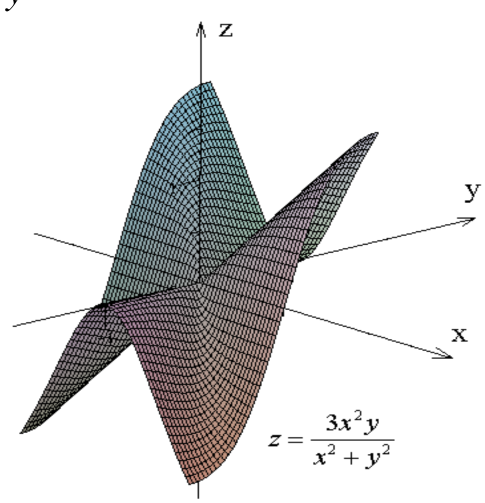
$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon .$$

Ta có

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le 3|y| = 3\sqrt{y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta .$$

Chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ thì $\dfrac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon$.

Vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.



Ví dụ 1.2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Giải

Ta có

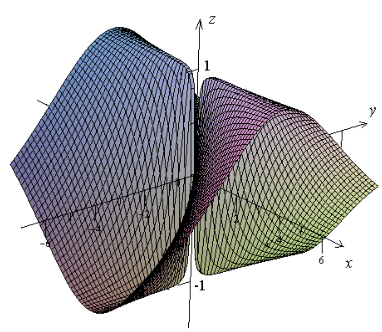
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

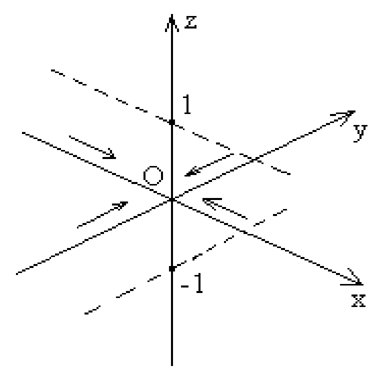
suy ra

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.



$$z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$



Định nghĩa 1.3. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$ xác định trên D và (x_0,y_0) là điểm tụ của D. Ta nói

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

khi và chỉ khi với mọi dãy $((x_n,y_n)) \subset D \setminus \{(x_0,y_0)\}$, $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$, ta có

$$f(x_n,y_n) \to L.$$

Chú ý 1.4

(i) Dựa vào định nghĩa trên, để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại, ta chỉ ra hai dãy $u_n = (x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$, $v_n = (x'_n,y'_n) \to (x_0,y_0)$ nhưng $f(u_n)$, $f(v_n)$ không hội tụ về cùng một số;

(ii) Định nghĩa giới hạn vô hạn tương tự như với hàm một biến.

Ví dụ 1.3. Dùng định nghĩa 1.3, chứng minh rằng

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2} = -1.$$

Giải

Đặt $f(x,y) = \dfrac{x-1}{x^2+y^2}$.

Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

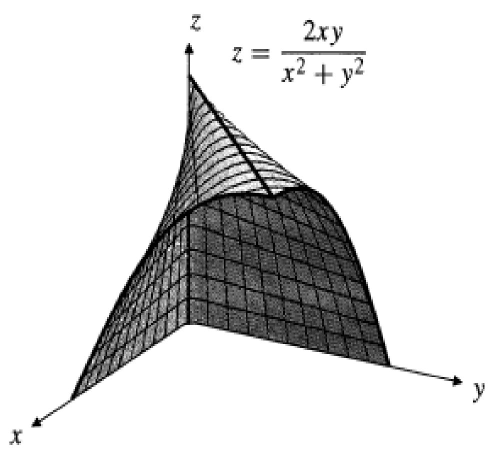
$\forall((x_n, y_n)) \subset D \setminus \{(0,1)\} : (x_n, y_n) \to (0,1)$, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n-1}{x_n^2+y_n^2} = \frac{-1}{0+1} = -1.$$

Ví dụ 1.4. Chứng minh rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Giải

Cách 1: Ta có



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } x=0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } y=x}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

suy ra $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } x=0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } y=x}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cách 2:

Đặt $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Lấy dãy $u_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$, ta có

$$f(u_n) = \frac{0}{0 + \frac{1}{n^2}} = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Lấy dãy $v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $v_n \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$ ta có

$$f(v_n) = \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1 \xrightarrow{n\to+\infty} 1.$$

Vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Định lý 1.5. *Cho* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2 \in \mathbb{R}$*, ta có*

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) = L_1 \pm L_2$;

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k.f(x,y) = k.L_1,\ k \in \mathbb{R}$;

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y).g(x,y)\right) = L_1.L_2$;

(iv) Nếu $L_2 \neq 0$ *thì ta có* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Định lý 1.6

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$;

(ii) Nếu $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y),\ \forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *và*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$$

thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Ví dụ 1.5. Tính

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2+y^2+1}{x+y}$. b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2+x^2+y^2}{2y}\sin y\right)$.

Giải

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2+y^2+1}{x+y} = \dfrac{1^2+2^2+1}{1+2} = 2$.

b) Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2+x^2+y^2}{2y}\sin y\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2+x^2+y^2}{2}\cdot\dfrac{\sin y}{y}\right)$,

mà

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2+x^2+y^2}{2}\right) = 1, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin y}{y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right) = 1,$$

do đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2+x^2+y^2}{2y}\sin y\right) = 1.1 = 1.$$

Ví dụ 1.6. Tính

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{e^{-x^2}+1}{y^2+z^2}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

Giải

a) Vì $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \le 1, \forall (x,y)\ne(0,0)$ nên

$$0 \le \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le |x|, \forall (x,y)\ne(0,0)$$

mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$ do đó $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = 0$.

Vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{e^{-x^2}+1}{y^2+z^2} = +\infty.$

c) Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\right).$

Lại có

$$0 \le \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}$$

mà $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$ nên $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left|\dfrac{x}{x^2+y^2}\right| = 0.$ Do đó

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x}{x^2+y^2} = 0.$$

Tương tự, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{y}{x^2+y^2} = 0.$

Vậy, $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0.$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 1+1 = 2.$

II. Tính liên tục của hàm hai biến

2.1. Liên tục tại một điểm

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ nếu thỏa mãn

(i) f xác định tại $(x_0, y_0) \in D$;

(ii) tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$;

(iii) $f(x_0, y_0) = L$.

Chúng ta cũng định nghĩa rằng hàm $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in D$, nếu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D, \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| < \varepsilon.$$

Nếu hàm số f không liên tục tại (x_0,y_0), ta nói f *gián đoạn* tại (x_0,y_0) và gọi (x_0,y_0) là *điểm gián đoạn* của *f*.

Mệnh đề 2.1. *Cho hai hàm $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục tại $(x_0,y_0) \in D$ và một số thực $k \in \mathbb{R}$ thì các hàm kf, $f+g$, $f-g$, $f.g$, cũng liên tục tại (x_0,y_0). Ngoài ra, khi $g(x_0,y_0) \neq 0, \forall (x_0,y_0) \in D$ thì hàm $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại (x_0,y_0).*

Mệnh đề 2.2. *Nếu $f: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to D_2 \subset \mathbb{R}$ liên tục tại $(x_0,y_0) \in D_1$ và $g: D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $f(x_0,y_0) \in D_2$ thì $g \circ f$ liên tục tại (x_0,y_0).*

Ví dụ 2.1. Hàm $f(x,y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2.2. Hàm $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$ vì f là hợp của hai hàm liên tục $g(t) = e^t$ và $h(x,y) = x^2 + y^2$.

Ví dụ 2.3. Hàm $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không liên tục tại (0,0) vì *f* không xác định tại (0,0). Vậy, *f* liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ví dụ 2.4. Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau tại (0,0)

a) $f(x,y) = \dfrac{1+xy}{2+y}$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Giải

a) Miền xác định $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq -2\right\}$.

$f(0,0)=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+xy}{2+y}=\dfrac{1+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}=f(0,0)$.

Vậy, f liên tục tại (0,0).

b) $f(0,0)=0$.

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$.

Vậy, f liên tục tại (0,0).

c) $f(0,0)=0$.

Xét $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$. Ta có

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } x=0}} \frac{2x^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^2}=\lim_{y\to 0} 0=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } y=x}} \frac{2x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0} 1=1,$$

suy ra $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } x=0}} \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{theo } y=x}} \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$.

Do đó, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Vậy, f không liên tục tại (0,0).

2.2. Liên tục trên một miền

Hàm số $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục trên D nếu nó liên tục tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$.

Ví dụ 2.5. Xét sự liên tục của các hàm số sau

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y & \text{nếu } (x,y) \neq (1,2), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (1,2). \end{cases}$

Giải

a) Tại $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{x_0^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0),$$

suy ra f liên tục tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vậy, f liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Tại (0,0), ta có

$f(0,0) = 0$.

Vì $\dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1, \forall (x,y) \neq (0,0)$ nên

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq |y|, \forall (x,y) \neq (0,0),$$

mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ nên $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left| \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = 0$, do đó $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$.

Suy ra f liên tục tại (0,0).

Vậy, f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) Tại $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2+2y) = x_0^2 + 2y_0 = f(x_0,y_0),$$

suy ra f liên tục tại mọi điểm $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$. Vậy, f liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$.

Tại (1,2), ta có

$f(1,2) = 0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y) = 5 \neq f(1,2).$

Suy ra f không liên tục tại (1,2).

Vậy, f liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$.

2.3. Hàm bị chặn: Hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là bị chặn trên *D* nếu

$$\exists M > 0, \forall (x,y) \in D, \left| f(x,y) \right| \leq M.$$

2.4. Tính chất hàm liên tục trên một miền

Nếu hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập *D* đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ thì *f* đạt được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên *D*, nghĩa là $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ sao cho

$$f(x_1, y_1) = m \leq f(x,y) \leq M = f(x_2, y_2), \forall (x,y) \in D.$$

2.5. Liên tục đều

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục đều trên *D* nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y),(x',y') \in D : \left\| (x,y) - (x',y') \right\| < \delta \Rightarrow \left| f(x,y) - f(x',y') \right| < \varepsilon.$$

Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên tập đóng và bị chặn trên *D* thì *f* liên tục đều trên *D*.

Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên tập liên thông *D* và có (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$ sao cho $f(x_1, y_1).f(x_2, y_2) < 0$ thì tồn tại $(x_0, y_0) \in D$ sao cho $f(x_0, y_0) = 0$.

Ví dụ 2.8. Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)=2x-3y+5$ liên tục đều trên $\mathbb{R}^2$.

Giải

Cho trước $\varepsilon>0$, chọn $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6}>0$, khi đó, $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$$\left\|(x,y)-(x',y')\right\|^2<\delta^2,$$

suy ra

$$\begin{cases}\left|x-x'\right|<\dfrac{\varepsilon}{6},\\ \left|y-y'\right|<\dfrac{\varepsilon}{6}.\end{cases}$$

Do đó $\left|f(x,y)-f(x',y')\right|\le 2\left|x-x'\right|+3\left|y-y'\right|<\varepsilon$.

Vậy, hàm số *f* liên tục đều trên $\mathbb{R}^2$.

III. Giới hạn và liên tục của hàm nhiều biến

Xét hàm số

$$f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto f(x)$$

f xác định trên *D* và $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ là điểm tụ của *D*. Ta nói hàm *f* có giới hạn là *L* khi *x* tiến về *a* nếu

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in D,0<\left\|x-a\right\|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-L\right|<\varepsilon.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

Hàm *f* được gọi là liên tục tại *a* nếu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, nghĩa là

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\ \forall x\in D,\left\|x-a\right\|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Trong $\mathbb{R}^2$, cho các vectơ $x=(1,1)$, $y=(-1,1)$, $z=(2,1)$. Tìm các số thực a, b sao cho $z=ax+by$.

Bài 2. Trong $\mathbb{R}^3$, cho $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, $z=(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2},\frac{x_3+y_3}{2})$.

Chứng minh rằng nếu $\|x\|=\|y\|=1$ thì $\|z\|\le 1$.

Bài 3. Cho x, y là hai vectơ trong $\mathbb{R}^n$, chứng minh

a) Nếu $\langle x,y\rangle=0$ thì $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

b) $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle$.

c) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

d) $\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|$.

Bài 4. Hãy vẽ hình minh họa các tập hợp sau trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2\le 4\}$.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\le 4,\ 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4\}$.

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x^4\}$.

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 4\}$.

f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -4\le x\le 4,\ -x^2\le y\le x^2\}$.

g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le y\le 2\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\ge x^2\}$.

h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1,\ x\ge 0\}$.

i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le x^2\}$.

Bài 5. Tìm các điểm trong, điểm biên và xét xem các tập hợp được cho có là tập đóng hay không

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x < 4,\, 1 < y < 3\}$.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x^2 \le 5\}$.

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\, y = 0\}$.

Bài 6. Cho $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$.

a) Tính $f(-2,3)$.

b) Tính $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{y}\right)$.

c) Tính $\dfrac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k}$.

Bài 7. Tìm và vẽ miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

c) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$.

d) $f(x,y) = \ln xy$.

e) $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{2x^2 - 1}$.

f) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

g) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$.

h) $f(x,y) = \dfrac{3x+5y}{x^2+y^2-4}$.

i) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\,\ln(y+x)$.

j) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.

k) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}\,\ln(4 - x^2 - y^2)$.

l) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$.

m) $f(x,y) = \ln\left[(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\right]$.

Bài 8. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

b) $f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x+y}}{xz^2}$.

c) $f(x,y,z)=\sqrt{36-4x^2-9y^2-z^2}$.

d) $f(x,y,z)=\ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$.

Bài 9. Cho $f(x,y)=x^2e^{3xy}$.

a) Tìm miền xác định của f.

b) Tính $f(2,0)$.

c) Tìm miền giá trị của f.

Bài 10. Cho $f(x,y,z)=e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.

a) Tìm miền xác định của f.

b) Tính $f(2,-1,6)$.

c) Tìm miền giá trị của f.

Bài 11. Cho $f(x,y,z)=\ln(25-x^2-y^2-z^2)$.

a) Tìm miền xác định của f.

b) Tính $f(2,-2,4)$.

c) Tìm miền giá trị của f.

Bài 12. Cho hàm $f(x,y)=e^x\cos y$, $g(x,y)=e^x\sin y$. Chứng minh rằng

a) $f(x,y).f(x,y)-g(x,y).g(x,y)=f(2x,2y)$.

b) $2f(x,y).g(x,y)=g(2x,2y)$.

Bài 13. Bằng định nghĩa $\varepsilon-\delta$, chứng minh

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2+3)=3$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(2x^2-6xy+5y^2)=0$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left((x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right)=0$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y}{x^4+1}=0$.

Bài 14. Xét sự tồn tại giới hạn các hàm số sau tại điểm (0,0)

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

b) $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

c) $f(x,y)=\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y)=x\arctan\dfrac{y}{x}$.

e) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$.

f) $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

g) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

h) $f(x,y)=\dfrac{(x^2-y^4)^2}{(x^2+y^4)^2}$.

i) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$.

j) $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x^2+y^2}$.

k) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^4)+\sin(y^4)}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

l) $f(x,y)=\dfrac{\sin x-y}{x-\sin y}$.

m) $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

n) $f(x,y)=\dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$.

Bài 15. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{y}{x+y-1}$.

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{(x-1)^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$.

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+xy)^{\frac{1}{x^2+xy}}$.

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2-2xy}{y-2x}$.

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$.

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$.

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$.

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+x-y^2+y}{x+y}$.

n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cosh(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2}$.

p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2-\sqrt{4+xy^2}}$.

q) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$.

r) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

s) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2(1-\cos(xy))}{y^2}$.

t) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)^2}$.

u) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} x^y$.

v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

Bài 16. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

Bài 17. Xét sự liên tục của các hàm số sau

a) $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$.

b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2+y^2}$.

c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0. \end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0. \end{cases}$

Bài 18. Cho

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0), \\ a & \text{nếu } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Định a để f liên tục tại (0,0).

Bài 19. Cho

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0), \\ a & \text{nếu } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Định a để f liên tục tại (0,0).

Bài 20. Khảo sát tính liên tục đều của hàm $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ trên $\mathbb{R}^2$.

Bài 21. Hàm $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2}$ có liên tục đều trong miền $x^2+y^2<1$ không?

Bài 22. Cho hàm số $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

a) Hàm số f có liên tục trong miền xác định D của nó không?

b) Hàm số f có liên tục đều trong miền xác định D của nó không?

Bài 23. Cho

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} & \text{nếu } y\neq 0,\\ 0 & \text{nếu } y=0.\end{cases}$$

Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm số f không phải là tập đóng.

Bài 24. Chứng minh rằng, nếu trong một miền D nào đó hàm $f(x,y)$ liên tục theo biến x và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y, tức là

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\leq L\left|y_1-y_2\right|,$$

trong đó $(x,y_1),(x,y_2)\in D$ và L là hằng số dương, thì hàm số liên tục trong miền đã cho.

Bài 25. Giả sử hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| a\leq x\leq A,\ b\leq y\leq B\right\},$$

còn dãy hàm $\varphi_n(x),\ n=1,2,...$ hội tụ đều trên $\left[a,A\right]$ và thỏa mãn điều kiện $b\leq\varphi_n(x)\leq B,\ n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy hàm

$$F_n(x)=f(x,\varphi_n(x)),n=1,2,...$$

cũng hội tụ đều trên đoạn $\left[a,A\right]$.

Bài 26. Giả sử rằng

i) hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| a<x<A,\ b<y<B\right\};$$

ii) hàm $\varphi(x)$ liên tục trong khoảng (a,A) và có các giá trị thuộc khoảng (b,B).

Chứng minh rằng hàm $F(x)=f(x,\varphi(x))$ liên tục trong khoảng (a,A).

Bài 27. Giả sử rằng

i) hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| a<x<A,\ b<y<B\right\};$$

ii) hàm $x=\varphi(u,v)$ và $y=\psi(u,v)$ liên tục trong miền

$$D' = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| a' < u < A', b' < v < B' \right\}$$

và có giá trị tương ứng thuộc khoảng (a,A) và (b,B).

Chứng minh rằng hàm $F(u,v) = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ liên tục trong miền D'.

Chương 2

SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Nội dung của chương này trình bày về đạo hàm riêng, vi phân toàn phần, đạo hàm riêng và vi phân cấp cao, công thức Taylor của hàm nhiều biến số.

§1. ĐẠO HÀM RIÊNG

Trong suốt phần này, miền xác định $D \subset \mathbb{R}^n$ của hàm nhiều biến được giả định là miền mở, nghĩa là mọi điểm $x \in D$ đều là điểm trong của D.

I. Đạo hàm riêng

Định nghĩa 1.1. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$. Nếu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2 ..., x_n)}{h}$$

tồn tại hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm riêng cấp một theo biến thứ* i của f tại x, ký hiệu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ hay $f_{x_i}(x)$. Trong một số tài liệu ta còn thấy có ký hiệu $D_1 f(x), f'_{x_i}(x), f'_i(x)$.

Trường hợp hàm 2 biến $z = f(x, y)$ thì các đạo hàm riêng cấp 1 tại điểm (x, y) là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Chú ý 1.2. Từ định nghĩa trên, ta thấy:

Để tìm $\frac{\partial f}{\partial x}$, ta lấy đạo hàm theo biến x và xem y như là hằng số.

Để tìm $\frac{\partial f}{\partial y}$, ta lấy đạo hàm theo biến y và xem x như là hằng số.

Trường hợp hàm 3 biến $u = f(x,y,z)$ thì các đạo hàm riêng cấp 1 tại điểm (x,y,z) là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k,z)-f(x,y,z)}{k},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{l\to 0}\frac{f(x,y,z+l)-f(x,y,z)}{l}.$$

Chú ý 1.3. Từ định nghĩa trên, ta thấy:

Để tìm $\frac{\partial f}{\partial x}$, ta lấy đạo hàm theo biến x và xem y, z là hằng số.

Để tìm $\frac{\partial f}{\partial y}$, ta lấy đạo hàm theo biến y và xem x, z là hằng số.

Để tìm $\frac{\partial f}{\partial z}$, ta lấy đạo hàm theo biến z và xem x, y là hằng số.

Ví dụ 1.1. Dùng định nghĩa, tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$.

b) $f(x,y) = \sqrt{3x-y}$.

Giải

a) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in D$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x+h)y+2y^2-(x^2-xy+2y^2)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x-y+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x-y+h) = 2x-y,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{x^2-x(y+k)+2(y+k)^2-(x^2-xy+2y^2)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k(4y-x+2k)}{k}=\lim_{k\to 0}(4y-x+2k)=4y-x.$$

b) Miền xác định: $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 3x-y\geq 0\right\}$.

$\forall(x,y)\in\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 3x-y>0\right\}$, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-y}-\sqrt{3x-y}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3(x+h)-y}+\sqrt{3x-y}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{3x-(y+k)}-\sqrt{3x-y}}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{-1}{\sqrt{3x-(y+k)}+\sqrt{3x-y}}=\frac{-1}{2\sqrt{3x-y}}.$$

Ví dụ 1.2. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x^3y^2+x^4y+y^4$.

b) $f(x,y,z)=xy^2z^5+y^3+4y^5z^4+6x^6z$.

c) $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$.

d) $f(x,y,z)=e^{xy}\ln z$.

Giải

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2+4x^3y$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^3y+x^4+4y^3$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2z^5 + 36x^5z$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^5 + 3y^2 + 20y^4z^4$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 5xy^2z^4 + 16y^5z^3 + 6x^6$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right).\left(\dfrac{x}{1+y}\right)'_x = \left(\dfrac{1}{1+y}\right)\cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, $(y \neq -1)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right).\left(\dfrac{x}{1+y}\right)'_y = \dfrac{-x}{(1+y)^2}\cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, $(y \neq -1)$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}\ln z$, $(z > 0)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\ln z$, $(z > 0)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{e^{xy}}{z}$, $(z > 0)$.

Ví dụ 1.3. Cho $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2xy\cos(xy) + \sin(xy)$. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Giải

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} + 2y\cos(xy) - 2xy^2\sin(xy) + y\cos(xy)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + 2x\cos(xy) - 2x^2y\sin(xy) + x\cos(xy)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 + \pi\cos 0 - 0 + \dfrac{\pi}{2}\cos 0 = \pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0+\pi\cos 0-0+\frac{\pi}{2}\cos 0=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

Ví dụ 1.4. Cho

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

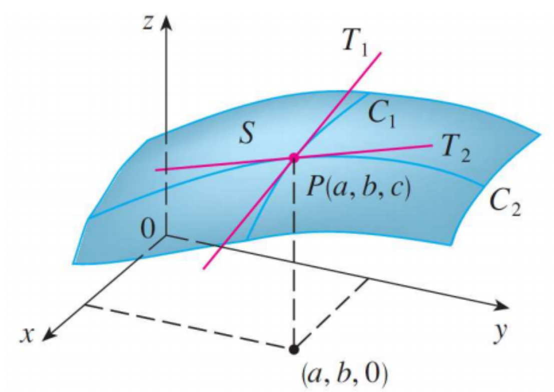
Giải

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0.$$

Chú ý rằng, trong ví dụ 1.4, hàm f có cả hai đạo hàm riêng cấp 1 theo hai biến x, y tại (0,0) nhưng nó không liên tục tại (0,0).

II. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng



Gọi S là đồ thị của hàm số $z=f(x,y)$.

C_1 là giao tuyến của S và mặt phẳng $y=b$. C_1 chính là đồ thị của hàm số một biến số $f(x,b)$.

C_2 là giao tuyến của S và mặt phẳng $x=a$. C_2 chính là đồ thị của hàm số một biến số $f(a,y)$.

Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 của C_1 tại điểm $P(a,b,c)$. Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ cũng biểu diễn vận tốc biến thiên của hàm số $f(x,y)$ theo hướng x tại (a,b).

Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_2 của C_2 tại điểm $P(a,b,c)$. Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ cũng biểu diễn vận tốc biến thiên của hàm số $f(x,y)$ theo hướng y tại (a,b).

§2. SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN

I. Sự khả vi

1.1. Vectơ gradient

Cho $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, $\vec{e}_i$ là vectơ thứ i trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Nhắc lại rằng $\vec{e}_i$ là vectơ mà mọi thành phần đều bằng 0 trừ thành phần thứ i bằng 1. Khi f có đạo hàm riêng cấp một theo tất cả các biến tại x, *gradient* của f tại x, ký hiệu $\overrightarrow{grad} f(x)$ (hay vắn tắt là $\nabla f(x)$) là vectơ

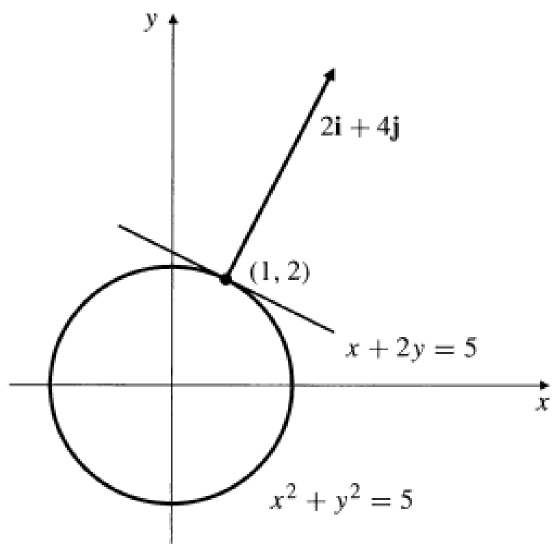
$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\vec{e}_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\vec{e}_n.$$

Ví dụ 1.1. Cho $f(x,y) = x^2 + y^2$, khi đó

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x, 2y\right) = 2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 = 2x(1,0) + 2y(0,1) \equiv 2x\vec{i} + 2y\vec{j},$$

trong đó $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$ là hai vectơ đơn vị tương ứng trên hai trục Ox và Oy.

Xét $\nabla f(1,2) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, đây là vectơ vuông góc với tiếp tuyến $x + 2y = 5$ của đường tròn $x^2 + y^2 = 5$ tại điểm (1,2). Đường tròn này là đường mức của f đi qua điểm (1,2).



Ví dụ 1.2. Cho $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$. Hãy tính $\nabla f(x,y), \nabla f(0,1)$.

Giải

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\cos x + ye^{xy}, xe^{xy}\right).$$

$$\nabla f(0,1) = \left(\cos 0 + e^0, 0.e^0\right) = \left(2,0\right).$$

Mệnh đề 1.1. *Cho* $f,g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *và điểm* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$. *Nếu* f,g *có đạo hàm riêng theo mọi biến tại* x *thì*

$$\nabla(f+g)(x) = \nabla f(x) + \nabla g(x),$$

$$\nabla(fg)(x) = g(x).\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x).$$

Hơn nữa, nếu $g(x) \neq 0$ *và hàm* $\frac{f}{g}$ *xác định trên một lân cận của* x, *thì nó có đạo hàm riêng theo mọi biến tại* x *và*

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}\left(g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)\right).$$

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ tính chất hàm một biến.

1.2. Sự khả vi của hàm nhiều biến

Ta nhắc lại sự khả vi của hàm một biến. Cho $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ và $x_0\in(a,b)$. Ta nói f *khả vi* tại x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

tồn tại hữu hạn. Khi đó $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ được gọi là đạo hàm của f tại x_0.

Trong định nghĩa trên, nếu đặt

$$h=\Delta x=x-x_0 \text{ và } \Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$$

thì ta có

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h},$$

trong đó

h: *số gia của biến số* tại điểm x_0,

Δy: *số gia của hàm số* ứng với số gia *h* tại điểm x_0.

Như vậy, f khả vi tại x_0 nếu nó có đạo hàm $f'(x_0)$ hữu hạn.

Bây giờ, nếu $f'(x_0)$ tồn tại hữu hạn, ta có

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left[\frac{\Delta y}{h}-f'(x_0)\right]=0$$

Đặt

$$\varepsilon(h)=\frac{\Delta y}{h}-f'(x_0)=\frac{\Delta y-h.f'(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h.f'(x_0)}{h}.$$

Khi đó, ta có định nghĩa khác về sự khả vi của hàm một biến như sau: f khả vi tại x_0 nếu

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h.f'(x_0)}{h}\to 0 \text{ khi } h\to 0.$$

Định nghĩa 1.2. Cho $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ và điểm $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in D$. Ta nói f *khả vi tại x* nếu tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ i=1,2,...,n$ và

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-h.\nabla f(x)}{\|h\|}\to 0 \text{ khi } h\to 0,$$

với $h=(h_1,h_2,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$, trong đó

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right),$$

$$\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2},$$

$\varepsilon(h)$: hàm n biến $h_1,h_2,...,h_n$.

Ví dụ 1.3. Hàm $f(x,y)=x+2y$ có khả vi tại (1,0) không?

Giải

Ta có

$f(1+h,0+k)=f(1+h,k)=1+h+2k,$

$f(1,0)=1,$

$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(1,2)$ suy ra $\nabla f(1,0)=(1,2)$.

Xét

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(1+h,k)-f(1,0)-\nabla f(1,0)(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

$$=\frac{1+h+2k-1-(h+2k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,$$

suy ra $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$

Vậy, f khả vi tại (1,0).

Ví dụ 1.4. Hàm $f(x,y)=x^3+xy^2$ có khả vi tại (0,0) không?

Giải

Ta có

$f(0+h,0+k)=f(h,k)=h^3+hk^2$,

$f(0,0)=0$,

$\nabla f(x,y)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=(3x^2+y^2,2xy)$ suy ra $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Xét

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|}=\frac{h^3+hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Dễ dàng chứng minh được $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$

Vậy, f khả vi tại (0,0).

Ví dụ 1.5. Xét sự khả vi tại (0,0) của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Giải

Ta có

$f(0+h,0+k)=f(h,k)=\dfrac{hk^2}{h^2+k^2}$,

$f(0,0)=0$,

$\nabla f(0,0)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0).$

Xét

$$\varepsilon(h,k)=\frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Dễ dàng chứng minh được $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)$ không tồn tại.

Vậy, f không khả vi tại điểm (0,0).

Ví dụ 1.6. Hàm $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ có đạo hàm riêng cấp một theo mọi biến tại (0,0) nhưng f không khả vi tại (0,0).

Mệnh đề 1.3. *Cho $f: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm riêng cấp một theo các biến tại điểm $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in D$. Nếu tất cả các đạo hàm riêng này đều liên tục tại x thì f khả vi tại x.*

Chứng minh. Để đơn giản ký hiệu, ta chứng minh cho trường hợp $n=2$. Trường hợp $n>2$ được chứng minh tương tự và dành cho độc giả.

Với $x=(x_1,x_2)\in D$ và với $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2) &= f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)\\ &\quad + f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vì f có đạo hàm riêng theo các biến trên D nên tồn tại $\theta_1, \theta_2\in(0,1)$ sao cho

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)=h_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,x_2+h_2)$$

và

$$f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)=h_2\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2+\theta_2 h_2).$$

Do đó, (2.1) được viết lại thành

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)=h_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+h_2\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)+\|(h_1,h_2)\|\varepsilon(h_1,h_2)$$

với

$$\varepsilon(h_1,h_2)=\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,x_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)$$

$$+\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2+\theta_2 h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right).$$

Từ tính liên tục của $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ và $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ tại điểm (x_1,x_2), ta suy ra

$$\left|\varepsilon(h_1,h_2)\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,x_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right|$$

$$+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2+\theta_2 h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right|\to 0$$

khi $\|(h_1,h_2)\|\to 0$ và mệnh đề được chứng minh. ■

Ví dụ 1.7. Trong ví dụ 1.3, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2$ trên $\mathbb{R}^2$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại (1,0). Vậy, f khả vi tại (1,0).

Ví dụ 1.8. Hàm

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

có khả vi tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$ không?

Giải

Tại $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Do đó

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x_0y_0^4}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o),$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x_0^4y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),$$

suy ra $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nên f khả vi tại mọi điểm trên $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Tại (0,0), ta dễ dàng chứng minh được

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

suy ra $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại (0,0) nên f khả vi tại (0,0).

Vậy, f khả vi tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$.

Định lý 1.4. *Nếu $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ khả vi tại $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ thì f liên tục tại x.*

Chứng minh. Do tính khả vi của f tại *x*, ta có với $y = x+h\in D$,

$$f(y)-f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1-x_1)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)(y_n-x_n)+\|y-x\|.\varepsilon(y-x),$$

trong đó $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ và $\lim_{y\to x}\varepsilon(y-x)=0$.

Đặt $M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^2}$. Bất đẳng thức

$$\|f(y)-f(x)\| \le \big(M+\varepsilon(y-x)\big)\|y-x\|$$

cho thấy $\lim_{y\to x} f(y)=f(x)$ và do đó, f liên tục tại *x*. ■

Ví dụ 1.9. Hàm

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

có khả vi tại (0,0) không?

Giải

Vì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại nên f không liên tục tại (0,0). Vậy, f không khả vi tại (0,0).

II. Vi phân hàm nhiều biến

2.1. Nhắc lại vi phân của hàm một biến

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đẳng thức trên cho thấy, nếu Δx đủ nhỏ thì tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rất gần với $f'(x_0)$, do đó ta có thể coi rằng $f'(x_0)\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, hay $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$. Khi đó, tích $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 và được ký hiệu là $df(x_0)$, tức là

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x.$$

Như vậy, nếu hàm số f có đạo hàm f' thì vi phân của hàm số $y=f(x)$ là $df(x)=f'(x)\Delta x$. Đặc biệt, với hàm số $y=x$, ta có

$$df(x)=f'(x)\Delta x=\Delta x,$$

suy ra $dx=\Delta x$. Do đó, $df(x)=f'(x)dx$ hay $dy=y'dx$.

2.2. Vi phân của hàm nhiều biến

Nếu $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ khả vi tại điểm $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$ thì vi phân cấp 1 (*vi phân toàn phần*) của f tại x là

$$df(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n.$$

Cụ thể, vi phân cấp 1 của hàm 2 biến $z=f(x,y)$ là

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Vi phân cấp 1 của hàm 3 biến $u=f(x,y,z)$ là

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Ví dụ 2.1. Cho $z=x^2+3xy-y^2$. Tính $dz, dz(0,1)$.

Giải

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x+3y)dx+(3x-2y)dy,$$

suy ra $dz(0,1)=3dx-2dy$.

§3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

I. Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa 1.1

Như ta đã biết, trong trường hợp hàm một biến, đạo hàm cấp hai của $y=f(x)$ được định nghĩa bởi $y''=(y')'$.

Tương tự, giả sử hàm số $z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ trên một tập mở $D\subset\mathbb{R}^2$ thì ta có thể đạo hàm các biểu thức này để được các đạo hàm riêng cấp hai. Ta có các định nghĩa

(i) Đạo hàm hai lần theo biến x là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv(f_x)_x=f_{xx};$$

(ii) Đạo hàm hai lần theo biến y là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv (f_y)_y = f_{yy};$$

(iii) Đạo hàm thứ tự theo x rồi lấy đạo hàm theo y là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv (f_x)_y = f_{xy};$$

(iv) Đạo hàm thứ tự theo y rồi lấy đạo hàm theo x là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv (f_y)_x = f_{yx}.$$

Các ký hiệu tương tự cũng áp dụng cho hàm nhiều biến, nghĩa là với $n > 2$.

Các đạo hàm f_{xy}, f_{yx} được gọi là các *đạo hàm riêng hỗn hợp cấp hai* của hàm hai biến $f(x,y)$.

Định nghĩa 1.2. Đạo hàm riêng cấp m ($m > 1$) của hàm số n biến là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp $m-1$ của nó.

Các đạo hàm riêng cấp m được ký hiệu tương tự như đạo hàm riêng cấp 2. Chẳng hạn

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) \equiv (f_{yz})_x = f_{yzx}.$$

Chú ý 1.3. Một hàm số n biến có n^k đạo hàm riêng cấp k, trong đó có n^k-n đạo hàm hỗn hợp.

Ví dụ 1.1. Cho $f(x,y) = x^3y - y^2x^2$. Tính các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai, cấp ba của hàm số f.

Giải

a) Các đạo hàm riêng cấp một là

$$f_x = 3x^2y - 2y^2x, \qquad f_y = x^3 - 2yx^2.$$

Các đạo hàm riêng cấp hai là

$$f_{xx} = (f_x)_x = 6xy - 2y^2, \qquad f_{yy} = (f_y)_y = -2x^2,$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = 3x^2 - 4xy, \qquad f_{yx} = (f_y)_x = 3x^2 - 4xy.$$

Các đạo hàm riêng cấp ba là

$$f_{xxx} = (f_{xx})_x = 6y, \qquad f_{yyy} = (f_{yy})_y = 0,$$

$$f_{xxy} = (f_{xx})_y = 6x - 4y, \qquad f_{yyx} = (f_{yy})_x = -4x,$$

$$f_{xyx} = (f_{xy})_x = 6x - 4y, \qquad f_{yxy} = (f_{yx})_y = -4x.$$

$$f_{yxx} = (f_{yx})_x = 6x - 4y, \qquad f_{xyy} = (f_{xy})_y = -4x,$$

Chú ý 1.4. Các đạo hàm hỗn hợp f_{xy}, f_{yx} khác nhau về thứ tự lấy đạo hàm riêng theo từng biến và do đó nói chung chúng khác nhau. Tuy nhiên, chúng có thể bằng nhau theo định lý sau đây

Định lý 1.5 (Định lý Schwarz). *Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên D thì $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ trên D, với mọi $i, j = \overline{1,n}$.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $n = 2,\ i = 1,\ j = 2.$ Khi đó $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp hai $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ liên tục trên D.

Với $x = (x_1, x_2) \in D$ bất kỳ, lập biểu thức

$$A = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2). \qquad (2.2)$$

Hàm $\Phi(t) = f(t, x_2 + h_2) - f(t, x_2)$ khả vi trên một lân cận của $x_1 \in \mathbb{R}$ và do định lý giá trị trung bình, (2.2) được viết lại thành

$$A = \Phi(x_1 + h_1) - \Phi(x_1) = h_1 \Phi'(x_1 + \theta_1 h_1)$$

với $0 < \theta_1 < 1$.

Mặt khác, do định nghĩa của đạo hàm riêng, ta có

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2)$$

và lại do định lý giá trị trung bình,

$$\Phi'(x_1+\theta_1 h_1)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2)$$
$$=h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2)$$

với $0<\theta_2<1$ và do đó

$$A=h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2). \qquad (2.3)$$

Tương tự, với hàm $\Psi(t)=f(x_1+h_1,t)-f(x_1,t),$ ta tìm được $\theta_1',\theta_2'\in(0,1)$ sao cho

$$A=\Psi(x_2+h_2)-\Psi(x_2)=h_2\Psi'(x_2+\theta_2' h_2)$$
$$=h_2\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1, x_2+\theta_2' h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\theta_2' h_2)\right]$$
$$=h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1+\theta_1' h_1, x_2+\theta_2' h_2). \qquad (2.4)$$

So sánh (2.3) và (2.4), ta suy ra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1+\theta_1' h_1, x_2+\theta_2' h_2). \qquad (2.5)$$

Vì $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$ liên tục trên D nên khi $(h_1,h_2)\to(0,0),$ (2.5) cho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)$$

và định lý được chứng minh. ■

II. Vi phân cấp cao

Giả sử, hàm $z=f(x,y)$ các đạo hàm riêng cấp n liên tục tại mọi điểm $(x,y)\in D$, khi đó vi phân cấp 1 của vi phân cấp n-1 là vi phân cấp n, nghĩa là

$$d^n f = d(d^{n-1}f).$$

Cụ thể, vi phân cấp 2 của hàm 2 biến $z=f(x,y)$ là

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

trong đó $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Một cách hình thức, ta có thể viết biểu thức trên dưới dạng

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f,$$

trong đó, các phép toán được hiểu theo nghĩa hình thức như sau

$\frac{\partial}{\partial x}dx$ là tích của $\frac{\partial}{\partial x}$ và dx,

$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2$ là lũy thừa 2 của $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)$.

Bằng cách quy nạp, ta có

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)^{n-k}\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k\right] f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k.$$

Ví dụ 2.1. Cho $z = x^2y^4$. Tính d^2z.

Giải

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^4, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8xy^3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^2y^2,$$

suy ra

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = 2y^4dx^2 + 16xy^3dxdy + 12x^2y^2dy^2.$$

§4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ HỢP

I. Đạo hàm riêng của hàm số hợp

Nếu hàm $z = f(u,v)$, trong đó $u = u(x),\ v = v(x)$ là những hàm số của *x* thì biểu thức

$$z = f\big(u(x), v(x)\big)$$

là hàm số hợp của *x* qua các biến số trung gian *u*, *v*. Định lý sau đây cho ta quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp $z = f\big(u(x), v(x)\big)$.

Định lý 1.1

Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ *và hàm số khả vi*

$$\begin{aligned} f &: U \to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto f(u,v). \end{aligned}$$

Cho V là một khoảng trong $\mathbb{R}$ *và hai hàm số khả vi*

$$\begin{aligned} u &: V \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto u(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &: V \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto v(x). \end{aligned}$$

Nếu $f(u,v) = f\big(u(x), v(x)\big) = z(x)$ *thì*

$$\frac{dz}{dx} = z_u.u_x + z_v.v_x = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Chứng minh. Đặt $w = w(x) = \big(u(x), v(x)\big)$, với $x \in \mathbb{R}$.

Do tính khả vi của hàm f, ta có

$$f(w+h) - f(w) = h.\nabla f(w) + \|h\|.\varepsilon(h),$$

trong đó $\varepsilon(h) \to 0$ khi $h \to 0$, với $h \in \mathbb{R}^2$.

Áp dụng với $h = w(x+k) - w(x), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ta được

$$\frac{f\left(w(x+k)\right) - f\left(w(x)\right)}{k} = \left(w(x+k) - w(x)\right).\nabla f(w) + \left\|w(x+k) - w(x)\right\|.\varepsilon(h).$$

Chia hai vế của biểu thức trên cho *k*, ta được

$$\frac{f\left(w(x+k)\right) - f\left(w(x)\right)}{k} = \left(\frac{w(x+k) - w(x)}{k}\right) \cdot \nabla f(w) \pm \left\|\frac{w(x+k) - w(x)}{k}\right\|.\varepsilon(h).$$

Khi $k \to 0$ thì

$$\frac{f\left(w(x+k)\right) - f\left(w(x)\right)}{k} \to \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{w(x+k) - w(x)}{k} = \left(\frac{u(x+k) - u(x)}{k}, \frac{v(x+k) - v(x)}{k}\right) \to \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right),$$

và $h \to 0$.

Vì vậy,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

và định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 1.1. Cho $z = u^2 + uv$, $u = x^2$, $v = 3x$. Tìm $\frac{dz}{dx}$.

Giải

$$\frac{dz}{dx} = z_u.u_x + z_v.v_x = (2u + v)(2x) + u.3 = (2x^2 + 3x)2x + 3x^2 = 4x^3 + 9x^2.$$

Bây giờ, xét hàm số $z = f(u,v)$, trong đó $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ là những hàm số của hai biến độc lập *x*, *y* thì biểu thức

$$z = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$$

là hàm số hợp của *x*, *y* qua các biến số trung gian *u*, *v*.

Để tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, ta xem y không đổi, khi đó $z = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ là hàm số hợp của một biến số độc lập x thông qua hai biến số trung gian u, v. Do định lý 1.1, ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cũng lập luận như vậy khi tính $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ta được định lý sau

Định lý 1.2. *Nếu hàm số $z = f(u,v)$ khả vi theo các biến số u và v và $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ khả vi theo các biến số x, y thì*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_u.u_x + z_v.v_x = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_u.u_y + z_v.v_y = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Chứng minh. Xem như bài tập.

Ví dụ 1.2. Cho $z = e^u \sin v$, $u = xy^2$, $v = x^2 y$. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Giải

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= z_u.u_x + z_v.v_x = (e^u \sin v).y^2 + (e^u \cos v).(2xy)\\ &= y^2 e^{xy^2}\sin(x^2y) + 2xye^{xy^2}\cos(x^2y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= z_u.u_y + z_v.v_y = (e^u \sin v).2xy + (e^u \cos v).x^2\\ &= 2xye^{xy^2}\sin(x^2y) + x^2e^{xy^2}\cos(x^2y).\end{aligned}$$

Tương tự, nếu $w = f(u,v)$, $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ thì

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_u.u_x + w_v.v_x = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = w_u.u_y + w_v.v_y = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = w_u.u_z + w_v.v_z = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Nếu $z = f(u,v,w)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $w = w(x,y)$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_u.u_x + z_v.v_x + z_w.w_x = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_u.u_y + z_v.v_y + z_w.w_y = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Ví dụ 1.3. Cho $z = e^{xy}$, $x = u^2$, $y = u.v$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

Giải

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z_x.x_u + z_y.y_u = (ye^{xy}).2u + (xe^{xy}).v = uv.e^{u^3v}.2u + u^2e^{u^3v}.v = 3u^2ve^{u^3v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = z_x.x_v + z_y.y_v = (ye^{xy}).0 + (xe^{xy}).u = u^3e^{u^3v}.$$

Ví dụ 1.4. Cho $z = xe^{xy}$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$. Tìm $\frac{dz}{dt}$.

Giải

$$\frac{dz}{dt} = z_x.x_t + z_y.y_t = (e^{xy} + xye^{xy})(2t) + x^2e^{xy}\left(\frac{-1}{t^2}\right)$$
$$= (e^t + te^t)(2t) - t^2e^t = 2te^t + t^2e^t.$$

Ví dụ 1.5. Cho $z = e^{xy}\ln(x^2 + y^2)$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Giải

Đặt $u = xy$, $v = x^2 + y^2$. Khi đó, $z = e^u \ln v$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_u.u_x + z_v.v_x = (e^u \ln v).y + \frac{e^u}{v}\cdot 2x$$

$$= e^u\left(y.\ln v + \frac{2x}{v}\right) = e^{xy}\left(y.\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_u.u_y + z_v.v_y = (e^u \ln v).x + \frac{e^u}{v}\cdot 2y$$

$$= e^u\left(x.\ln v + \frac{2y}{v}\right) = e^{xy}\left(x.\ln(x^2+y^2) + \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

II. Vi phân của hàm hợp

Ta đã biết, nếu hàm $z = f(u,v)$ khả vi, với *u*, *v* là những biến độc lập thì

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \tag{2.6}$$

Bây giờ, xét hàm hợp $z = f(u,v)$, với *u*, *v* là những biến phụ thuộc

$$u = u(x,y),\ v = v(x,y),$$

và *x*, *y* là những biến độc lập thì

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Theo công thức đạo hàm hàm hợp, ta được

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Như vậy, ta quay lại công thức (2.6). Điều này có nghĩa là dạng của vi phân cấp 1 là không đổi cho dù *x*, *y* là các biến độc lập hay là các hàm số. Tính chất này được gọi là *tính bất biến* của dạng vi phân cấp 1. Từ đó, ta có các công thức vi phân sau đây

(i) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

(ii) $d(uv) = udv \pm vdu$;

(iv) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;

(v) $df(u) = f_u du$.

Các công thức trên đúng cho u, v là biến độc lập nên đúng cho u, v là các hàm số của các biến số độc lập khác. Chú ý rằng, tính chất bất biến ở trên không còn đúng cho vi phân cấp cao.

Ví dụ 2.1. Tính vi phân cấp một của các hàm số sau

a) $z = \arcsin\dfrac{y^2}{x}$.

b) $z = \arctan(xy^2)$.

Giải

a) Đặt $u = \dfrac{y^2}{x}$. Khi đó, $z = \arcsin u$. Ta có

$$dz = z_u du = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y^2}{x}\right)^2}}d\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^4}}\frac{xd(y^2)-y^2dx}{x^2}$$

$$= \frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^4}}\frac{2xydy-y^2dx}{x^2} = \frac{y(-ydx+2xdy)}{|x|\sqrt{x^2-y^4}}.$$

b) Đặt $u = xy^2$. Khi đó, $z = \arctan u$. Ta có

$$dz = z_u du = \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{1+(xy^2)^2}d(xy^2) = \frac{1}{1+x^2y^4}(y^2dx + 2xydy).$$

§5. HÀM ẨN

I. Khái niệm hàm ẩn

Định nghĩa 1.1. Nếu $F(x,y)$ là một hàm theo hai biến x, y, xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ thì phương trình

$$F(x,y)=0 \tag{2.7}$$

cho ta một hệ thức liên lạc giữa *x* và *y*. Nếu $y=f(x)$ là một hàm số xác định trong một khoảng nào đó sao cho $F(x,f(x))=0$ thì ta nói rằng $y=f(x)$ là *hàm ẩn* xác định bởi phương trình (2.7).

Ví dụ 1.1. Phương trình $x^2+1-y=0$ xác định trên $\mathbb{R}^2$. Dễ thấy

$$x^2+1-y=0 \Leftrightarrow y=x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Như vậy, $y=x^2+1$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^2+1-y=0$.

Ví dụ 1.2. Phương trình $x^2+y^2-1=0$ xác định trên $\mathbb{R}^2$. Dễ thấy

$$x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right.,\ \forall x\in[-1,1].$$

Như vậy, $y=\sqrt{1-x^2}$ và $y=-\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[-1,1]$ là các hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^2+y^2-1=0$.

Chú ý 1.2

(i) Phương trình $F(x,y)=0$ có thể xác định một hay nhiều hàm ẩn *y* theo biến *x*. Khi đó, ta có *hàm ẩn một biến*. Tương tự, phương trình $F(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$ có thể xác định một hay nhiều hàm ẩn *y* theo các biến $x_1,x_2,...,x_n$. Khi đó, ta có *hàm ẩn n biến*.

(ii) Phương trình $F(x,y)=0$ có thể xác định hàm ẩn *cũng có thể không*. Chẳng hạn, phương trình $x^2+y^2+1=0$ không xác định hàm ẩn nào.

(iii) Nếu từ phương trình $F(x,y)=0$, ta tìm được công thức biểu diễn *y* theo *x* thì hàm ẩn sẽ trở thành *hàm hiện*. (Trong ví dụ 1.1, ví dụ 1.2, hàm $y=x^2+1$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ là các hàm hiện).

(iv) Không phải mọi hàm ẩn đều có thể biểu diễn được dưới dạng $y=f(x)$. Chẳng hạn, hàm số ẩn xác định bởi phương trình

$$xy - e^x + e^y = 0$$

không thể biểu diễn được dưới dạng $y = f(x)$. Khi đó, hàm $y = f(x)$ thỏa phương trình $xy - e^x + e^y = 0$ là *hàm ẩn thực sự.*

Ví dụ 1.3. Tìm $\dfrac{dy}{dx}$ biết $x^2 - y = 1$.

Giải

$$x^2 - y = 1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Có hai câu hỏi được đặt ra như sau

Với những điều kiện nào thì tồn tại hàm ẩn xác định từ phương trình $F(x,y)=0$?

Trong trường hợp không tìm được công thức cụ thể cho hàm ẩn xác định từ phương trình $F(x,y) = 0$ thì ta có thể tính đạo hàm của hàm đó được không?

Định lý 1.3 (Định lý về sự tồn tại hàm ẩn một biến). *Cho hàm* $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. *Nếu* $F(x,y)$ *thỏa mãn các điều kiện*

① $F(x_0, y_0) = 0$,

② F_x, F_y *tồn tại và liên tục trên D,*

③ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,

thì

❶ *Phương trình* $F(x,y) = 0$ *xác định duy nhất một hàm ẩn* $y = f(x)$ *trong lân cận* Ω *của* x_0 *thỏa* $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in \Omega$,

❷ $f(x_0) = y_0$,

❸ f *liên tục trên* Ω,

❹ $f(x)$ *có đạo hàm liên tục trên* Ω *và*

$$y' = f'(x) = \frac{-F_x}{F_y} \quad (F_y \neq 0), \forall x \in \Omega.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $F_y(x_0,y_0)>0$. Do tính khả vi liên tục của *F*, tồn tại lân cận $[a_1,b_1]\times[c,d]$ của (x_0,y_0) sao cho $F_y(x,y)>0$ trên lân cận này. Hàm $y\mapsto F(x_0,y)$ tăng ngặt trên $[c,d]$ và $F(x_0,y_0)=0$ với $c<y_0<d$ nên $F(x_0,c)<0$ và $F(x_0,d)>0.$

Các hàm $x\mapsto F(x,c)$ và $x\mapsto F(x,d)$ là các hàm liên tục trên $[a_1,b_1]$, $F(x_0,c)<0$ và $F(x_0,d)>0$ nên tồn tại $a_1\le a<x_0<b\le b_1$ sao cho $F(x,c)<0$ và $F(x,d)>0$, với mọi $x\in[a,b]$.

Bây giờ, với mỗi $x\in[a,b]$, hàm $y\mapsto F(x,y)$ là hàm liên tục, tăng ngặt trên $[c,d]$ và $F(x,c)<0, F(x,d)>0$ nên tồn tại duy nhất $y\in[c,d]$, ký hiệu là $f(x)$, sao cho $F(x,y)=0.$

Để chứng tỏ sự liên tục của f tại $x\in[a,b]$, xét lân cận $[a,b]\times[y-\varepsilon,y+\varepsilon]$ của (x,y) với $y=f(x)$ sao cho $[y-\varepsilon,y+\varepsilon]\subset[c,d]$. Vì $F_y(x,y)>0$ trên lân cận này nên do chứng minh trên, tồn tại lân cận $[x-\delta,x+\delta]$ của *x*, chứa trong $[a,b]$ sao cho phương trình $F(x,y)=0$ xác định hàm ẩn $g:[x-\delta,x+\delta]\to[y-\varepsilon,y+\varepsilon]$, $F(x,g(x))=0.$ Do tính tồn tại duy nhất của hàm ẩn f xác định trên lân cận $[a,b]\times[c,d]$ của (x_0,y_0), ta suy ra $g(t)=f(t), \forall t\in[x-\delta,x+\delta]$ và do đó, ta có $\left|f(t)-f(x)\right|\le\varepsilon$ khi $\left|t-x\right|\le\delta$, nghĩa là f liên tục tại *x*.

Cuối cùng, để chứng minh tính khả vi của *f*, ta chú ý rằng *F* là hàm khả vi trên *D*. Do đó, với $x\in(a,b)$ và *h* đủ nhỏ sao cho $x+h\in(a,b)$, ta có

$$\begin{aligned}0&=F(x+h,f(x+h))-F(x,f(x))\\&=F_x(x,f(x)).h+F_y(x,f(x)).\left[f(x+h)-f(x)\right]\\&\quad+\sqrt{h^2+\left(f(x+h)-f(x)\right)^2}.\varepsilon\left(h,f(x+h)-f(x)\right),\end{aligned}$$

với $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon\left(h,f(x+h)-f(x)\right)=0.$

Từ đó, suy ra

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-F_x\big(x,f(x)\big)}{F_y\big(x,f(x)\big)}-\frac{1}{F_y\big(x,f(x)\big)}\times\frac{\sqrt{h^2+\big(f(x+h)-f(x)\big)^2}}{h}\times\varepsilon\big(h,f(x+h)-f(x)\big)$$

$\to \dfrac{-F_x\big(x,f(x)\big)}{F_y\big(x,f(x)\big)}$ khi $h\to 0$ và do đó

$$f'(x)=\frac{-F_x\big(x,f(x)\big)}{F_y\big(x,f(x)\big)}.$$

Do F_x, F_y liên tục ta suy ra f' là hàm liên tục. ■

Chú ý 1.4

(i) Định lý 1.3 chỉ khẳng định sự tồn tại hàm ẩn $y=f(x)$ dựa trên một số điều kiện và không cho ta một công thức đơn giản để tìm được hàm ẩn.

(ii) Nếu các giả thiết của định lý được thỏa thì ta cũng có thể tính y' bằng cách lấy đạo hàm 2 vế của $F(x,y)=0$ theo biến x, ta được

$$F_x.x_x+F_y.y_x=0\Rightarrow F_x+F_y.y_x=0\ \Rightarrow y_x\equiv y'=\frac{-F_x}{F_y}.$$

Ví dụ 1.4. Cho phương trình $xy-e^x+e^y=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình trên xác định duy nhất một hàm ẩn $y=f(x)$ trong lân cận của 0.

b) Tính $\dfrac{dy}{dx}$.

Giải

a) Đặt $F(x,y)=xy-e^x+e^y$ xác định trên $\mathbb{R}^2$.

Ta có $F(0,0)=0$,

$F_y=x+e^y$, $F_x=y-e^x$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

$F_y(0,0)=1\neq 0$.

Vậy, phương trình $xy - e^x + e^y = 0$ xác định duy nhất một hàm ẩn $y = f(x)$ trong lân cận của 0.

b) Ta có

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{-(y - e^x)}{x + e^y}, \; (x + e^y \neq 0).$$

Định lý 1.3 được tổng quát hóa thành

Định lý 1.4 (Định lý về sự tồn tại hàm ẩn nhiều biến). *Cho* $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$*,* $(x^0, y_0) \in D$, với $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. *Nếu* $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ *thỏa mãn các điều kiện*

① $F(x^0, y_0) = 0$,

② F_y, F_{x_i}, $i = \overline{1,n}$ *tồn tại và liên tục trên D,*

③ $F_y(x^0, y_0) \neq 0$*,*

thì

❶ *Phương trình* $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ *xác định duy nhất một hàm ẩn* $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *trong lân cận* Ω *của* x^0 *thỏa*

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)\right) = 0, \; \forall x \in \Omega,$$

❷ $f(x^0) = y_0$*,*

❸ f *liên tục trên* Ω*,*

❹ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *có các đạo hàm riêng liên tục trên* Ω *và*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-F_{x_i}}{F_y}, \; i = \overline{1,n}, \; (F_y \neq 0), \forall x \in \Omega.$$

Ví dụ 1.5. Cho phương trình $x^2 z + yz^5 + 2xy^3 = 13$.

a) Chứng minh rằng phương trình trên xác định duy nhất một hàm ẩn $z = f(x,y)$ trong lân cận của (1,2).

b) Tính z_x, z_y.

Giải

a) Đặt $F(x,y,z) = x^2 z + yz^5 + 2xy^3 - 13$ xác định trên $\mathbb{R}^3$.

Ta có $F(1,2,-1) = 0$,

$F_x = 2xz + 2y^3$, $F_y = z^5 + 6xy^2$, $F_z = x^2 + 5yz^4$ liên tục trên $\mathbb{R}^3$.

$F_z\left(1,2,-1\right) = 11 \neq 0$.

Vậy, phương trình $x^2 z + yz^5 + 2xy^3 = 13$ xác định duy nhất một hàm ẩn $z = f(x,y)$ trong lân cận của $(1,2)$.

b) Ta có

$$z_x = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{-(2xz + 2y^3)}{x^2 + 5yz^4},$$

$$z_y = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-(z^5 + 6xy^2)}{x^2 + 5yz^4} \quad (x^2 + 5yz^4 \neq 0).$$

Ví dụ 1.6. Cho z là hàm của x, y thỏa

$$\frac{x^2}{16} + y^2 + z^2 = 3$$

với $z(4,-1) = 1$. Tìm $z_x(4,-1)$.

Giải

Đặt $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{16} + y^2 + z^2 - 3$ xác định trên $\mathbb{R}^3$.

Ta có $F(4,-1,1) = 0$,

$F_x = \dfrac{1}{8}x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$ liên tục trên $\mathbb{R}^3$.

$F_z(4,-1,1) = 2 \neq 0$.

Vậy, phương trình $\frac{x^2}{16}+y^2+z^2=3$ xác định duy nhất một hàm ẩn $z=f(x,y)$ trong lân cận của $(4,-1)$ và ta có

$$z_x=\frac{-F_x}{F_z}=\frac{\frac{-1}{8}x}{2z}=\frac{-x}{16z}.$$

Do đó

$$z_x(4,-1)=\frac{-4}{16z(4,-1)}=\frac{-4}{16.1}=\frac{-1}{4}.$$

Ví dụ 1.7. Giả sử các giả thiết trong định lý tồn tại hàm ẩn được thỏa.

a) Tính y' biết $x^3+y^3=6xy$.

b) Tính y'' biết $x^4+y^4=16$.

Giải

a) <u>*Cách 1*</u>:

Đặt $F(x,y)=x^3+y^3-6xy$.

$F_x=3x^2-6y$, $F_y=3y^2-6x$.

Ta có

$$y'=\frac{-F_x}{F_y}=\frac{-(3x^2-6y)}{3y^2-6x}=\frac{-(x^2-2y)}{y^2-2x}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}\quad (y^2-2x\neq 0).$$

<u>*Cách 2*</u>: Lấy đạo hàm 2 vế của $x^3+y^3=6xy$ theo biến *x*, ta được

$$3x^2+3y^2.y_x=6y+6x.y_x$$
$$\Rightarrow (3y^2-6x)y_x=6y-3x^2$$
$$\Rightarrow y'=y_x=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}\quad (y^2-2x\neq 0).$$

b) Tính y':

<u>*Cách 1*</u>:

Đặt $F(x,y)=x^4+y^4-16$.

$F_x = 4x^3$, $F_y = 4y^3$.

Ta có

$$y' = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{-4x^3}{4y^3} = \frac{-x^3}{y^3} \quad (y \neq 0).$$

<u>*Cách 2*</u>: Lấy đạo hàm 2 vế của $x^4 + y^4 = 16$ theo biến *x*, ta được

$$4x^3 + 4y^3.y_x = 0$$

$$\Rightarrow 4y^3.y_x = -4x^3$$

$$\Rightarrow y' = y_x = \frac{-4x^3}{4y^3} = \frac{-x^3}{y^3} \quad (y \neq 0).$$

Tính y'':

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{-x^3}{y^3}\right)_x = \frac{(-x^3)_x.y^3 - (y^3)_x.(-x^3)}{y^6}$$

$$= \frac{-3x^2.y^3 + 3x^3y^2.y_x}{y^6} = \frac{-3x^2.y^3 + 3x^3y^2.\left(\frac{-x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= \frac{-3x^2y^3 - 3x^6\left(\frac{1}{y}\right)}{y^6} = \frac{-3x^2y^4 - 3x^6}{y^7} = \frac{-3x^2(y^4 + x^4)}{y^7} = \frac{-48x^2}{y^7} \quad (y \neq 0).$$

Chú ý rằng, đạo hàm cấp 2 của hàm ẩn được tính từ đạo hàm cấp 1 theo quan điểm của hàm hợp.

II. Hệ phương trình các hàm ẩn

Định nghĩa 2.1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Nếu với *x* thuộc miền nào đó mà tồn tại một cặp hàm số $y = f(x)$, $z = g(x)$ duy nhất sao cho

$$\begin{cases} F(x,f(x),g(x)) = 0, \\ G(x,f(x),g(x)) = 0 \end{cases}$$

thì cặp hàm số $y = f(x), z = g(x)$ được gọi là các hàm ẩn xác định bởi hệ phương trình (2.8).

Ví dụ 2.1. Hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

xác định hai hàm ẩn $y = f(x), z = g(x)$, $-1 \le x \le 1$ vì giải hệ: *y*, *z* theo *x* và thay lại vào hệ ta có các đồng nhất thức.

Với những điều kiện nào cho $F(x,y,z), G(x,y,z)$ thì tồn tại cặp hàm ẩn khả vi liên tục, xác định từ hệ phương trình $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$?

Trong trường hợp không tìm được công thức cụ thể cho các hàm ẩn xác định từ hệ phương trình $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ thì ta có thể tính đạo hàm của các hàm đó được không?

Định lý 2.2 (Định lý về sự tồn tại cặp hàm ẩn một biến). *Cho hai hàm $F, G : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Nếu $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ thỏa mãn các điều kiện*

① $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ và $G(x_0, y_0, z_0) = 0$,

② $F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z$ *tồn tại và liên tục trên D,*

③ $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ với $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$ *được gọi là định thức hàm Jacobian của các hàm F, G đối với các biến y, z,*

thì

❶ *Hệ phương trình* $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ *xác định duy nhất một cặp hàm ẩn $y = f(x), z = g(x)$ trong lân cận Ω của x_0, thỏa*

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) = 0, \\ G(x, f(x), g(x)) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in \Omega,$$

❷ $f(x_0) = y_0, g(x_0) = z_0,$

❸ *f và g liên tục trên* Ω,

❹ $f(x)$, $g(x)$ *có đạo hàm liên tục trên* Ω *và*

$$y' = \frac{df}{dx} = \frac{-1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})},$$

$$z' = \frac{dg}{dx} = \frac{-1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})},$$

với $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})}$.

Chú ý 2.3. Nếu các giả thiết của định lý được thỏa thì ta cũng có thể tìm y', z' bằng cách lấy đạo hàm hai vế của hai phương trình $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$ theo biến x, ta được

$$\begin{cases} F_x.(x)_x + F_y.(y)_x + F_z.(z)_x = 0 \\ G_x.(x)_x + G_y.(y)_x + G_z.(z)_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x + F_y.y' + F_z.z' = 0 \\ G_x + G_y.y' + G_z.z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_y.y' + F_z.z' = -F_x \\ G_y.y' + G_z.z' = -G_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} -F'_x & F'_z \\ -G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} F'_y & -F'_x \\ G'_y & -G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}.$$

Định lý 2.3 (Định lý về sự tồn tại cặp hàm ẩn hai biến). *Xét hệ phương trình*

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

trong đó $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Cho hai hàm $F,G : D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in D$. *Nếu* $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ *thỏa mãn các điều kiện*

① $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ và $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$,

② $F_x, F_y, F_u, F_v, G_x, G_y, G_u, G_v$ *tồn tại và liên tục trên D,*

③ $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0) \neq 0$ với $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$,

thì

❶ *Hệ phương trình* $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ *xác định duy nhất một cặp hàm ẩn* $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, *trong lân cận* Ω *của* (x_0, y_0)*, thỏa*

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \end{cases}, \ \forall (x,y) \in \Omega,$$

❷ $u(x_0, y_0) = u_0,\ v(x_0, y_0) = v_0$,

❸ *u và v liên tục trên* Ω,

❹ *u, v có đạo hàm liên tục trên* Ω *và*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})}; \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})}$$

với $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$.

Ví dụ 2.2. Cho u, v là hàm của x, y thỏa $u > 0,\ 0 \leq v < 2\pi$ và

$$\begin{cases} u\cos v - x = 0, \\ u\sin v - y = 0. \end{cases}$$

a) Tìm $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

b) Khi $(x,y) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, chứng minh $u(x,y) = 1,\ v(x,y) = \dfrac{\pi}{4}$. Dựa vào đó tính

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Giải

a) Ta có $\begin{cases} u\cos v - x = 0 \\ u\sin v - y = 0 \end{cases}$.

Đặt $F(x,y,u,v) = u\cos v - x$, $G(x,y,u,v) = u\sin v - y$.

$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\pi}{4}\right) = 0$,

$F'_x = -1$, $F'_y = 0$, $F'_u = \cos v$, $F'_v = -u\sin v$,

$G'_x = 0$, $G'_y = -1$, $G'_u = \sin v$, $G'_v = u\cos v$

liên tục trên lân cận của điểm $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\pi}{4}\right)$.

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u.$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\pi}{4}\right) = 1 \neq 0.$$

Vậy, hệ phương trình $\begin{cases} u\cos v - x = 0 \\ u\sin v - y = 0 \end{cases}$ xác định duy nhất một cặp hàm ẩn $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ trong lân cận của $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Khi đó

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})} = \frac{-1}{u}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \frac{-1}{u}\begin{vmatrix} -1 & -u\sin v \\ 0 & u\cos v \end{vmatrix} = \cos v.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})} = \frac{-1}{u}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \frac{-1}{u}\begin{vmatrix} \cos v & -1 \\ \sin v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\sin v}{u}.$$

b) Ta có

$$\begin{cases} u\cos v - x = 0, \\ u\sin v - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 + y^2, \\ v = \arccos\dfrac{x}{u} + k2\pi. \end{cases}$$

Khi $(x, y) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ thì

$$\begin{cases} u^2 = 1, \\ v = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2u} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \ \vee \ u = -1, \\ v = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2u} + k2\pi. \end{cases}$$

Vì $u > 0,\ 0 \le v < 2\pi$ nên

$$\begin{cases} u = 1, \\ v = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1, \\ v\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos\left[v(x, y)\right] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left[v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{-\sin\left[v(x, y)\right]}{u(x, y)} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sin\left[v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}{u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

§6. CÔNG THỨC TAYLOR CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Cũng như đối với trường hợp hàm số một biến số, công thức Taylor đối với hàm nhiều biến số cho ta cách biểu diễn xấp xỉ một hàm số nhiều biến số đã cho bởi một đa thức.

I. Công thức Taylor của hàm một biến

Ta đã biết, đối với hàm một biến $f(x)$ khả vi cấp $n+1$ trong lân cận điểm x_0, thì trong lân cận này ta có công thức Taylor cấp *n* của $f(x)$ như sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

với $\theta \in (0,1)$, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ là phần dư Lagrange.

Đặt $x - x_0 = \Delta x = dx$ thì công thức này được viết dưới dạng

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!},$$

với $\theta \in (0,1)$. Ta sẽ mở rộng công thức này cho hàm nhiều biến.

II. Công thức Taylor của hàm *n* biến

Định lý 2.1. *Nếu hàm* $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp* $m+1$ *trong lân cận* Ω *của* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *thì trong* Ω *ta có công thức Taylor cấp m của* $f(x)$ *như sau*

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \theta \Delta x_n)}{(m+1)!},$$

với $\theta \in (0,1)$, $x_1 - x_1^0 = \Delta x_1 = dx_1$, $x_2 - x_2^0 = \Delta x_2 = dx_2, \ldots, x_n - x_n^0 = \Delta x_n = dx_n$.

Lúc đó

$$R_m(x) = \frac{d^{m+1} f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \theta \Delta x_n)}{(m+1)!}$$

là phần dư Lagrange.

Chứng minh. Đặt $h = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$. Xét hàm số $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(t) = f(x^0 + th).$$

Từ các giả thiết của định lý, ta suy ra rằng hàm số F có các đạo hàm cho đến cấp $m+1$ liên tục trên [0,1]. Ta có

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + th)\Delta x_i = df(x^0 + th),$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + th)\Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x^0 + th),$$

$$F'''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x^0 + th)\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k = d^3 f(x^0 + th),$$

...

$$F^{(m+1)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ...\partial x_{i_{m+1}}}(x^0 + th)\Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} ...\Delta x_{i_{m+1}} = d^{m+1} f(x^0 + th).$$

Theo công thức Mac Laurin đối với hàm một biến số, ta có

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},$$

với $\theta \in (0,1)$.

Suy ra

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(x^0 + \theta h)}{(m+1)!},$$

với $\theta \in (0,1)$. ■

Cụ thể, nếu hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp $n+1$ trong lân cận Ω của (x_0, y_0) thì trong Ω ta có công thức Taylor cấp n của $f(x,y)$ như sau

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!},$$

với $\theta \in (0,1)$, $x - x_0 = \Delta x = dx$, $y - y_0 = \Delta y = dy$.

Lúc đó, $R_n(x) = \dfrac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}$ là phần dư Lagrange.

Nhắc lại rằng

(i) $df(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy;$

(ii) $d^2 f(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0,y_0)$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right) f(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2;$$

(iii) $d^n f(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0,y_0)$.

Ví dụ 1.1. Viết khai triển Taylor của $f(x,y) = \sin x \sin y$ xung quanh điểm (0,0) đến cấp 2.

Giải

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{df(0,0)}{1!} + \frac{d^2 f(0,0)}{2!} + \frac{d^3 f(\theta\Delta x,\, \theta\Delta y)}{3!},$$

với $\theta \in (0,1)$, $\Delta x = dx = x - 0 = x$, $\Delta y = dy = y - 0 = y$.

Ta có

$f(0,0) = 0$,

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

$$\begin{aligned} d^2 f(0,0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(0,0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)dy^2 \\ &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3 f(\theta\Delta x, \theta\Delta y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(\theta x, \theta y) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta x, \theta y)(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\theta x, \theta y)(dx)^2 dy \\ &\quad + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\theta x, \theta y)dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta x, \theta y)(dy)^3 \\ &= x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta x, \theta y) + 3x^2 y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\theta x, \theta y) \\ &\quad + 3xy^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\theta x, \theta y) + y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta x, \theta y). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\cos x \sin y,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -\sin x \cos y,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -\cos x \sin y,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\sin x \cos y.$$

Suy ra

$$df(0,0) = 0,$$

$$d^2 f(0,0) = 2xy,$$

$$d^3 f(\theta x, \theta y) = -x^3 \cos\theta x \sin\theta y - 3x^2 y \sin\theta x \cos\theta y$$
$$- 3xy^2 \cos\theta x \sin\theta y - y^3 \sin\theta x \cos\theta y.$$

Vậy, khai triển Taylor của $f(x,y) = \sin x \sin y$ xung quanh điểm (0,0) đến cấp 2 là

$$f(x,y) = xy - \frac{1}{6}x^3 \cos\theta x \sin\theta y - \frac{1}{2}x^2 y \sin\theta x \cos\theta y$$
$$-\frac{1}{2}xy^2 \cos\theta x \sin\theta y - \frac{1}{6}y^3 \sin\theta x \cos\theta y,$$

với $\theta \in (0,1)$.

Định lý 2.2. *Giả sử hàm $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp $m+1$ trong lân cận Ω của $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ và r là một số dương sao cho quả cầu $B(x^0, r) \subset \Omega$. Khi đó, với mọi $h = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\|h\| < r$, ta có*

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + \|h\|^m \varepsilon(h),$$

trong đó $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$

Lúc đó $R_m(x) = \|h\|^m \varepsilon(h)$ là phần dư Peano.

Chứng minh. Theo định lý 2.1, với mọi $h = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\|h\| < r$, ta có

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^{m-1} f(x^0)}{(m-1)!} + \frac{d^m f(x^0 + \theta h)}{m!},$$

với $\theta \in (0,1)$.

Do đó

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{m-1} f(x^0)}{(m-1)!} + \frac{d^m f(x^0)}{m!}$$
$$+ \frac{d^m f(x^0 + \theta h) - d^m f(x^0)}{m!}$$
$$= f(x^0) + \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + \|h\|^m \varepsilon(h),$$

với

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{d^m f(x^0 + \theta h) - d^m f(x^0)}{\|h\|^m}.$$

Ta chứng minh

$$\lim_{h \to 0} \frac{d^m f(x^0 + \theta h) - d^m f(x^0)}{\|h\|^m} = 0.$$

Thật vậy, ta có

$$d^m f(x^0 + \theta h) - d^m f(x^0)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_m=1}^{n} \left[\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(x^0 + \theta h) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(x^0) \right] \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \ldots \Delta x_{i_m},$$

với $\theta \in (0,1)$.

Cho trước $\varepsilon > 0$. Vì các đạo hàm riêng của hàm số f đều liên tục trên Ω nên với $\frac{\varepsilon}{n^m} > 0$, tồn tại một số $\delta > 0,\ \delta \le r$ sao cho $\forall x \in \Omega$,

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(x) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(x^0) \right| < \frac{\varepsilon}{n^m},$$

với $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n$. Do đó

$$\left| d^m f(x^0 + \theta h) - d^m f(x^0) \right| < \frac{\varepsilon}{n^m} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_m=1}^{n} \left| \Delta x_{i_1} \right| \left| \Delta x_{i_2} \right| \ldots \left| \Delta x_{i_m} \right|$$
$$= \frac{\varepsilon}{n^m} \left(\left| \Delta x_1 \right| + \left| \Delta x_2 \right| + \ldots + \left| \Delta x_n \right| \right)^m$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{n^m} n^m \|h\|^m = \varepsilon \|h\|^m$$

với $\|h\| < \delta$.

Suy ra

$$\frac{\left| d^m f(x^0 + \theta h) - d^m f(x^0) \right|}{\|h\|^m} < \varepsilon,$$

với $0 < \|h\| < \delta$. ■

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1. Cho hàm số $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Bài 2. Cho hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy+3y^2}{x+y} & \text{nếu } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{nếu } x=y=0.\end{cases}$$

Hãy tính $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

Bài 3. Cho hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{nếu } xy=0,\\ 1 & \text{nếu } xy\neq 0.\end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số trên có đạo hàm riêng tại (0,0) nhưng không liên tục tại điểm đó.

Bài 4. Cho hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Chứng minh rằng $f_y(x,0)=x,\ f_x(0,y)=-y.$

Bài 5. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$.

b) $f(x,y)=4-x^2-2y^2$.

c) $f(x,y)=(5x^2y-y^2+7)^3$.

d) $f(x,y)=xe^{3y}$.

e) $f(x,y)=y\ln x$.

f) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$.

g) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

h) $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$.

i) $f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

j) $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

k) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.

l) $f(x,y)=\dfrac{\cos y^2}{x}$.

m) $f(x,y)=\sin(x\sin y)$.

n) $f(x,y)=x^y \;\; (x>0)$.

o) $f(x,y)=y^2\sin\dfrac{x}{y}$.

p) $f(x,y)=e^{xy}\cos x\sin y$.

q) $f(x,y)=\arcsin(x-2y)$.

r) $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$.

s) $f(x,y)=\tan(x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

t) $f(x,y)=xy\ln(xy)$.

u) $f(x,y)=(1+xy)^y$.

v) $f(x,y)=e^{\frac{-x}{y}}$.

Bài 6. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a) $f(x,y,z)=xy^2z^3+3yz$.

b) $f(x,y,z)=x^2e^{yz}$.

c) $f(x,y,z)=x^3+yz^2+3xy-x+z$.

d) $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$.

e) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

f) $f(x,y,z)=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

g) $f(x,y,z)=xe^{-y}\sin z$.

h) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

i) $f(x,y,z)=x^y \;\; (x>0)$.

j) $f(x,y,z)=x^{y/z} \;\; (x>0)$.

k) $f(x,y,z)=x^{y^z} \;\; (x,y>0)$.

l) $f(x,y,z,t)=xy^2z^3t^4$.

Bài 7. Chứng minh rằng

a) Hàm số $z=y\ln(x^2-y^2)$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{1}{x}z_x+\dfrac{1}{y}z_y=\dfrac{z}{y^2}$.

b) Hàm số $z=y^{\frac{y}{x}}\sin\dfrac{y}{x}$ thỏa mãn phương trình $x^2z_x+xyz_y=yz$.

c) Hàm số $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Bài 8. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau tại điểm cho trước

a) $z=\dfrac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$, tại điểm (0,0).

b) $z=\sin(x\sqrt{y})$, tại điểm $\left(\dfrac{\pi}{3},4\right)$.

c) $z=\sin(xy\ln z)$, tại điểm (1,0,1).

d) $z=xy^2z^3$ tại điểm (1,2,0).

Bài 9. Tìm gradient của các hàm số sau

a) $f(x,y)=2x^2-xy+y.$

b) $f(x,y)=\sin(xy).$

c) $f(x,y,z)=xy-yz+xz.$

d) $f(x,y,z)=\ln(x^2+xy)+x^2y^2z.$

Bài 10. Cho các hàm số

$$f(x,y)=\sin x+e^{xy},\qquad g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$u(x,y,z)=x^2yz+4xz^2,\qquad v(x,y,z)=e^{x^2+y^2}\sin z.$$

Tính

a) $\nabla f(0,1)$.

b) $\nabla g(1,1)$.

c) $\nabla u(1,-2,-1)$.

d) $\nabla v\left(1,1,\pi/3\right)$.

Bài 11. Xét sự khả vi của các hàm số sau tại (0,0)

a) $f(x,y)=\begin{cases} x+\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

c) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

d) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

e) $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0.\end{cases}$

g) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } y\neq\pm x,\\ 0 & \text{nếu } y=x \text{ hay } y=-x.\end{cases}$

Bài 12. Chứng minh rằng hàm $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sao cho $|f(x)|\le\|x\|^2$ khả vi tại (0,0).

Bài 13. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

có đạo hàm riêng tại điểm (0,0) nhưng không khả vi tại điểm đó.

Bài 14. Tìm df (vi phân toàn phần) của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

b) $f(x,y)=xy^3$.

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y)=\sin^2 x+\cos^2 y$.

e) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.

f) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$.

g) $f(x,y)=xyz$.

h) $f(x,y)=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$.

i) $f(x,y)=ye^{xy}$.

j) $f(x,y)=e^{x+y}\sin(x-y)$.

k) $f(x,y,z)=x\sqrt{y^2+z^3}$.

l) $f(x,y,z)=xe^y+ye^z+ze^{-x}$.

m) $f(x,y,z)=x^{y^2z}\ (x>0)$.

n) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y^3}{z^4}$.

Bài 15.

a) Tính d$z(1,1)$ nếu $z=\dfrac{x}{y^2}$.

b) Tính d$u(3,4,5)$ nếu $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Bài 16. Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x^3y$.

b) $f(x,y)=3e^{xy^3}$.

c) $f(x,y)=\sin(x^2+y^3)$.

d) $f(x,y)=x^4-3x^2y^3$.

e) $f(x,y)=\ln(3x+5y)$.

f) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$.

g) $f(x,y)=y\tan 2x$.

h) $f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

i) $f(x,y)=\sqrt{x+y^2}$.

j) $f(x,y)=x^5y^4-6xy^3+4x$.

k) $f(x,y)=\sin^2 x\cos y$.

l) $f(x,y)=x^2\ln(x+y)$.

m) $f(x,y)=xye^y$.

n) $f(x,y)=e^{xy^2}$.

o) $f(x,y)=e^{x-y^2}+\cos x$.

p) $f(x,y)=x^y\ (x>0)$.

q) $f(x,y)=\cos^2(2x-3y)$.

r) $f(x,y)=\sin(x-y)+\cos(x+y)$.

s) $f(x,y,z)=\sin(xyz)$.

t) $f(x,y,z)=x^4y^2z^3$.

u) $f(x,y,z)=2x^2y^3z^4+\dfrac{2y}{x}-\dfrac{x}{z}$.

v) $f(x,y,z)=\sin(x+yz)$.

Bài 17. Hàm f được gọi là *hàm điều hòa* hai biến nếu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra rằng các hàm sau đây có là hàm điều hòa không?

a) $x^2 - y^2$.

b) $x^3 + 3xy^2$.

c) $\ln(x^2 + y^2)$.

d) $(e^y + e^{-y})\sin x$.

e) $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

f) $\sin x \cosh y + \cos x \sinh y$.

Bài 18. Đặt

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \ \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Tìm $\Delta_1 u$ và $\Delta_2 u$ nếu $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Bài 19.

a) Cho hàm số $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Tính $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + z.$

b) Cho hàm số $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Biểu thức $P = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \dfrac{2}{u}$ có phụ thuộc vào giá trị của x, y không?

Bài 20. Mục đích của bài tập này là cho một ví dụ để cho thấy đạo hàm hỗn hợp f_{xy}, f_{yx} không phải luôn luôn bằng nhau. Cho

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Tính $f_x(x,y), f_y(x,y)$ tại $(x,y) = (0,0)$ và tại $(x,y) \neq (0,0)$. Suy ra biểu thức của $f_x(0,y), f_y(x,0)$.

b) Dùng câu a) để tính $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ với $(x,y) \neq (0,0)$ và tính $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$. Từ đó suy ra $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

c) Giả thiết nào của định lý Schwarz bị vi phạm trong ví dụ này? Chứng minh khẳng định của bạn.

Bài 21. Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau

a) $f(x,y)=\cos(xe^{y})$, tìm $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$.

b) $f(x,y)=\sin(xy)$, tìm $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ và $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}$.

c) $f(x,y)=2x^2y+x^2\ln y$, tìm f_{xy}, f_{xyy}.

d) $f(x,y)=e^{x}\sin y$. Tính $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}(0,0)$.

Bài 22. Chứng minh rằng, nếu hàm $u=u(x,t)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a>0$$

thì hàm $v=\dfrac{1}{a\sqrt{t}}e^{\frac{-x^2}{4a^2t}}u\left(\dfrac{x}{a^2t},-\dfrac{1}{a^4t}\right)$, $t>0$ cũng thỏa mãn phương trình đó.

Bài 23. Tính $\mathrm{d}^2 f$ của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$.

b) $f(x,y)=yx^{y}$.

c) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

Bài 24. Chứng minh rằng nếu $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ thì $\mathrm{d}^2u\ge 0$.

Bài 25. Dùng quy tắc lấy đạo hàm của hàm số hợp, tính đạo hàm của các hàm số hợp sau đây

a) $f(u,v)=u^3\sin(uv),\quad u=y\cos x,\quad v=y\sin x$.

b) $f(u,v)=u^2+uv+v^2,\quad u=s+t,\quad v=st$.

c) $f(u,v)=\dfrac{u}{v},\quad u=xe^{y},\quad v=1+xe^{-y}$.

d) $f(u,v)=e^{u^2-2v^2},\quad u=\cos x,\quad v=\sqrt{x^2+y^2}$.

e) $f(u,v)=ue^{v}+ve^{-u}$, $u=e^{x}$, $v=yx^{2}$.

f) $f(x,y)=x^{2}\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$.

g) $f(x,y)=xe^{\frac{x}{y}}$, $x=\cos t$, $y=e^{2t}$.

h) $f(x,y)=x^{2}-3x^{2}y^{3}$, $x=ue^{v}$, $y=ue^{-v}$.

i) $f(x,y)=\sin x\cos y$, $x=(s-t)^{2}$, $y=s^{2}-t^{2}$.

j) $f(x,y)=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^{3}$.

k) $f(u,v,w)=u^{2}+4uvw$, $u=x+y$, $v=3y-x$, $w=y^{2}$.

Bài 26. Cho $u=f(v,w)$ với $v=x-y$, $w=y-x$. Chứng minh $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

Bài 27. Cho

a) $z=f(x^{2}+y^{2})$. Chứng minh $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

b) $u=F\left(\dfrac{y-x}{xy},\dfrac{z-x}{xz}\right)$. Chứng minh $x^{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

c) $u=x^{3}F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$. Chứng minh $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=3u$.

d) $z=y\,f(x^{2}-y^{2})$. Chứng minh $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{y}$.

e) $z=xy+xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Chứng minh $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

f) $u=f(r)$ với $r=\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{1/2}$. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{2}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{2}.$$

Bài 28. Cho $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = f(x,y)$. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Bài 29. Cho

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta$$
$$y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

với θ là một hằng số. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

với $f(u,v) = g(x,y)$.

Bài 30. Nếu $u = f(r)$ với $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$. Chứng minh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}.$$

Bài 31. Cho hàm $F(x,y)$. Giả sử $x = f(u,v),\ y = g(u,v)$ có đạo hàm riêng cấp hai liên tục và $G(u,v) = F\left(f(u,v), g(u,v)\right)$. Chứng minh rằng ta có

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$$

với $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial v},\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = -\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

Bài 32. Chứng minh rằng nếu $u = u(x,y)$ là hàm điều hòa thì

$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

cũng là hàm điều hòa.

Bài 33. Cho

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Giả sử hàm $u_1 = u_1(x,y,z)$, $u_2 = u_2(x,y,z)$ thỏa mãn phương trình $\Delta u = 0$, u_2 có đạo hàm riêng cấp 3 liên tục. Chứng minh rằng hàm

$$v = u_1(x,y,z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x,y,z)$$

thỏa mãn phương trình $\Delta(\Delta v) = 0$.

Bài 34. Cho $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Tìm đạo hàm riêng của

a) $f(x,y) = \int_a^{x+y^2} g(t)dt$.

b) $f(x,y) = \int_y^x g(t)dt$.

c) $f(x,y) = \int_a^{xy} g(t)dt$.

d) $f(x,y) = \int_a^{\sin xy} g(t)dt$.

e) $f(x,y) = \int_{\sin x}^{x^2+y^2} e^{t^2} dt$.

f) $f(x,y) = \int_x^{\int_b^y g(s)ds} g(t)dt$.

Bài 35. Cho hàm *F* có 2 biến x, y. Ta nói *F* là *hàm thuần nhất* cấp $\alpha > 1$ nếu

$$F(tu,tv) = t^\alpha F(u,v)$$

với mọi *u*, *v*, *t*.

Chứng minh rằng nếu *F* là thuần nhất cấp α thì

a) $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = \alpha F(x,y).$

b) $x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)F(x,y).$

Bài 36. Cho hàm *F* là hàm thuần nhất cấp hai. Đặt $u = r^m F(x,y)$ với $r^2 = x^2 + y^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + m(m+4)r^{m-2}F.$$

Bài 37. Chứng minh rằng hàm số $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{n-1}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ thỏa mãn điều kiện

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$$

trong đó φ, ψ là các hàm số có đạo hàm riêng đến cấp 2.

Bài 38. Cho $Au = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Tìm Au và $A^2u = A(Au)$ nếu

a) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

b) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Bài 39. Tìm vi phân cấp một và cấp hai của các hàm hợp sau

a) $u = f(s,t)$ với $s = x + y$, $t = x - y$.

b) $u = f(s,t)$ với $s = xy$, $t = \dfrac{x}{y}$.

c) $u = f(x,y,z)$ với $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

d) $u = f(x,y,z)$ với $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = 2st$.

Bài 40. Tìm hàm $u = u(x,y)$ thỏa

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^4$, $u(0,0) = 1$, $u(1,1) = 2$.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2y$, $u(x,x^2) = 1$.

c) $\dfrac{\partial u}{\partial y^2} = 2$, $u(x,0) = 1$, $u_y(x,0) = x$.

Bài 41. Giả sử $u = u(x,y)$ là hàm khả vi và với $y = x^2$ ta có $u(x,y) = 1$ và $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x$.

Tìm $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ với $y = x^2$.

Bài 42. Giả sử $u = u(x,y)$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ và các điều kiện

$u(x,2x) = x$, $u_x(x,2x) = x^2$. Tìm $u_{xx}(x,2x)$, $u_{xy}(x,2x)$, $u_{yy}(x,2x)$.

Bài 43. Tính đạo hàm cấp một của hàm $y = y(x)$ xác định bởi các phương trình

a) $x^2 - xy + y^3 = 8$.

b) $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 6$.

c) $\cos(x - y) = xe^y$.

d) $x\cos y + y\cos x = 1$.

e) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0.$ f) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0.$

Bài 44. Tính đạo hàm riêng cấp một của hàm $z = z(x,y)$ xác định bởi các phương trình

a) $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 3$. b) $xyz = \cos(x+y+z)$.

c) $xe^y + yx + ze^x = 0$. d) $\ln(x+yz) = 1 + xy^2z^3$.

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz.$ f) $e^z - xyz = 0.$

Bài 45. Tính $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ biết $u(x,y),\ v(x,y)$ xác định bởi

a) $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y, \\ u - 2v^2 = x - 2y. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + u + v = 0, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1. \end{cases}$ d) $\begin{cases} e^u + u\sin v = x, \\ e^u - u\cos v = y. \end{cases}$

Bài 46. Tính đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm ẩn $y = y(x)$ biết

a) $y = x + \ln y$. b) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

Bài 47. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. b) $x + y + z = e^z$.

Bài 48. Tính $\frac{dy}{dx}(0)$ nếu $y\sin x - \cos(x-y) = 0$ với giả thiết rằng $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Bài 49. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ nếu biết $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ và tính $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2)$ nếu tại $x = 1,\ y = 2$ thì $z = 2$.

Bài 50. Các phương trình sau có thể đổi thành dạng $z = f(x,y)$ tại gần các điểm (x_0,y_0,z_0) không? Tính $z_x(x_0,y_0)$, $z_y(x_0,y_0)$ nếu có biểu diễn thành dạng $z = f(x,y)$

a) $x + y + z - \sin xyz = 0$, $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$.

b) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$.

c) $x^2 + 2xy + z^2 - yz = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

Bài 51. Cho $z = f(x, y)$ với $f(0,0) = 0$. Tìm $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ nếu

$$x + y + z - \sin(xyz) = 0.$$

Bài 52. Cho $u = f(x, y), v = g(x, y)$ thỏa $f(0,1) = 1, g(0,1) = -1$ và

$$\begin{cases} u^3 + xv - y = 0, \\ v^3 + yu - x = 0. \end{cases}$$

Tìm $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,1)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}(0,1)$.

Bài 53. Tìm Jacobian trong các trường hợp sau

a) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ với $u = \dfrac{y}{\tan x}, v = \dfrac{y}{\sin x}, y > 0, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ với $u = 2x - 3y, v = -x + 2y$.

Bài 54. Cho x và y là các hàm ẩn theo t xác định bởi phương trình

$$x^3 + e^x - t^2 - t = 0, \ \ yt^2 + y^2 t - t + y = 0,$$

và xét hàm $z = e^x \cos y$. Tính $\dfrac{dz}{dt}$ tại $t = 0$.

Bài 55. Phương trình $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}.$$

Bài 56. Cho hàm $u(x, y, z)$ xác định bởi $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$. Tính $\mathrm{d}u$.

Bài 57. Cho hàm $z(x, y)$ xác định bởi

a) $z - x = \arctan \dfrac{y}{z - x}$. Tính $\mathrm{d}z$.

b) $xyz = x + y + z$. Tính dz, d^2z.

c) $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$. Tính $dz(1,1), d^2z(1,1)$.

d) $z - ye^{x/z} = 0$. Tính $dz(0,1)$.

Bài 58. Cho u, v là hàm của hai biến x, y xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{uv} + u + v = x + 1, \\ uv + u^2 + v = x + y. \end{cases}$$

Với giả thiết rằng $u(0,0) = 0,\ v(0,0) = 0$. Tính $du(0,0),\ dv(0,0)$.

Bài 59. Cho

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \qquad (1)$$

và $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

a) Tính $f_x(1,1,1)$ nếu $z = z(x,y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (1).

b) Tính $f_x(1,1,1)$ nếu $y = y(x,z)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (1).

Bài 60. Cho hàm ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi phương trình

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

Hãy tính z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} khi $x = 1, y = -2, z = 1$.

Bài 61. Viết khai triển Taylor đến cấp n cho trước của $f(x,y)$ quanh (x_0, y_0)

a) $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, $n = 2$, $(x_0,y_0) = (1,-2)$.

b) $f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$, $n = 2$, $(x_0,y_0) = (2,-1)$.

c) $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $n = 10$, $(x_0,y_0) = (-2,1)$.

d) $f(x,y) = \cos x \cos y$, $n = 2$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

e) $f(x,y) = \sin x \cos y$, $n = 1$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

f) $f(x,y) = x^y$, $n = 3$, $(x_0,y_0) = (1,1)$.

g) $f(x,y) = \frac{y}{x}$, $n = 3$, $(x_0,y_0) = (1,1)$.

h) $f(x,y)=e^x\cos y$, $n=3$, $(x_0,y_0)=(0,\pi)$.

i) $f(x,y)=\ln(xy)$, $n=3$, $(x_0,y_0)=(1,1)$.

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

§1. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Tương tự như đối với hàm một biến, người ta có thể ứng dụng phép tính vi phân để khảo sát bài toán tìm cực đại, cực tiểu, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm nhiều biến.

I. Cực trị tự do

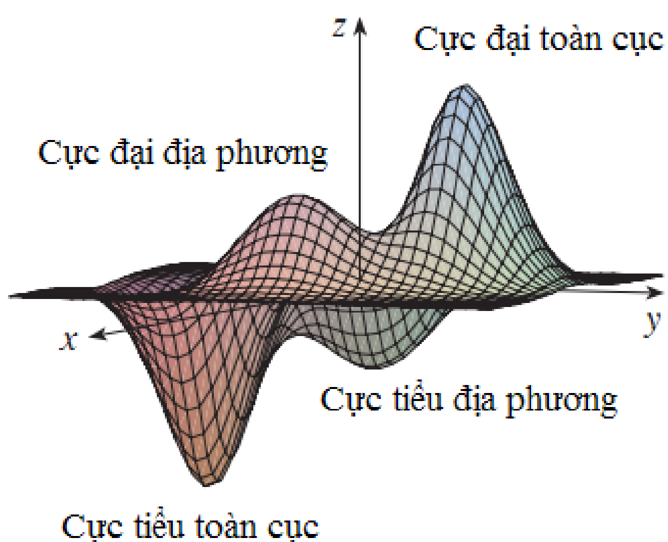
Định nghĩa 1.1. Cho hàm số $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$.

f được gọi là đạt *cực đại địa phương* (*cực đại*) tại x^0 nếu tồn tại lân cận $\Omega \subset D$ của x^0 sao cho $f(x) \le f(x^0), \forall x \in \Omega$.

f được gọi là đạt *cực tiểu địa phương* (*cực tiểu*) tại x^0 nếu tồn tại lân cận $\Omega \subset D$ của x^0 sao cho $f(x) \ge f(x^0), \forall x \in \Omega$.

Cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương gọi chung là *cực trị địa phương*.

Chú ý rằng, cực đại địa phương chưa chắc là cực đại toàn cục (giá trị lớn nhất). Cực tiểu địa phương chưa chắc là cực tiểu toàn cục (giá trị nhỏ nhất).



Mệnh đề 1.2 (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị). *Cho* $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *là hàm có đạo hàm riêng theo các biến trên D. Nếu hàm số f đạt cực trị địa phương tại* $x^0 \in D$ *thì*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0,\ \forall i = \overline{1, n}. \tag{3.1}$$

Đẳng thức (3.1) *có thể viết lại dưới dạng vectơ là*

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

Chứng minh. Ta xét hàm

$$\varphi(x_i) = f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0),\quad i = \overline{1, n}.$$

Đó là hàm một biến thực x_i. Vì hàm f có cực trị địa phương tại x^0 nên tại đó hàm $\varphi(x_i)$ có cực trị địa phương tại $x_i = x_i^0$ và do đó

$$\frac{\partial \varphi(x_i^0)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0,\ \forall i = \overline{1, n}.$$ ■

II. Điểm dừng, điểm tới hạn, điểm yên ngựa

Những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 được gọi là *điểm dừng*.

Những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 hoặc có ít nhất một trong các đạo hàm riêng không tồn tại được gọi là *điểm tới hạn*, đó là điểm nghi ngờ có cực trị.

Điểm x^0 mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 và trong một lân cận bất kỳ của nó tồn tại các điểm y^0, z^0 sao cho $f(y^0) < f(x^0) < f(z^0)$, được gọi là *điểm yên ngựa*.

Chú ý 2.1. Từ điều kiện cần ở trên suy ra rằng nếu f đạt cực trị tại x^0 thì x^0 là điểm dừng của f. Điều ngược lại không chắc đúng, nghĩa là không phải mọi điểm dừng đều là cực trị.

Ví dụ 2.1. Cho $f(x,y) = y^2 - x^2$.

a) Chứng minh rằng $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Chứng minh f không đạt cực trị tại (0,0).

Giải

a) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

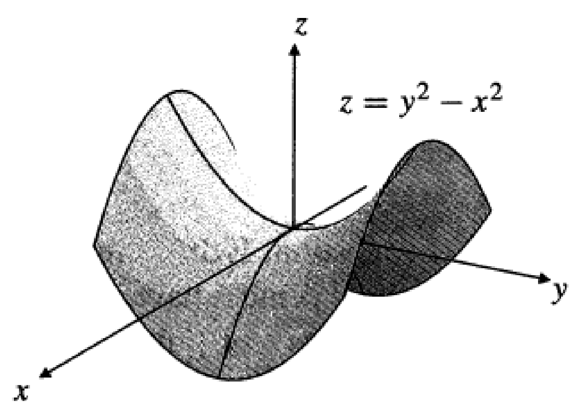
suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

b) Với $r > 0$ bất kỳ, ta có hai điểm $\left(\frac{r}{2},0\right), \left(0,\frac{r}{2}\right) \in B\big((0,0),r\big)$ sao cho

$$f\left(\frac{r}{2},0\right) = \frac{-r^2}{4} < 0 = f(0,0) \text{ và } f\left(0,\frac{r}{2}\right) = \frac{r^2}{4} > 0 = f(0,0).$$

Vậy, f không đạt cực trị tại (0,0).



Chú ý 2.2. Có khi hàm f không tồn tại các đạo hàm riêng tại x^0 nhưng hàm f vẫn đạt cực trị tại x^0.

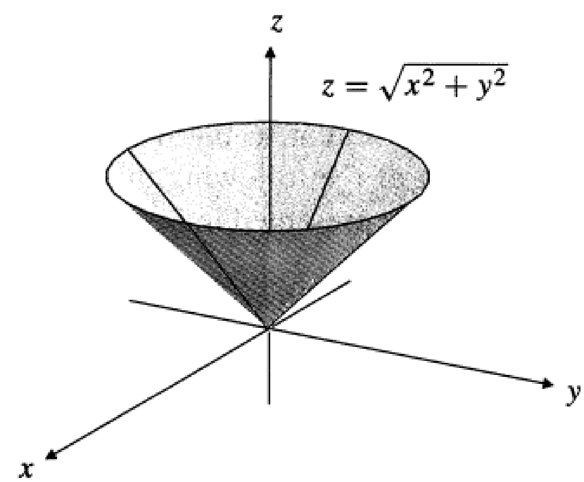
Ví dụ 2.2. Cho $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ xác định trên $\mathbb{R}^2$. Ta thấy

$$f(x,y)\geq 0=f(0,0),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Vậy, f đạt cực tiểu địa phương tại (0,0). Nhưng

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

không tồn tại. Tương tự $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ không tồn tại.



Cũng giống như trường hợp hàm một biến, người ta có thể dùng các đạo hàm cấp hai để xây dựng một điều kiện đủ để xác định cực trị tại các điểm dừng.

Với hàm $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trên D và điểm dừng $x^0\in D$, ta có $\nabla f(x^0)=0$ và do công thức Taylor,

$$f(x^0+h)-f(x^0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(x^0)h_ih_j+\|h\|^2\varepsilon(h), \tag{3.2}$$

thỏa với $h=(h_1,...,h_n)=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$ đủ nhỏ và $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. Đặt

$$\varphi(h,k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(x^0)h_ik_j.$$

Ta có

$$\varphi(h,k) = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} H_f(x^0) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

trong đó

$$H_f(x^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x^0) & f_{x_1x_2}(x^0) & \dots & f_{x_1x_n}(x^0) \\ f_{x_2x_1}(x^0) & f_{x_2x_2}(x^0) & \dots & f_{x_2x_n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x^0) & f_{x_nx_2}(x^0) & \dots & f_{x_nx_n}(x^0) \end{pmatrix}.$$

Do đó, φ là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ xác định bởi ma trận $H_f(x^0)$. Ma trận $H_f(x^0)$ còn được gọi là *ma trận Hesse* của f tại x^0. Chú ý rằng, do định lý 1.5 (chương 2), $H_f(x^0)$ là một ma trận đối xứng. Ta có

Định lý 2.3 (Điều kiện đủ để hàm nhiều biến đạt cực trị)

i) Nếu φ là một dạng toàn phương xác định dương, nghĩa là $\varphi(h,h) > 0, \forall h \neq 0,$

thì f đạt cực tiểu địa phương tại x^0;

ii) Nếu φ là một dạng toàn phương xác định âm, nghĩa là $\varphi(h,h) < 0, \forall h \neq 0,$

thì f đạt cực đại địa phương tại x^0;

iii) Nếu tồn tại $h,k \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\varphi(h,h) > 0$ và $\varphi(k,k) < 0$ thì x^0 không là cực trị địa phương của f.

Chú ý 2.4. Nếu tồn tại $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $\varphi(h,h) = 0$ thì ta chưa có kết luận tổng quát.

Chứng minh. Khi $\varphi(h,h) > 0, \forall h \neq 0,$ đặt $\lambda = \frac{1}{2}\inf_{\|h\|=1}\varphi(h,h)$ do tính compắc của mặt cầu $S = \left\{h \in \mathbb{R}^n \middle| \|h\| = 1\right\},$ $\exists h_0 \in S$ sao cho $\lambda = \frac{1}{2}\varphi(h_0,h_0) > 0.$ Với $h \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, xét $k = \frac{h}{\|h\|}$ ta có $\|k\| = 1,$ do đó

$$\varphi(k,k) \geq 2\lambda,$$

suy ra

$$\varphi(h,h) \geq 2\lambda\|h\|^2$$

và do đó (3.2) cho

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \frac{1}{2}\varphi(h,h) + \|h\|^2\varepsilon(h)$$

$$\geq \left(\lambda + \varepsilon(h)\right)\|h\|^2 > 0$$

khi h đủ nhỏ và do đó, f đạt cực tiểu địa phương tại x^0.

Trường hợp $\varphi(h,h) < 0, \forall h \neq 0$ được chứng minh tương tự.

Khi $\varphi(h,h) > 0$ và $\varphi(k,k) < 0,$ hàm $g_1(t) = f(x^0 + th)$ và $g_2(t) = f(x^0 + tk)$ có các đạo hàm liên tục đến cấp hai trên một lân cận của $0 \in \mathbb{R},$ $g_1'(0) = g_2'(0) = 0,$ $g_1''(0) > 0$ và $g_2''(0) < 0$ nên 0 là điểm cực tiểu địa phương của g_1 và là điểm cực đại địa phương của g_2. Suy ra x^0 không là cực trị địa phương của f. ■

Từ tiêu chuẩn Sylvester trong đại số và định lý 2.3, ta có kết quả sau

Định lý 2.5. *Giả sử hàm n biến* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên lân cận của điểm dừng* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. *Đặt*

$$\Delta_k(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_k} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_kx_1} & f_{x_kx_2} & \cdots & f_{x_kx_k} \end{vmatrix},\ k=\overline{1,n}$$

là định thức của ma trận con có được từ ma trận $H_f(x)$ bằng cách lấy các phần tử ở k dòng đầu và k cột đầu.

i) Nếu $\Delta_1(x^0)>0, \Delta_2(x^0)>0, \Delta_3(x^0)>0,..., \Delta_n(x^0)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x^0;

ii) Nếu $\Delta_1(x^0)<0, \Delta_2(x^0)>0, \Delta_3(x^0)<0,...,(-1)^n\Delta_n(x^0)>0$ thì f đạt cực đại tại x^0;

iii) Nếu $\Delta_k(x^0)\neq 0, \forall k=\overline{1,n}$ nhưng không thỏa i) và ii) thì f không đạt cực trị tại x^0;

iv) Nếu $\exists k\in\{1,...,n\}$ sao cho $\Delta_k(x^0)=0$ thì ta không có kết luận tổng quát.

Cụ thể, trong trường hợp hàm ba biến $f(x,y,z)$ với điểm dừng (x_0,y_0,z_0). Ta có

$$\Delta_1(x,y,z)=\left|f_{xx}\right|=f_{xx},\ \Delta_2(x,y,z)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix},\ \Delta_3(x,y,z)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}.$$

i) Nếu $\begin{cases} \Delta_1(x_0,y_0,z_0)>0 \\ \Delta_2(x_0,y_0,z_0)>0 \\ \Delta_3(x_0,y_0,z_0)>0 \end{cases}$ thì f đạt cực tiểu tại (x_0,y_0,z_0);

ii) Nếu $\begin{cases} \Delta_1(x_0,y_0,z_0)<0 \\ \Delta_2(x_0,y_0,z_0)>0 \\ \Delta_3(x_0,y_0,z_0)<0 \end{cases}$ thì f đạt cực đại tại (x_0,y_0,z_0);

iii) Nếu $\begin{cases}\Delta_1(x_0,y_0,z_0)\neq 0\\ \Delta_2(x_0,y_0,z_0)<0\\ \Delta_3(x_0,y_0,z_0)\neq 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}\Delta_1(x_0,y_0,z_0).\Delta_3(x_0,y_0,z_0)<0\\ \Delta_2(x_0,y_0,z_0)>0\end{cases}$ thì f không đạt cực trị tại (x_0,y_0,z_0);

iv) Nếu $\exists k\in\{1,2,3\}$ sao cho $\Delta_k(x_0,y_0,z_0)=0$ thì ta không có kết luận tổng quát.

Trong trường hợp hàm hai biến $f(x,y)$ với điểm dừng (x_0,y_0). Ta có

Định lý 2.6 (Điều kiện đủ để hàm hai biến đạt cực trị). *Giả sử hàm hai biến $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên lân cận của điểm dừng (x_0,y_0). Đặt*

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}.$$

i) Nếu $\begin{cases}\Delta(x_0,y_0)>0\\ f_{xx}(x_0,y_0)>0\end{cases}$ *thì f đạt cực tiểu tại (x_0,y_0);*

ii) Nếu $\begin{cases}\Delta(x_0,y_0)>0\\ f_{xx}(x_0,y_0)<0\end{cases}$ *thì f đạt cực đại tại (x_0,y_0);*

iii) Nếu $\Delta(x_0,y_0)<0$ thì f không đạt cực trị tại (x_0,y_0);

iv) Nếu $\Delta(x_0,y_0)=0$ thì ta không có kết luận tổng quát.

Ví dụ 2.3. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $f(x,y)=-x^2-y^2+2x+4y+6$.

b) $f(x,y)=xy-2x-y$.

c) $f(x,y)=x^2+3y^4+4y^3-12y^2$.

d) $f(x,y)=x^3+3xy^2+3y^2-15x+2$.

e) $f(x,y)=x^2+y^4$.

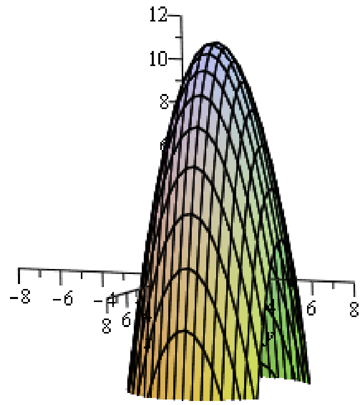
f) $f(x,y)=x^2+y^3$.

g) $f(x,y)=2-x-2y$.

Giải

a) Miền xác định: $D=\mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x=-2x+2,\ f_y=-2y+4$.



$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2=0 \\ -2y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}.$$

Ta được 1 điểm dừng: (1,2).

Lại có $f_{xx}=-2,\ f_{yy}=-2,\ f_{xy}=f_{yx}=0$

$$\Rightarrow \Delta(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=4.$$

Vì $\begin{cases} \Delta(1,2)=4>0 \\ f_{xx}(1,2)=-2<0 \end{cases}$ nên f đạt cực đại tại (1,2), $f_{\text{CĐ}}=f(1,2)=11$.

b) Miền xác định: $D=\mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x=y-2,\ f_y=x-1$.

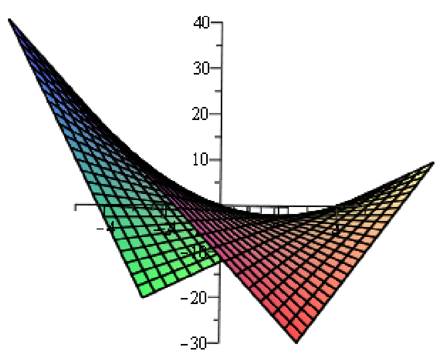
$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Ta được 1 điểm dừng: (1,2).

Lại có $f_{xx}=0,\ f_{yy}=0,\ f_{xy}=f_{yx}=1$

$$\Rightarrow \Delta(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1.$$

Vì $\Delta(1,2)=-1<0$ nên f không đạt cực trị tại (1,2).



c) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x = 2x,\ f_y = 12y^3 + 12y^2 - 24y$.

Giải hệ $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ta được 3 điểm dừng: (0,0); (0,1); (0,-2).

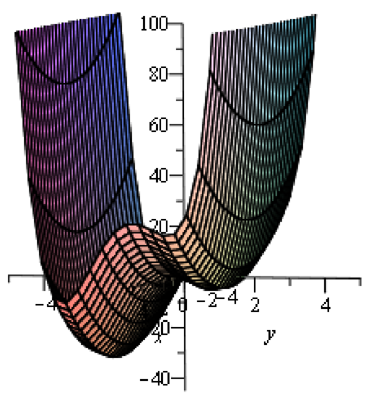
Lại có $f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 36y^2 + 24y - 24,\ f_{xy} = f_{yx} = 0$

$$\Rightarrow \Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 36y^2 + 24y - 24 \end{vmatrix}.$$

Tại (0,0): $\Delta(0,0) = -48 < 0 \Rightarrow f$ không đạt cực trị tại (0,0).

Tại (0,1): $\begin{cases} \Delta(0,1) = 72 > 0 \\ f_{xx}(0,1) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại (0,1), $f_{\text{CT}} = f(0,1) = -5$.

Tại (0,-2): $\begin{cases} \Delta(0,-2) = 144 > 0 \\ f_{xx}(0,-2) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại (0,-2), $f_{\text{CT}} = f(0,-2) = -32$.



d) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15,\ f_y = 6xy + 6y$.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ta được 4 điểm dừng: $(-1,2),(-1,-2),(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$.

Lại có $f_{xx} = 6x,\ f_{yy} = 6x + 6,\ f_{xy} = 6y = f_{yx}$

$$\Rightarrow \Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x+6 \end{vmatrix}$$

Tại $(-1,2)$: $\Delta(-1,2) = -4 < 0 \Rightarrow$ f không đạt cực trị tại $(-1,2)$.

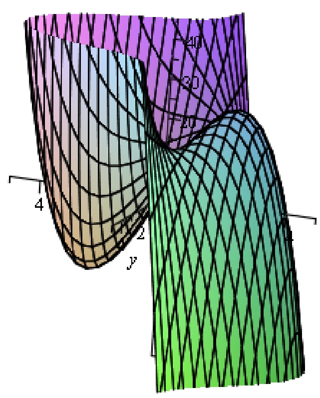
Tại $(-1,-2)$: $\Delta(-1,-2) = -4 < 0 \Rightarrow$ f không đạt cực trị tại $(-1,-2)$.

Tại $(\sqrt{5},0)$: $\begin{cases} \Delta(\sqrt{5},0) = 5+\sqrt{5} > 0 \\ f_{xx}(\sqrt{5},0) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại $(\sqrt{5},0)$,

$$f_{\text{CT}} = f(\sqrt{5},0) = 2 - 10\sqrt{5} \approx -20{,}36.$$

Tại $(-\sqrt{5},0)$: $\begin{cases} \Delta(-\sqrt{5},0) = 5-\sqrt{5} > 0 \\ f_{xx}(-\sqrt{5},0) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ f đạt cực đại tại $(-\sqrt{5},0)$,

$$f_{\text{CĐ}} = f(-\sqrt{5},0) = 2 + 10\sqrt{5} \approx 24{,}36.$$



e) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x = 2x,\ f_y = 4y^3$.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ta được 1 điểm dừng: (0,0).

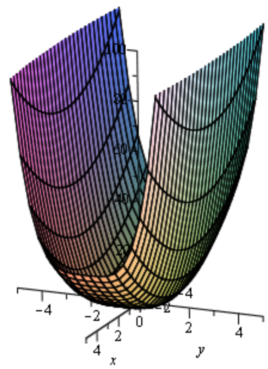
Lại có $f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 12y^2,\ f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$$\Rightarrow \Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta(0,0) = 0.$$

Ta có $f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Vậy, f đạt cực tiểu tại (0,0), $f_{CT} = f(0,0) = 0$.



f) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x = 2x,\ f_y = 3y^2$.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ta được 1 điểm dừng: (0,0).

Lại có $f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 6y,\ f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$$\Rightarrow \Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta\left(0,0\right) = 0.$$

Với $r > 0$ bất kỳ, ta có hai điểm $\left(\frac{r}{2},0\right),\left(0,\frac{-r}{2}\right) \in B\left((0,0),r\right)$ sao cho

$$f\left(\frac{r}{2},0\right) = \frac{r^2}{4} > 0 = f(0,0) \text{ và } f\left(0,\frac{-r}{2}\right) = \frac{-r^3}{8} < 0 = f(0,0).$$

Vậy, f không đạt cực trị tại (0,0).

g) Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x = -1 \neq 0,\ f_y = -2 \neq 0 \Rightarrow f$ không có điểm dừng.

Vậy, f không có cực trị.

Ví dụ 2.4. Tìm cực trị của hàm số sau

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 2z^2 - 3x - 2y - 4z.$$

Giải

Miền xác định: $D = \mathbb{R}^3$.

Ta có: $f_x = 3x^2 - 3,\ f_y = 2y - 2,\ f_z = 4z - 4$.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 4z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Ta được 2 điểm dừng: (1,1,1); (-1, 1, 1).

Lại có: $f_{xx} = 6x,\ f_{yy} = 2,\ f_{zz} = 4,\ f_{xy} = f_{yx} = f_{xz} = f_{zx} = f_{yz} = f_{zy} = 0$.

Ta có

$$\Delta_1 = \left| f_{xx} \right| = 6x,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Tại (1,1,1): $\Delta_1(1,1,1) = 6 > 0,\ \Delta_2(1,1,1) = 12 > 0,\ \Delta_3(1,1,1) = 48 > 0$

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại (1,1,1), $f_{CT} = f(1,1,1) = -5$.

Tại (-1,1,1): $\Delta_1(-1,1,1) = -6 < 0,\ \Delta_2(-1,1,1) = -12 < 0,\ \Delta_3(1,1,1) = -48 < 0$

$\Rightarrow f$ không đạt cực trị tại (-1,1,1).

III. Cực trị có điều kiện

Trong mục I, ta đã xét bài toán cực trị của hàm số $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ trong đó các biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$ không chịu sự ràng buộc bởi bất cứ điều kiện bổ sung nào. Vì vậy, người ta còn gọi đó là *cực trị tự do* hay *cực trị không điều kiện*.

Trong thực tế, nhiều bài toán đòi hỏi chúng ta tìm cực trị của hàm số $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ mà trong đó các biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$ phải thỏa mãn những điều kiện ràng buộc bổ sung. Những cực trị dạng này được gọi là *cực trị có điều kiện*.

Ví dụ 3.1. Tìm điểm nằm trên mặt phẳng (P): $3x-2y+z=1$ gần điểm $I(1,-2,0)$ nhất.

Giải

Cách 1 (*phương pháp hình giải tích*)

Dễ thấy: $I\notin(P)$. Gọi $M(x,y,z)\in(P)$ là điểm cần tìm.

M gần điểm $I(1,-2,0)$ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I xuống mp (P).

Gọi $d\begin{cases}\text{qua}\, I(1,-2,0)\\ \perp(P)\end{cases}\Rightarrow d\begin{cases}\text{qua}\, I(1,-2,0)\\ \text{vtcp}\ \overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n_P}=(3,-2,1)\end{cases}$ có phương trình

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}.$$

M là hình chiếu vuông góc của I xuống mp (P) nên $M=d\cap(P)$. Tọa độ M thỏa hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}\\ 3x-2y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-2}{7}\\ y=\dfrac{-8}{7}\\ z=\dfrac{-3}{7}\end{cases}.$$

Vậy điểm cần tìm là $M\left(\dfrac{-2}{7},\dfrac{-8}{7},\dfrac{-3}{7}\right)$.

Cách 2 (*cực trị có điều kiện*)

Gọi $M(x,y,z)\in(P)$ là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ điểm $I(1,-2,0)$ đến điểm M là

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+z^2}.$$

Vì vậy, ta dẫn đến bài toán: tìm cực tiểu của hàm số

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+z^2}$$

trong đó các biến x,y,z thỏa mãn điều kiện

$$3x - 2y + z = 1.$$

Hơn nữa, $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2}$ đạt cực tiểu khi d^2 đạt cực tiểu. Vì vậy, ta xét bài toán tìm cực tiểu của hàm số

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2$$

với điều kiện

$$3x - 2y + z = 1.$$

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ với *m* điều kiện (với $1 \le m < n$) sau

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Điểm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số f với điều kiện (*) nếu tồn tại lân cận $\Omega \subset D$ của x^0 sao cho $f(x) \ge f(x^0), \forall x \in \Omega$ và *x* thỏa mãn điều kiện (3.3).

Điểm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$ được gọi là điểm cực đại của hàm số f với điều kiện (*) nếu tồn tại lân cận $\Omega \subset D$ của x^0 sao cho $f(x) \le f(x^0), \forall x \in \Omega$ và *x* thỏa mãn điều kiện (3.3).

Hàm f gọi là đạt cực tiểu (hay cực đại) có điều kiện tại x^0 gọi chung là *cực trị có điều kiện*.

IV. Cách tìm cực trị có điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa *m* điều kiện (3.3) (với $1 \le m < n$).

Cách 1 (Phương pháp khử biến số). Nếu từ (3.3), ta giải tìm được $x_1, x_2, ..., x_m$ theo $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$, nghĩa là, ta có

$$\begin{cases} x_1 = h_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \\ x_2 = h_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \\ ... \\ x_m = h_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \end{cases}$$

thì khi đó $u = f(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$ là hàm có $n-m$ biến. Khi đó, ta tìm cực trị tự do của hàm $n-m$ biến.

Ví dụ 4.1. Giải tiếp ví dụ 3.1 bằng phương pháp khử biến số.

Giải

Nhắc lại, bài toán trong ví dụ 3.1 là: tìm cực tiểu của hàm số

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \qquad (3.4)$$

với điều kiện

$$3x - 2y + z = 1. \qquad (3.5)$$

Ta có $(3.5) \Leftrightarrow z = 1 - 3x + 2y$. Thế vào (3.4), ta được

$$F(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + \left(1 - 3x + 2y\right)^2.$$

Bây giờ, tìm cực tiểu của hàm $F(x,y)$ ta được F đạt cực tiểu tại (-2/7, -8/7) $\Rightarrow x_M = -2/7, y_M = -8/7, z_M = -3/7$.

Vậy, điểm cần tìm là $M\left(\frac{-2}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-3}{7}\right)$.

Cách 2 (Phương pháp nhân tử Lagrange)

Đặt

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

trong đó $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, L là hàm Lagrange, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ là các nhân tử Lagrange.

Định lý 4.1 (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị có điều kiện). *Giả sử* $f, g_1, g_2, ..., g_m$ *có các đạo hàm riêng cấp 1 tại* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *và* f *đạt cực trị tại* x^0 *thỏa m điều kiện* (3.3) (với $1 \le m < n$) *thì* $\exists \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$ *sao cho*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0) = 0, \quad \forall k = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x^0) = g_j(x^0) = 0, \quad \forall j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Nếu $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$ là một nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = 0, \quad \forall k = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x_1, x_2, ..., x_n) = g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad \forall j = \overline{1,m} \end{cases}$$

thì $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ được gọi là điểm dừng ứng với $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$.

Định lý 4.2 (Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị có điều kiện). *Giả sử* f *có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên lân cận của điểm dừng* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *ứng với* $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$ *và* $g_1, g_2, ..., g_m$ *có các đạo hàm riêng cấp một tại* x^0. *Đặt*

$\Delta_k(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$

$$= \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_k} & (g_1)_{x_1} & (g_2)_{x_1} & \cdots & (g_m)_{x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_k} & (g_1)_{x_2} & (g_2)_{x_2} & \cdots & (g_m)_{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_kx_1} & L_{x_kx_2} & \cdots & L_{x_kx_k} & (g_1)_{x_k} & (g_2)_{x_k} & \cdots & (g_m)_{x_k} \\ (g_1)_{x_1} & (g_1)_{x_2} & \cdots & (g_1)_{x_k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (g_2)_{x_1} & (g_2)_{x_2} & \cdots & (g_2)_{x_k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & (g_m)_{x_2} & \cdots & (g_m)_{x_k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \ k = \overline{m+1,n}.$$

i) Nếu $(-1)^{m}\Delta_k(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)>0,\ \forall k=\overline{m+1,n}$ *thì hàm f đạt cực tiểu thỏa điều kiện* (3.3) tại $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$.

ii) Nếu $(-1)^{k}\Delta_k(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)>0,\ \forall k=\overline{m+1,n}$ *thì hàm f đạt cực đại thỏa điều kiện* (3.3) tại $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$.

iii) Nếu $\Delta_k(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)\neq 0,\ \forall k=\overline{m+1,n}$ *nhưng không thỏa i) và ii) thì f không đạt cực trị tại* $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$.

iv) Nếu $\exists k\in\{m+1,...,n\}$ *sao cho* $\Delta_k(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)=0$ *thì ta không có kết luận tổng quát.*

Cụ thể, ta có

4.1. Phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị có điều kiện của hàm 2 biến thỏa 1 điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm $z=f(x,y)$ với điều kiện

$$g(x,y)=0. \tag{3.6}$$

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y).$$

Bước 2:

Tính L_x, L_y.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L_x=0\\ L_y=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$ để tìm các điểm dừng (x_0,y_0) ứng với λ_0.

Bước 3: Tính $\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x\\ L_{yx} & L_{yy} & g_y\\ g_x & g_y & 0\end{vmatrix}$.

Bước 4: Biện luận

Nếu $\Delta(x_0,y_0,\lambda_0)<0$ thì hàm f đạt cực tiểu thỏa điều kiện (3.6) tại (x_0,y_0).

Nếu $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì hàm f đạt cực đại thỏa điều kiện (3.6) tại (x_0, y_0).

Nếu $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ thì ta không có kết luận tổng quát.

Ví dụ 4.2. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Ta có $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Đặt

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

$$L = f + \lambda g = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ta có $L_x = -4 + 2\lambda x$, $L_y = -3 + 2\lambda y$.

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \qquad (3.7)$$

Nếu $\lambda = 0$ thì $-4 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow -4 = 0$ (vô lý).

Nếu $\lambda \neq 0$ thì

$$(3.7) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\lambda} \\ y = \dfrac{3}{2\lambda} \\ \dfrac{4}{\lambda^2} + \dfrac{9}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\lambda} \\ y = \dfrac{3}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \dfrac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{5}{2} \\ x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \dfrac{-5}{2} \\ x = \dfrac{-4}{5} \\ y = \dfrac{-3}{5} \end{cases}.$$

Ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}.$$

Với $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ thì $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 8/5 \\ 0 & 5 & 6/5 \\ 8/5 & 6/5 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0 \Rightarrow f$ đạt cực tiểu thỏa điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ tại $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Với $\lambda = \frac{-5}{2}, x = \frac{-4}{5}$, $y = \frac{-3}{5}$ thì $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -8/5 \\ 0 & -5 & -6/5 \\ -8/5 & -6/5 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0 \Rightarrow f$ đạt cực đại thỏa điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ tại $\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$.

4.2. Phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị có điều kiện của hàm 3 biến thỏa 1 điều kiện

Xét bài toán tìm cực trị của hàm $u = f(x, y, z)$ với điều kiện

$$g(x, y, z) = 0. \tag{3.8}$$

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

Bước 2:

Tính L_x, L_y, L_z.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ để tìm các điểm dừng (x_0, y_0, z_0) ứng với λ_0.

Bước 3:

Tính $H_2 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}$, $H_3 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} & g_y \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix}$.

Bước 4: Biện luận

Nếu $\begin{cases} H_2(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) < 0 \\ H_3(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực tiểu thỏa điều kiện (3.8) tại (x_0,y_0,z_0).

Nếu $\begin{cases} H_2(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) > 0 \\ H_3(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực đại thỏa điều kiện (3.8) tại (x_0,y_0,z_0).

Nếu $\begin{cases} H_2(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) \neq 0 \\ H_3(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm f không đạt cực trị thỏa điều kiện (3.8) tại (x_0,y_0,z_0).

Nếu $\exists k \in \{2,3\}$ sao cho $H_k(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) = 0$ thì ta không có kết luận tổng quát.

Ví dụ 4.3. Giải tiếp ví dụ 3.1 bằng phương pháp nhân tử Lagrange.

Giải

Nhắc lại, bài toán trong ví dụ 3.1 là: tìm cực tiểu của hàm số

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2$$

với điều kiện $3x - 2y + z = 1$.

Ta có $3x - 2y + z = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 1 = 0$.

Đặt

$$g(x,y,z) = 3x - 2y + z - 1,$$

$$L = f + \lambda g = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 + \lambda\left(3x - 2y + z - 1\right).$$

Ta có $L_x = 2(x-1) + 3\lambda$, $L_y = 2(y+2) - 2\lambda$, $L_z = 2z + \lambda$.

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{7} \\ y = \dfrac{-8}{7} \\ z = \dfrac{-3}{7} \\ \lambda = \dfrac{6}{7} \end{cases}. \tag{3.9}$$

Ta có

$$H_2 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -26,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} & g_y \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -56.$$

Với $\lambda = \dfrac{6}{7},\ x = \dfrac{-2}{7},\ y = \dfrac{-8}{7},\ z = \dfrac{-3}{7}$ thì $H_2 = -26 < 0,\ H_3 = -56 < 0.$

Vậy, f đạt cực tiểu thỏa điều kiện $3x - 2y + z = 1$ tại $M\left(\dfrac{-2}{7}, \dfrac{-8}{7}, \dfrac{-3}{7}\right)$.

Ví dụ 4.4. Tìm cực đại, cực tiểu của $f(x,y,z) = x + y - z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Đặt $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $L = f + \lambda g$.

Ta có

$$L_x = f_x + \lambda g_x = 1 + 2\lambda x,$$

$$L_y = f_y + \lambda g_y = 1 + 2\lambda y,$$

$$L_z = f_z + \lambda g_z = -1 + 2\lambda z.$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Ta có

$$H_2 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix},$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} & g_y \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2z \\ 2x & 2y & 2z & 0 \end{vmatrix}.$$

Với $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì

$$H_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & \dfrac{-2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} & \dfrac{-2}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}} & \dfrac{-2}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad H_3 = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & \dfrac{-2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \dfrac{-2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}} & \dfrac{-2}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu thỏa điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tại $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Với $\lambda = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ thì $H_2 > 0$, $H_3 < 0$

$\Rightarrow f$ đạt cực đại thỏa điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tại $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

§2. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

I. Định nghĩa. Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$.

f đạt *giá trị lớn nhất (cực đại toàn cục)* tại x^0 nếu $f(x) \le f(x^0), \forall x \in D$.

f đạt *giá trị nhỏ nhất (cực tiểu toàn cục)* tại x^0 nếu $f(x) \ge f(x^0), \forall x \in D$.

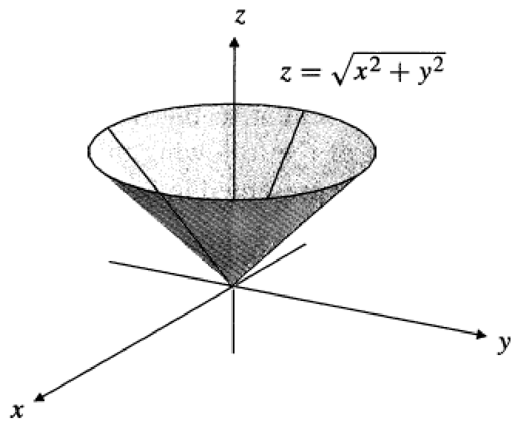
Ký hiệu $\min\limits_D f(x)$ là giá trị nhỏ nhất của f trên *D*, $\max\limits_D f(x)$ là giá trị lớn nhất của f trên *D*.

Nói cách khác, ta có

$$m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \ \forall x \in D, \\ \exists x^0 \in D : f(x^0) = m. \end{cases}$$

$$M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \ \forall x \in D, \\ \exists x^0 \in D : f(x^0) = M. \end{cases}$$

Ví dụ 1.1. Cho $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ xác định trên $D=\mathbb{R}^2$. Ta thấy $f(x,y)\geq 0=f(0,0),\ \forall (x,y)\in D$. Vậy, f đạt giá trị nhỏ nhất tại (0,0) và $\min\limits_{D} f(x,y)=f(0,0)=0$.



II. Bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền đóng và bị chặn

Cho hàm $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ liên tục trên $D\subset\mathbb{R}^n$, với *D* là *miền đóng và bị chặn* trong $\mathbb{R}^n$. Tìm $\min\limits_{D} f(x)$, $\max\limits_{D} f(x)$.

Nhắc lại rằng, nếu hàm số f liên tục trên một miền đóng và bị chặn *D* thì f đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên *D*.

Tương tự như trường hợp hàm một biến, ta thấy: giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên miền đóng và bị chặn có thể đạt trên biên, có thể đạt tại điểm trong mà tại đó ít nhất một đạo hàm riêng không tồn tại và có thể đạt tại điểm trong mà tại đó tất cả đạo hàm riêng đều bằng 0. Nếu giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất đạt được ở điểm trong thì tất nhiên đó phải là điểm cực trị địa phương. Do đó, để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm trên miền đóng và bị chặn *D*, ta tìm những điểm tới hạn của nó ở trong *D*, tính giá trị của hàm số tại các điểm ấy và so sánh chúng với những giá trị của hàm số trên biên của *D*.

Cụ thể, xét $D=U\cup\partial D$, trong đó U là tập các điểm trong của *D* và $\partial D=\left\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)=0\right\}$ là tập các điểm biên của *D*, ta thực hiện theo các bước như sau

Bước 1: Tìm điểm dừng của f trong U bằng cách giải hệ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$$

hoặc những điểm mà tại đó đạo hàm riêng không tồn tại.

Bước 2: Tìm điểm dừng (có điều kiện) của f trên ∂D bằng 2 cách

Cách 1: Phương pháp khử biến số.

Cách 2: Dùng hàm Lagrange, cụ thể ta giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ \forall i = \overline{1, n} \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

trong đó $L = f + \lambda g$ là hàm Lagrange.

Bước 3: Tính giá trị của f tại tất cả các điểm dừng, số nhỏ nhất trong chúng là $\min\limits_D f(x)$, số lớn nhất trong chúng là $\max\limits_D f(x)$.

Chú ý rằng nếu ở bước 2, ta dùng cách 1 thì ở bước 3, ta phải tính thêm giá trị của f tại các "*điểm góc*" (giao điểm của các cạnh hay cung).

Ví dụ 2.1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ trên miền $x^2 + y^2 \le 1$.

Giải

Đặt $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\} \Rightarrow D$ đóng và bị chặn. Vì f liên tục trên D nên f đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên D.

Tìm điểm dừng trong $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = 0 \end{cases} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \in U$$

$\Rightarrow$ trong U có 1 điểm dừng: $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Tìm điểm dừng trên $\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$:

Ta có $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Đặt

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1,\ L = f + \lambda g = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1}{2} \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \dfrac{-3}{2} \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ trên ∂D có 4 điểm dừng: $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right), (1,0), (-1,0)$.

Ta có

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{-1}{4},$$

$$f\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4},\ f\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4},\ f(1,0) = 0,\ f(-1,0) = 2.$$

Vậy

$$\min_D f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{-1}{4},$$

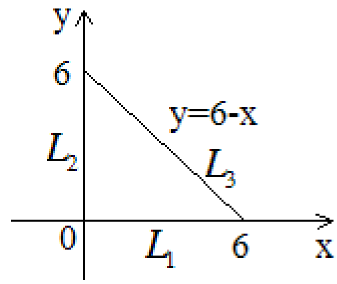
$$\max_D f(x,y) = f\left(\frac{-1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 2.2. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm

$$f(x,y) = x^2 y(2 - x - y)$$

trên miền giới hạn bởi các đường $x = 0,\ y = 0,\ y = 6 - x$.

Giải



Đặt $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0, y\le 6-x\right\}\Rightarrow D$ đóng và bị chặn. Vì f liên tục trên D nên f đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên D.

Tìm điểm dừng trong $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, y<6-x\right\}$:

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(4-3x-2y)=0 \\ x^2(2-x-2y)=0 \end{cases},$$

vì $x>0, y>0$ nên $\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=4 \\ x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ thỏa điều kiện $y<6-x$.

$\Rightarrow$ trong U có 1 điểm dừng: $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Tìm điểm dừng trên $L_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0, 0<x<6\right\}$: vì $y=0$ nên $f(x,0)=0$ $\forall x$. Do đó, trên L_1 có vô số điểm dừng là tất cả những điểm thuộc L_1.

Tìm điểm dừng trên $L_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, 0<y<6\right\}$: vì $x=0$ nên $f(0,y)=0$ $\forall y$. Do đó, trên L_2 có vô số điểm dừng là tất cả những điểm thuộc L_2.

Tìm điểm dừng trên $L_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=6-x,\ 0<x<6\right\}$: vì $y=6-x$ nên

$$f(x,6-x)=-4x^2(6-x),\ 0<x<6,$$

$f_x=12x(x-4)$

$f_x=0\Leftrightarrow 12x(x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(0,6) \\ x=4\in(0,6)\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ trên L_3 có 1 điểm dừng: $(4,2)$.

Ta có

$$f\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ f(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in L_1,L_2,\ f(4,2)=-128,$$

$$f(0,0)=0,\ f(0,6)=0,\ f(6,0)=0.$$

Vậy

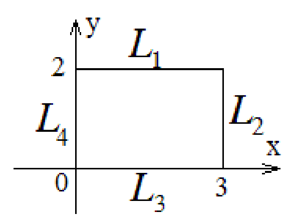
$$\min_D f(x,y)=f(4,2)=-128,$$

$$\max_D f(x,y)=f\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2.3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ trên miền

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\right\}.$$

Giải



Ta có $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\right\}\Rightarrow D$ đóng và bị chặn. Vì f liên tục trên D nên f đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên D.

Tìm điểm dừng trong $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0< x< 3,\ 0< y< 2\right\}$:

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases},\ (1,1)\in U.$$

$\Rightarrow$ trong U có 1 điểm dừng: $(1,1)$.

Tìm điểm dừng trên $L_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=2, 0<x<3\right\}$: vì $y=2$ nên

$$f(x,2)=x^2-4x+4,\ 0<x<3,$$

$f_x = 2x - 4$

$f_x = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (0,3)$.

$\Rightarrow$ trên L_1 có 1 điểm dừng: $(2,2)$.

Tìm điểm dừng trên $L_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3, 0 < y < 2\right\}$: vì $x = 3$ nên

$$f(3,y) = 9 - 4y,\ 0 < y < 2,$$

$f_y = -4 \neq 0$

$\Rightarrow$ trên L_2 không có điểm dừng.

Tìm điểm dừng trên $L_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 < x < 3\right\}$: vì $y = 0$ nên

$$f(x,0) = x^2,\ 0 < x < 3,$$

$f_x = 2x$

$f_x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,3)$

$\Rightarrow$ trên L_3 không có điểm dừng.

Tìm điểm dừng trên $L_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 < y < 2\right\}$: vì $x = 0$ nên

$$f(0,y) = 2y,\ 0 < y < 2,$$

$f_y = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ trên L_4 không có điểm dừng.

Ta có

$$f(1,1) = 1,\ f(2,2) = 0,$$

$$f(0,0) = 0,\ f(3,0) = 9,\ f(3,2) = 1,\ f(0,2) = 4.$$

Vậy

$$\min_D f(x,y) = f(0,0) = f(2,2) = 0,$$

$$\max_D f(x,y) = f(3,0) = 9.$$

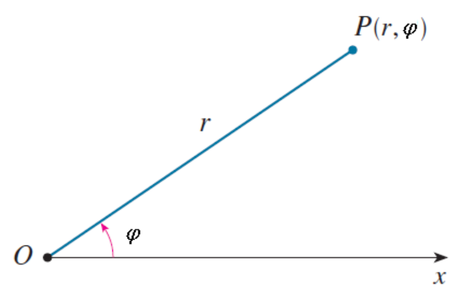
§3. ĐƯỜNG CONG TRONG MẶT PHẲNG

I. Hệ tọa độ cực

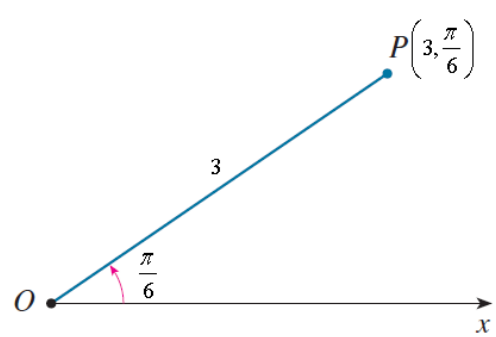
Khi biểu diễn tọa độ một điểm trong mặt phẳng, ta thường biểu diễn qua hoành độ và tung độ của điểm đó trong hệ tọa độ Descartes cho trước. Trong thực tế, chúng ta còn có thể biểu diễn tọa độ của một điểm trong *hệ tọa độ cực*.

Trên mặt phẳng, ta chọn một điểm O cố định gọi là *cực* và tia Ox nằm ngang gọi là *trục cực*.

Khi đó, nếu P là một điểm nằm trong mặt phẳng thì vị trí của P hoàn toàn được xác định bởi cặp số (r,φ), gọi là *tọa độ cực* của điểm P. Trong đó, r là khoảng cách từ P đến O, còn gọi là *bán kính cực* và φ là *góc cực* tạo bởi trục cực Ox và tia OP (như hình vẽ). Ta quy ước góc φ dương nếu Ox quay theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.



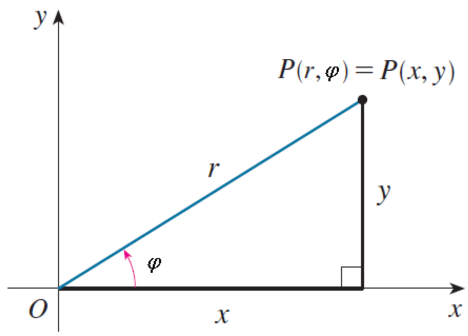
Chú ý rằng, có nhiều hơn một cặp giá trị (r,φ) cùng xác định vị trí của một điểm P. Ví dụ, các cặp số $\left(3,\dfrac{\pi}{6}+n2\pi\right)$, $n\in\mathbb{Z}$ đều xác định vị trí của một điểm P trong hệ tọa độ cực.



Do đó, nếu quy ước $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ thì mỗi điểm P trong mặt phẳng sẽ ứng với một cặp số (r, φ) duy nhất. Đặc biệt, khi $r = 0$ và φ lấy giá trị tùy ý thì P sẽ trùng với gốc cực O.

Nếu ta chọn hệ tọa độ Descartes vuông góc sao cho gốc O trùng với cực, trục Ox trùng với trục cực thì giữa hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cực có công thức liên hệ sau

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



Từ công thức trên, ta có thể tìm tọa độ Descartes của một điểm khi biết tọa độ cực. Ngược lại, khi biết tọa độ cực, ta có thể tìm tọa độ Descartes bằng công thức sau

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \quad (x \ne 0)$$

Ví dụ 1.1. Tìm tọa độ Descartes của điểm có tọa độ cực là $(2, \pi / 3)$.

Giải

Ta có

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1, \\ y = r\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ Descartes của điểm đó là $(1, \sqrt{3})$.

Ví dụ 1.2. Tìm tọa độ cực của điểm có tọa độ Descartes là $(1,-1)$.

Giải

Ta có

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \tan\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-1}{1}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ \varphi=\dfrac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ cực của điểm đó là $\left(\sqrt{2},\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Trong nhiều trường hợp, nhất là khi vẽ đường cong, người ta hay dùng hệ *tọa độ cực mở rộng* $-\infty<r<+\infty, -\infty<\varphi<+\infty$. Khi đó, điểm P với hệ tọa độ Descartes sẽ không có tọa độ cực mở rộng duy nhất.

II. Đường cong trong mặt phẳng

2.1. Đường cong dưới dạng tường minh (dạng hiện)

Đường cong C được biểu diễn bởi phương trình dạng

$$y=y(x) \text{ hay } x=x(y).$$

Ví dụ 2.1. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $(-1,0)$ và $(0,1)$ là $y=x+1$ hay $x=y-1$.

Ví dụ 2.2. Vẽ các đường cong sau đây trong mặt phẳng Oxy

a) $y=\dfrac{x^2}{4}-1$.

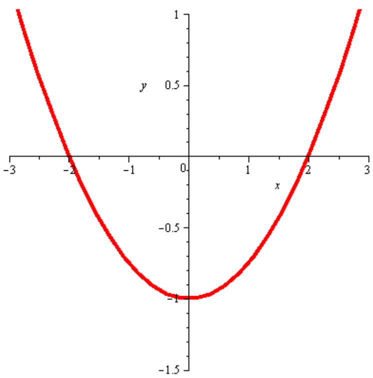
b) $x=y^2$.

c) $y=\sqrt{1-x^2}$.

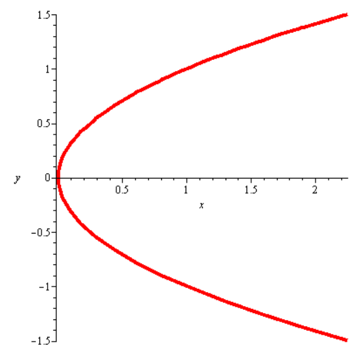
d) $x=-\sqrt{1-y^2}$.

Giải

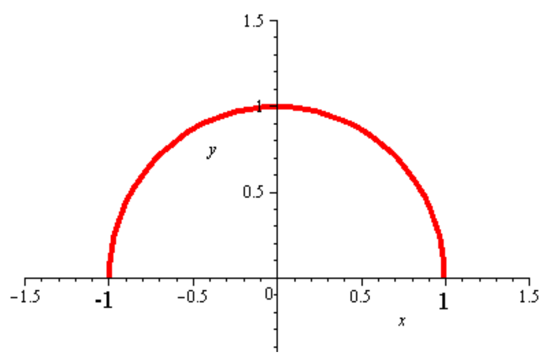
a)



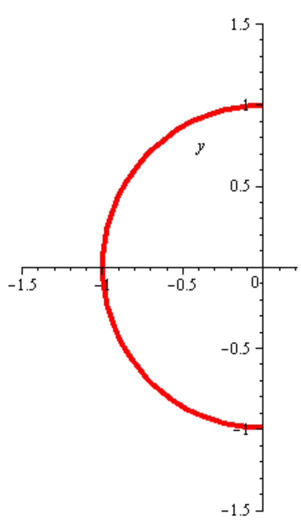
b)



c)



d)



2.2. Đường cong dưới dạng tham số

Đường cong C trong $\mathbb{R}^2$ được biểu diễn bởi phương trình tham số

$$C:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I\,, \tag{3.10}$$

trong đó I là một khoảng bị chặn hay không bị chặn trong $\mathbb{R}$.

Nếu $x(t)$, $y(t)$ khả vi (hay khả vi liên tục), ta nói C khả vi (hay khả vi liên tục).

Chú ý rằng, bản thân tập I và hệ (3.10) được gọi là *một phép tham số hóa* của C.

Cùng một đường cong C có thể có nhiều phép tham số hóa.

Ví dụ 2.3. Phương trình tham số của đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ đi qua điểm $M(x_0, y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

và nếu $a_1.a_2 \neq 0$ thì ta có phương trình *chính tắc*

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Ví dụ 2.4. Phương trình tham số của đường tròn tâm $M(x_0, y_0)$ và có bán kính R là

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ví dụ 2.5. Phương trình tham số của đường elip có tâm tại gốc tọa độ, hai bán trục là a và b là

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ví dụ 2.6. Nếu phương trình đường cong có dạng $y = y(x)$ thì ta có thể tham số hóa như sau

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tương tự, nếu phương trình đường cong có dạng $x = x(y)$ thì ta có thể tham số hóa như sau

$$\begin{cases} y = t, \\ x = x(t), \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2.7. Cho đường cong C có phương trình $y = x^2$, $x \in [-1,2]$. Ta có thể tham số hóa theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} t \in [-1,2] \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2-t, \\ y = (2-t)^2, \end{cases} t \in [0,3].$$

Ví dụ 2.8. Cho đường cong C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 2t-2, \\ y = 3t+1, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Ta có thể viết phương trình của C dưới dạng $y = y(x)$ như sau

Từ $x = 2t - 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}x + 1$, thế vào $y = 3t + 1$, ta được phương trình

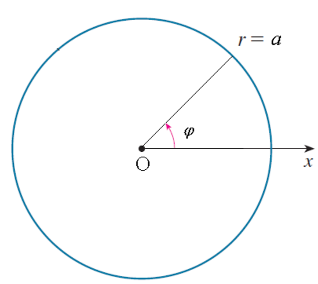
$$y = \frac{3}{2}x + 4.$$

2.3. Đường cong dưới dạng phương trình cực

Xét hàm số $r = r(\varphi)$, φ nằm trong miền xác định (α, β) của $r(\varphi)$. Khi góc cực φ biến thiên từ α đến β thì điểm P với tọa độ cực $\left(r(\varphi), \varphi\right)$ vạch nên một đường cong C trong mặt phẳng. Ta nói đường cong C trong hệ tọa độ cực có phương trình

$$r = r(\varphi).$$

Ví dụ 2.9. Phương trình $r = a$ $(a > 0)$ là phương trình đường tròn tâm O, bán kính a trong hệ tọa độ cực.



Ví dụ 2.10. Viết phương trình tọa độ cực của đường tròn tâm $I(a,0)$, bán kính $r = a\ (a > 0)$.

Giải

Phương trình đường tròn tâm $I(a,0)$, bán kính $r = a\ (a > 0)$ trong hệ tọa độ Descartes là

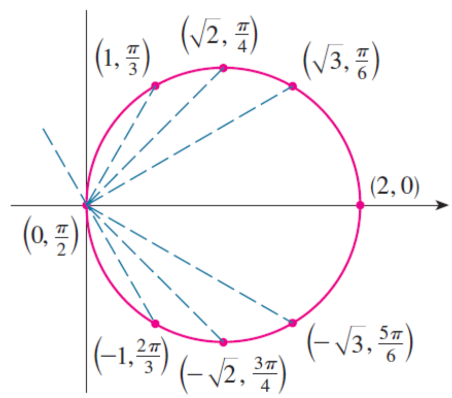
$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Khi đó, thay vào phương trình đường tròn ta được

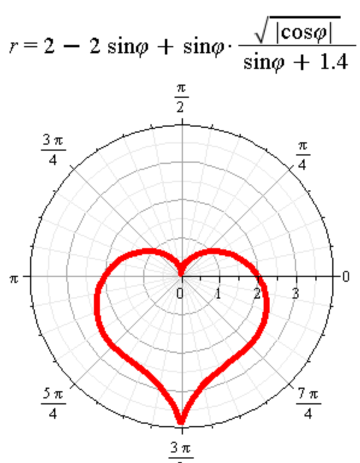
$$(r\cos\varphi - a)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2 \Leftrightarrow r = 2a\cos\varphi.$$

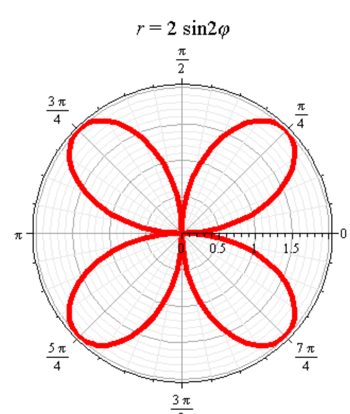
Giả sử cho $a = 1$, ta được phương trình đường tròn tâm I(1,0), bán kính $r = 1$ trong hệ tọa độ cực là $r = 2a\cos\varphi$ và ta có thể vẽ đường tròn đó trong hệ tọa độ cực như sau

φ	$r = 2\cos\varphi$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2



Ví dụ 2.11. Một số hình vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực





2.4. Đường cong dưới dạng không tường minh (dạng ẩn)

Đường cong C trong $\mathbb{R}^2$ được biểu diễn bởi phương trình dạng

$$F(x,y)=0.$$

Ở đây, $F(x,y)$ là hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục.

Ví dụ 2.12

i) Phương trình đường tròn tâm $M(x_0,y_0)$ và có bán kính R là

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

hoặc dưới dạng khai triển là $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+c=0$, trong đó

$$R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}.$$

ii) Đường elip có tâm tại gốc tọa độ, hai bán trục a và b là

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ (a,b>0).$$

iii) Đường hyperbol có tâm tại gốc tọa độ, hai bán trục là a và b, hai tiệm cận $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ là

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a,b>0).$$

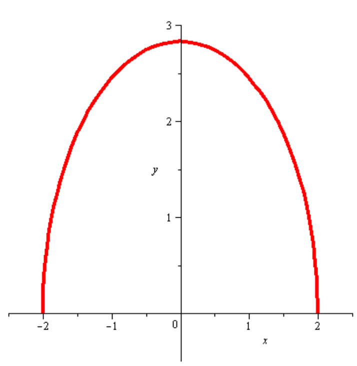
Ví dụ 2.13. Vẽ các đường cong sau đây

a) $y=\sqrt{8-2x^2}$.

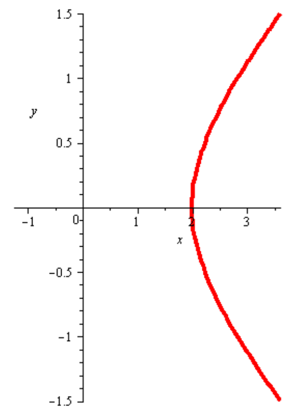
b) $x=2\sqrt{1+y^2}$.

Giải

a)



b)



§4. HÀM VECTƠ VÀ ĐƯỜNG CONG TRONG KHÔNG GIAN

I. Hàm vectơ một biến

Một hàm vectơ một biến là một quy tắc đặt tương ứng một số thực t trong $\mathbb{R}$ với một vectơ duy nhất trong $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là

$$\vec{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\right).$$

Hay nói cách khác, ánh xạ

$$\begin{aligned} \vec{f} : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \vec{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\right) \end{aligned}$$

được gọi là hàm vectơ một biến xác định trên D, trong đó

$$\begin{aligned} f_i : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f_i(t), i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

là các *hàm thành phần*.

Hàm vectơ $\vec{f}$ hoàn toàn xác định bằng các hàm thành phần và ta viết $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Đặc biệt, nếu $n = 1$ thì ta có một hàm số thực một biến.

Ví dụ 1.1. Tìm tập xác định của hàm vectơ một biến

$$\vec{f}(t)=\left(t^3,\ln(3-t),\sqrt{t}\right).$$

Giải

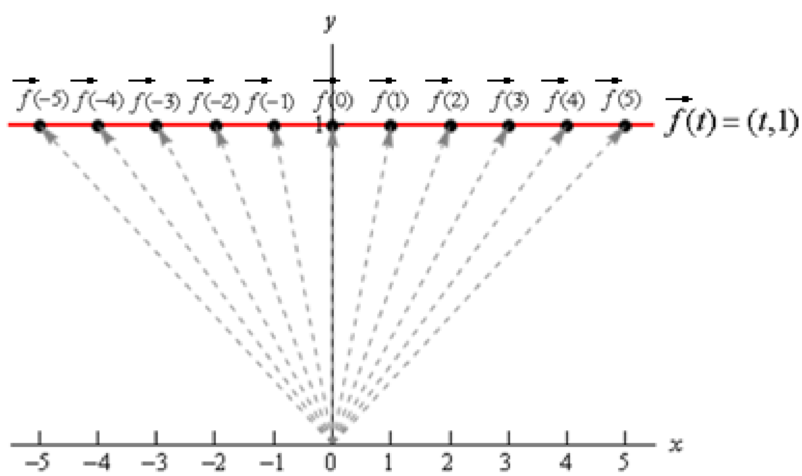
Hàm vectơ $\vec{f}$ có các hàm thành phần là

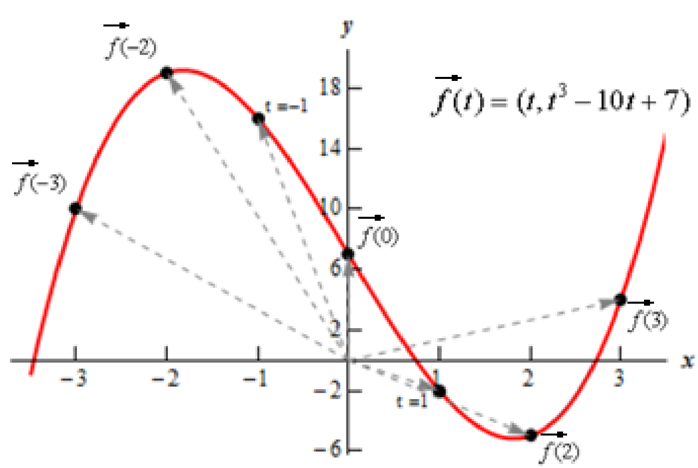
$$f_1(t)=t^3,\ f_2(t)=\ln(3-t),\ f_3(t)=\sqrt{t}\ .$$

$$\vec{f} \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 \\ f_2 \text{ xác định} \\ f_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t>0 \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le t<3.$$

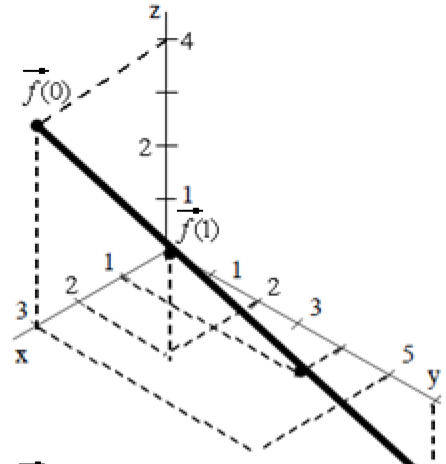
Vậy, tập xác định: $D=[0,3)$.

Ví dụ 1.2. Đồ thị của một số hàm vectơ một biến trong $\mathbb{R}^2$

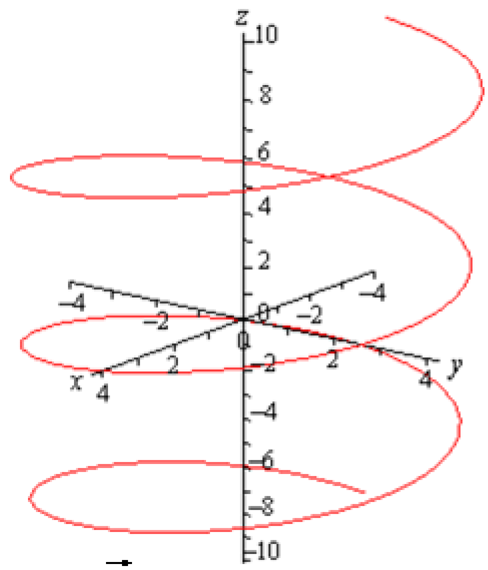




Ví dụ 1.3. Đồ thị của một số hàm vectơ một biến trong $\mathbb{R}^3$



$\vec{f}(t) = (3-t, 2t, 4-2t)$



$\vec{f}(t) = (4\cos t, 4\sin t, t)$

II. Giới hạn và tính liên tục của hàm vectơ

Định nghĩa 2.1. Xét hàm vectơ $\vec{f}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, vectơ $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ và $t_0 \in \mathbb{R}$.

i) $\vec{f}$ có giới hạn là $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ khi t tiến về t_0, ký hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\alpha}$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall t \in D, 0 < \left\| t - t_0 \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \vec{f}(t) - \vec{\alpha} \right\| < \varepsilon;$$

ii) f được gọi là liên tục tại $t_0 \in D$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$, nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in D, \left\| t - t_0 \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) \right\| < \varepsilon .$$

Bằng cách dùng các bất đẳng thức

$$\left| f_i(t) - \alpha_i \right| \le \left\| \vec{f}(t) - \vec{\alpha} \right\| \le \sum_{k=1}^{m} \left| f_k(t) - \alpha_k \right|,$$

$$\left| f_i(t) - f_i(t_0) \right| \le \left\| \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) \right\| \le \sum_{k=1}^{m} \left| f_k(t) - f_k(t_0) \right|,$$

với mọi $i = \overline{1,m}$, ta suy ra

Mệnh đề 2.2. *Cho* $\vec{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *với* $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ *và vectơ* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. *Ta có*

i) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = \alpha_i$, *với mọi* $i = \overline{1,m}$;

ii) $\vec{f}$ *liên tục tại* $t_0 \in D \Leftrightarrow f_i$ *liên tục tại* t_0, *với mọi* $i = \overline{1,m}$. *Suy ra rằng,* $\vec{f}$ *liên tục trên D nếu và chỉ nếu* f_i *liên tục trên D, với mọi* $i = \overline{1,m}$.

Ví dụ 2.1

a) $\lim\limits_{t \to 0} (\cos t, \sqrt{4+t}, 3e^{2t}) = \left(\lim\limits_{t \to 0} \cos t, \lim\limits_{t \to 0} \sqrt{4+t}, \lim\limits_{t \to 0} 3e^{2t} \right) = (1,2,3)$;

b) $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\dfrac{2t}{t+3}, \dfrac{5}{t}, 3 + \dfrac{\sin t}{2t} \right) = \left(\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{2t}{t+3}, \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{5}{t}, \lim\limits_{t \to \infty} \left(3 + \dfrac{\sin t}{2t} \right) \right) = (2,0,3)$.

Ví dụ 2.2. Hàm vectơ $\vec{f}(t) = (t, \sin t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ vì $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sin t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có hệ quả sau

Hệ quả 2.3. *Cho* $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *và* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *với* $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\vec{g} = (g_1, g_2, ..., g_n)$, *ta có* *i) Nếu* $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, h$ *liên tục tại* $t_0 \in D$ *thì* $a\overrightarrow{f} + b\overrightarrow{g}, h\overrightarrow{f}$ *liên tục tại* $t_0 \in D$ *với mọi* $a, b \in \mathbb{R}$. *Suy ra nếu* $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, h$ *liên tục trên D thì* $a\overrightarrow{f} + b\overrightarrow{g}, h\overrightarrow{f}$ *liên tục trên D với mọi* $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu t_0 *là một điểm tụ của D,* $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, h$ *có giới hạn tại* t_0 *thì với mọi* $a, b \in \mathbb{R}$, $a\overrightarrow{f} + b\overrightarrow{g}$ *có giới hạn tại* t_0 *và*

$$\lim_{t \to t_0} \left(a\overrightarrow{f}(t) + b\overrightarrow{g}(t) \right) = a.\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f}(t) + b.\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{g}(t),$$

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f}(t)\overrightarrow{g}(t) = \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f}(t).\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{g}(t).$$

Tóm lại, việc khảo sát giới hạn cũng như liên tục của hàm vectơ $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ được quy về việc khảo sát giới hạn cũng như liên tục của các hàm thành phần $f_i, i = \overline{1,n}$.

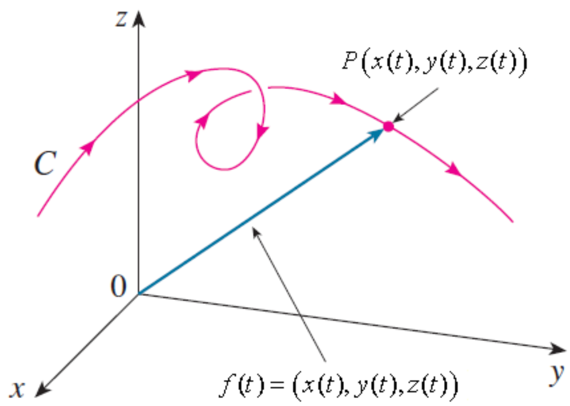
III. Đường cong trong không gian

Có một mối liên hệ giữa hàm vectơ liên tục và đường cong trong không gian. Giả sử $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ là những hàm số thực liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$. Khi đó, tập hợp tất cả các điểm (x, y, z) trong không gian, trong đó

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

với $t \in I$ được gọi là một đường cong trong không gian.

Nếu *I* là đoạn [*a*,*b*] thì đường cong *C* được gọi là một cung trong không gian. Điểm $\left(x(a), y(a), z(a)\right)$ được gọi là điểm đầu và điểm $\left(x(b), y(b), z(b)\right)$ được gọi là điểm cuối của cung *C*. Nếu điểm đầu và điểm cuối trùng với nhau thì *C* được gọi là một cung kín.



Do đó, một đường cong C trong không gian có thể được biểu diễn bởi phương trình tham số

$$C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Ngoài ra, đường cong C trong không gian còn được biểu diễn dưới dạng là giao tuyến của hai mặt

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = g(x, y) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

khi đó, hệ này gọi là phương trình không giải của đường.

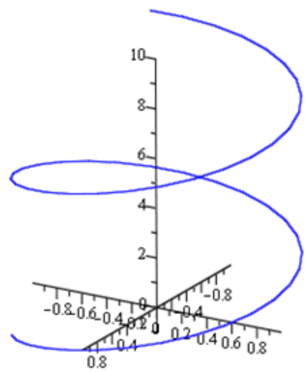
Ví dụ 3.1. Phương trình tham số của đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$ đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

và nếu $a_1.a_2.a_3 \neq 0$ thì ta có phương trình *chính tắc*

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Ví dụ 3.2. $C:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t, \end{cases}$ xác định một đường cong trong $\mathbb{R}^3$.



Ví dụ 3.3. Viết phương trình tham số của đường cong C là giao của $z=x^2-y$ và $z=2x$ với $y\le 8$.

Giải

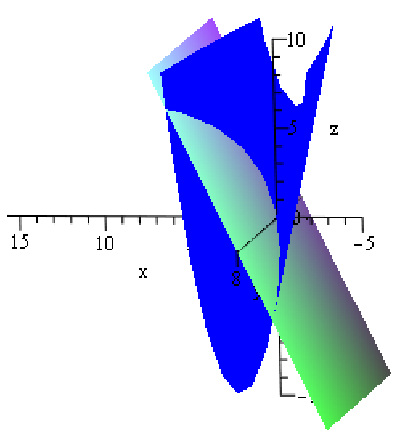
Ta có

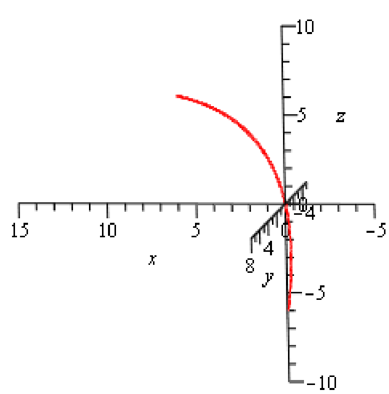
$$x^2-y=2x \Leftrightarrow y=x^2-2x.$$

Đặt $x=t$, suy ra $y=t^2-2t$. Vì $y\le 8$ nên $-2\le t\le 4$.

Vậy, phương trình tham số của C là

$$C:\begin{cases} x=t, \\ y=t^2-2t, \quad t\in[-2,4]. \\ z=2t, \end{cases}$$





Ví dụ 3.4. Viết phương trình tham số của đường cong C là giao của $y = x^2 + z^2$ và $y = 2z$.

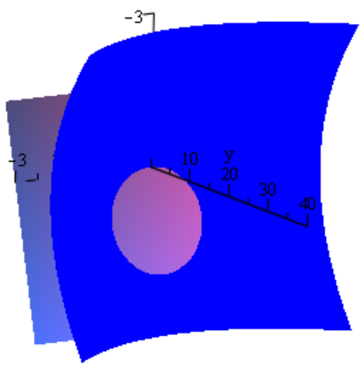
Giải

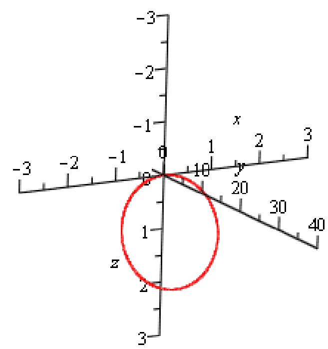
Ta có

$$x^2 + z^2 = 2z \Leftrightarrow x^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Đặt $\begin{cases} x = \cos t, \\ z = 1 + \sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, ta được phương trình tham số của C là

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2(1 + \sin t), \ t \in [0, 2\pi]. \\ z = 1 + \sin t, \end{cases}$$





Ví dụ 3.5. Viết phương trình tham số của đường cong C là giao của $x^2 + 4y^2 = 4$ và $x + y + z = 2$.

Giải

Ta có

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 2 - x - y \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, ta được phương trình tham số của C là

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, & t \in [0, 2\pi]. \\ z = 2 - 2\cos t - \sin t, \end{cases}$$

IV. Đạo hàm của hàm vectơ

Định nghĩa 4.1. Cho hàm vectơ $\vec{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ với $t_0 \in D$ sao cho tồn tại khoảng (a,b) thỏa $t_0 \in (a,b) \subset D.$ Đạo hàm của hàm vectơ $\vec{f}$ tại điểm t_0 là

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn.

Mệnh đề sau đây cho ta cách tính đạo hàm của hàm vectơ $\vec{f}$ qua các hàm thành phần

Mệnh đề 4.2. *Cho hàm vectơ $\vec{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ với $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Hàm vectơ $\vec{f}$ có đạo hàm tại t_0 khi và chỉ khi $f_1, f_2, ..., f_n$ có đạo hàm tại t_0 và khi đó ta có công thức*

$$\vec{f}'(t_0) = \left(f_1'(t_0), f_2'(t_0), ..., f_n'(t_0)\right).$$

Hơn nữa, ta có thể mở rộng các quy tắc tìm đạo hàm của hàm số thực cho hàm vectơ

Mệnh đề 4.3. *Cho $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ là hai hàm vectơ có đạo hàm, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thực có đạo hàm và c là một hằng số thực. Khi đó*

i) $\left[\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right]' = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t);$

ii) $\left[c\vec{f}(t)\right]' = c\vec{f}'(t);$

iii) $\left[h(t).\vec{f}(t)\right]' = h'(t).\vec{f}(t) + h(t).\vec{f}'(t);$

iv) $\left[\left\langle \vec{f}(t), \vec{g}(t) \right\rangle\right]' = \left\langle \vec{f}'(t), \vec{g}(t) \right\rangle + \left\langle \vec{f}(t), \vec{g}'(t) \right\rangle$;

v) $\left[\vec{f}\left(h(t)\right)\right]' = h'(t)\vec{f}'\left(h(t)\right)$.

Chú ý 4.4. Nếu hàm vectơ $\vec{f}(t)$ có đạo hàm thì đạo hàm $\vec{f}'(t)$ cũng là hàm vectơ. Nếu hàm vectơ $\vec{f}'(t)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được ký hiệu là $\vec{f}''(t)$ và được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm $\vec{f}(t)$. Tương tự, ta cũng có thể định nghĩa đạo hàm cấp *m* của $\vec{f}(t)$ và ký hiệu là $\vec{f}^{(m)}(t)$.

V. Tiếp tuyến và mặt phẳng pháp tuyến của đường cong trong không gian

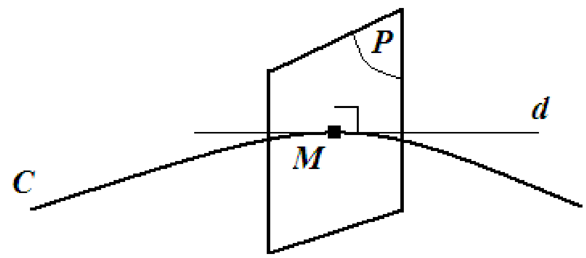
Vectơ đạo hàm $\vec{f}'(t_0)$ của hàm vectơ $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \ t \in I \subset \mathbb{R}$ có phương trùng với phương của tiếp tuyến của đường cong *C* cho bởi hàm vectơ đó tại điểm $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Nói cách khác, nếu đường cong *C* có phương trình tham số

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in I \subset \mathbb{R}$$

thì *tiếp tuyến* của *C* tại điểm $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ nhận $\vec{f}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ làm vectơ chỉ phương.

Hơn nữa, mặt phẳng đi qua *M* và vuông góc với tiếp tuyến của đường cong *C* tại điểm *M* được gọi là *mặt phẳng pháp tuyến* (hay *pháp diện*) của đường cong *C* tại điểm *M*. Khi đó, phương trình mặt phẳng pháp tuyến của đường cong *C* tại điểm *M* là

$$x'(t_0)\left(x - x(t_0)\right) + y'(t_0)\left(y - y(t_0)\right) + z'(t_0)\left(z - z(t_0)\right) = 0. \qquad (3.11)$$



d: tiếp tuyến; (*P*): mặt phẳng pháp tuyến.

Ví dụ 5.1. Viết phương trình tiếp tuyến và mặt phẳng pháp tuyến của đường cong *C* có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \;\; t \in \mathbb{R} \\ z = t, \end{cases}$$

tại điểm $M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Vì $M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \in C$ nên $t = \frac{\pi}{4}$.

Đặt $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, t),\; t \in \mathbb{R}$.

Ta có $\vec{f}'(t) = (-\sin t, \cot t, 1)$,

$$\vec{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Vậy, phương trình tiếp tuyến của *C* tại điểm M_0 là

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = z - \pi/4$$

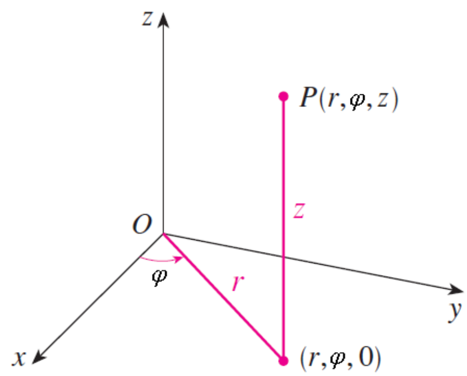
và phương trình mặt phẳng pháp tuyến tại M_0 là

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

§5. MẶT CONG TRONG KHÔNG GIAN

I. Hệ tọa độ trụ

Đây là một hệ tọa độ trong không gian ba chiều. Trong hệ tọa độ này, một điểm P được biểu diễn bởi bộ ba số (r,φ,z), trong đó (r,φ) là tọa độ cực của hình chiếu vuông góc của P lên mặt phẳng Oxy và z là khoảng cách từ P đến mặt phẳng Oxy. Nói cách khác, hệ tọa độ trụ được xem như là "hệ tọa độ cực với cao độ".



Nếu quy ước $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ thì mỗi điểm P trong không gian sẽ ứng với một cặp số (r,φ,z) duy nhất. Đặc biệt, chỉ có các điểm trên trục Oz thì $r = 0, \varphi$ tùy ý, z xác định.

Ta có công thức chuyển đổi từ tọa độ trụ sang tọa độ Descartes

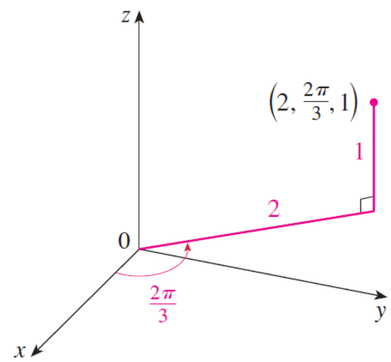
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \quad 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi. \\ z = z, \end{cases}$$

Công thức chuyển đổi từ tọa độ Descartes sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

Ví dụ 1.1. Biểu diễn điểm $\left(2, \dfrac{2\pi}{3}, 1\right)$ trong hệ tọa độ trụ và tìm tọa độ Descartes của điểm đó.

Giải



Ta có

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} = -1, \\ y = r\sin\varphi = 2\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sqrt{3}, \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ Descartes của điểm đó là $(-1, \sqrt{3}, 1)$.

Ví dụ 1.2. Tìm tọa độ trụ của điểm có tọa độ Descartes là $(3, -3, -7)$.

Giải

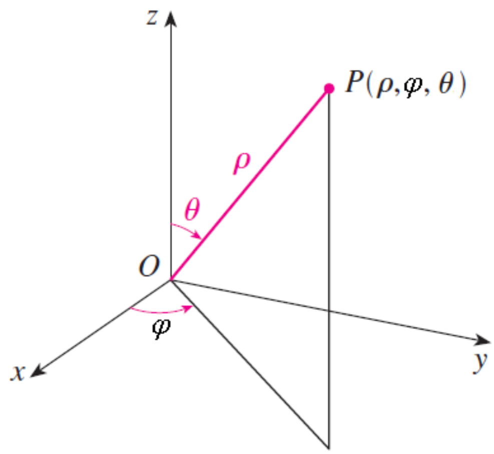
Ta có

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-3}{3} = -1, \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 3\sqrt{2}, \\ \varphi = \dfrac{7\pi}{4}, \\ z = -7. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ trụ của điểm đó là $\left(3\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4}, -7\right)$.

II. Hệ tọa độ cầu

Trong hệ tọa độ này, một điểm P được biểu diễn bởi bộ ba số (p, φ, θ) như hình vẽ



Ta có công thức chuyển đổi từ tọa độ cầu sang tọa độ Descartes

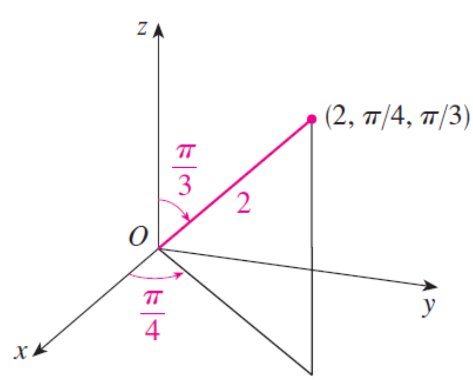
$$\begin{cases} x = p\cos\varphi\sin\theta, \\ y = p\sin\varphi\sin\theta, \quad 0 \le p < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi. \\ z = p\cos\theta, \end{cases}$$

Công thức chuyển đổi từ tọa độ Descartes sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\theta = \dfrac{z}{p}, \qquad\qquad (x \ne 0). \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

Ví dụ 2.1. Biểu diễn điểm $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ trong hệ tọa độ cầu và tìm tọa độ Descartes của điểm đó.

Giải



Ta có

$$\begin{cases} x = p\cos\varphi\sin\theta = 2\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3/2}, \\ y = p\sin\varphi\sin\theta = 2\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3/2}, \\ z = p\cos\dfrac{\pi}{3} = 1. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ Descartes của điểm đó là $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$.

Ví dụ 2.2. Tìm tọa độ cầu của điểm có tọa độ Descartes là $(-1, 1, -\sqrt{2})$.

Giải

Ta có

$$\begin{cases} p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1+1+2} = 2, \\ \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \\ \tan\varphi = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2, \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4}, \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ cầu của điểm đó là $\left(2, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Bây giờ, giả thiết rằng mọi hàm số nói đến sau đây đều liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục.

III. Mặt cong trong không gian

Giả sử đã xác định một hệ tọa độ vuông góc Oxyz trong không gian $\mathbb{R}^3$. Khi đó, một mặt cong S có thể được biểu diễn bởi phương trình *không giải* (dạng ẩn)

$$F(x, y, z) = 0. \tag{3.12}$$

Nếu từ (3.12) ta giải được

$$z = f(x, y) \text{ hoặc } y = g(x, z) \text{ hoặc } x = h(y, z) \tag{3.13}$$

thì các phương trình này gọi là *giải được* (dạng hiện) của mặt cong S.

Mặt cong S còn có thể biểu diễn dưới dạng phương trình *tham số*

$$S:\begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \quad (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2. \\ z = z(s,t), \end{cases} \tag{3.14}$$

Mặt cong *S* được gọi là một mặt liên tục nếu hàm *F* ở (3.12) liên tục trên *S* hoặc các hàm ở (3.14) liên tục trên *D*.

Ví dụ 3.1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng là

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

trong đó $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0$.

Ví dụ 3.2. Phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ví dụ 3.3. Vẽ mặt phẳng (P): $2x + 3y + 4z = 12$.

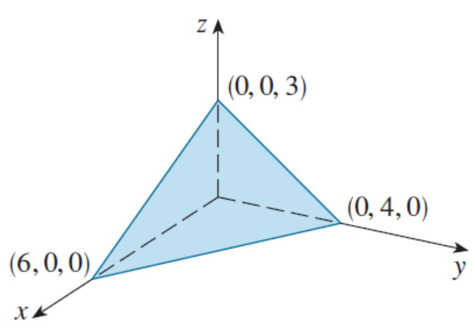
Giải

Ta lần lượt tìm giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục tọa độ.

Cho $y = z = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (P) \cap Ox = (6,0,0)$.

Cho $x = z = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (P) \cap Oy = (0,4,0)$.

Cho $x = y = 0 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow (P) \cap Oz = (0,0,3)$.



Ví dụ 3.4. Phương trình tham số của mặt phẳng *S* đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ là

$$S:\begin{cases} x = x_0 + a_1 s + b_1 t, \\ y = y_0 + a_2 s + b_2 t, \ \ (s,t) \in \mathbb{R}^2. \\ z = z_0 + a_3 s + b_3 t, \end{cases}$$

Ví dụ 3.5. Phương trình tham số của mặt cầu S có tâm $M(x_0, y_0, z_0)$ và bán kính R là

$$S:\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi. \\ z = z_0 + R\cos\theta, \end{cases}$$

IV. Một số mặt bậc hai quan trọng trong $\mathbb{R}^3$

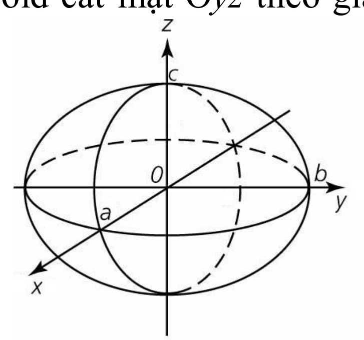
4.1. Mặt elipsoid

Mặt elipsoid tâm $O(0,0,0)$, ba bán trục a, b và c là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a,b,c > 0).$$

Mặt elipsoid cắt các mặt tọa độ theo các elip.

Cho $x = 0 \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, nghĩa là mặt elipsoid cắt mặt Oyz theo giao tuyến là elip $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Tương tự



Cho $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Cho $z = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Đặc biệt, khi $a = b = c$, ta được mặt cầu tâm O, bán kính a.

4.2. Mặt paraboloid eliptic

Mặt paraboloid eliptic có đỉnh $O(0,0,0)$ là

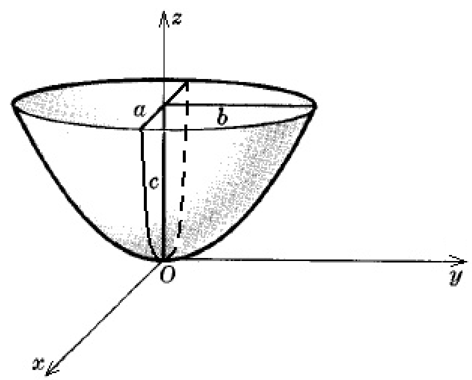
$$z = c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),\ (a,b > 0),$$

trong đó $c > 0$: mặt cong hướng lên trên, $c < 0$: mặt cong hướng xuống dưới.

Cho $x = 0 \Rightarrow z = \frac{c}{b^2} y^2$, nghĩa là mặt paraboloid eliptic cắt mặt Oyz theo giao tuyến là parabol $z = \frac{c}{b^2} y^2$. Tương tự, cho $y = 0 \Rightarrow z = \frac{c}{a^2} x^2$.

Cho $z = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$.

Cho $z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ paraboloid eliptic cắt mặt phẳng $z = c$ theo giao tuyến là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



4.3. Mặt nón

Mặt nón có đỉnh $O(0,0,0)$ là

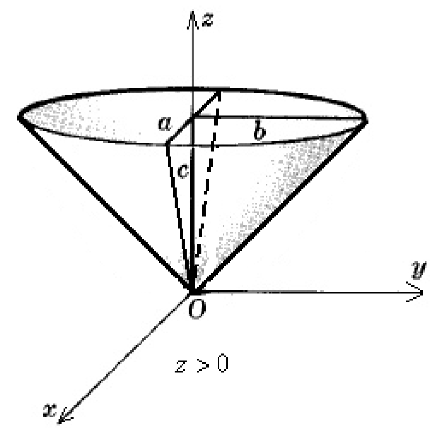
$$z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, (a,b,c > 0)$$

trong đó $z > 0$: nón hướng lên trên, $z < 0$: nón hướng xuống dưới.

Cho $x = 0 \Rightarrow z = \pm\frac{c}{b}|y|$, nghĩa là mặt nón cắt mặt Oyz theo giao tuyến là đường có phương trình $z = \pm\frac{c}{b}|y|$. Tương tự, cho $y = 0 \Rightarrow z = \pm\frac{c}{a}|x|$.

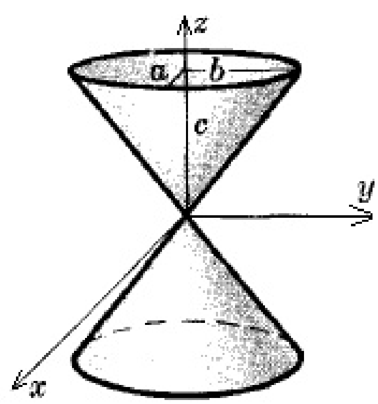
Cho $z = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$.

Cho $z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ mặt nón cắt mặt phẳng $z = c$ theo giao tuyến là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Mặt nón bậc hai có đỉnh $O(0,0,0)$ là

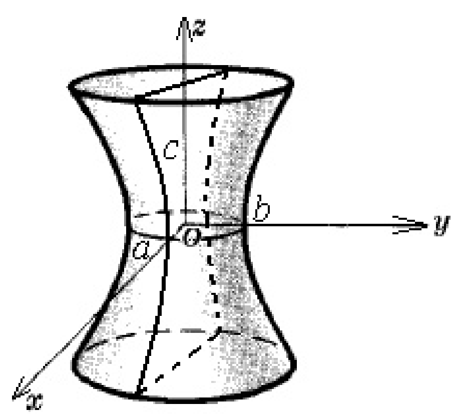
$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ (a,b,c>0).$$



$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

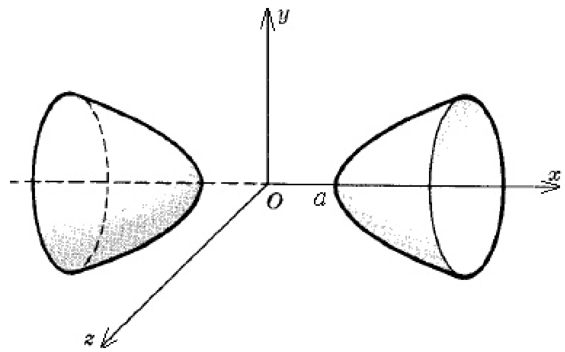
4.4. Mặt hyperboloid một tầng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a,b,c>0).$$



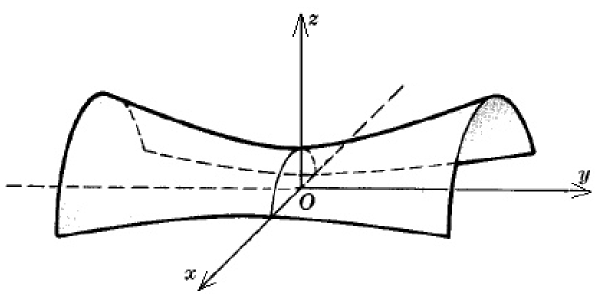
4.5. Mặt hyperboloid hai tầng

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a,b,c>0).$$



4.6. Mặt paraboloid hyperboloid

$$z=c\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right),(a,b,c>0).$$



4.7. Mặt trụ

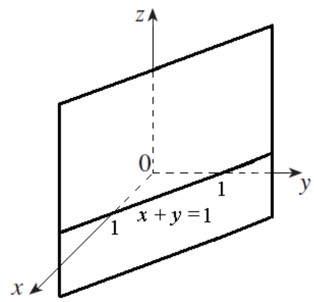
Trong không gian Oxyz, phương trình "*vắng*" biến số nào thì đó là mặt trụ nhận phương trình ban đầu làm đường chuẩn trong mặt phẳng "vắng" biến số đó, *đường sinh* song song với trục của biến số "vắng".

Ví dụ 4.1. Trong không gian O*xyz*, vẽ các mặt sau

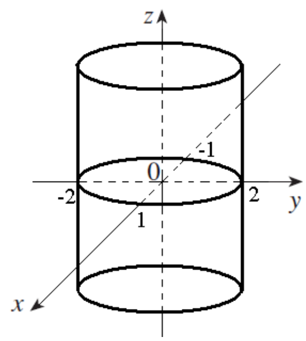
a) $x+y=1$. b) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. c) $z=x^2$.

Giải

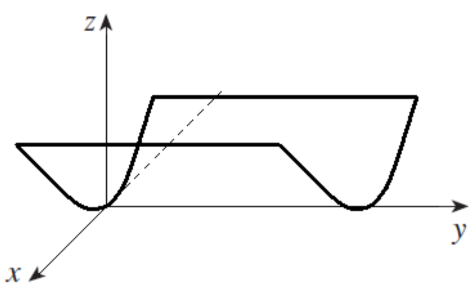
a)



b)



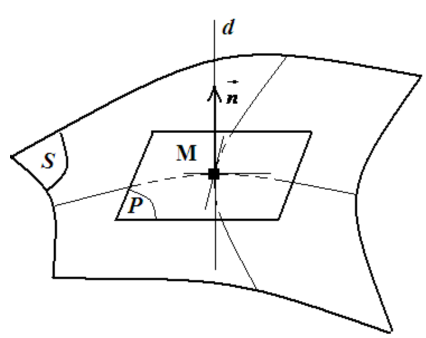
c)



V. Tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong trong không gian

Tiếp diện (mặt phẳng tiếp xúc) với mặt cong tại điểm M là mặt phẳng chứa tất cả các tiếp tuyến của các đường cong đi qua điểm M và nằm trên mặt cong.

Pháp tuyến của mặt cong là đường thẳng đi qua điểm tiếp xúc M và vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc tại điểm đó.



(P): tiếp diện; d: pháp tuyến; $\vec{n}$: vectơ pháp tuyến tại điểm M.

5.1. Mặt cho bởi phương trình không giải

Trong $\mathbb{R}^3$, cho mặt cong S có phương trình không giải

$$F(x,y,z)=0.$$

Nếu tồn tại các đạo hàm riêng $F_x,\ F_y,\ F_z$ liên tục tại điểm $M(x_0,y_0,z_0)\in S$ và

$$F_x^2(M)+F_y^2(M)+F_z^2(M)\neq 0$$

thì *vectơ pháp tuyến* của S tại điểm M là

$$\vec{n}=\left(F_x(M),F_y(M),F_z(M)\right) \tag{3.15}$$

và phương trình *tiếp diện* của S tại điểm M là

$$F_x(M)(x-x_0)+F_y(M)(y-y_0)+F_z(M)(z-z_0)=0, \tag{3.16}$$

trong đó x, y, z là tọa độ chạy của điểm bất kỳ thuộc tiếp diện và pháp tuyến.

Đặc biệt, nếu mặt cong S có phương trình

$$z=f(x,y)$$
$$\Leftrightarrow z-f(x,y)=0,$$

khi đó, đặt $F(x,y,z)=z-f(x,y)$ thì vectơ pháp tuyến, phương trình tiếp diện của S tại điểm $M(x_0,y_0,z_0)\in S$ lần lượt là

$$\vec{n}=\left(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1\right), \tag{3.17}$$

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0. \tag{3.18}$$

Chú ý rằng, tại điểm $M\in S$ ta đã giả thiết F có các đạo hàm riêng liên tục và ít nhất một trong chúng khác 0. Khi đó, tiếp diện hay pháp tuyến của S tại M được hoàn toàn xác định, ta gọi M là *điểm bình thường* của S.

Ngược lại, nếu tại $M\in S$ các đạo hàm riêng của F đều triệt tiêu hoặc ít nhất một trong chúng không tồn tại thì ta gọi M là *điểm bất thường* của S.

Nếu $\forall M\in S$ đều là điểm bình thường thì S gọi là một *mặt trơn*. Mặt S gọi là *trơn từng phần* (mảnh) nếu nó liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần trơn bởi các đường trơn từng phần (đoạn).

5.2. Mặt cho bởi phương trình tham số

Trong $\mathbb{R}^3$, cho mặt cong S có phương trình tham số

$$S: \begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \quad (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ z = z(s,t), \end{cases}$$

và một điểm $M(s_0, t_0) \in S.$

Khi đó, *vectơ pháp tuyến* của S tại điểm là

$$\vec{n} = (A, B, C), \tag{3.19}$$

trong đó

$$A = \begin{vmatrix} y_s & z_s \\ y_t & z_t \end{vmatrix}_M, \; B = \begin{vmatrix} z_s & x_s \\ z_t & x_t \end{vmatrix}_M, \; C = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix}_M. \tag{3.20}$$

Ví dụ 5.1. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong S:

$$3xyz - z^3 = 1$$

tại điểm $M(0,1,-1).$

Giải

Ta có

$$3xyz - z^3 = 1 \Leftrightarrow 3xyz - z^3 - 1 = 0.$$

Đặt

$$F(x,y,z) = 3xyz - z^3 - 1.$$

Khi đó

$$F_x = 3yz,\; F_y = 3xz,\; F_z = 3xy - 3z^2,$$

suy ra

$$F_x(M) = -3,\; F_y(M) = 0,\; F_z(M) = -3.$$

Vectơ pháp tuyến của S tại điểm M là

$$\vec{n} = \left(F_x(M), F_y(M), F_z(M)\right) = (-3, 0, -3).$$

Vậy, phương trình tiếp diện của S tại điểm M là

$$-3(x-0)+0(y-1)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow x+z+1=0.$$

Pháp tuyến của S tại điểm M đi qua M nhận vectơ $\vec{n}=(-3,0,-3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=-3t, \\ y=1, \qquad\qquad t\in\mathbb{R}. \\ z=-1-3t, \end{cases}$$

§6. TRƯỜNG VECTƠ VÀ TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

I. Trường vectơ và trường vô hướng

Định nghĩa 1.1. Cho D là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}^n$.

i) Một *trường vectơ n* chiều trên D là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \vec{F}: D &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \vec{F}(x), \end{aligned}$$

liên kết mỗi điểm x của D với vectơ $\vec{F}(x)$.

ii) Một *trường vô hướng* trên D là một ánh xạ

$$\begin{aligned} f: D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

liên kết mỗi điểm x của D với số thực $f(x)$.

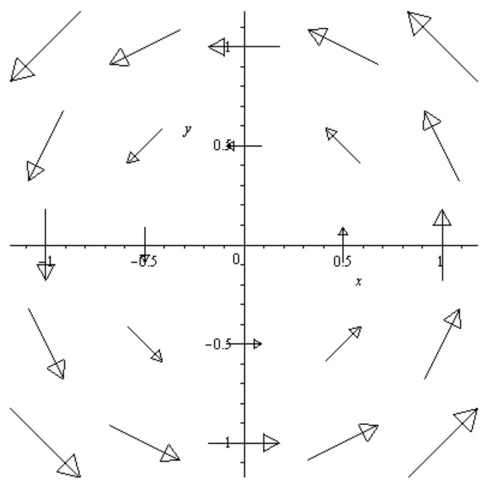
Ví dụ 1.1. Giả sử trên mặt phẳng nằm ngang Oxy được phủ một lớp nước mỏng và lớp nước này chảy xoáy quanh điểm gốc O. Vectơ vận tốc của nước tại mỗi điểm (x,y) của mặt phẳng là vectơ $\vec{V}(x,y)$. Vậy, trong lớp nước đó có một trường vectơ $\vec{V}$ hai chiều xác định trên $\mathbb{R}^2$ được gọi là trường vận tốc của lớp nước chảy quay điểm gốc O.

Ví dụ 1.2. Trong khoảng không gian gần một cái nam châm, tại mỗi điểm (x,y,z) có một vectơ từ trường $\overrightarrow{H}(x,y,z)$. Như vậy, trường vectơ $\overrightarrow{H}(x,y,z)$ (tức từ trường) đã được xác định trong khoảng không gian gần cái nam châm.

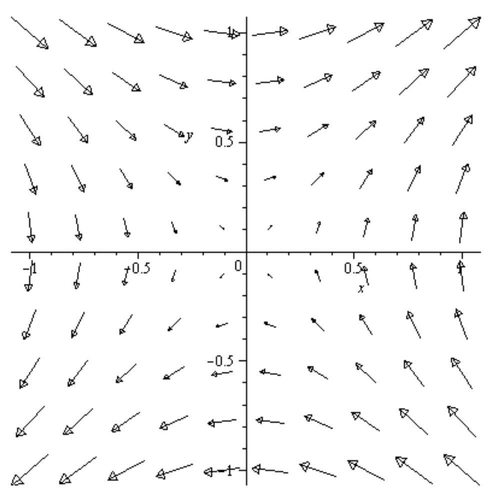
Tương tự, gần một dây dẫn có điện chạy, tại mỗi điểm (x,y,z) có một vectơ điện trường $\overrightarrow{E}(x,y,z)$. Như vậy, trường vectơ $\overrightarrow{E}(x,y,z)$ (tức điện trường) đã được xác định trong khoảng không gian gần dây dẫn.

Ví dụ 1.3. Hình vẽ một số trường vectơ trong $\mathbb{R}^2$

a) $\overrightarrow{F}(x,y)=(-y,x)=-y\vec{i}+x\vec{j}$

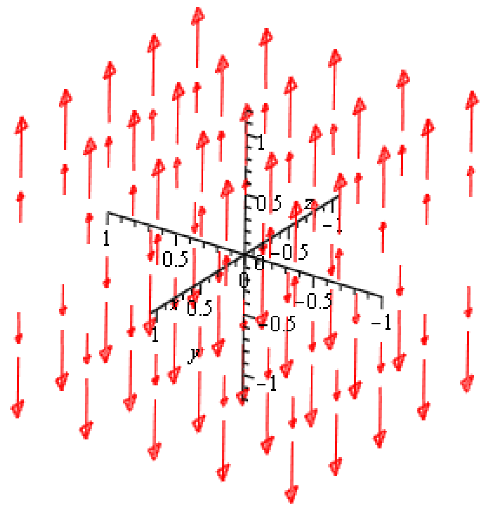


b) $\overrightarrow{F}(x,y)=(y,\sin x)=y\vec{i}+\sin x\vec{j}$

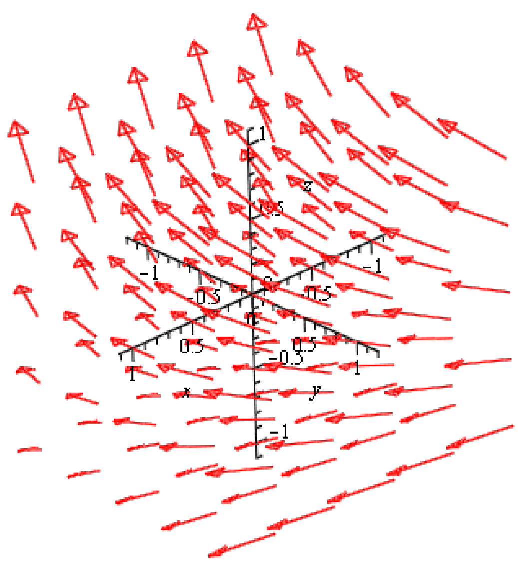


Ví dụ 1.4. Hình vẽ một số trường vectơ trong $\mathbb{R}^3$

a) $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,z) = z\vec{k}$



b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,-2,z) = y\vec{i} - 2\vec{j} + z\vec{k}$



Ví dụ 1.5. Trong một khoảng không gian Ω, với mỗi $(x,y,z) \in \Omega$ có tương ứng một nhiệt độ $u(x,y,z)$. Như vậy, trường vô hướng $u(x,y,z)$ đã được xác định trong khoảng không gian Ω.

II. Trường Gradient

Xét hàm khả vi

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1,...,x_n) &\mapsto f(x_1,...,x_n), \end{aligned}$$

ta định nghĩa *trường vectơ gradient* của *f* trên *D* như sau

$$\overrightarrow{grad} f(x_1,...,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,...,x_n),..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) \right).$$

Nói khác đi, ứng với mỗi điểm $M \in D$, ta liên kết với một vectơ mà thành phần là các đạo hàm riêng của f tại *M*.

Bằng cách xem

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1},..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

như là một vectơ trong $\mathbb{R}^n$, gradient của f được ký hiệu như là tích của "số thực" f với "vectơ" ∇,

$$\overrightarrow{grad} f(x_1,...,x_n) \equiv \nabla . f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

III. Đạo hàm theo hướng

Nhắc lại rằng, trong hàm hai biến, $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ biểu diễn vận tốc biến thiên của hàm số $z = f(x,y)$ tại điểm (x_0,y_0) theo hướng của các trục O*x*, O*y*, nghĩa là theo hướng của vectơ đơn vị $i = (1,0)$, $j = (0,1)$. Bây giờ, ta muốn tính vận tốc biến thiên của hàm số ấy tại (x_0,y_0) theo một hướng bất kỳ xác định bởi vectơ $u = (u_1,u_2)$ khác vectơ không của nó.

Định nghĩa 3.1. Cho vectơ $\vec{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ khác vectơ không. *Đạo hàm theo hướng vectơ* $\vec{u}$ của f tại (x_0,y_0) là

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0,y_0)}{t}$$

nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn.

Như vậy, ta thấy rằng, nếu $\vec{u}=(1,0)=\vec{i}$ thì

$$D_{\vec{i}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0),$$

và nếu $\vec{u}=(0,1)=\vec{j}$ thì

$$D_{\vec{j}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=f_y(x_0,y_0).$$

Nói cách khác, khái niệm đạo hàm riêng chỉ là một trường hợp đặc biệt của đạo hàm theo hướng.

Ví dụ 3.1. Cho $f(x,y)=x^3y+y$, vectơ $\vec{u}=(1,-2)$. Tính đạo hàm của f theo hướng vectơ $\vec{u}$ tại (0,1).

Giải

Xét

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,1-2t)-f(0,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3(1-2t)+(1-2t)-1}{t}=-2.$$

Vậy $D_{\vec{u}}f(0,1)=-2$.

Bây giờ, ta đưa ra định nghĩa đạo hàm theo hướng cho trường hợp hàm *n* biến

Định nghĩa 3.2. Cho vectơ $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$ khác vectơ không. *Đạo hàm theo hướng vectơ u* của f tại $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ là

$$D_{\vec{u}}f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1^0+tu_1,x_2^0+tu_2,...,x_n^0+tu_n)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)}{t}$$

nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn.

Trong nhiều tài liệu, người ta thêm yêu cầu $\|\vec{u}\|=1$.

Mệnh đề 3.3. *Cho* $f,g: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in D$ *và u là vectơ khác vectơ không trong* $\mathbb{R}^n$. *Nếu f, g có đạo hàm theo hướng vectơ u tại* x^0 *thì* $f+g, f.g$ *cũng có đạo hàm theo hướng vectơ u tại* x^0 *và*

$$D_u(f+g)(x^0) = D_u f(x^0) + D_u g(x^0),$$

$$D_u(f.g)(x^0) = g(x^0)D_u f(x^0) + f(x^0)D_u g(x^0).$$

Ngoài ra, nếu $g(x)\neq 0$ *và* $\frac{f}{g}$ *xác định trên một lân cận của* x^0 *thì* $\frac{f}{g}$ *có đạo hàm theo hướng vectơ u tại* x^0 *và*

$$D_u\left(\frac{f}{g}\right)(x^0) = \frac{g(x^0)D_u f(x^0) - f(x^0)D_u g(x^0)}{g^2(x^0)}.$$

IV. Divergence của trường vectơ

Bây giờ xét trường vectơ $\overrightarrow{F}: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi các hàm thành phần $f_1,...,f_n : D \to \mathbb{R}$, nghĩa là

$$\overrightarrow{F} = (f_1,...,f_n)$$

hay

$$\overrightarrow{F} = f_1\vec{e}_1 + ... + f_n\vec{e}_n,$$

trong đó $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.

Khi $\overrightarrow{F}$ là hàm khả vi, các hàm thành phần của nó có đạo hàm riêng cấp 1 tại mọi điểm của D thì *divergence của* $\overrightarrow{F}$ tại $x\in D$ (hay *độ phân kỳ*) ký hiệu là $div\overrightarrow{F}(x)$, được cho bởi

$$div\overrightarrow{F}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x).$$

Với ký hiệu của "vectơ" ∇, $div\overrightarrow{F}(x)$ chính là tích vô hướng của "vectơ" ∇ với "vectơ" $\overrightarrow{F}$,

$$div\vec{F} \equiv \nabla.\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Giá trị của $div\vec{F}(x)$ cũng không phụ thuộc vào hệ tọa độ được chọn. Ngoài ra, đại lượng $div\vec{F}(x)$ còn có nhiều ý nghĩa vật lý. Trong cơ học chất lỏng, nó đánh giá độ thay đổi mật độ tại một điểm. Cụ thể, với $\vec{F}(x,y,z,t)$ chỉ vectơ vận tốc của dòng chất lỏng và $p(x,y,z,t)$ chỉ mật độ của chất lỏng tại điểm (x,y,z) vào thời điểm t, ta có $\vec{V} = p.\vec{F}$ là vectơ có divergence thỏa phương trình

$$div\vec{V} = -\frac{\partial p}{\partial t},$$

mà người ta còn gọi là *phương trình liên tục* của cơ học chất lỏng. Khi chất lỏng không nén được, nghĩa là hàm mật độ p là hằng, ta nhận được phương trình đơn giản hơn,

$$div\vec{V} = 0.$$

Trong lý thuyết trường điện từ, divergence của trường điện $\vec{E}$ thỏa phương trình

$$div\vec{E} = 4\pi p,$$

trong đó, p chỉ mật độ điện tích. Do đó, khi không có nguồn điện tích, ta được

$$div\vec{E} = 0.$$

Ví dụ 4.1. Cho trường vectơ

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + (2y - yz)\vec{j} + (2xz - z^2)\vec{k},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Tìm $div\vec{F}(x,y,z)$.

Giải

$$div\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y - yz) + \frac{\partial}{\partial z}(2xz - z^2)$$

$$= 2xy + 2 - z + 2x - 2z = 2xy + 2x - 3z + 2,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

V. Vectơ $\overrightarrow{rot}$ của trường vectơ

Xét trường vectơ $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi các hàm thành phần $f_1, f_2, f_3 : D \to \mathbb{R}$. Khi $\vec{F}$ là hàm khả vi, các hàm thành phần của nó có đạo hàm riêng cấp 1 tại mọi điểm của D thì *vectơ* $\overrightarrow{rot}$ *của* $\vec{F}$ tại $x \in D$ (hay *vectơ xoáy*) ký hiệu là $\overrightarrow{rot}\vec{F}(x)$, được cho bởi

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(x) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right).$$

Bằng ký hiệu của "vectơ" ∇, ta có thể biểu diễn $\overrightarrow{rot}\vec{F}(x)$ như là tích có hướng của hai vectơ ∇ và $\vec{F}$ ($\nabla \times \vec{F}$), và bằng ký hiệu định thức ma trận khai triển theo dòng 1, ta có

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(x) \equiv \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right)\vec{k}.$$

Trường vectơ $\overrightarrow{rot}\vec{F}(x)$ còn được ký hiệu là $\overrightarrow{curl}\vec{F}(x)$ và cũng độc lập với hệ tọa độ được chọn và có ý nghĩa quan trọng trong cơ học chất lỏng cũng như trong lý thuyết trường điện từ. Trường $\overrightarrow{rot}$ có thể dùng để đánh giá độ xoáy của chất lỏng và điều kiện

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$$

cho trường vận tốc $\vec{F}$ để chỉ dòng chảy không xoáy. Tương tự,

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0$$

cho trường điện $\vec{E}$ thỏa khi chỉ tồn tại lực điện từ.

Ví dụ 5.1. Cho trường vectơ

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = e^{2x}\vec{i} + 3x^2yz\vec{j} + (2y^2z + x)\vec{k},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Tìm $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z)$.

Giải

$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2y^2z + x) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2yz), \frac{\partial}{\partial z}(e^{2x}) - \frac{\partial}{\partial x}(2y^2z + x), \frac{\partial}{\partial x}(3x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x})\right)$$

$$= \left(4yz - 3x^2y, -1, 6xyz\right).$$

VI. Trường thế và trường solenoidal

6.1. Trường thế

Xét trường vectơ $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi các hàm thành phần $f_1, f_2, f_3 : D \to \mathbb{R}$. Nếu tồn tại một hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên *D* sao cho

$$\nabla f(x,y,z) = \overrightarrow{F}(x,y,z),\ \forall (x,y,z) \in D$$

thì $\overrightarrow{F}$ được gọi là một *trường thế* trên *D* và hàm số *f* được gọi là *hàm thế* của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ trên *D*.

Nói cách khác, $\overrightarrow{F}$ là một trường thế trên *D* nếu tồn tại một hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên *D* sao cho

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = f_x, \\ f_2(x,y,z) = f_y, \quad \forall (x,y,z) \in D. \\ f_3(x,y,z) = f_z, \end{cases}$$

Ví dụ 6.1. Trường vectơ

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

là một trường thế trên $\mathbb{R}^3$ vì tồn tại hàm thế $f(x,y,z) = xy^2z^3$ có

$$f_x = y^2z^3,\ f_y = 2xyz^3,\ f_z = 3xy^2z^2$$

liên tục trên $\mathbb{R}^3$ và

$$\nabla f(x,y,z) = \overrightarrow{F}(x,y,z),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.2. Trường solenoidal

Trường vectơ $\overrightarrow{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là một *trường solenoidal (*hay *trường ống)* nếu tồn tại một trường vectơ khác $\overrightarrow{G}$ có các thành phần khả vi liên tục cấp hai trong D và sao cho tại mọi điểm của trường, ta có

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{G}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$.

b) $f(x,y)=-x^2+4xy-10y^2-2x+16y$.

c) $f(x,y)=x^2-y^2+2x-y+1$.

d) $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y+4$.

e) $f(x,y)=x^3+y^2+12xy+1$.

f) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$.

g) $f(x,y)=x^3+27x+y^2+2y+1$.

h) $f(x,y)=x^3+y^3-12x-3y$.

i) $f(x,y)=x^2y+xy^2-xy$.

j) $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$.

k) $f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$.

l) $f(x,y)=xy(1-x-y)$.

m) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$.

n) $f(x,y)=x^4-y^4-4x+32y+8$.

o) $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

p) $f(x,y)=4-\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$.

q) $f(x,y)=x^2+y^2-2xy+2x-2y$.

Bài 2. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $f(x,y)=x+2ey-e^x-e^{2y}$.

b) $f(x,y)=x^6-y^5-\cos^2 x-32y$.

c) $f(x,y)=-3x^2+2e^y-2y+3$.

d) $f(x,y)=x^2-y-\ln|y|-2$.

e) $f(x,y)=\ln x-x+\ln y-\dfrac{y^2}{2}$.

f) $f(x,y)=xe^y+x^3+2y^2-4y$.

g) $f(x,y)=x(\ln^2 x+y^2)$.

h) $f(x,y)=x\sin y$.

i) $f(x,y)=e^x\cos y$.

j) $f(x,y)=(x-y)e^{xy}$.

k) $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

l) $f(x,y)=x+y-xe^y$.

m) $f(x,y)=x^2-e^{y^2}$.

n) $f(x,y)=(y-2)\ln xy$.

o) $f(x,y)=e^{xy}$.

p) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$.

q) $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$ trên miền $x>0, y>0$.

r) $f(x,y)=2x^2-4x+\sin y-\dfrac{y}{2}$ trên miền $x\in\mathbb{R}, -\pi<y<\pi$.

s) $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ trên miền $x>0, y>0$.

t) $f(x,y)=\sin x.\sin y.\sin(x+y)$ trên miền $0<x<\pi, 0<y<\pi$.

Bài 3. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

b) $f(x,y,z)=x^3+xy+y^2-2xz+2z^2+3y-1$.

c) $f(x,y,z)=x^3+y^2+2z^2-3x-2y-4z$.

d) $f(x,y,z) = -x^2 - y^3 - \dfrac{3}{2}z^2 + 3yz + 2x + 40$.

e) $f(x,y,z) = x + \dfrac{2y}{x} + \dfrac{z}{2y} + \dfrac{1}{z}$.

f) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ trên miền $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

g) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$.

Bài 4. Cho hàm số

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + Cxy.$$

a) Chứng minh rằng (0,0) là điểm dừng của f.

b) Định C để f đạt cực tiểu tại (0,0).

c) Định C để f đạt cực đại tại (0,0).

d) Định C để f không đạt cực trị tại (0,0).

Bài 5. Tìm cực trị của các hàm số sau với các điều kiện được cho

a) $f(x,y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$.

b) $f(x,y) = x^2 + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$.

d) $f(x,y) = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$.

e) $f(x,y) = x^2(y-1) - 3x + 2$ với điều kiện $x - y + 1 = 0$.

f) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 3x + y$ với điều kiện $-x^2 + y = 1$.

g) $f(x,y) = 8x + 15y + 28$ với điều kiện $2x^2 + 3y^2 = 107$.

h) $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

i) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ với điều kiện $y - x = \dfrac{\pi}{4}$.

j) $f(x,y,z) = 2x + y + 3z$ với điều kiện $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 35$.

k) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$.

l) $f(x,y,z)=x+y+z$ với điều kiện $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

m) $f(x,y,z)=x+y+z$ với điều kiện $xyz=8$.

n) $f(x,y,z)=xy^2z^3$ với điều kiện $x+y+z=1$ $(x,y,z>0)$.

p) $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$ với điều kiện $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ $(x,y,z>0)$.

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các hàm số sau trên tập hợp được cho

a) $f(x,y)=x^2+y^2$ trên miền đóng giới hạn bởi

$$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9.$$

b) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ trên miền D đóng hình tam giác có các đỉnh $A(-1,1), B(2,1), C(-1,-2)$.

c) $f(x,y)=x^2+y$ trên miền D đóng hình vuông với các đỉnh $(\pm1,\pm1)$.

d) $f(x,y)=x-x^2+y^2$ trên miền

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\right\}.$$

e) $f(x,y)=x^2-2xy+2y+3$ trên miền

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\right\}.$$

f) $f(x,y)=1-x^2-y^2$ trên miền $(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$.

g) $f(x,y)=x^2+3y^2+x-y$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x=1,\ y=1,\ x+y=1$.

h) $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y+4$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x=1,\ x=-1,\ y=1,\ y=-1$.

i) $f(x,y)=1+xy-x-y$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=4$.

j) $f(x,y)=x^2+2xy+4x+8y$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$.

k) $f(x,y)=5+4x-2x^2+3y-y^2$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường $y=2,\ y=x,\ y=-x$.

l) $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$ trên miền D giới hạn bởi

$$x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1.$$

m) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2)$ trên miền $x^2+y^2\leq 1$.

n) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0,\ y=\dfrac{\pi}{2}$.

o) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ trên miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x=0,\ y=0,\ x+y=2\pi$.

p) $f(x,y,z)=x+y+z$ trên miền $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

q) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ trên miền $x^2+y^2+z^2\leq 100$.

Bài 7. Tìm tọa độ Descartes của những điểm có tọa độ cực sau đây

a) $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$. b) $\left(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$. c) $\left(-1,\dfrac{\pi}{3}\right)$. d) $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Bài 8. Tìm tọa độ cực của những điểm có tọa độ Descartes sau đây, trong đó $r>0$ và $0\leq\varphi<2\pi$

a) $(1,1)$. b) $(2\sqrt{3},-2)$. c) $(-1,-\sqrt{3})$. d) $(-2,3)$.

Bài 9. Trong hệ tọa độ cực, vẽ các miền thỏa điều kiện sau

a) $r>1$.

b) $0\leq\varphi<\dfrac{\pi}{4}$.

c) $0\leq r\leq 2,\ \dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi$.

d) $2 < r < 3, \dfrac{5\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{3}$.

Bài 10. Tìm phương trình trong tọa độ Descartes của các đường cong cho bởi phương trình trong tọa độ cực

a) $r = 3\sin\varphi$. b) $r\cos\varphi = 1$. c) $r^2 = \sin 2\varphi$. d) $r = \dfrac{1}{1+2\sin\varphi}$.

Bài 11. Tìm phương trình trong tọa độ cực của các đường cong cho bởi phương trình trong tọa độ Descartes

a) $y = 5$. b) $x^2 + y^2 = 25$. c) $y = 2x - 1$. d) $x^2 = 4y$.

e) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. f) $x = -y^2$.

Bài 12. Tìm tọa độ Descartes của những điểm có tọa độ trụ sau đây

a) $\left(3, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$. b) $\left(4, \dfrac{-\pi}{3}, 5\right)$.

Bài 13. Vẽ các đường sau trong hệ tọa độ Descartes

a) $y = \dfrac{1}{2}x - 3,\ 0 \le x \le 6$. b) $y = 1 - x^2,\ x \ge 0$.

c) $x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0$. d) $y = \dfrac{1}{x},\ x > 0$.

Bài 14. Tìm tập xác định của các hàm vectơ

a) $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t}, \dfrac{2t}{1+t}\right)$.

b) $\vec{f}(t) = \left(e^t, \ln t, \cot t\right)$.

c) $\vec{f}(t) = \cos 2t\,\vec{i} + \ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)\vec{j} + \sqrt{2t-1}\,\vec{k}$.

d) $\vec{f}(t) = \sin t\,\vec{i} + \sqrt{t^2 - 2}\,\vec{j} + \ln(4 - t^2)\vec{k}$.

Bài 15. Tìm giới hạn của các hàm vectơ

a) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{2t}, e^{t^2-3t}, \cos t\right)$.

b) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1-\tan t, \dfrac{\ln(1+t)}{3t}, e^{t-1}\right)$.

c) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{e^t-1}{t}\vec{i}+\dfrac{1-t}{t^2-3t+2}\vec{j}+\dfrac{\sin t}{t\cos t}\vec{k}\right)$.

d) $\lim\limits_{t\to 1^-}\left((t-\sqrt{1-t^2})\vec{i}+\arctan t\,\vec{j}+\dfrac{\ln t}{1-t^2}\vec{k}\right)$.

Bài 16. Tìm đạo hàm của các hàm vectơ

a) $\vec{f}(t)=\left(e^{-2t}\cos t, e^{-2t}\sin t, 2\ln|t|\right)$.

b) $\vec{f}(t)=\left(te^t, \dfrac{t-2}{t+2}, \arcsin t\right)$.

c) $\vec{f}(t)=3\vec{i}+\tan 2t\,\vec{j}+\sin(2t+1)\vec{k}$.

d) $\vec{f}(t)=\ln(4-t^2)\vec{i}+\sqrt{2+t}\,\vec{j}-2e^{2t}\vec{k}$.

Bài 17. Tìm $\dfrac{d}{dt}\left\langle \vec{u}(t), \vec{v}(t)\right\rangle$, trong đó

a) $\vec{u}(t)=(2,t^2,-4t)$ và $\vec{v}(t)=(\cos t, \sin t, t)$.

b) $\vec{u}(t)=t\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sin t\vec{k}$ và $\vec{v}(t)=\vec{i}-2t^2\vec{j}+3t^3\vec{k}$.

Bài 18. Cho hàm vectơ $\vec{f}(t)=\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k}$ và hàm số $h(t)=\dfrac{1}{3}t^3$.

Tìm $\dfrac{d}{dt}\left(h(t).\vec{u}(t)\right)$ và $\dfrac{d}{dt}\vec{u}(h(t))$.

Bài 19. Tìm phương trình tham số của đường cong C là giao của hai mặt

a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1+y$.

b) $z=4x^2+y^2$, $y=x^2$.

c) $x^2+y^2=1$, $y+z=2$.

d) $x^2+y^2=4$, $z=xy$.

Bài 20. Viết phương trình tiếp tuyến và phương trình mặt phẳng pháp tuyến của các đường cong C cho trước tại một điểm cho trước

a) C: $x = 2t,\ y = t^2,\ z = -t^3$ tại điểm M(-2,1,1).

b) C: $x = 2t^2,\ y = 1 - t,\ z = 3 + 2t^2$ tại điểm M(2,0,5).

c) C: $x = t,\ y = \sqrt{2}\cos t,\ z = \sqrt{2}\sin t$ tại điểm $M\left(\dfrac{\pi}{4},1,1\right)$.

d) C: $x = \sin^2 t,\ y = \sin t\cos t,\ z = \cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{4}$.

e) C: $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}},\ y = 1,\ z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

Bài 21. Tìm tọa độ trụ của những điểm sau đây

a) $(1,-1,4)$. b) $(-1,-\sqrt{3},2)$. c) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},5\right)$. d) $\left(4,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Bài 22. Tìm tọa độ Descartes của những điểm có tọa độ cầu sau đây

a) $\left(2,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right)$. b) $\left(4,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Bài 23. Tìm tọa độ cầu của những điểm sau đây

a) $(3,0,0)$. b) $(0,2,-2)$. c) $(-1,1,-\sqrt{2})$. d) $\left(\sqrt{6},\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$.

Bài 24. Vẽ các mặt sau trong không gian Oxyz

a) $z = 6 - 2x - 3y$. b) $xz = 1$.

c) $z = x^2$. d) $z = 4 - x^2 - 4y^2$.

e) $z = 4x^2 + y^2$. f) $z = y^2 - x^2$.

g) $y - 4z^2 = 4x^2$. h) $y^2 + z^2 = 1 - 4x^2$.

i) $y^2 + z^2 = 1$. j) $y^2 + 4z^2 = 4$.

k) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

l) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

m) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

Bài 25. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt

a) $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm (2,2,3).

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm (2,1,12).

c) $z = \ln(2x + y)$ tại điểm (-1,3,0).

d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$ tại điểm (4,1,1).

e) $x^3 + y^3 = 3xyz$ tại điểm $\left(1, 2, \dfrac{3}{2}\right)$.

f) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ tại điểm (0,0,0).

g) $x = s - t,\ y = s + 2t,\ z = t^2$ tại điểm (0,3,1).

h) $x = s\cos t,\ y = s\sin t\ \ z = s + t$ tại điểm (1,0,1).

Bài 26. Viết phương trình tiếp diện của mặt S

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$$

song song với mặt $(P): x + y - z = 0.$

Bài 27. Tính gradient của các hàm số f tại điểm P và đạo hàm của hàm số f theo hướng vectơ $\vec{u}$:

a) $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^5,\ P(1,-1),\ \vec{u} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}\right)$.

b) $f(x, y) = e^x \sin y,\ P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right),\ \vec{u} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

c) $f(x, y) = xy^2z^3,\ P(1,-2,1),\ \vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

d) $f(x, y) = x^2y + x\sqrt{1+z},\ P(1,2,3),\ \vec{u} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$.

Bài 28. Cho $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$, $p=(x,y,z)$. Cho f khả vi, chứng minh

a) $D_{\vec{i}}f(p)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(p)$, $D_{\vec{j}}f(p)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$.

b) $D_{\lambda\vec{a}}f(p)=\lambda D_{\vec{a}}f(p)$ với $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ là một vectơ bất kỳ, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Bài 29. Chứng minh $\nabla(f^n)=nf^{n-1}\nabla f$.

Bài 30. Tìm divergence của trường vectơ

a) $\vec{F}(x,y,z)=(2x,xz-3,yz-2x)$ tại điểm (1,-1,2).

b) $\vec{F}(x,y,z)=(e^x\sin y\cos z,e^x\cos y\cos z,-e^x\sin y\sin z)$ tại điểm $\left(-2,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

c) $\vec{F}(x,y,z)=xy^2z^2\vec{i}+z^2\sin y\vec{j}+x^2\cos y\vec{k}$ tại điểm $(1,\pi,-2)$.

d) $\vec{F}(x,y,z)=xy^3\vec{i}+2x^2y\vec{j}-3yz^2\vec{k}$ tại điểm $(1,1,-1)$.

Bài 31. Tìm $\overrightarrow{rot}$ của trường vectơ

a) $\vec{F}(x,y,z)=(x^2y,xz,yz)$ tại điểm (4,3,2).

b) $\vec{F}(x,y,z)=(y^2+z^2,x^2+z^2,x^2+y^2)$ tại điểm (1,-1,1).

c) $\vec{F}(x,y,z)=xe^y\vec{i}+z\sin y\vec{j}+xy\ln z\vec{k}$ tại điểm $\left(3,\dfrac{\pi}{2},e\right)$.

d) $\vec{F}(x,y,z)=(x+\sin(yz))\vec{i}+(y+\sin(xz))\vec{j}+(z+\sin(xy))\vec{k}$ tại điểm $\left(0,1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 32. Tìm trường thế $\vec{F}$ có hàm số thế vị f cho trước

a) $f(x,y,z)=x^3-3x^2y+xy^2-z^3$.

b) $f(x,y,z)=x^2ye^{-4z}$.

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

d) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Chương 4

TÍCH PHÂN BỘI

Trong chương này, chúng ta khảo sát tích phân Riemann cho các hàm bị chặn $f: D \to \mathbb{R}$, với D là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ hay $\mathbb{R}^3$, và khảo sát một số ứng dụng hình học trong việc tính độ dài đường cong, diện tích một miền $D \subset \mathbb{R}^2$, diện tích một mặt $S \subset \mathbb{R}^3$ và thể tích một khối $D \subset \mathbb{R}^3$.

Quá trình xây dựng tích phân Riemann cho hàm bị chặn xác định trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$ được trình bày tương đối chi tiết. Trường hợp tích phân Riemann cho hàm bị chặn trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^3$, hay tổng quát là miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 3$, được coi như một mở rộng tự nhiên nên quá trình xây dựng cũng như các tính chất chỉ được phát biểu mà không chứng minh.

Tổng quát hóa tích phân Riemann cho hàm một biến $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, ta lần lượt xây dựng tích phân Riemann cho hàm nhiều biến $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, trong đó D là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$, và sau đó tổng quát hóa cho miền bị chặn D.

Nhắc lại rằng một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ có dạng

$$D = \left[a_1, b_1\right] \times \left[a_2, b_2\right] \times \ldots \times \left[a_n, b_n\right]$$

và có thể tích $\left|D\right| = \left(b_1 - a_1\right)\left(b_2 - a_2\right)\ldots\left(b_n - a_n\right)$.

§1. TÍCH PHÂN BỘI HAI

Với hàm bị chặn $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, trong đó $D = [a,b] \times [c,d]$, ta xét hai phân hoạch bất kỳ $\sigma_x = \left\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$, $\sigma_y = \left\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\right\}$ của $[a,b]$ và $[c,d]$, nghĩa là

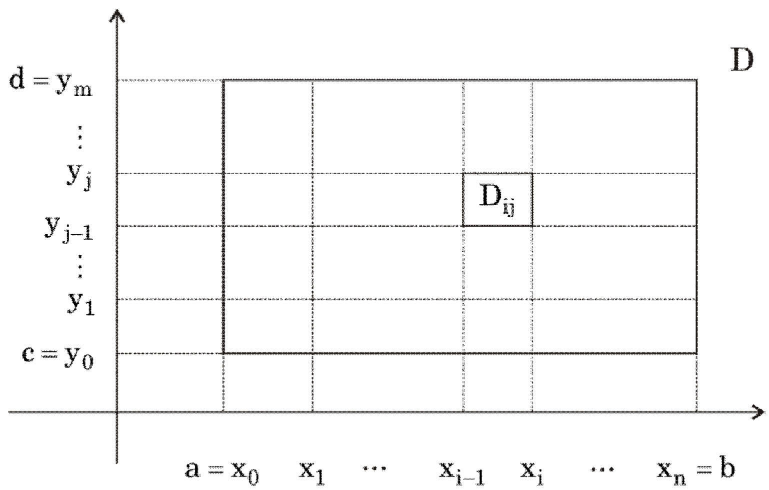
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Ta gọi $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ là một *phân hoạch chính tắc* của D. Tập hợp tất cả các phân hoạch chính tắc của D được ký hiệu là $\mathrm{P}(D)$. Với mỗi $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$, đặt

$$D_{ij} = \left[x_{i-1}, x_i\right] \times \left[y_{j-1}, y_j\right].$$

Ta gọi D_{ij} là một hình hộp con của phân hoạch σ, ký hiệu $\sigma = \left(D_{ij}\right)$.



Đặt

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f\left(x,y\right),$$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f\left(x,y\right),$$

và xét

$$L(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\left|D_{ij}\right|,$$

$$U(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\left|D_{ij}\right|.$$

$L(f,\sigma)$ và $U(f,\sigma)$ lần lượt được gọi là *tổng Darboux dưới* và *tổng Darboux trên* của *f* trên D ứng với phân hoạch σ.

Xuất phát từ đẳng thức

$$\left|D\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|D_{ij}\right|,$$

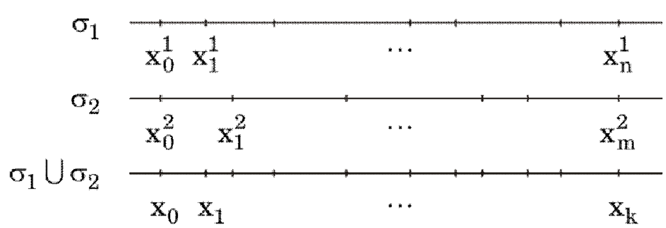
ta được kết quả sau

Mệnh đề 1.1. *Với mọi hàm bị chặn* $f: D \to \mathbb{R},\ D = [a,b] \times [c,d]$*, ta có*

$$m|D| \le L(f,\sigma) \le U(f,\sigma) \le M|D|,$$

với mọi $\sigma \in \mathrm{P}(D)$*, trong đó* $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ *và* $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

Nhắc lại rằng phân hoạch $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ được gọi là mịn hơn phân hoạch $\sigma' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$ khi $\sigma' \subset \sigma$ và ứng với hai phân hoạch bất kỳ σ_1, σ_2 của $[a,b]$, ta có duy nhất phân hoạch, ký hiệu $\sigma_1 \cup \sigma_2$, mịn hơn cả hai phân hoạch σ_1 và σ_2.



Bây giờ, với hai phân hoạch (chính tắc) $\sigma_1 = \sigma_x^1 \times \sigma_y^1$ và $\sigma_2 = \sigma_x^2 \times \sigma_y^2$ của $D = [a,b] \times [c,d]$, ta nói σ_1 *mịn hơn* σ_2, ký hiệu $\sigma_1 \supset \sigma_2$, khi các phân hoạch σ_x^1 và σ_y^1 lần lượt mịn hơn σ_x^2 và σ_y^2. Khi đó, ta có

$$L(f,\sigma_2) \le L(f,\sigma_1) \le U(f,\sigma_1) \le U(f,\sigma_2).$$

Hơn nữa, ta còn có

Mệnh đề 1.2. *Với mọi* $\sigma, \sigma' \in \mathrm{P}(D)$, $L(f,\sigma) \le U(f,\sigma')$. *Do đó, với mọi hàm bị chặn* $f: D \to \mathbb{R}$*, ta có*

$$\sup_{\sigma \in \mathrm{P}(D)} L(f,\sigma) \le \inf_{\sigma \in \mathrm{P}(D)} U(f,\sigma).$$

Chứng minh.

Với $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$, $\sigma' = \sigma'_x \times \sigma'_y$, ta có phân hoạch $\sigma'' = \left(\sigma_x \cup \sigma'_x\right) \times \left(\sigma_y \cup \sigma'_y\right)$ mịn hơn cả σ lẫn σ'. Do đó

$$L\left(f,\sigma\right) \le L\left(f,\sigma''\right) \le U\left(f,\sigma''\right) \le U\left(f,\sigma'\right).$$

Bất đẳng thức trên cho thấy mỗi một tổng Darboux trên là một chặn trên của tập tất cả các tổng Darboux dưới và do đó

$$\sup_{\sigma \in \mathrm{P}(D)} L\left(f,\sigma\right) \le U\left(f,\sigma'\right),$$

với mọi $\sigma' \in \mathrm{P}\left(D\right)$. Suy ra

$$\sup_{\sigma \in \mathrm{P}(D)} L\left(f,\sigma\right) \le \inf_{\sigma' \in \mathrm{P}(D)} U\left(f,\sigma'\right).$$ ■

Định nghĩa 1.3. Hàm bị chặn *f* xác định trên một hình hộp $D = \left[a,b\right] \times \left[c,d\right] \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là *khả tích Riemann* nếu

$$\sup_{\sigma \in \mathrm{P}(D)} L\left(f,\sigma\right) = \inf_{\sigma' \in \mathrm{P}(D)} U\left(f,\sigma'\right) \equiv \alpha.$$

Khi đó, giá trị α được gọi là *tích phân bội hai* của *f* trên *D*, ký hiệu

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy.$$

Ví dụ 1.1. Cho $f(x,y) = 1$, $D = \left[0,2\right] \times \left[0,2\right]$. Hàm số *f* có khả tích trên *D* không?

Giải

Với mọi phân hoạch $\sigma = \left(D_{ij}\right)$. Ta có

$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f\left(x,y\right) = 1,$$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f\left(x,y\right) = 1,$$

và xét

$$L(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\left|D_{ij}\right|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|D_{ij}\right|=4,$$

$$U(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\left|D_{ij}\right|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|D_{ij}\right|=4.$$

Vậy, $\sup_{\sigma} L(f,\sigma)=\inf_{\sigma} U(f,\sigma)=4$, nên *f* khả tích và $\iint_D f(x,y)dxdy=4$.

Từ định nghĩa, ta được

Định lý 1.4. *Hàm bị chặn $f:D\to\mathbb{R}$, với $D=\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$, khả tích Riemann nếu và chỉ nếu*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma\in\mathrm{P}(D),\ U\left(f,\sigma\right)-L\left(f,\sigma\right)<\varepsilon. \qquad (4.1)$$

Chứng minh. Khi *f* khả tích Riemann, ta có

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{P}(D),\ I-\frac{\varepsilon}{2}<L\left(f,\sigma_1\right)\text{ và }U\left(f,\sigma_2\right)<I+\frac{\varepsilon}{2}$$

trong đó $I=\iint_D f\left(x,y\right)dxdy$.

Với σ là phân hoạch mịn hơn σ_1 và σ_2, ta được

$$U\left(f,\sigma\right)-L\left(f,\sigma\right)\le U\left(f,\sigma_2\right)-L\left(f,\sigma_1\right)<\varepsilon.$$

Ngược lại, do

$$L\left(f,\sigma\right)\le\sup_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}L\left(f,\sigma\right)\le\inf_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}U\left(f,\sigma\right)\le U\left(f,\sigma\right),$$

với mọi $\sigma\in\mathrm{P}\left(D\right)$, nên khi (4.1) thỏa, ta được

$$\inf_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}U\left(f,\sigma\right)-\sup_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}L\left(f,\sigma\right)<\varepsilon,$$

với mọi $\varepsilon>0$. Suy ra rằng

$$\inf_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}U\left(f,\sigma\right)=\sup_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}L\left(f,\sigma\right)$$

và do đó, *f* khả tích Riemann trên *D*. ■

Ví dụ 1.2. Cho $D=\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ và hàm số

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0 \quad \text{khi} \quad (x,y)\in\left(\mathbb{Q}\cap\left[0,1\right]\right)\times\left(\mathbb{Q}\cap\left[0,1\right)\right)\\ 1 \quad \text{khi} \quad (x,y)\in\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right)\setminus\left(\left(\mathbb{Q}\cap\left[0,1\right]\right)\times\left(\mathbb{Q}\cap\left[0,1\right)\right)\right)\end{cases}.$$

Hàm số *f* có khả tích trên *D* không?

Giải

Để xét tính khả tích của *f* trên *D*, ta lấy $\sigma\in\mathrm{P}(D)$ bất kỳ, $\sigma=\left(D_{ij}\right)$. Do trong mỗi D_{ij} luôn tồn tại những điểm sao cho *f* có giá trị là 1 và 0 nên $M_{ij}=1$ và $m_{ij}=0$. Suy ra

$$U\left(f,\sigma\right)=\sum_{i,j}M_{ij}\left|D_{ij}\right|=\left|D\right|=1$$

$$L(f,\sigma)=\sum_{i,j}m_{ij}\left|D_{ij}\right|=0.$$

Vì $\sup\limits_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}L\left(f,\sigma\right)=0\neq\inf\limits_{\sigma\in\mathrm{P}(D)}U\left(f,\sigma\right)=1$ nên *f* không khả tích Riemann trên *D*.

Từ Định lý 1.4, ta sẽ chỉ ra lớp hàm khả tích xác định trên một hình hộp D. Trước hết, ta cần một số khái niệm sau

Định nghĩa 1.5. Cho $A\subset\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}$ là hàm bị chặn và $a\in A$. Với mỗi $\delta>0$, đặt

$$M\left(f,a,\delta\right)=\sup\left\{f(x)\mid x\in A \text{ và } \left\|x-a\right\|<\delta\right\},$$

$$m\left(f,a,\delta\right)=\inf\left\{f(x)\mid x\in A \text{ và } \left\|x-a\right\|<\delta\right\}.$$

trong đó $\left\|x-a\right\|=\left\|(x_1,...,x_n)-(a_1,...,a_n)\right\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\right)^{1/2}$.

Dao động $o\left(f,a\right)$ của *f* tại *a* được xác định bởi

$$o\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0}\left[M(f,a,\delta)-m(f,a,\delta)\right].$$

Chú ý rằng giới hạn vế phải luôn tồn tại vì $M(f,a,\delta)-m(f,a,\delta)\geq 0$, $\forall\delta>0$, và $M(f,a,\delta)-m(f,a,\delta)$ là hàm giảm theo δ.

Bổ đề 1.6. *Cho* $f: A\to\mathbb{R}$ *là hàm bị chặn và* $A\subset\mathbb{R}^n$ *là một tập đóng.* $\forall\varepsilon>0$*, tập* $\{x\in A|o(f,x)\geq\varepsilon\}$ *là một tập đóng.*

Chứng minh. Đặt $B=\{x\in A|o(f,x)\geq\varepsilon\}$. Ta sẽ chứng minh $\mathbb{R}^n\setminus B$ là một tập mở.

Thật vậy, với $x\in\mathbb{R}^n\setminus B$ bất kỳ, ta có hoặc $x\notin A$ hoặc $x\in A$ và $o(f,x)<\varepsilon$.

Nếu $x\notin A$ thì do *A* đóng nên tồn tại quả cầu mở *C* tâm *x* sao cho

$$C\subset\mathbb{R}^n\setminus A\subset\mathbb{R}^n\setminus B.$$

Nếu $x\in A$ và $o(f,x)<\varepsilon$ thì tồn tại $\delta>0$ sao cho $M(f,x,\delta)-m(f,x,\delta)<\varepsilon$.

Gọi *C* là quả cầu mở tâm *x*, bán kính δ.

Ứng với mỗi $y\in C$, tồn tại $\delta_1>0$ sao cho quả cầu mở tâm y bán kính δ_1 chứa trong *C*. Từ đó suy ra

$$M(f,y,\delta_1)-m(f,y,\delta_1)\leq M(f,x,\delta)-m(f,x,\delta)<\varepsilon$$

và do đó $o(f,y)<\varepsilon$, nghĩa là $y\in\mathbb{R}^n\setminus B$ và do đó $C\subset\mathbb{R}^n\setminus B$.

Do với $x\in\mathbb{R}^n\setminus B$, ta luôn có quả cầu mở *C* tâm *x* sao cho $C\subset\mathbb{R}^n\setminus B$ nên $\mathbb{R}^n\setminus B$ là một tập mở và do đó *B* là tập đóng. ■

Định nghĩa 1.7. Tập $A\subset\mathbb{R}^n$ được gọi là *có độ đo không* nếu với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại họ đếm được các hình hộp đóng (mở) P_1, P_2, P_3, ... sao cho

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}P_i \text{ và } \sum_{i=1}^{\infty}|P_i|<\varepsilon.$$

Từ định nghĩa, ta suy ra các tính chất sau cho tập có độ đo không mà phần chứng minh dành cho sinh viên

i) Nếu *A* có độ đo không và $B\subset A$ thì *B* có độ đo không.

ii) Tập có hữu hạn điểm là tập có độ đo không.

iii) Tập có vô hạn đếm được điểm là tập có độ đo không.

iv) Nếu A_i có độ đo không, $i = 1,2,3,...$, thì $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ có độ đo không.

Phần chứng minh xem như bài tập dành cho sinh viên.

Định nghĩa 1.8. Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là có thể tích không nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại họ hữu hạn các hình hộp đóng (hoặc mở) P_1, P_2, ..., P_m sao cho

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} P_i \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \left|P_i\right| < \varepsilon .$$

Hiển nhiên tập có thể tích không thì có độ đo không. Ngoài ra, ta có

Mệnh đề 1.9.

i) Nếu $a < b$, thì $\left[a,b\right]$ không có thể tích không trong $\mathbb{R}$.

ii) Tổng quát một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ không thể có thể tích không.

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh *i*). Trường hợp *ii*) được chứng minh tương tự.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng nếu họ các hình hộp $P_1,...,P_m$ phủ $\left[a,b\right]$ thì

$$\sum_{i=1}^{m} \left|P_i\right| \geq b - a . \tag{4.2}$$

Trường hợp $m = 1$ thì hiển nhiên. Giả sử (4.2) đúng với mọi họ các hình hộp $P_1,...,P_m$ phủ $\left[a,b\right]$. Xét họ các hình hộp P_1, P_2, .., P_{m+1} phủ $\left[a,b\right]$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \in P_1 = \left[\alpha, \beta\right]$.

Nếu $\beta \geq b$ thì $\left|P_1\right| \geq b - a$.

Nếu $\beta < b$ thì do họ các hình hộp P_2, ..., P_{m+1} phủ $\left[\beta, b\right]$ nên theo giả thiết quy nạp, ta được

$$\sum_{i=2}^{m+1} \left|P_i\right| \geq b - \beta$$

và do đó $\sum_{i=1}^{m+1}\left|P_i\right| \geq \beta - a + b - \beta = b - a$.   a

Định lý 1.10. *Tập compact $A \subset \mathbb{R}^n$ có độ đo không thì có thể tích không.*

Chứng minh. Vì A có độ đo không nên với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại họ hình hộp mở P_1, P_2, ... sao cho

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \text{ và } \sum_{i=1}^{\infty}\left|P_i\right| < \varepsilon .$$

Vì A compact nên tồn tại phủ hữu hạn P_1, ...,P_m sao cho

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} P_i \text{ và } \sum_{i=1}^{m}\left|P_i\right| < \varepsilon$$

Vậy, A có thể tích không. ■

Từ các khái niệm trên, ta có đặc trưng sau cho các hàm khả tích Riemann

Định lý 1.11. *Cho A là hình hộp đóng trong $\mathbb{R}^2$ và $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn. Ta có f khả tích Riemann trên A nếu và chỉ nếu tập điểm gián đoạn của f có độ đo không.*

Để chứng minh Định lý 1.11, ta cần bổ đề sau

Bổ đề 1.12. *Cho $A \subset \mathbb{R}^n$ là hình hộp đóng và $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn sao cho*

$$o(f, x) < \varepsilon,\ \forall x \in A.$$

Khi đó tồn tại phân hoạch σ của A sao cho

$$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \varepsilon\left|A\right|.$$

Chứng minh. $\forall x \in A$, tồn tại hình hộp đóng U_x chứa x là điểm trong sao cho

$$\sup_{y \in U_x} f(y) - \inf_{y \in U_x} f(y) < \varepsilon .$$

Rõ ràng $\left(U_x\right)_{x \in A}$ phủ A.

Vì A compact, nên tồn tại hữu hạn $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$ phủ A. Gọi σ là phân hoạch (khá mịn) của A sao cho mọi hình hộp của nó đều chứa trong một U_{x_i} nào đó. Khi đó

$$\sup_{y\in P} f(y) - \inf_{y\in P} f(y) < \varepsilon,$$

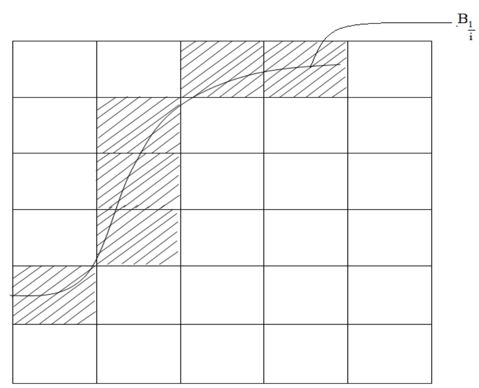
$\forall P \in \sigma$, nên $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) = \sum_{P\in\sigma}\left(\sup_{y\in P} f\left(y\right) - \inf_{y\in P} f\left(y\right)\right)\left|P\right| < \varepsilon\left|A\right|.$ ■

Chứng minh Định lý 1.11. Gọi B là tập điểm gián đoạn của f và xét

$$B_\varepsilon = \left\{x \middle| o\left(f,x\right) \geq \varepsilon\right\}.$$

Do $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1/i}$ nên để chứng minh B có độ đo không, ta chứng minh mỗi $B_{1/i}$ có thể tích không.

Theo định lý 1.4, tồn tại phân hoạch σ sao cho $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \dfrac{\varepsilon}{i}$. Xét $\sigma_1 \subset \sigma$ là họ các hình hộp có phần giao với $B_{1/i}$ không rỗng. Do σ_1 phủ $B_{1/i}$ nên với mỗi $P \in \sigma_1$, $\sup_{y\in P} f(y) - \inf_{y\in P} f(y) \geq \dfrac{1}{i}$.



Do đó

$$\frac{1}{i}\sum_{P\in\sigma_1}\left|P\right| \leq \sum_{P\in\sigma_1}\left[\sup_{y\in P} f(y) - \inf_{y\in P} f(y)\right]\left|P\right| \leq U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \frac{\varepsilon}{i}.$$

Vì $\sum_{P\in\sigma_1}|P|<\varepsilon$ và σ_1 phủ $B_{1/i}$ nên $B_{1/i}$ có thể tích không.

Ngược lại, $\forall\varepsilon>0$, $B_\varepsilon\subset B$, nên B_ε có độ đo không. Do B_ε đóng và bị chặn nên B_ε là tập compact. Vậy B_ε có thể tích không do định lý 1.10.

Vậy tồn tại hữu hạn các hình hộp đóng $P_1, ..., P_m$ phủ B_ε sao cho $\sum_{i=1}^{m}|P_i|<\varepsilon$. Gọi σ là phân hoạch của A (khá mịn) sao cho mỗi hình hộp của nó chỉ thuộc 2 nhóm σ_1,σ_2, trong đó σ_1 là họ các hình hộp chứa trong ít nhất một hình hộp $P_1, ..., P_m$ và σ_2 là họ các hình hộp Q sao cho $Q\cap B_\varepsilon=\varnothing$.

Đặt

$$M=\sup_{x\in A}|f(x)|,$$

$$M_Q(f)=\sup_{x\in Q}f(x),$$

$$m_Q(f)=\inf_{x\in Q}f(x).$$

Khi $Q\in\sigma_2$ ta có $o(f,x)<\varepsilon$, $\forall x\in Q$.

Từ bổ đề 1.12, tồn tại phân hoạch σ_Q của Q sao cho

$$\sum_{P\in\sigma_Q}\left[M_P(f)-m_P(f)\right]|P|<\varepsilon|Q|.$$

Bây giờ ta chọn phân hoạch

$$\sigma^*=\sigma\cup\left(\bigcup_{Q\in\sigma_2}\sigma_Q\right)$$

(đứng về mặt hình học ta chỉ cần vẽ thêm các đường ngang và dọc). Ta có

$$U(f,\sigma^*)-L(f,\sigma^*)=\sum_{P\in\sigma^*\subset\sigma_1}\left[M_P(f)-m_P(f)\right].|P|+\sum_{P\in\sigma^*\subset\sigma_2}\left[M_P(f)-m_P(f)\right].|P|$$

$$\le 2M\sum_{P\in\sigma^*\subset\sigma_1}|P|+\sum_{P\in\sigma^*\subset\sigma_2}\varepsilon|P|\le 2M.\varepsilon+\varepsilon|A|.$$

Vậy, f khả tích Riemann trên A. ■

Ví dụ 1.3. Cho

$$f(x,y)=\begin{cases}1 \quad \text{khi} \quad (x,y)\in(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right)\\ 0 \quad \text{khi} \quad (x,y)\in\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right)\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\end{cases}.$$

Giải

Dễ dàng chứng minh rằng tập điểm gián đoạn của f trên $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ là chính $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$. Do $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ không có độ đo không, ta suy ra rằng f không khả tích Riemann trên $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$.

Từ kết quả này, ta có định nghĩa tổng quát về hàm khả tích Riemann có miền xác định không nhất thiết là một hình hộp. Cho Ω là một tập hợp con của hình hộp D và f là một hàm bị chặn xác định trên Ω. Đặt

$$f_\Omega(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & khi \quad (x,y)\in\Omega\\ 0 & khi \quad (x,y)\in D\setminus\Omega\end{cases}.$$

Khi đó, nếu f_Ω khả tích Riemann trên D thì ta nói f khả tích trên Ω và đặt

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_D f_\Omega(x,y)dxdy.$$

Chú ý rằng định nghĩa trên độc lập với cách chọn hình hộp D chứa Ω.

Định lý 1.13. *Cho f,g là các hàm khả tích trên Ω và $\alpha\in\mathbb{R}$. Ta có*

i) Các hàm $f+g,\alpha f$ cũng khả tích trên Ω và

$$\iint_\Omega (f+g)dxdy=\iint_\Omega f dxdy+\iint_\Omega g dxdy,$$

$$\iint_\Omega \alpha f dxdy=\alpha\iint_\Omega f dxdy.$$

ii) Nếu $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\ldots\cup\Omega_k$ với $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing$ khi $i\neq j$, mỗi $\partial\Omega_i$ là hợp một số hữu hạn các đường cong khả vi và f khả tích trên mỗi Ω_i thì f khả tích trên Ω và

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{k}\iint_{\Omega_i} f(x,y)dxdy.$$

iii) Nếu $f(x,y) \le g(x,y), \forall (x,y) \in \Omega$ *thì* $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \le \iint_\Omega g(x,y)dxdy$.

iv) Nếu $f(x,y) \ge 0, \forall (x,y) \in \Omega$ *thì* $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \ge 0$.

Chứng minh.

i) Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử Ω là một hình hộp. Với mọi phân hoạch σ trong đó Ω được phân thành các hình hộp $D_{ij}, i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,m$, ta có

$$L(f,\sigma) + L(g,\sigma) \le L(f+g,\sigma) \le U(f+g,\sigma) \le U(f,\sigma) + U(g,\sigma),$$

$$L(\alpha f,\sigma) = \alpha L(f,\sigma) \le \alpha U(f,\sigma) = U(\alpha f,\sigma)$$

khi $\alpha \ge 0$, và

$$L(\alpha f,\sigma) = -\alpha U(f,\sigma) \le -\alpha L(f,\sigma) = U(\alpha f,\sigma)$$

khi $\alpha < 0$.

Do đó, từ tính khả tích của f, g, ta suy ra tính khả tích của $f+g, \alpha f$ và

$$\iint_\Omega (f+g)dxdy = \iint_\Omega f dxdy + \iint_\Omega g dxdy,$$

$$\iint_\Omega \alpha f dxdy = \alpha \iint_\Omega f dxdy.$$

Các phần chứng minh khác xem như bài tập. ■

Bây giờ, cho f là một hàm theo hai biến (x,y) xác định trên hình hộp $D = [a,b] \times [c,d]$. Với mỗi x trong khoảng $[a,b]$ ta giả sử hàm (một biến)

$$g(y) = f(x,y)$$

khả tích Riemann trên $[c,d]$. Khi đó, ta có thể tính

$$\int_c^d g(y)dy = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Biểu thức này phụ thuộc vào $x \in [a,b]$. Do đó nó là hàm theo x. Tính tích phân hàm này theo x ta có tích phân

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Tích phân này gọi là *tích phân lặp* và còn được viết dưới dạng

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx .$$

Tương tự ta định nghĩa

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ví dụ 1.4.

a) Tính $I = \int_2^3 \int_1^5 (x+2y)\,dxdy$.

b) Tính $J = \int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dydx$.

Giải

a) $I = \int_2^3 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_1^5 dy = \int_2^3 (12+8y)\,dy = 32.$

b) $J = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{7}{3} \right) dx = \frac{8}{3}.$

Ta có sự liên hệ giữa tích phân bội và tích phân lặp sau

Định lý 1.14. *Cho f khả tích trên $D = [a,b] \times [c,d]$. Giả sử rằng với mọi $\xi \in [a,b]$ hàm $g(y) = f(\xi, y)$ khả tích trên $[c,d]$. Khi đó, hàm*

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$$

khả tích trên $[a,b]$ và

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx .$$

Với các giả thiết tương tự, ta có

$$\iint_Q f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy .$$

Chứng minh. Với $\sigma = \left(\sigma_x, \sigma_y\right)$ là một phân hoạch của D, nghĩa là

$$\sigma_x = \left\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\right\},$$
$$\sigma_y = \left\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m\right\},$$

với

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Đặt $D_{ij} = \left[x_{i-1}, x_i\right] \times \left[y_{i-1}, y_i\right]$ và

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y),$$

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y),$$

với $i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,m$. Ta có

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right) \le \int_c^d f(x,y)dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right)$$

với mọi $x \in \left[x_{i-1}, x_i\right], i = 1,2,\ldots,n$.

Đặt $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy,$ ta suy ra

$$\left(x_i - x_{i-1}\right)\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right) \le \left(x_i - x_{i-1}\right)\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} \varphi(x)$$

và

$$\left(x_i - x_{i-1}\right)\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} \varphi(x) \le \left(x_i - x_{i-1}\right)\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right)$$

với mọi $i = 1,2,\ldots,n$.

Lấy tổng các vế theo *i*, ta được

$$L(f,\sigma) \le L\left(\varphi,\sigma_x\right) \le U\left(\varphi,\sigma_x\right) \le U(f,\sigma)$$

nên từ tính khả tích của f trên D, ta suy ra tính khả tích của φ trên $\left[a,b\right]$.

Hơn nữa, với $I \equiv \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx,$ ta suy ra

$$L(f,\sigma) \le I \le U(f,\sigma)$$

với mọi phân hoạch σ của D. Do đó

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sup_{\sigma} L(f,\sigma) \le I \le \inf_{\sigma} U(f,\sigma) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

và định lý được chứng minh. ■

Định lý này cho ta phương pháp tính một tích phân bội hai bằng cách lần lượt tính hai tích phân hàm một biến. Hơn thế, ta cũng áp dụng được phương pháp này cho các hàm xác định trên một số miền bị chặn Ω đặc biệt khác.

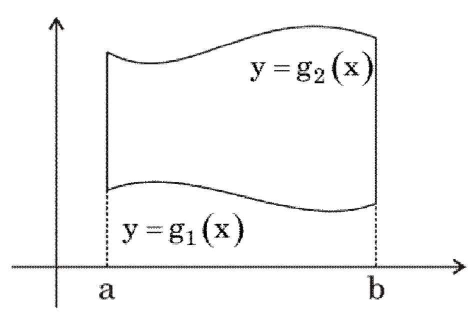
Cụ thể, miền Ω được gọi là *miền đơn giản theo chiều trục* Oy nếu nó có dạng

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

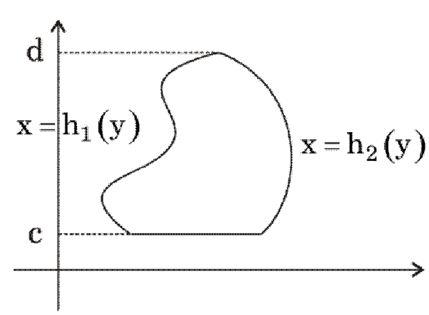
Tương tự Ω được gọi là *miền đơn giản theo chiều trục* Ox nếu

$$\Omega = \{(x,y) : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Trong các hình vẽ sau ta sẽ minh họa hai loại miền đơn giản này.



Miền đơn giản theo chiều trục Oy.



Miền đơn giản theo chiều trục Ox.

Định lý 1.15. *Cho f liên tục và bị chặn trên Ω*

i) Nếu Ω là miền đơn giản theo hướng Oy,

$$\Omega = \left\{ \left(x, y\right) : a \le x \le b, g_1\left(x\right) \le y \le g_2\left(x\right) \right\},$$

với g_1, g_2 là hai hàm khả vi trên $\left[a, b\right]$, thì f khả tích trên Ω và

$$\iint_\Omega f\left(x, y\right) dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\left(x, y\right) dy \right) dx .$$

ii) Nếu Ω là miền đơn giản theo hướng Ox,

$$\Omega = \left\{ \left(x, y\right) : c \le y \le d, h_1\left(y\right) \le x \le h_2\left(y\right) \right\},$$

với h_1, h_2 là hai hàm khả vi trên $\left[c, d\right]$, thì f khả tích trên Ω và

$$\iint_\Omega f\left(x, y\right) dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\left(x, y\right) dx \right) dy .$$

Chứng minh.

i) Ta có f khả tích trên Ω. Áp dụng định lý 1.14 cho hàm

$$f_\Omega\left(x, y\right) = \begin{cases} f\left(x, y\right) & \text{khi} \quad \left(x, y\right) \in \Omega \\ 0 & \text{khi} \quad \left(x, y\right) \in \left[a, b\right] \times \left[c, d\right] \setminus \Omega \end{cases}$$

với $c \le g_1\left(x\right) \le g_2\left(x\right) \le d, \forall x \in \left[a, b\right]$, ta có

$$\iint_\Omega f_\Omega\left(x, y\right) dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f_\Omega\left(x, y\right) dy \right) dx .$$

Mặt khác

$$\int_c^d f_\Omega\left(x, y\right) dy = \left(\int_c^{g_1(x)} + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} + \int_{g_2(x)}^d \right) f_\Omega\left(x, y\right) dy ,$$

với $c < y < g_1\left(x\right)$ và $g_2\left(x\right) < y < d$ thì $\left(x, y\right) \notin \Omega$, do đó $f_\Omega\left(x, y\right) = 0$.

Vậy, ta suy ra

$$\int_c^d f_\Omega\left(x, y\right) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\left(x, y\right) dy .$$

Từ đó ta có

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

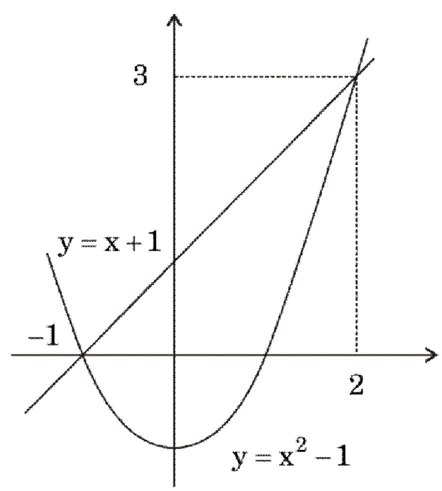
Phần *ii*) được chứng minh tương tự. ■

Ví dụ 1.5. Cho miền *D* giới hạn bởi $y = x+1$ và $y = x^2 - 1$. Tính $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy &= \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2 + y^2)dydx \\ &= \int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{3}x^6 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + \frac{2}{3}\right)dx \\ &= \frac{117}{14}.\end{aligned}$$



Chú ý 1.16. Trong trường hợp miền Ω tổng quát có thể chia thành các miền $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$ rời nhau, mỗi miền là đơn giản theo hướng *Ox* hay *Oy*, ta sử dụng tính chất

$$\iint_{\Omega} fdxdy = \iint_{\Omega_1} fdxdy + \iint_{\Omega_2} fdxdy + \ldots + \iint_{\Omega_k} fdxdy$$

và kết hợp với định lý trên để tính $\iint_{\Omega} fdxdy$.

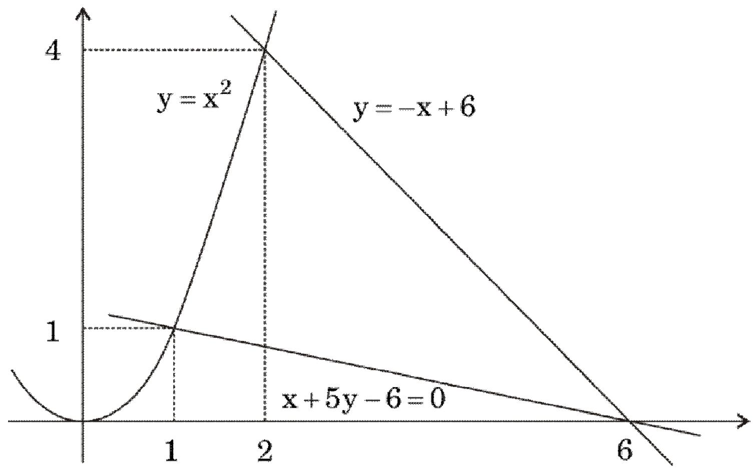
Ví dụ 1.6. Cho miền *D* nằm trong phần tư thứ nhất giới hạn bởi $y = x^2$, $y = -x + 6$ và $x + 5y - 6 = 0$ và nằm ngoài $y = x^2$. Tính $\iint\limits_D xdxdy$.

Giải

Ta có $D = D_1 \cup D_2$, trong đó

$$D_1 = \left\{ (x,y) \middle| -\tfrac{1}{5}(x-6) \le y \le x^2, 1 \le x \le 2 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \middle| -\tfrac{1}{5}(x-6) \le y \le -x+6, 2 \le x \le 6 \right\}.$$



Do đó

$$\iint_D x dx dy = \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy$$

$$= \int_1^2 \left(\int_{-\frac{1}{5}(x-6)}^{x^2} x dy \right) dx + \int_2^6 \left(\int_{-\frac{1}{5}(x-6)}^{-x+6} x dy \right) dx$$

$$= \int_1^2 x \left(x^2 + \frac{1}{5}(x-6) \right) dx + \int_2^6 x \left(-\frac{4}{5}x + \frac{24}{5} \right) dx = \frac{95}{4}.$$

Đối với hàm một biến, từ công thức đạo hàm hàm hợp

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{du},$$

ta nhận được ngay công thức đổi biến

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f\left[x(u) \right] \frac{dx}{du} du,$$

trong đó $f(x)$ liên tục trên $x_1 \le x \le x_2$; $x = x(u)$ thuộc lớp C^1 trên $u_1 \le u \le u_2$, $x_1 = x(u_1)$, $x_2 = x(u_2)$ và $f\left[x(u) \right]$ liên tục trên $u_1 \le u \le u_2$.

Ta có một kết quả tương tự cho tích phân bội hai

Định lý 1.17. *Xét hai miền $R_{xy}, R_{uv} \subset \mathbb{R}^2$ sao cho hàm (đổi biến) từ R_{uv} vào R_{xy},*

$$(u,v) \mapsto \left(x(u,v), y(u,v)\right),$$

thuộc lớp C^1 và có hàm ngược liên tục từ R_{xy} vào R_{uv},

$$(x,y) \mapsto \left(u(x,y), v(x,y)\right).$$

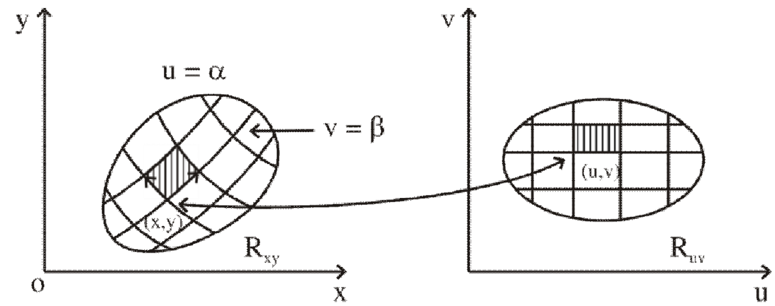
Nếu ma trận Jacobi của hàm đổi biến $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ luôn luôn dương (hay luôn luôn âm) trên R_{uv}, thì với mọi hàm liên tục $f : R_{xy} \to \mathbb{R}$, ta có

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{R_{uv}} f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Một chứng minh của định lý trên được trình bày trong chương sau bằng cách dùng tích phân đường. Ở đây, ta khảo sát ý nghĩa của công thức trên theo khía cạnh hình học và xét một số ứng dụng của nó.

Với một phân hoạch của R_{uv} bằng các đường song song với hai trục tọa độ và với ánh xạ đổi biến $x = x(u,v), y = y(u,v)$ ta nhận được một phân hoạch của R_{xy} gồm các miền con ΔA. Mỗi miền con này có diện tích được xấp xỉ bằng diện tích hình bình hành với hai vectơ cạnh lần lượt là $(x_u \Delta u, y_u \Delta u)$ và $(x_v \Delta v, y_v \Delta v)$, nghĩa là, ΔA được xấp xỉ bằng trị số tuyệt đối của định thức

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_u \Delta u & x_v \Delta v \\ y_u \Delta u & y_v \Delta v \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \\ &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$



Hơn nữa, với $(x,y)\in R_{xy}$ là điểm tương ứng với $(u,v)\in R_{uv}$, nghĩa là, $x=x(u,v), y=y(u,v)$ thì

$$f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))$$

và do đó,

$$f(x,y)\Delta A\approx f(x(u,v),y(u,v))\Delta u\Delta v\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

Ngoài ra, các tổng

$$\sum f(x,y)\Delta A \text{ và } \sum f(x(u,v),y(u,v)).\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

lần lượt xấp xỉ các tích phân

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dxdy \quad \text{và} \quad \iint_{R_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

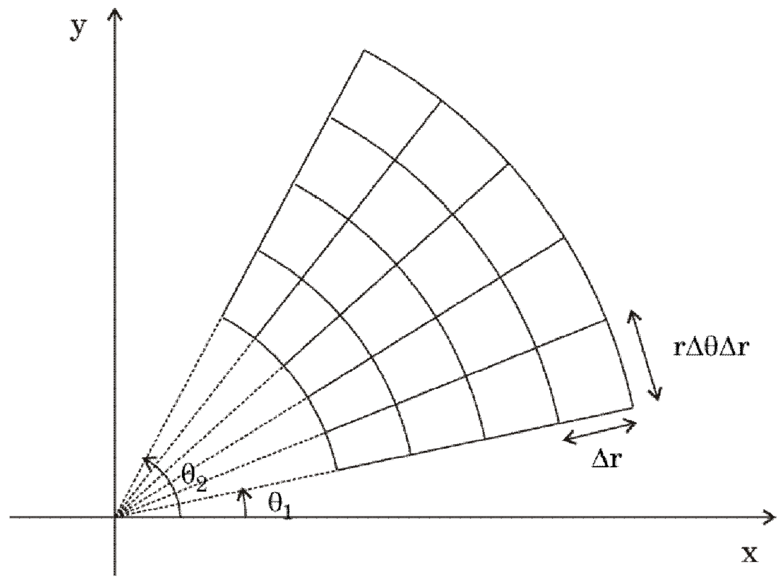
và ta nhận được công thức đổi biến trong định lý 1.17.

Ví dụ 1.7. Xét hàm đổi tọa độ cực trong $\mathbb{R}^2$,

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

thì khi (r,θ) thay đổi trong hình hộp $[r_0,r_0+\Delta r]\times[\theta_0,\theta_0+\Delta\theta]$ với $(r_0,\theta)\in(0,\infty)\times(0,2\pi)$ và $\Delta r,\Delta\theta$ đủ nhỏ, (x,y) thay đổi trên một miền con A có diện tích ΔA được xấp xỉ bằng một hình chữ nhật có hai cạnh là Δr và $r\Delta\theta\Delta r$.

Do đó $\Delta A\approx r\Delta\theta\Delta r$.



và do lập luận trên, công thức đổi biến tương ứng sẽ là

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{R_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta .$$

Thật vậy, định thức ma trận Jacobi của hàm đổi biến trong trường hợp này là

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

và ta nhận được kết quả phù hợp với định lý. Cụ thể hơn, với miền $R_{r\theta}$ là hình chữ nhật $\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, và với công thức tích phân lặp, ta có

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta .$$

Ví dụ 1.8.

a) Tính $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, với miền D giới hạn bởi $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ và nằm trong phần tư thứ nhất.

b) Tính $\iint\limits_D \sin\frac{x-y}{x+y}dxdy$, với miền D giới hạn bởi các trục Ox, Oy và $x+y=1$.

Giải

a) Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, với $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $1 \le r \le 2$, $|J| = r$, ta có

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_1^2\int_0^{\pi/2} e^{r^2}.rd\varphi dr = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\left[e^{r^2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{4}\left(e^4 - e\right).$$

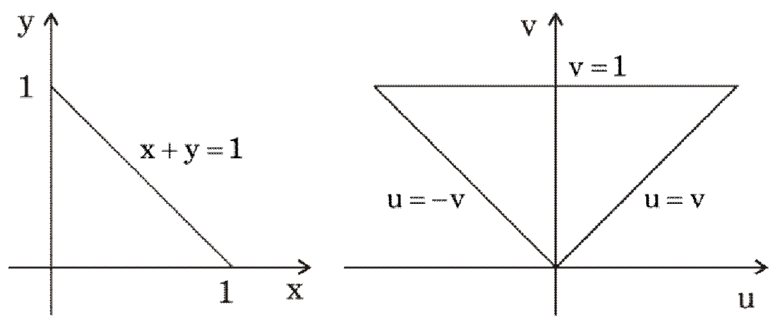
b) Đổi biến $u = x - y$ và $v = x + y$, ta được $x = \frac{1}{2}\left(u + v\right)$ và $y = \frac{1}{2}\left(-u + v\right)$ và

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

D_1 giới hạn bởi $u = v$, $u = -v$ và $v = 1$ nên

$$\iint_D \sin\frac{x-y}{x+y}dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D_1}\sin\frac{u}{v}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\sin\frac{u}{v}dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[-\cos 1 + \cos(-1)\right]vdv = 0.$$



§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Với cùng một phương pháp, ta có thể xây dựng được tích phân cho hàm bị chặn xác định trên một miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^3$. Nội dung chính của tích phân bội ba được phát biểu và các chứng minh được bỏ qua. Người đọc có nhu cầu, có thể chứng minh dựa vào các chứng minh cho tích phân bội hai.

Định nghĩa 2.1. Hàm bị chặn f xác định trên một hình hộp $D = \left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\times\left[e,g\right] \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là *khả tích Riemann* nếu

$$\sup_{\sigma\in P} L\left(f,\sigma\right) = \inf_{\sigma\in P} U\left(f,\sigma\right).$$

Bấy giờ, giá trị này được gọi là *tích phân của f trên D*, ký hiệu

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz,$$

trong đó P là tập hợp tất cả các phân hoạch $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ của D, nghĩa là $\sigma_x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $\sigma_y = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ và $\sigma_z = \{z_0, z_1, ..., z_p\}$ lần lượt là các phân hoạch của $[a,b]$, $[c,d]$ và $[e,g]$.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = d,$$

$$e = z_0 < z_1 < ... < z_{p-1} < z_p = g,$$

và

$$L(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} m_{ijk}\left|D_{ijk}\right|,$$

$$U(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} M_{ijk}\left|D_{ijk}\right|,$$

với

$$D_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

$$m_{ijk} = \inf_{(x,y,z)\in D_{ijk}} f(x,y,z),$$

$$M_{ijk} = \sup_{(x,y,z)\in D_{ijk}} f(x,y,z),$$

$$\left|D_{ijk}\right| = (x_i - x_{i-1}).(y_j - y_{j-1}).(z_k - z_{k-1}).$$

Tương tự như trong $\mathbb{R}^2$, ta lần lượt nhận được các kết quả sau

Mệnh đề 2.2. *Cho f là hàm bị chặn trên một hình hộp $D \subset \mathbb{R}^3$. Ta có f khả tích Riemann trên D nếu và chỉ nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma \in \mathrm{P}, U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Định lý 2.3. *Giả sử* A *là hình hộp đóng trong* $\mathbb{R}^3$, $f: A \to \mathbb{R}$ *là hàm bị chặn. Ta có* f *khả tích Riemann trên* A *nếu và chỉ nếu tập điểm gián đoạn của* f *có độ đo không.*

Định nghĩa 2.4. Cho Ω là một tập con của hình hộp D với biên $\partial\Omega$ gồm hữu hạn các mặt khả vi và f là một hàm bị chặn xác định trên Ω. Xét hàm

$$f_\Omega(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{khi} \quad (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y,z) \in D \setminus \Omega \end{cases}.$$

Khi đó, nếu f_Ω khả tích Riemann trên D thì ta nói f khả tích Riemann trên Ω và đặt

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f_\Omega(x,y,z)\,dxdydz.$$

Từ định lý 2.3, ta có

Định lý 2.5. *Cho* Ω *là một tập hợp mở bị chặn với biên* $\partial\Omega$ *là hợp của một số hữu hạn các mặt khả vi và* f *là hàm bị chặn trên* Ω. *Nếu* f *liên tục tại mọi điểm của* Ω *ngoại trừ trên một số hữu hạn các mặt khả vi trong* Ω *thì* f *khả tích Riemann trên* Ω.

Định lý 2.6. *Cho* f, g *là các hàm khả tích trên* Ω *và* $\alpha \in R$. *Khi đó*

i) $f+g, \alpha f$ *cũng khả tích trên* Ω *và*

$$\iiint_\Omega (f+g)\,dxdydz = \iiint_\Omega f\,dxdydz + \iiint_\Omega g\,dxdydz,$$

$$\iiint_\Omega \alpha f\,dxdydz = \alpha \iiint_\Omega f\,dxdydz.$$

ii) Nếu $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_k$ *với* $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ *khi* $i \neq j$, *mỗi* $\partial\Omega_i$ *là hợp một số hữu hạn các mặt khả vi và* f *khả tích trên mỗi* Ω_i *thì* f *khả tích trên* Ω *và*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{i=1}^{k} \iiint_{\Omega_i} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

iii) Nếu $f(x,y,z) \le g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Omega$ *thì*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint_\Omega g(x,y,z)\,dxdydz.$$

iv) Nếu $f(x,y,z) \ge 0, \forall (x,y,z) \in \Omega$ *thì*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \ge 0.$$

Ta cũng có sự tương quan giữa tích phân bội và tích phân lặp như sau

Định lý 2.7. *Cho* f *khả tích trên* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. *Giả sử rằng với mọi* $(\xi, \eta) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *hàm* $g(z) = f(\xi, \eta, z)$ *khả tích trên* $[a_3, b_3]$. *Khi đó, hàm*

$$(x,y) \mapsto \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$$

khả tích trên $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *và*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

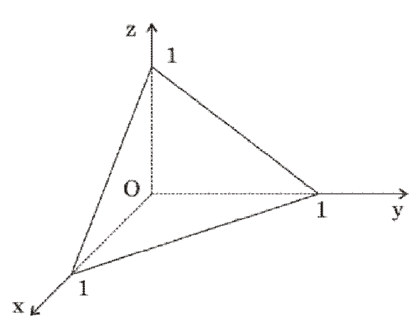
Ví dụ 2.1. Cho miền V giới hạn bởi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và $x + y + z = 1$. Tính $\iiint\limits_V z\,dxdydz$.

Giải

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dydx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dydx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{24}.$$



Định lý 2.8. *Xét hai miền* $R_{xyz}, R_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$ *sao cho hàm (đổi biến) từ* R_{uvw} *vào* R_{xyz},

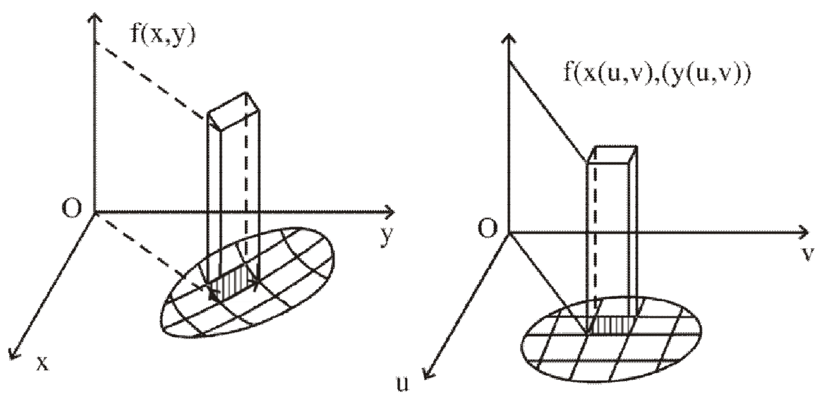
$$(u,v,w) \mapsto \left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$$

thuộc lớp C^1 *và có hàm ngược liên tục từ* R_{xyz} *vào* R_{uvw}

$$(x,y,z) \mapsto \left(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\right).$$

Nếu ma trận Jacobi của hàm đổi biến $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ *luôn luôn dương (hay luôn luôn âm) trên* R_{uv}, *thì với mọi hàm liên tục* $f : R_{xyz} \to R$, *ta có*

$$\iint_{R_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{R_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$



Hai trường hợp quan trọng :

Trường hợp 1: với tọa độ trụ,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad |J| = r,$$

ta có

$$\iiint_{R_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{R_{r\theta z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$

Trường hợp 2: với tọa độ cực,

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}, \ |J| = \rho^2\sin\phi,$$

ta có

$$\iiint_{R_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{R_{\rho\phi\theta}} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta.$$

Ví dụ 2.2.

a) Tính $\iiint\limits_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó B là quả cầu tâm O bán kính 1.

b) Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi $x^2+y^2=z,\ z=4$.

Giải

a) Đổi biến

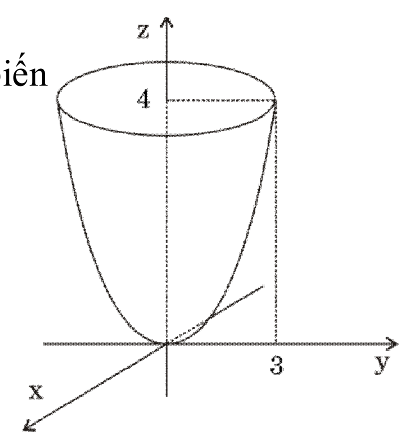
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

ta có $|J| = r^2\sin\varphi,\ 0 \le r \le 1,\ \varphi\in[0,\pi],\ \theta\in[0,2\pi]$. Do đó

$$\iiint\limits_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r.r^2\sin\varphi\, d\theta d\varphi dr$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^3dr.\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 2\pi.\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = 4\pi.\frac{1}{4} = \pi.$$

b) Ta có $V = \left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2 \le z \le 4\right\}$, nên bằng cách đổi biến



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

với $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $r^2 \le z \le 4$, ta được

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2.rdzdrd\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^2 r^3(4-r^2)dr = 2\pi\left[r^4 - \frac{r^6}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{32}{3}\pi.$$

§3. ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Trong suốt phần này, các hàm được khảo sát đều là hàm liên tục, bị chặn xác định trên một miền có biên là hội một số hữu hạn đường cong hay mặt khả vi.

I. Diện tích miền $D \subset \mathbb{R}^2$

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ là một miền bị chặn với biên ∂D là hội của một số hữu hạn các đường cong khả vi. Giá trị

$$S = \iint_D dxdy$$

được gọi là *diện tích* của D.

Ý nghĩa hình học: Với $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ là một phân hoạch bất kỳ của hình hộp $[a,b]\times[c,d]$ chứa D và với hàm

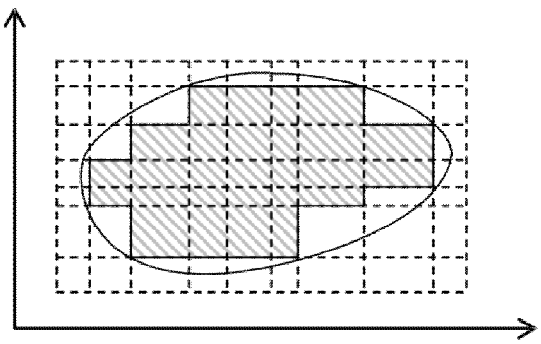
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad (x,y)\in D \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus D \end{cases}$$

thì

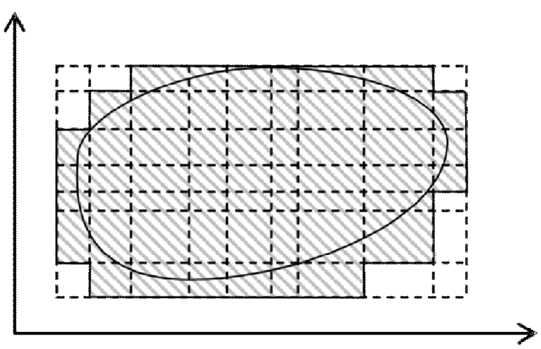
$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad D_{ij}\not\subset D \\ 1 & \text{khi} \quad D_{ij}\subset D \end{cases}$$

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad D_{ij}\cap D \neq \varnothing \\ 0 & \text{khi} \quad D_{ij}\cap D = \varnothing \end{cases}$$

Do đó, $L\left(f,\sigma\right)=\sum_{i,j} m_{ij}\left|D_{ij}\right|$ chính là tổng diện tích các hình hộp con của phân hoạch σ nằm hoàn toàn trong D



và $U\left(f,\sigma\right)=\sum_{i,j} M_{ij}\left|D_{ij}\right|$ là tổng diện tích các hình hộp con của σ mà hội của chúng phủ D.



Một cách trực giác, diện tích S của D, nếu có, thỏa

$$L\left(f,\sigma\right)\le S\le U\left(f,\sigma\right)$$

với mọi phân hoạch σ của $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$. Vậy

$$\sup_{\sigma} L\left(f,\sigma\right)\le S\le \inf_{\sigma} U\left(f,\sigma\right)$$

nên khi f khả tích trên $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ (nghĩa là hàm 1 khả tích trên D), ta có

$$S=\iint_D dxdy.$$

Nếu $\iint_D dxdy=0$ thì D là tập hợp không đáng kể.

Trường hợp đặc biệt, nếu

$$D=\left\{\left(x,y\right)\middle| a\le x\le b,\psi\left(x\right)\le y\le\varphi\left(x\right)\right\}$$

thì diện tích của D là

$$S=\iint_D dxdy=\int_a^b\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}dydx=\int_a^b\left(\varphi(x)-\psi(x)\right)dx.$$

Tương tự, nếu

$$D=\left\{(x,y)\middle|c\le x\le d,\psi(y)\le x\le\varphi(y)\right\}$$

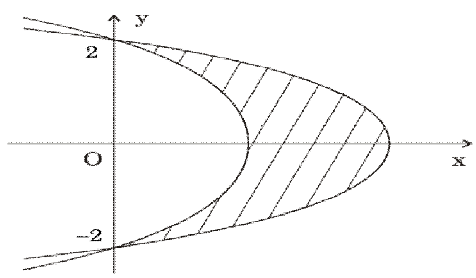
thì diện tích của D là

$$S=\iint_D dxdy=\int_c^d\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}dxdy=\int_c^d\left(\varphi(y)-\psi(y)\right)dx.$$

Ví dụ 1.1. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y^2=4-x$ và $y^2=4-4x$.

Giải

$$S=2\int_0^2\int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2}dxdy=6\int_0^2(1-\frac{1}{4}y^2)dy=8.$$



Tương tự cho trường hợp $\mathbb{R}^3$, ta có

II. Thể tích miền $D\subset\mathbb{R}^3$

Tương tự, với $D\subset\mathbb{R}^3$ là một miền bị chặn với biên ∂D là hội của một số hữu hạn các mặt khả vi. Giá trị

$$V=\iiint_D dxdydz$$

được gọi là *thể tích* của D.

Trường hợp đặc biệt, nếu

$$D=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in\Omega,\psi(x,y)\le z\le\varphi(x,y)\right\}$$

với Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ có biên là hội một số hữu hạn các đường cong khả vi, thì thể tích của D là

$$V=\iiint_D dxdydz=\iint_\Omega\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)}dzdxdy=\iint_\Omega\left(\varphi(x,y)-\psi(x,y)\right)dxdy.$$

Tương tự, nếu

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,(y,z)\in\Omega,\psi(y,z)\le x\le\varphi(y,z)\right\}$$

thì

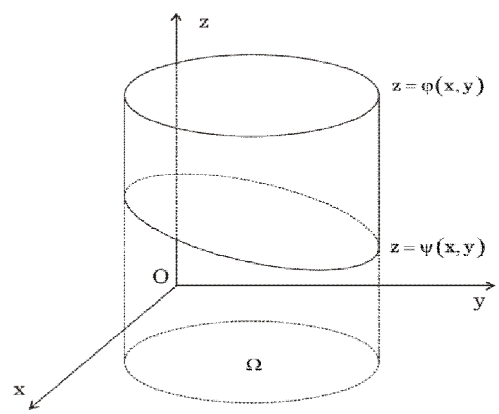
$$V=\iiint_D dxdydz=\iint_\Omega\int_{\psi(y,z)}^{\varphi(y,z)}dxdydz=\iint_\Omega\left(\varphi(y,z)-\psi(y,z)\right)dydz$$

và nếu

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,(x,z)\in\Omega,\psi(x,z)\le y\le\varphi(x,z)\right\}$$

thì

$$V=\iiint_D dxdydz=\iint_\Omega\int_{\psi(x,z)}^{\varphi(x,z)}dydxdz=\iint_\Omega\left(\varphi(x,z)-\psi(x,z)\right)dxdz.$$



Ví dụ 2.1. Tính thể tích hình D giới hạn bởi các mặt $z=x^2+y^2$ và $z=1$.

Giải

Ta có

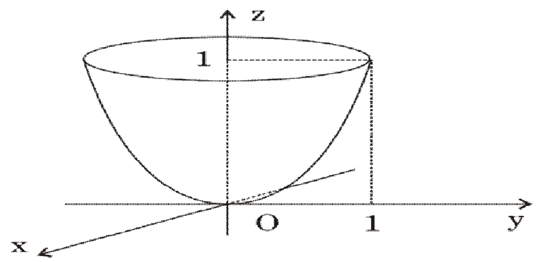
$$V=\iiint\limits_D dxdydz.$$

Dùng tọa độ trụ

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

ta được

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 rdzdrd\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r(1-r^2)dr\right)d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$



III. Độ dài đường cong

Cho

$$C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t\in[a,b],$$

là một đường cong khả vi trong $\mathbb{R}^2$, nghĩa là x,y là các hàm liên tục trên $[a,b]$ và thuộc lớp C^1 trên (a,b). Giá trị

$$l=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

được gọi là *độ dài* đường cong C.

Ý nghĩa hình học: Với một phân hoạch bất kỳ $\sigma=\{t_0,t_1,...,t_k\}$ của $[a,b]$, nghĩa là

$$a=t_0<t_1<...<t_{k-1}<t_k=b,$$

lấy $A_i=(x(t_i),y(t_i))$. Ta có

$$\begin{aligned}A_{i-1}A_i&=\sqrt{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2}\\&=\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}.(t_i-t_{i-1})\end{aligned}$$

với $\xi_i,\eta_i\in(t_{i-1},t_i)$.

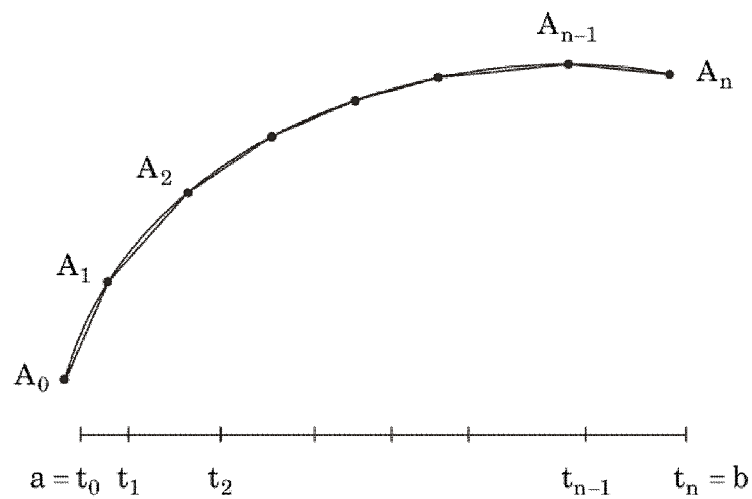
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\xi_i=\eta_i$, nghĩa là

$$A_{i-1}A_i = \sqrt{x'\left(\xi_i\right)^2 + y'\left(\xi_i\right)^2}.\left(t_i - t_{i-1}\right),$$

với $\xi_i \in \left(t_{i-1}, t_i\right)$. Suy ra

$$L\left(\sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}, \sigma\right) \le \sum_{i=1}^{k} A_{i-1}A_i \le U\left(\sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}, \sigma\right)$$

với mọi phân hoạch σ của $\left[a,b\right]$.



Do đó, với độ dài đường cong C xem như là giới hạn tổng độ dài các đoạn thẳng $A_{i-1}A_i$, ta suy ra

$$l = \int_a^b \sqrt{x'\left(t\right)^2 + y'\left(t\right)^2}\,dt.$$

Ví dụ 3.1. Tính độ dài cung $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \le t \le 4$.

Giải

Ta có $x'\left(t\right) = 2t$, $y'\left(t\right) = 3t^2$, nên

$$l = \int_0^4 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt = \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1).$$

Trường hợp đặc biệt, nếu

$$C = \left\{\left(x, f\left(x\right)\right) \middle| a \le x \le b\right\}$$

thì C được viết lại thành phương trình tham số là

$$C:\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases},\ t\in[a,b].$$

Do đó, độ dài của C trở thành

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx .$$

Tương tự, nếu

$$C=\{(f(y),y)|c\le y\le d\}$$

thì C được viết lại thành phương trình tham số là

$$C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=t \end{cases},\ t\in[c,d],$$

và độ dài của C bấy giờ là

$$l=\int_c^d \sqrt{f'(t)^2+1}\,dt=\int_a^b \sqrt{f'(x)^2+1}\,dy .$$

Ví dụ 3.2. Tính độ dài cung của parabol $y=\sqrt{x}$, với $1\le x\le 4$.

Giải

<u>*Cách 1*</u>: ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ nên

$$\ell=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})+\sqrt{17}-\frac{1}{4}\ln(\sqrt{17}-4).$$

<u>*Cách 2*</u>: với $x=y^2$, $x'=2y$, ta có

$$l=\int_1^2 \sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_1^2 \sqrt{1+4y^2}\,dy .$$

IV. Diện tích mặt $\Omega\subset\mathbb{R}^3$

Cho

$$S:\begin{cases} x=x(s,t) \\ y=y(s,t),\ (s,t)\in D\subset R^2, \\ z=z(s,t) \end{cases}$$

là một mặt khả vi trong $\mathbb{R}^3$, nghĩa là x, y, z là các hàm thuộc lớp C^1 trên D. Giá trị

$$s = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, ds dt$$

với

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2,$$

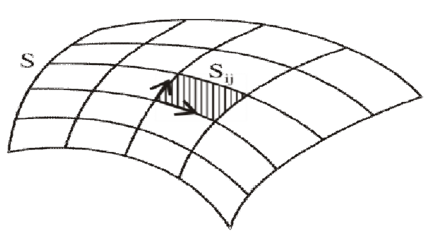
được gọi là diện tích của mặt S.

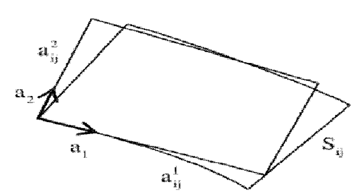
Ý nghĩa hình học: Xét trường hợp $D = [a,b] \times [c,d]$. Với một phân hoạch bất kỳ $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ của D với $\sigma_x = \{s_o, s_1, ..., s_h\}, \sigma_y = \{t_o, t_1, ..., t_k\}$,

$$a = s_0 < s_1 < ... < s_{h-1} < s_h = b,$$
$$c = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < t_k = d.$$

Tại điểm $M_{ij}\left(x(s_i, t_j), y(s_i, t_j), z(s_i, t_j)\right)$, ta có hai vectơ tiếp tuyến với mặt S tại M_{ij} là

$$a_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_i, t_j), \frac{\partial y}{\partial s}(s_i, t_j), \frac{\partial z}{\partial s}(s_i, t_j)\right),$$
$$a_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_i, t_j), \frac{\partial y}{\partial t}(s_i, t_j), \frac{\partial z}{\partial t}(s_i, t_j)\right).$$





Phần mặt

$$S_{ij}:\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t),\ (s,t) \in D_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j], \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

được xấp xỉ bằng hình bình hành với hai vectơ cạnh

$$a_{ij}^1 = (s_i - s_{i-1})\left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_i, t_j), \frac{\partial y}{\partial s}(s_i, t_j), \frac{\partial z}{\partial s}(s_i, t_j)\right),$$

$$a_{ij}^2 = (t_j - t_{j-1})\left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_i, t_j), \frac{\partial y}{\partial t}(s_i, t_j), \frac{\partial z}{\partial t}(s_i, t_j)\right),$$

với diện tích là

$$s_{ij} = \left|a_{ij}^1 \times a_{ij}^2\right| = \left|a_{ij}^1\right|.\left|a_{ij}^2\right|.\sin\varphi_{ij},$$

với φ_{ij} là góc tạo bởi hai vectơ a_{ij}^1 và a_{ij}^2.

Do đó

$$s_{ij} = \sqrt{\left|a_{ij}^1\right|^2.\left|a_{ij}^2\right|^2 - \left(a_{ij}^2.a_{ij}^2\right)^2}$$
$$= (s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1})\sqrt{E(s_i, t_j).G(s_i, t_j) - F^2(s_i, t_j)}$$

và diện tích mặt S, tổng diện tích các mặt S_{ij}, được xấp xỉ bằng

$$\sum_{ij} s_{ij} = \sum_{ij} \sqrt{E(s_i, t_j).G(s_i, t_j) - F^2(s_i, t_j)}.(s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}).$$

Từ bất đẳng thức

$$L\left(\sqrt{EG - F^2}, \sigma\right) \le \sum_{ij} s_{ij} \le U\left(\sqrt{EG - F^2}, \sigma\right)$$

ta suy ra

$$s = \iint_D \sqrt{EG - F^2}.dsdt.$$

Trường hợp đặc biệt nếu

$$S = \left\{(x, y, f(x, y)) \middle| (x, y) \in D\right\},$$

với D là một miền trong $\mathbb{R}^2$ có biên là hội hữu hạn các đường cong khả vi, thì S được viết lại thành phương trình tham số là

$$S:\begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=f\left(s,t\right) \end{cases},\ \left(s,t\right)\in D.$$

Do đó, diện tích của S trở thành

$$s=\iint_D \sqrt{1+\left(f_s\left(s,t\right)\right)^2+\left(f_t\left(s,t\right)\right)^2}.dsdt.$$

Tương tự cho các trường hợp khác.

Ví dụ 4.1. Tính diện tích phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4a^2$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2-2ax=0$, $a>0$.

Giải

Từ phương trình mặt cầu

$$x^2+y^2+z^2-4a^2=0,$$

ta có

$$z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}.$$

Suy ra

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}.$$

Chú ý, phần mặt cầu nằm trong góc phần tám thứ nhất có hình chiếu là nửa hình tròn D giới hạn bởi $x^2+y^2=2ax$ và trục Ox. Mặt này nằm trong bốn góc một phần tám và có tính đối xứng nên

$$S = 4\iint_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Dùng tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

ta được

$$S = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\varphi} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = -8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4a^2 - r^2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= -8a\int_0^{\pi/2} (2a\sin\varphi - 2a)d\varphi = 8a^2(\pi - 2).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1. Tính diện tích của miền Ω và tính $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$ với

a) Ω là hình chữ nhật $[-2,3]\times[0,2]$; $f(x,y)=2x+y$.

b) Ω là hình chữ nhật giới hạn bởi $x=2$, $x=4$, $y=1$, $y=5$; $f(x,y)=x^2y$.

c) Ω giới hạn bởi $y=3x$, $x=0$, $y=6$; $f(x,y)=x-y$.

d) $\Omega=[3,4]\times[1,2], f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2}$.

e) Ω giới hạn bởi $x=9-y^2$, $x=0$, $-3\le y\le 1$; $f(x,y)=x^2y$.

f) Ω là hình giới hạn bởi $x=0$, $y=0$, $3x+y=2$; $f(x,y)=xy$

g) Ω là hình tam giác giới hạn bởi $x=0$; $y=0$; $3x+y=2$; $f(x,y)=x+y$.

h) Ω giới hạn bởi $x^2-5\le y\le 4$, $-3\le x\le 1$; $f(x,y)=3x-y$.

i) Ω giới hạn bởi $y=x$, $y=-x+2$, $x=3$; $f(x,y)=x+1$.

j) Ω là miền $|x|+|y|\le 2$; $f(x,y)=y+x$.

k) $\Omega=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 3\cos y,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$; $f(x,y)=x^2\sin^2 y$

l) Ω là hình tròn $x^2+y^2\le 1$ nằm trong phần tư thứ ba; $f(x,y)=y$

m) Ω là miền nằm phía trên đường $y=1$ và nằm trong vòng tròn $x^2+y^2=4$; $f(x,y)=x\sqrt{y^4+1}$.

n) Ω là hình tròn $C: x^2+y^2=1$ nằm trong phần tư thứ hai; $f(x,y)=x^2+3y$.

Bài 2. Trong các tích phân lặp sau, hãy vẽ miền lấy tích phân và đổi thứ tự lấy tích phân.

a) $I = \int_{-6}^{0} \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} f(x,y)dxdy$.

b) $\int_{0}^{2} \int_{x}^{3x} f(x,y)dydx$.

c) $\int_{1}^{3} \int_{\frac{1}{x}}^{2x} f(x,y)dydx$.

d) $\int_{0}^{1} \int_{x^3}^{x} f(x,y)dydx$.

Bài 3. Trong các câu sau, hãy đổi thứ tự lấy tích phân và tính tích phân đó

a) $\int_{-2}^{0} \int_{-x}^{2} xydydx + \int_{0}^{6} \int_{\frac{x}{3}}^{2} xydydx$.

b) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} (x+y)dydx + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2-x} (x+y)dydx$.

c) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\arcsin x} ydydx$.

d) $\int_{0}^{1} \int_{x^2}^{x} xy^2dydx.$

Bài 4. Tính

a) $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, $S = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0 \right\}$.

b) $\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}dydx$.

c) $\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, với S là phần trong ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

d) $\iint_S \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, $S = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$.

Bài 5. Trong các bài tập sau, tìm thể tích của khối

a) Tứ diện nằm trong gócphần tám thứ nhất, và tạo ra bởi các mặt tọa độ và mặt $x + y + z = 1$.

b) Nằm phía trên mặt phẳng Oxz và dưới mặt $y = 1 - x^2 - z^2$.

c) Nằm trong hình trụ $x^2 + 4y^2 = 4$, trên $z = y - 5$ và dưới $z = 9 - x$.

d) Nửa khối ellipsoid $x^2 + y^2 + 2z^2 \le a^2$, $z \ge 0$, $a \ge 0$.

e) Tứ diện với các mặt là $x = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 6$, $x - y + 3z = 0$.

f) Nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 9$ và giữa hai mặt phẳng $z = 2x + 1$, $z = 0$ ($x \ge 0$).

g) Trong hình trụ $x^2 + y^2 = 9$, giữa $z = 0$, $z = x^2 + y^2$.

h) Nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và hình trụ $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

i) Giới hạn bởi paraboloid $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 2y$.

Bài 6. Tính các tích phân

a) $\iiint_D (xy + z)dxdydz$, $D = \{(x,y,z) | 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4, 0 \le z \le 3\}$.

b) $\iiint_D dxdydz$, $D = \{(x,y,z) | 0 \le z \le 2y \le 3x \le 3\}$.

c) $\iiint_D ydxdydz$, D giới hạn bởi hình trụ $y = x^2$ và các mặt phẳng $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$.

d) $\iiint_D xdxdydz$; D giới hạn bởi paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và hình trụ $z = 4 - y^2$.

e) $\iiint_V dxdydz$; V giới hạn bởi paraboloid $2z \ge x^2 + y^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$.

f) $\iiint_V dxdydz$; V giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 \le 2zR$.

g) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$ với $V = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$.

h) $\iiint_V (x^2 + z^2)dxdydz$; với V giới hạn bởi $2y = x^2 + z^2$ và $y = 2$.

Bài 7. Cho một vật rắn V có mật độ khối lượng ρ là hàm ba biến $\rho(x,y,z)$. Ta có

1) Khối lượng $M = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$.

2) Tọa độ trọng tâm là

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_V y\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$\overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

3) Moment quán tính (hình học) đối với các trục tọa độ là

$$I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz.$$

a) Giả sử V là đồng chất, $\rho = 1$, tìm moment quán tính và tọa độ trọng tâm của hình V giới hạn bởi $x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0)$, $z = 0$, $z = 2a$.

b) Tìm khối lượng của quả cầu V có bán kính a, mật độ

$$\rho\left(x,y,z\right) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

c) Tìm khối lượng của hình lập phương $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ nếu $\rho(x,y,z) = x + y + z$.

d) Tìm tọa độ trọng tâm của vật giới hạn bởi $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = \dfrac{y^2}{2}$ biết $\rho = 1$.

e) Tìm tọa độ trọng tâm và moment quán tính của V giới hạn bởi $z = 0$ và $z = 1 - x^2 - 2y^2$.

f) Tìm trọng tâm của khối V trong đó $V = \left\{\left(x,y,z\right) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0\right\}$ biết $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bài 8. Tính diện tích

a) phần mặt $x = zy$ chứa trong hình trụ $y^2 + z^2 = 1$.

b) phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ chứa trong hình trụ $x^2 + 4y^2 = 4$.

c) phần mặt $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$ chứa trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

Bài 9. Tính độ dài cung của

a) $\mathrm{y} = x^2\sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq 9)$.

b) $\mathrm{y}^2 = ax$ $(a > 0, 0 \leq x \leq a)$.

c) $\mathrm{y}^2 = 4x$ $(1 \leq y \leq 2)$.

d) $2\ln y - y^2 = x$ $(1 \leq y \leq e)$.

e) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Chương 5

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – TÍCH PHÂN MẶT

Trong chương 4, ta đã xét tích phân các hàm xác định trên một tập mở có biên là hội hữu hạn các đường (hay mặt) khả vi. Nay, ta sẽ khảo sát khái niệm tích phân của một hàm trên một đường cong (trong $\mathbb{R}^2$ hay $\mathbb{R}^3$), mà ta gọi là *tích phân đường,* cũng như khái niệm tích phân của một hàm trên một mặt khả vi (trong $\mathbb{R}^3$), mà ta gọi là *tích phân mặt.*

Với C là một đường cong khả vi xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [a,b],$$

và $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]$.

Chia $[a,b]$ thành n khoảng $[t_{i-1},t_i]$. Đặt $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$. Các điểm $P_i(x_i,y_i)$ chia C thành thành n cung nhỏ có chiều dài là $\Delta_i s$ và với điểm $\left(x_i^*,y_i^*\right)$ được chọn trong cung thứ i với $1 \le i \le n$ thì nếu có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} f\left(x_i^*,y_i^*\right)\Delta_i s = m \in \mathbb{R}$$

giới hạn đó được gọi là tích phân đường của f trên C, ký hiệu là $\int_C f(x,y)ds = m$.

Chúng ta đã khảo sát độ dài của C,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

và

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Ta có

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

Tương tự nếu có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = m \in \mathbb{R}$$

giới hạn đó được gọi là tích phân đường của f trên C tương ứng x, ký hiệu

$$\int_C f(x,y)dx = m.$$

Tương tự, với C là một đường cong trong $\mathbb{R}^3$, ta có các tích phân

$$\int_C f(x,y,z)ds;\ \int_C P(x,y,z)dx;\ \int_C Q(x,y,z)dy;\ \int_C R(x,y,z)dz.$$

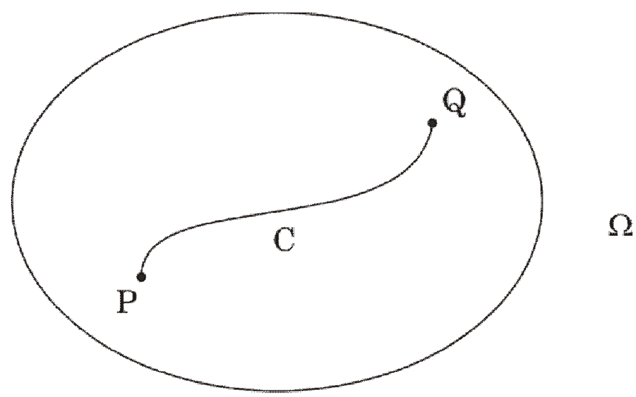
liên kết với giới hạn của các tổng

$$\sum f(x,y,z)\Delta s;\ \sum P(x,y,z)\Delta x;\ \sum Q(x,y,z)\Delta y;\ \sum R(x,y,z)\Delta z.$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

I. Định nghĩa tích phân đường loại một

Cho một đường cong khả vi $C(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ với $a \le t \le b$ và f là hàm liên tục trên C,



Ta định nghĩa

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Với đường cong trong $\mathbb{R}^2$, $C(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, $a \le t \le b$ và f là hàm liên tục trên C, ta định nghĩa

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Đặc biệt, với $C: y = g(x)$, $x \in [a,b]$, ta có

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x, g(x)\right)\sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}dx .$$

Với $C: x = g(y)$, $y \in [c,d]$, ta có

$$\int_C f(x,y)ds = \int_c^d f\left(g(y), y\right)\sqrt{\left(g'(y)\right)^2 + 1}dy .$$

Tương tự cho trường hợp $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 1.1. Tính $\int\limits_{(C)} xyds$ với (C) là cung của elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ nằm trong phần tư thứ nhất hệ trục Oxy.

Giải

<u>*Cách 1*</u>: Bằng cách viết

$$C: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

ta được

$$\int_C xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t.3\sin t.\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{9 + 7\frac{1 - \cos 2t}{2}}dt$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{25 - 7\cos 2t}dt.$$

Đổi biến $u = \cos 2t$, với $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $du = -2\sin 2tdt$, ta được

$$\int_C xyds = 3\sqrt{2}\int_1^{-1}\sqrt{25-7u}\left(-\frac{du}{2}\right) = 3\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{25-7u}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{(25-7u)^{3/2}}{(3/2)(-7)}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{\sqrt{2}}{7}(25-7u)^{3/2}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{7}\left(18^{3/2} - 32^{3/2}\right) = \frac{148}{7}.$$

<u>Cách 2</u>: Do $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, ta có $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, $x\in[0,4]$ và do đó

$$\int_C xyds = \int_0^4 x\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\sqrt{1+\frac{9}{16}\left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^4 x\sqrt{256-7x^2}\,dx = \frac{148}{7}$$

(đổi biến $u=\sqrt{256-7x^2}$).

<u>Cách 3</u>: Từ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, ta có $x=\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$, $y\in[0,3]$ nên

$$\int_C xyds = \int_0^3 y\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}\sqrt{1+\frac{16}{9}\left(\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}\right)^2}\,dy$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^3 y\sqrt{81+7y^2}\,dy = \frac{148}{7}$$

(đổi biến $u=\sqrt{81+7y^2}$).

II. Định nghĩa tích phân đường loại hai

Cho một đường cong khả vi $C(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ với $a\le t\le b$ và f là hàm liên tục trên C ta định nghĩa

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)x'(t)dt,$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)y'(t)dt.$$

Với đường cong trong $\mathbb{R}^3$, $C(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, $a\le t\le b$ và f là hàm liên tục trên (C), ta định nghĩa

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)x'(t)dt,$$

$$\int_C f(x,y,z)dy = \int_a^b f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)y'(t)dt,$$

$$\int_C f(x,y,z)dz = \int_a^b f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)z'(t)dt.$$

Ngoài ra, với các hàm f,g liên tục trên $C \subset \mathbb{R}^2$, ta viết

$$\int_C fdx + gdy = \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

và với các hàm f,g,h liên tục trên $C \subset \mathbb{R}^3$, ta viết

$$\int_C fdx + gdy + hdz = \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy + \int_C hdz.$$

Từ định nghĩa, ta có thể tính tích phân

$$I = \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

tùy theo cách biểu diễn đường cong *C*. Chẳng hạn, với

$$(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [a,b],$$

ta có

$$I = \int_a^b \Big[f\Big(x(t),y(t)\Big)x'(t) + g\Big(x(t),y(t)\Big)y'(t) \Big] dt.$$

Với $(C): y = y(x)$, $x \in [c,d]$ thì

$$I = \int_c^d \Big[f\Big(x,y(x)\Big) + g\Big(x,y(x)\Big)y'(x) \Big] dx.$$

Với $(C): x = x(y)$, $y \in [e,g]$ thì

$$I = \int_e^g \Big[f\Big(x(y),y\Big)x'(y) + g\Big(x(y),y\Big) \Big] dy.$$

Tương tự cho trường hợp $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 2.1. Tính $I = \int\limits_c ydx + (x+y)dy$, với $(C): x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, đi thuận chiều kim đồng hồ.

Giải

Với biểu diễn

$$(C):\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},$$

thì vì (C) thuận chiều kim đồng hồ nên t thay đổi từ π đến 0, nên

$$I = \int_{\pi}^{0} 2\sin t(-2\sin t)dt + 2(\cos t + \sin t)2\cos t dt$$

$$= \int_{\pi}^{0} (4\cos 2t + 2\sin 2t)dt = \left[2\sin 2t - \cos 2t\right]_{\pi}^{0} = 0.$$

Với cách khác, từ đẳng thức $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, ta suy ra $y = \sqrt{4 - x^2}$, với $x \in \left[-2, 2\right]$, và do đó

$$I = \int_{-2}^{2} \left[\sqrt{4 - x^2} dx + (x + \sqrt{4 - x^2}) \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right] dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} - x \right) dx = \int_{-2}^{2} \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= 2\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\arcsin\frac{x}{2} \right]_{-2}^{2} = 0.$$

Ta cũng có thể tính I bằng cách từ $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, ta viết $(C): x = \sqrt{4 - y^2}$.

Nhận xét

i) Một đường cong có thể biểu diễn bằng nhiều phương trình tham số khác nhau. Tuy nhiên giá trị của tích phân đường không phụ thuộc vào các biểu diễn tham số cụ thể của đường cong,

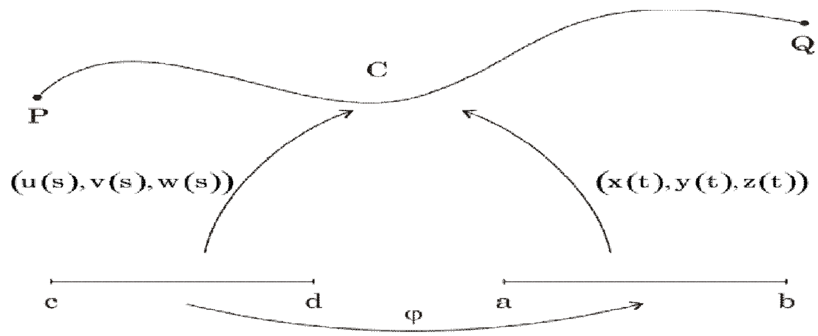
$$\big(x(t), y(t), z(t)\big), \ \big(u(s), v(s), w(s)\big),$$

với $a \leq t \leq b$, $c \leq s \leq d$.

Thật vậy, tồn tại song ánh khả vi $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ sao cho

$$\big(u(s), v(s), w(s)\big) = \Big(x\big(\varphi(s)\big), y\big(\varphi(s)\big), z\big(\varphi(s)\big)\Big),$$

với $\varphi(c)=a,\varphi(d)=b$.



Khi đó, ta có

$$\int_C f dx = \int_a^b f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)x'(t)dt\,.$$

Đổi biến $t=\varphi(s)$, $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$, ta có

$$\int_a^b f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)x'(t)dt = \int_c^d f\Big(x(\varphi(s)),y(\varphi(s)),z(\varphi(s))\Big)\cdot x'\Big(\varphi(s)\Big)\varphi'(s)ds$$

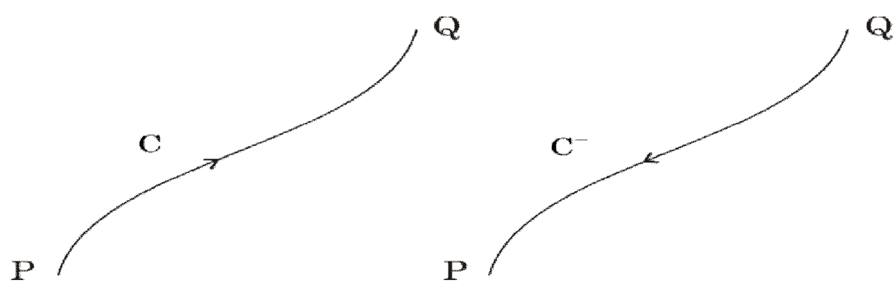
$$= \int_c^d f\Big(u(s),v(s),w(s)\Big)u'(s)ds = \int_c^d f du\,.$$

Vậy

$$\int_C f dx = \int_C f du\,.$$

Tương tự cho các tích phân còn lại. Vậy tích phân đường không phụ thuộc vào biểu diễn tham số của đường cong.

ii) Cho đường C nối từ P đến Q, đường C^- sẽ nối từ Q đến P.



Khi đó

$$\int_{C^-} f dx + g dy + h dz = -\int_C f dx + g dy + h dz\,.$$

Thật vậy, nếu C có biểu diễn $\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)$, $a\le t\le b$, thì C^- có biểu diễn

$$\Big(x(a+b-t),y(a+b-t),z(a+b-t)\Big).$$

Do đó

$$\int_{C^-} f dx = \int_a^b f\Big(x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t)\Big)\frac{dx}{dt}(a+b-t)dt.$$

Đổi biến $\theta = a+b-t$, với $\theta = b$ khi $t = a$ và $\theta = a$ khi $t = b$, ta có

$$\int_a^b f\Big(x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t)\Big)\frac{dx}{dt}(a+b-t)dt$$

$$= -\int_b^a f\Big(x(\theta), y(\theta), z(\theta)\Big)x'(\theta)(-d\theta)$$

$$= -\int_a^b f\Big(x(\theta), y(\theta), z(\theta)\Big)x'(\theta)d\theta$$

$$= -\int_C f dx.$$

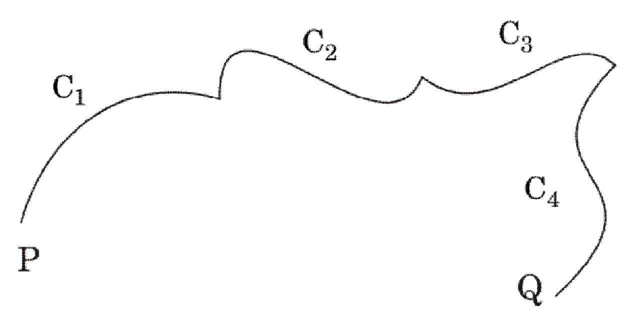
Tương tự

$$\int_{C^-} g dy = -\int_C g dy, \int_{C^-} h dz = -\int_C h dz.$$

iii) Trường hợp đường cong C được nối bằng các đường cong $C_1, C_2, ..., C_n$, ta định nghĩa

$$\int_C f dx = \int_{C_1} f dx + \int_{C_2} f dx + ... + \int_{C_n} f dx.$$

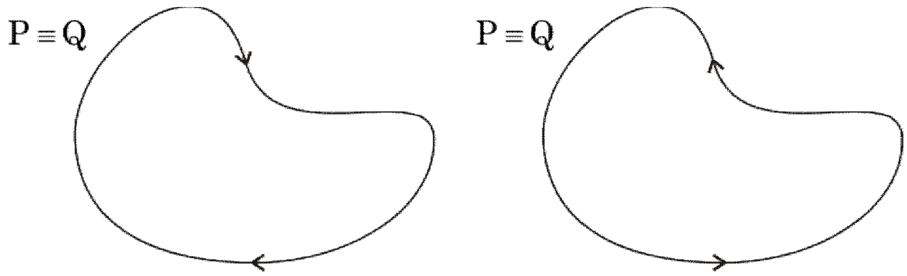
Tương tự cho $\int_C g dy, \int_C h dz$.



iv) Với $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ và với vectơ tiếp tuyến đơn vị $a(x,y) = \Big(a_1(x,y), a_2(x,y)\Big)$ cùng hướng với C, ta có

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy$$
$$= \int_C F(x,y).a(x,y)ds.$$

v) Trường hợp đường cong C là một đường cong khép kín trong $\mathbb{R}^2$ (nghĩa là $P \equiv Q$), bao giờ chúng ta cũng có hai tích phân đường theo hai cách di chuyển của điểm $\big(x(t), y(t)\big)$ trên đường cong theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ. Nếu gọi một đường là C thì đường kia là C^-.



III. Bài toán tìm F từ ∇F

Ta xét bài toán với hàm hai biến. Cho hai hàm $f(x,y)$, $g(x,y)$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử (f,g) là gradient của một hàm ϕ khả vi liên tục trên U nghĩa là $(f,g) = \nabla\phi$ hay

$$f = \frac{\partial\phi}{\partial x},\ g = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Hàm ϕ gọi là *hàm thế* của (f,g). Trong trường hợp này, tích phân đường chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong.

Định lý 3.1. *Cho hàm (f,g) liên tục trong một tập mở liên thông Ω. Cho hai điểm $P,Q \in \Omega$ và C là một đường cong nối P và Q. Khi đó*

$$\int_C fdx + gdy$$

không phụ thuộc vào cách chọn đường cong C nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm khả vi liên tục ϕ trên Ω sao cho $\nabla\phi = (f,g)$. Hơn nữa

$$\int_C fdx + gdy = \phi(Q) - \phi(P).$$

Đặc biệt nếu C là đường cong kín, nghĩa là $P \equiv Q$, thì

$$\int_C fdx + gdy = 0.$$

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh chiều đảo. Giả sử $\nabla\phi = (f,g)$, ta chứng tỏ

$$\int_C fdx + gdy = \phi(Q) - \phi(P).$$

Thật vậy, giả sử C khả vi và có biểu diễn tham số $\big(x(t), y(t)\big)$, với $a \le t \le b$, ta có

$$\int_C fdx + gdy = \int_a^b \Big[f\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + g\big(x(t), y(t)\big)y'(t) \Big] dt.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{d}{dt}\phi\Big(x(t),y(t)\Big)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big(x(t),y(t)\Big)x'(t)+\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big(x(t),y(t)\Big)y'(t)$$

$$=f\Big(x(t),y(t)\Big)x'(t)+g\Big(x(t),y(t)\Big)y'(t).$$

Do đó

$$\int_C fdx+gdy=\int_a^b\frac{d}{dt}\phi\Big(x(t),y(t)\Big)dt$$

$$=\phi\Big(x(b),y(b)\Big)-\phi\Big(x(a),y(a)\Big)$$

$$=\phi(Q)-\phi(P).$$

Ngược lại, giả sử $\int_C fdx+gdy$ độc lập theo đường với mọi C trong Ω. Lấy một điểm P_0 bất kỳ trong Ω, với mọi $Q=(x_1,y_1)$ trong Ω, tồn tại đường cong C khả vi nối P_0 và Q. Ta đặt

$$\phi(x_1,y_1)=\int_C fdx+gdy.$$

Với C nối P_0 và Q, ta chứng minh

$$\nabla\phi=(f,g).$$

Thật vậy, do Ω mở nên tồn tại $\delta_1>0$ sao cho $B\Big((x_1,y_1),\delta_1\Big)\subset\Omega$. Khi đó, với $\left|h\right|<\delta_1$, ta có

$$\left\|(x,y_1)-(x_1,y_1)\right\|=\left|h\right|<\delta_1,$$

nghĩa là $(x,y_1)\in B\Big((x_1,y_1),\delta_1\Big)\subset\Omega$. Ta xét trường hợp $x_1+\delta_1>x>x_1$. Với đoạn thẳng C_1 nối từ (x_1,y_1) đến (x,y_1), ta có

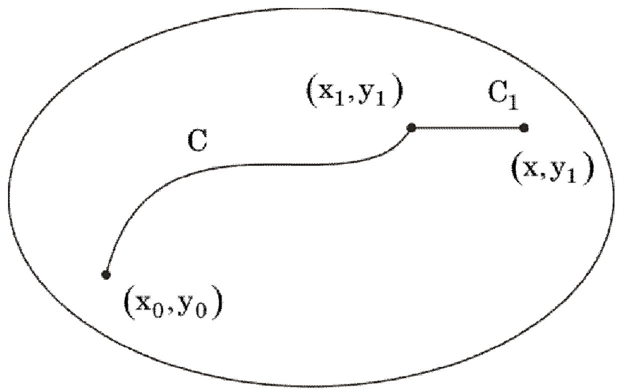
$$\phi(x,y_1)=\int_C fdx+gdy+\int_{C_1} fdx+gdy$$

$$=\phi(x_1,y_1)+\int_{C_1} fdx+gdy.$$

Với C_1 có tham số $\Big(x(t),y(t)\Big)=(t,y_1),x_1\le t\le x$. Ta có

$$\int_{C_1} fdx+gdy=\int_{x_1}^{x} f(t,y_1)(t)'dt+\int_{x_1}^{x} g(t,y_1)(y_1)'dt$$

$$=\int_{x_1}^{x} f(t,y_1)dt.$$



Do định lý cơ bản của phép tính vi tích phân,

$$\frac{d}{dx}\phi(x,y_1)=\frac{d}{dx}\left(\int_{x_1}^{x} f(t,y_1)dt\right)=f(x,y_1),$$

với $x_1 \le x < x_1+\delta_1$. Mặt khác

$$\frac{d}{dx}\phi(x,y_1)=\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y_1).$$

Vậy

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y_1)=f(x,y_1),\forall x_1 \le x < x_1+\delta_1.$$

Tương tự,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y_1)=f(x,y_1),\forall x_1-\delta_1 < x \le x_1.$$

Ta suy ra hàm ϕ có đạo hàm riêng theo x tại (x_1,y_1) và

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_1,y_1)=f(x_1,y_1).$$

Tương tự

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_1,y_1)=g(x_1,y_1).$$

Tóm lại $\nabla\phi=(f,g)$ và định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 3.1. Tính $I=\int_C ydx+xdy$ với C nối (0,1) và (3,4).

Giải

Xét $\phi(x,y)=xy$, ta có $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=y, \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=x, \nabla\phi=(y,x)$.

Suy ra $I = \phi(3,4) - \phi(0,1) = 12$.

Định lý trên cho thấy sự tương đương của việc tồn tại hàm thế của cặp (f,g) với sự độc lập với đường lấy tích phân. Ta tìm một điều kiện đủ để cặp (f,g) có hàm thế. Nếu $\nabla\phi = (f,g)$ thì

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = g.$$

Nếu ϕ có đạo hàm bậc hai liên tục thì theo định lý đổi thứ tự lấy đạo hàm, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Thêm một số điều kiện khác, đây cũng là điều kiện đủ để cặp (f,g) có hàm thế ϕ. Dạng $fdx + gdy$ với $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ gọi là dạng *vi phân toàn phần*.

Ta có định lý sau

Định lý 3.2 (điều kiện đủ để tồn tại hàm thế). *Cho hàm f,g khả vi liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$. Nếu*

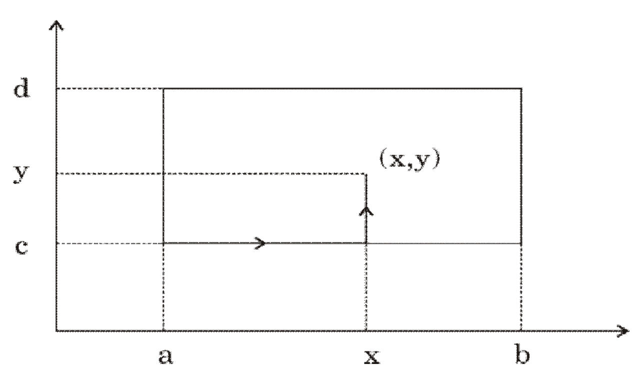
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \text{ trên } [a,b]\times[c,d]$$

thì tồn tại hàm ϕ sao cho $\nabla\phi = (f,g)$. Hơn nữa ta có thể viết

$$\phi(x,y) = \int_a^x f(X,c)dX + \int_c^y g(x,Y)dY.$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t,c)dt\right) = f(x,c)$$



Mặt khác do hàm $\frac{\partial g}{\partial x}$ khả vi liên tục $\forall(x,t)\in[a,b]\times[c,d]$ nên ta có

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^y g(x,t)dt\right) = \int_c^y \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt$$
$$= f(x,y) - f(x,c).$$

Vậy

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = f(x,c) + \left(f(x,y) - f(x,c)\right)$$
$$= f(x,y).$$

Tương tự ta có

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$

Vậy $\nabla \phi = (f,g)$. ■

Dùng định lý trên, ta thấy rằng nếu cặp (f,g) thỏa

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

trên một hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ và $P,Q \in [a,b]\times[c,d]$ thì với mọi đường cong C nối từ P đến Q trong hình chữ nhật ta có

$$\int_C fdx + gdy = \phi(Q) - \phi(P).$$

Vậy, thay vì phải tính tích phân đường theo một đường C đã cho ta có thể tính theo một đường D khác để dễ tham số hóa hơn.

Ví dụ 3.2. Cho C đường cong nối từ $A(1,1)$ đến $B(5,5)$. Tính

$$\int_C y^2dx + 2xydy.$$

Giải

Ta có $f(x,y) = y^2$, $g(x,y) = 2xy$ và

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Vậy $fdx + gdy$ là dạng vi phân toàn phần trên $\mathbb{R}^2$, tích phân đường cong trong trường hợp này chỉ phụ thuộc từ $A(1,1)$ đến $B(5,5)$. Thay vì tính theo C, ta tính theo đường thẳng D nối từ $A(1,1)$ đến $B(5,5)$ là $y = x$, $1 \le x \le 5$.

Khi đó

$$\int_C y^2dx + 2xydy = \int_1^5 x^2dx + 2x^2dx = \int_1^5 3x^2dx = 124.$$

Ngoài ra, nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ trên một hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ và các đại lượng này đều liên tục, ta có thể tìm được hàm thế của (f,g) như sau:

Do $\nabla\phi = (f,g)$, ta có

$$\phi(x,y) = \int f(x,y)dx + h(y),$$

với $h(y)$ chưa biết. Đạo hàm đẳng thức trên theo y, ta có

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)dx + h'(y).$$

hay

$$h'(y) = g(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)dx.$$

Ta suy ra được hàm h.

Ví dụ 3.3. Cho $f(x,y) = 3x^2 + 2xy$ và $g(x,y) = x^2 + y$.

a) Kiểm tra $fdx + gdy$ là dạng vi phân toàn phần.

b) Tìm hàm thế F của (f,g).

c) Tính $\int\limits_C fdx + gdy$ với (C) là đường cong bất kỳ nối $(1,0)$ tới $(2,-2)$.

Giải

a) Do $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, ta suy ra $fdx + gdy$ là dạng vi phân toàn phần.

b) Ta có $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$. Suy ra

$$F(x,y) = \int f(x,y)dx + h(y) = x^3 + x^2y + h(y)$$

và

$$g(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + h'(y)$$

nên $h'(y) = x^2 + y - x^2 = y$, nghĩa là

$$h(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

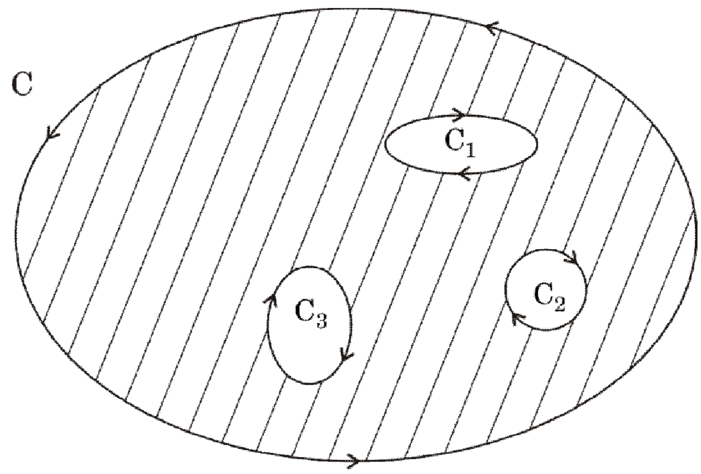
Tóm lại

$$F(x, y) = x^3 + x^2y + \frac{y^2}{2} + C.$$

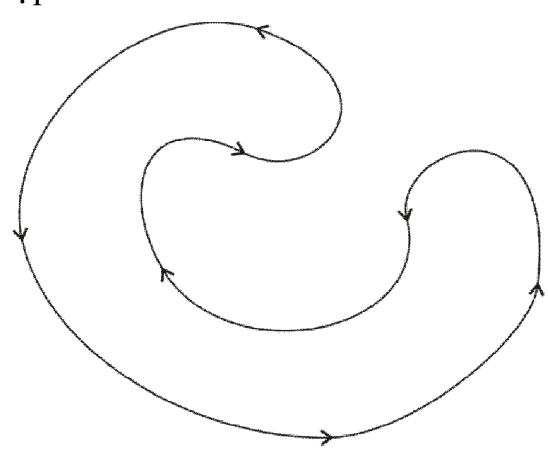
c) $\int_C fdx + gdy = F(2,-2) - F(1,0) = 1$.

IV. Định lý Green

Cho Ω là một miền liên thông bị chặn có biên $\partial\Omega$ là hợp của một số hữu hạn đường cong đóng khả vi (xem hình)

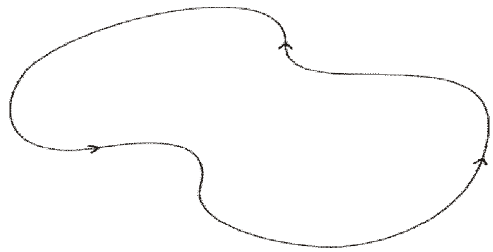


Các đường cong được tham số hóa theo hướng như sau: biên ngoài C có chiều ngược kim đồng hồ, biên trong (C_1, C_2, C_3) có chiều thuận chiều kim đồng hồ. Một trong những phương pháp nhận ra được cách tham số hóa này như sau: khi di chuyển trên biên theo hướng đã cho thì miền Ω luôn ở phía tay trái. Phương pháp này tránh được trường hợp sau



Trên hình vẽ có *một đọan* đường cong dường như được định hướng theo chiều đồng hồ.

Trường hợp Ω chỉ có một bên ngoài, ta nói miền Ω đơn liên (xem hình). Khi đó tích phân đường theo hướng như trên hình vẽ được ký hiệu là $\oint$



Ta sẽ phát biểu và chứng minh định lý Green về sự tương quan giữa tích phân bội trên một miền với tích phân đường trên biên của nó. Trước hết, một miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là *đơn giản* khi nó là miền đơn giản theo cả hai trục Ox và Oy, nghĩa là có các hàm f_1, f_2, g_1, g_2 thuộc lớp C^1 sao cho

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y): c < y < d, f_1(y) < x < f_2(y)\right\} \\ &= \left\{(x,y): a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x)\right\}. \end{aligned}$$

Ta có

Định lý Green. *Cho miền Ω là hội rời nhau của một số hữu hạn miền đơn giản. Với mọi cặp hàm P,Q khả vi liên tục trên Ω và liên tục trên $\Omega \cup \partial\Omega$, ta có*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy.$$

Chứng minh. Ta lần lượt chứng minh cho các miền đơn giản theo hai trục Ox và Oy.

Trường hợp 1: Miền Ω là miền đơn giản theo hướng Oy,

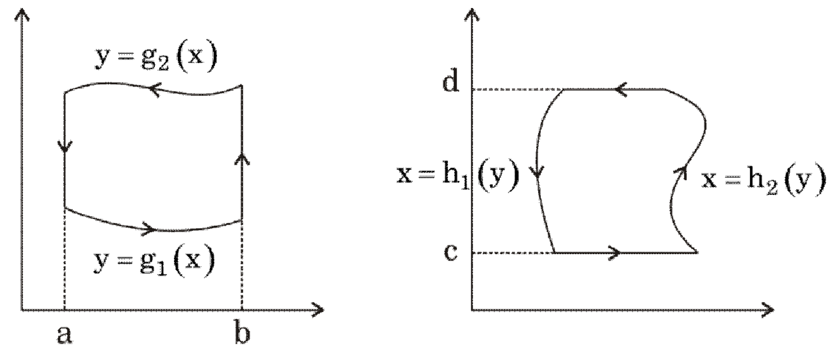
$$\Omega = \left\{(x,y): a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}.$$

Ta chứng minh

$$-\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx .$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \Big[P\big(x, g_2(x)\big) - P\big(x, g_1(x)\big) \Big] dx. \end{aligned}$$



Mặt khác

$$\int_{\partial\Omega} Pdx = \int_{C_1} Pdx + \int_{C_3^-} Pdx$$

(Do $C_2 : x = a$, $C_4 : x = b$, ta có $\int_{C_2} Pdx = \int_{C_4} Pdx = 0$).

C_1 có tham số hóa là $x = t, y = g_1(t), a \le t \le b, C_3$ có tham số hóa $x = t, y = g_2(t)$. Vậy

$$\int_{C_1} Pdx = \int_a^b P(t, g_1(t))t'dt,$$

$$\int_{C_3^-} Pdx = -\int_{C_3} Pdx = \int_a^b P\big(t, g_2(t)\big)t'dt.$$

Vậy ta suy ra

$$\int_{C_1} Pdx + \int_{C_3^-} Pdx = \int_a^b \Big[P\big(t, g_1(t)\big) - P\big(t, g_2(t)\big)\Big]dt$$

$$= -\int_a^b P\big(x, g_2(x)\big) - P\big(x, g_1(x)\big)dx.$$

Từ đó ta có

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial\Omega} Pdx\,.$$

Trường hợp 2: Miền Ω là miền đơn giản theo hướng Ox. Tương tự như trên (xem như bài tập), ta có

$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} Qdy\,.$$

Trường hợp 3: Miền Ω vừa là miền đơn giản theo Ox, vừa là miên đơn giản theo hướng Oy. Khi đó, áp dụng trường hợp một và hai ta có

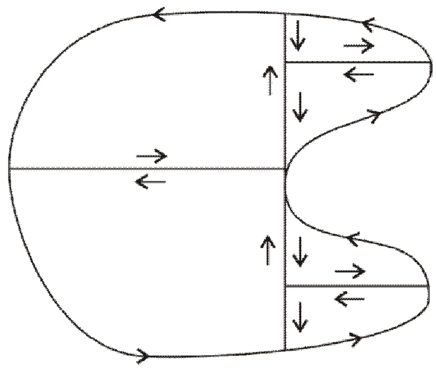
$$-\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx,$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} Qdy.$$

Cộng hai đẳng thức lại ta có

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy\,.$$

Trường hợp 4: Đối với miền Ω có thể chia thành nhiều miền nhỏ có tính chất như trường hợp 3 cho từng miền nhỏ, sau đó ta cộng các kết quả lại (xem hình).



Tổng các tích phân đường ở phía trong bằng không. Vậy ta có kết quả cần tìm.

■

Ví dụ 4.1.

a) Tính $I = \int\limits_{E} \big((xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy \big)$, trong đó E là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ theo chiều dương.

b) Tính diện tích của hình D giới hạn bởi $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^3 t$ ($a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$).

Giải

a) Đặt $P = xy + x + y$, $Q = xy + x - y$ và D là miền được giới hạn bởi E. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{E} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D} \big(y + 1 - x - 1 \big) dxdy \\ &= \iint\limits_{D} (y - x) dxdy. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} x = ar\cos t \\ y = br\sin t \end{cases}$$

với $t \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$. Ta có $J = abr$ và do đó

$$I = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(b\sin t - a\cos t)drdt$$

$$= \frac{ab}{3}\Big[-b\cos t - a\sin t\Big]_0^{2\pi} = 0.$$

b) Ta có

$$S = \iint_D dxdy.$$

Chọn $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$. Ta có

$$S = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} xdy$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos^3 t\,.\,a3\sin^2 t\cos tdt = 3a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^4 tdt$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t(1+\cos 2t)dt$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\big(2\cos 2t\big)dt\right)$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg]_0^{2\pi}\right) = \frac{3a^2}{8}\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3a^2}{16}(2\pi) = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

§2. TÍCH PHÂN MẶT

I. Định nghĩa tích phân mặt loại 1

Cho S là một mặt khả vi trong $\mathbb{R}^3$ xác định bởi phương trình tham số

$$\text{S}: \begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t)\ ,\ (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2. \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

Với f là một hàm số liên tục trên S, ta định nghĩa

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f\left(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\right)\sqrt{EG - F^2}dsdt\ .$$

Chú ý rằng $\sqrt{EG - F^2} = |\vec{n}|$, với

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2.$$

Mệnh đề 1.1. *Nếu mặt* $(S): z = f(x,y)$ *với* $(x,y) \in D$ *thì*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy\ .$$

Chú ý: $\iint_S d\sigma = S$ là diện tích mặt (S).

Ví dụ 1.1. Cho S là mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 1$. Tính

$$I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + (z-2)^2)d\sigma\ .$$

Giải

Ta có $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \geq 1$ cho

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 \leq 3. \end{cases}$$

Suy ra

$$\sqrt{1+\left(z_x\right)^2+\left(z_y\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Xét miền $D=\left\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\le 3\right\}$. Ta có

$$I=\iint_S\left(x^2+y^2+\left(z-2\right)^2\right)d\sigma$$

$$=\iint_D\left[x^2+y^2+\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-2\right)^2\right]\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left[r^2+\left(\sqrt{4-r^2}-2\right)^2\right]\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}rdrd\varphi$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left[r^2+4-r^2+4-4\sqrt{4-r^2}\right]\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}drd\varphi$$

$$=8\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left[2-\sqrt{4-r^2}\right]\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}drd\varphi$$

$$=16\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(2\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}-r\right)dr$$

$$=16\pi\left[-2\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}=8\pi.$$

Nhận xét: Tương tự các phân hoạch mặt S thành n mặt con S_k với diện tích $\Delta_k\sigma$ và với mỗi *k*, chọn $M_k(x_k, y_k, z_k)\in S_k$, thì tích phân mặt

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma$$

được coi như là giới hạn của tổng

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta_k\sigma.$$

Do đó, nếu *f* là hàm mật độ (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của mặt S thì $\iint_S fd\sigma$ chính là khối lượng của mặt S.

II. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Bây giờ, với một trường pháp vectơ đơn vị $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ liên tục trên S và $\overrightarrow{F} = (f, g, h)$ là một trường vectơ liên tục trên S, ta đặt

$$\iint_S fdydz = \iint_S f.n_1 d\sigma,$$

$$\iint_S gdxdz = \iint_S g.n_2 d\sigma,$$

$$\iint_S hdxdy = \iint_S h.n_3 d\sigma.$$

Nhận xét:

i) với mặt (S) cho bởi phương trình tham số

$$(S): \begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

hai pháp vectơ đơn vị của S cho bởi

$$\overrightarrow{N} = \pm \frac{\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}\right|}$$

với

$$\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_i, t_j), \frac{\partial y}{\partial s}(s_i, t_j), \frac{\partial z}{\partial s}(s_i, t_j) \right),$$

$$\overrightarrow{a_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_i, t_j), \frac{\partial y}{\partial t}(s_i, t_j), \frac{\partial z}{\partial t}(s_i, t_j) \right).$$

Đặc biệt với $S : G(x, y, z) = 0$, ta có hai pháp vectơ đơn vị

$$\overrightarrow{N} = \pm \frac{\nabla G}{\left|\nabla G\right|}.$$

ii) Bằng cách đặt

$$\iint_S fdydz + gdzdx + hdxdy \equiv \iint_S fdydz + \iint_S gdzdx + \iint_S hdxdy,$$

ta có

$$\iint_S fdydz + gdzdx + hdxdy = \iint_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{N} d\sigma,$$

với

$$\overrightarrow{F}\overrightarrow{N} = fn_1 + gn_2 + hn_3.$$

Chú ý: Nếu $(S): z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, thì

$$\vec{n} = \pm(-z_x, -z_y, 1), \ \overrightarrow{N} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Chọn $\overrightarrow{N}$ hướng ra ngoài mặt (*S*), ta có, với $\overrightarrow{F} = (f, g, h)$,

$$\iint_S f dydz + g dzdx + h dxdy = \iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{N} d\sigma = \iint_D \overrightarrow{F}\overrightarrow{N}.\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$
$$= \iint_D \overrightarrow{F}.\vec{n}\, dxdy.$$

Trường hợp $(S): x = x(y,z)$ hoặc $(S): y = y(x,z)$ được tính toán tương tự.

Ví dụ 2.1. Tính $\iint_S z dxdy$ trong đó (*S*) là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải

Xét S_1, nửa mặt cầu trên $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x,y)$ với $x^2 + y^2 \le 1$ và S_2, nửa mặt cầu dưới $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} = g(x,y)$ với $x^2 + y^2 \le 1$.

Ta có $\vec{n}_{S_1} = (-f_x, -f_y, 1)$; $\overrightarrow{F} = (0, 0, z)$ và bằng cách dùng tọa độ cực trên miền $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$, ta có

$$\iint_{S_1} z dxdy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = \frac{2\pi}{3}.$$

Tương tự, với $\vec{n}_{S_2} = (f_x, f_y, -1)$, ta được

$$\iint_{S_2} z dxdy = \iint_D -g(x,y) dxdy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = \frac{2\pi}{3}.$$

Tóm lại, ta có

$$\iint_S z dxdy = \frac{4\pi}{3}.$$

III. Định lý Divergence

Để nhận được một kết quả tương tự như định lý Green, ta định nghĩa các miền đơn giản trong $\mathbb{R}^3$ như sau

Một miền $D \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là đơn giản khi nó là miền đơn giản theo cả ba trục Ox, Oy và Oz, nghĩa là các hàm f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2 thuộc lớp C^1 sao cho

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \left(x,y,z\right) \middle| \left(y,z\right) \in D_1, f_1\left(y,z\right) < x < f_2\left(y,z\right) \right\} \\ &= \left\{ \left(x,y,z\right) \middle| \left(x,z\right) \in D_2, g_1\left(x,z\right) < y < g_2\left(x,z\right) \right\} \\ &= \left\{ \left(x,y,z\right) \middle| \left(x,y\right) \in D_3, g_1\left(x,y\right) < z < g_2\left(x,y\right) \right\} \end{aligned}$$

trong đó D_i, $i = 1, 2, 3$, là các miền mở trong $\mathbb{R}^2$. Ta có

Định lý Divergence (định lý Gauss). *Cho $\overrightarrow{F} = (f, g, h)$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 xác định trên một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ và D là một miền con của Ω là hội của một số hữu hạn các miền đơn giản rời nhau. Nếu Ω có biên S là một mặt khả vi trong Ω, thì với pháp vectơ đơn vị ngoài $\overrightarrow{N}$ của S đối với D, ta có*

$$\iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S fdydz + gdzdx + hdxdy$$

hay

$$\iiint_D \nabla.\overrightarrow{F} dxdydz = \iint_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{N} d\sigma .$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\iiint_D \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz = \iint_S hdxdy .$$

Các đẳng thức

$$\iiint_D \frac{\partial g}{\partial y} dxdydz = \iint_S gdzdx,$$

$$\iiint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdydz = \iint_S fdydz$$

được chứng minh tương tự.

Hơn nữa, tương tự như chứng minh của định lý Green, ta lần lượt xét trường hợp đặc biệt khi miền D có thể biểu diễn dưới dạng

$$\varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in \omega$$

với ω là một miền trong $\mathbb{R}^2$ có biên là một đường cong khả vi C.

Khi đó, mặt S được chia thành ba phần

i) $S_1 = \left\{ \left(x, y, \varphi(x,y) \right) \middle| (x,y) \in \omega \right\}$ với pháp vectơ

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\varphi_x\right)^2 + \left(\varphi_y\right)^2}} \left(\varphi_x, \varphi_y, -1 \right).$$

ii) $S_2 = \left\{ \left(x, y, \psi(x,y) \right) \middle| (x,y) \in \omega \right\}$ với pháp vectơ

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\psi_x\right)^2 + \left(\psi_y\right)^2}} \left(-\psi_x - \psi_y, 1 \right).$$

iii) $S_3 = \left\{ (x,y,z) \middle| \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y), (x,y) \in C \right\}$ với pháp vectơ $\overrightarrow{N} = (a_1, a_2, 0)$, trong đó (a_1, a_2) là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của C đối với ω trong $\mathbb{R}^2$.

S_1 chính là mặt dưới của S, S_2 là mặt trên và S_3 là mặt bên.

Từ định nghĩa, ta suy ra

$$\iint_S h dxdy = \iint_\omega \left\{ h\left(x, y, \psi(x,y) \right) - h\left(x, y, \varphi(x,y) \right) \right\} dxdy.$$

Mặt khác, do định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz &= \iint_\omega \left[\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial h}{\partial z} dz \right] dxdy \\ &= \iint_\omega \left\{ h\left(x, y, \psi(x,y) \right) - h\left(x, y, \varphi(x,y) \right) \right\} dxdy \end{aligned}$$

và đẳng thức được chứng minh.

Trường hợp tổng quát: Tương tự như đối với chứng minh định lý Green, bằng cách chia miền D thành nhiều miền con đơn giản rời nhau. Tích phân bội trên D chính là tổng của các tích phân trên các miền con và do kết quả trên, được viết thành tổng nhiều tích phân mặt. Các mặt không nằm trên S được xuất hiện từng cặp với các pháp vectơ ngoài đối nhau nên tổng các tích phân trên các mặt không nằm trong S bằng 0 và định lý được chứng minh.

Ví dụ 3.1. Tính $\iint\limits_S z dxdy$ trong đó (S) là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải

Với $h(x,y,z) = z$, $\dfrac{\partial h}{\partial z} = 1$, ta được

$$\iint_S zdxdy = \iiint_B dxdydz$$

trong đó B là hình cầu tâm O bán kính 1. Do đó

$$\iint_S zdxdy = \iiint_B dxdydz = V(B) = \frac{4}{3}\pi .$$

IV. Định lý Stokes

Giả sử S là một mặt định hướng trơn từng mảnh, biên của nó là đường cong kín Γ trơn từng khúc. Nếu $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ thuộc lớp $C^1(S)$, ta có

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó hướng Γ được chọn sao cho khi ta đi theo hướng ấy miền S nằm bên tay trái của ta.

Ví dụ 4.1. Tính $\int_\Gamma (y+z)dx + (x+z)dy + (x+2y)dz$, trong đó Γ là giao tuyến của hai mặt $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=b^2$ chiều trên Γ là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía trục dương *Ox*.

Giải

Ta có $P = y+z$, $Q = x+z$, $R = x+2y$, $P_y = P_z = 1$, $Q_x = Q_z = 1$, $R_x = 1$, $R_y = 2$.

Rõ ràng Γ là đường tròn lớn của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=b^2$ bởi mặt phẳng qua tâm mặt cầu $x+y+z=0$. Vậy (*S*) là hình tròn đó có bán kính *b* (mặt phẳng $x+y+z=0$ hướng về $x > 0$).

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_S (R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dxdz + (Q_x - P_y)dxdy \\ &= \iint_S dydz. \end{aligned}$$

Ngoài ra, do $\overrightarrow{F} = (1,0,0)$, $\vec{n} = (1,1,1)$, $\vec{n}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ta có

$$I = \iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n_o}.d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \pi b^2 .$$

V. Một chứng minh cho công thức đổi biến

Bằng cách dùng công thức Green, ta đưa ra một chứng minh của công thức đổi biến cho tích phân bội hai. Trường hợp tích phân bội ba được chứng minh tương tự.

Định lý. *Công thức*

$$\iint_{R_{xy}} F(x,y)dxdy = \pm \iint_{R_{uv}} F\left[x(u,v), y(u,v)\right] \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$$

thỏa với các điều kiện sau:

(i) Biên của R_{xy} và R_{uv} lần lượt là các đường cong C^1 từng khúc C_{xy} và C_{uv}.

(ii) Hàm F thuộc lớp C^1 trên một quả cầu D_{xy} chứa R_{xy}.

(iii) Các hàm $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ thuộc lớp C^2 trên một miền D_{uv} chứa R_{uv}; Khi (u,v) thay đổi trong D_{uv} thì (x,y) thay đổi trong D_{xy}.

(iv) Khi (u,v) chạy trên C_{uv}, thì điểm (x,y) tương ứng $\big(x = f(u,v), y = g(u,v)\big)$ thay đổi trên C_{xy}; Nếu (u,v) chạy trên C_{uv} theo chiều dương thì (x,y) cũng chạy theo chiều dương (ứng với dấu + trong công thức) và chạy theo chiều âm (ứng với dấu –).

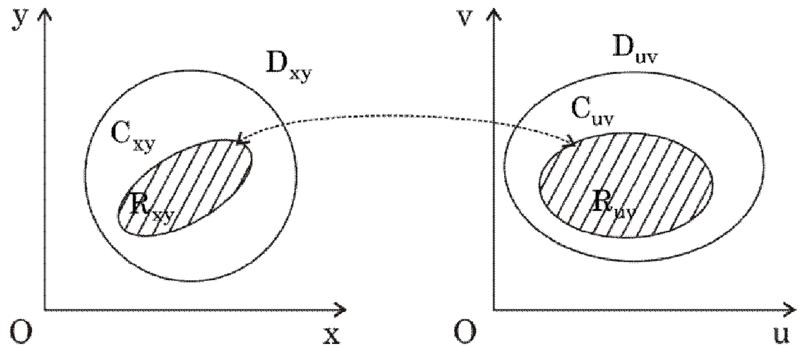
Chứng minh. Để chứng minh định lý, chú ý rằng ta có thể biểu diễn $F(x,y)$ dưới dạng

$$F(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

trong D_{xy}, với Q thuộc lớp C^1 bằng cách đặt

$$Q = \int_{x_0}^{x} F(t,y)dt$$

trong đó, $\left(x_0, y_0\right)$ là tâm của D_{xy}.



Do định lý Green, ta có

$$\iint_{R_{xy}} F(x,y)dxdy = \iint_{R_{xy}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{C_{xy}} Qdy.$$

Tích phân đường $\int Qdy$ có thể viết lại là

$$\oint_{C_{xy}} Q(x,y)dy = \pm\oint_{C_{uv}} Q\left[f(u,v), g(u,v)\right]\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right).$$

Tích phân đường tay phải có dạng

$$\oint_{C_{uv}} P_1du + Q_1dv\,,\ P_1 = Q\frac{\partial g}{\partial u},\ Q_1 = Q\frac{\partial g}{\partial v}$$

trong đó P_1 và Q_1 thuộc lớp C^1 trên D_{uv}. Lại do định lý Green,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_{uv}} P_1du + Q_1dv &= \iint_{R_{uv}} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial u} - \frac{\partial P_1}{\partial v}\right)dudv \\
&= \iint_{R_{uv}} \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + Q\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} - Q\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\right)dudv \\
&= \iint_{R_{uv}} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial g}{\partial v} - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial u}\right]dudv \\
&= \iint_{R_{uv}} \frac{\partial Q}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right)dudv \\
&= \iint_{R_{uv}} F\big(f(u,v), g(u,v)\big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv,
\end{aligned}$$

vì $\partial Q/\partial x = F(x,y)$. Ta suy ra

$$\iint_{R_{xy}} F(x,y)dxdy = \pm\iint_{R_{uv}} F\Big(x(u,v), y(u,v)\Big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv\,.$$

Nhận xét: Khi $F \equiv 1$ và $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ luôn luôn dương (hay luôn luôn âm) thì từ đẳng thức

$$0 < V\Big(R_{xy}\Big) = \iint_{R_{xy}} dxdy = \pm\iint_{R_{uv}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

Ta suy ra rằng khi (u,v) di chuyển trên C_{uv} theo chiều dương thì (x,y) di chuyển trên C_{xy} theo chiều dương khi $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ và theo chiều âm khi $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} < 0$. Từ đó, ta nhận được công thức tổng quát

$$\iint_{R_{xy}} F\Big(x,y\Big)dxdy = \iint_{R_{uv}} F\Big(x(u,v), y(u,v)\Big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

khi $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ luôn luôn dương (hay luôn luôn âm).

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 1. Tính tích phân đường trên mặt phẳng xOy

a) $\int_C y^3dx + x^2dy$, $C: y^2 = x$ từ $\left(0,0\right)$ đến $\left(1,1\right)$.

b) $\int_C y^2dx + x^2dy$, C là nửa trên elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ngược chiều kim đồng hồ.

c) $\int_C (3x + 2y)dx + dy$, $C: y = 4x - 2x^2$ từ $\left(2,0\right)$ đến $\left(1,2\right)$.

d) $\int_C xdx + y^2dy$, C là nửa vòng tròn phía trên bán kính 1 từ $\left(1,0\right)$ đến $\left(-1,0\right)$.

e) $\int xdx + xydy$, C là đoạn thẳng $x = 1$, $1 \le y \le 4$.

f) $\int_C (x + y)dx$, C là đọan thẳng nối $\left(1,2\right)$ tới $\left(-2,0\right)$.

g) $\int xdx + xydy$, C là đoạn thẳng $y = 2$, $-1 \le x \le 1$.

h) $\int_C (x^2 + 3y^2)dx + xdy$, C là vòng tròn $x^2 + y^2 = 9$ đi từ $\left(0,3\right)$ đến $\left(-3,0\right)$.

i) Tính $\int_C y^2dx + x^2dy$ (C) là cung $y = 4 - x^2$ nằm phía trên Ox thuận chiều kim đồng hồ.

j) Tính $\int_C (xdy + ydx)$ trong đó (C) là cung $y = \sqrt{x}$ nối từ $\left(0,0\right)$ tới $\left(4,2\right)$.

Bài 2. Chuyển từ tích phân trên đường cong kín C theo chiều dương về tích phân hai lớp trên miền D trong đó $\partial D = C$.

a) $\int_C (1 + x^3)ydx + x(1 - \sin y)dy$.

b) $\int_C 2x\cos ydx + x^2\sin ydy$.

Bài 3. Sử dụng định lý Green để tính tích phân đường

a) $\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ theo chiều dương.

b) $\int_C dx + e^x\sin ydy$ với C là biên của ΔABC, $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(1,0)$ theo chiều âm.

c) $\int_C -x^2ydx + xy^2dy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ theo chiều dương.

Bài 4. Tính các tích phân sau

a) $\int_C x^2ydx + xy^2dy$, C: đường ngược chiều kim đồng hồ xung quanh đường cong kín tạo ra từ đường $x = 4$ và parabol $y^2 = 4x$.

b) $\int_C (x + y)dx + 2xydy$, C: đường ngược chiều kim đồng hồ xung quanh hình chữ nhật tạo bởi $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 3$.

c) $\int_C xdy$, C tạo bởi $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ trong nửa mặt phẳng trên theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

d) Tính $\int_C xdy$,C là đường kín của tam giác tạo bởi Ox, Oy, $x + y = 2$ thuận chiều kim đồng hồ.

Bài 5. Cho (f, g). Kiểm tra điều kiện để $fdx + gdy$ là dạng vi phân đúng và tìm hàm thế F trong trường hợp dạng vi phân đúng.

a) $(2x + 3y, 3x - 4y)$.

b) $(x - ye^{xy}, -xe^{xy})$.

c) $(x^2 - y^2, -2xy + \ln y)$.

d) $(e^{-y}, -2y - xe^{-y})$.

e) $(2x + y\cos x, \sin x)$.

f) $\left(\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}, -\dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\right)$.

g) $(e^{xy} + 2x\cos y, e^{xy} - x^2\sin y)$.

h) $(x^3 + y, x^2 + 2)$.

Bài 6. Trong các bài tập sau, chứng minh tích phân không phụ thuộc đường cong và tính tích phân

a) $\int_C \left(\sin x + 2y\right)dx + \left(2x + 3y\right)dy$; C là đường cong bất kỳ khả vi từng khúc nối $\left(0,2\right)$ đến $\left(3,1\right)$.

b) $\int_C \left(3xy^2 + 1\right)dx + \left(y + 3x^2y\right)dy$; C là đường cong bất kỳ nối từ $\left(-1,-3\right)$ đến $\left(3,5\right)$.

c) $\int_C (3x^2y - 1)dx + (x^3 + 2)dy$; C là đường cong kín theo chiều thuận.

d) $\int_C \left(\frac{1}{x^2}+2y^2\right)dx+(4xy+\ln y)dy$; C nối từ $(1,3)$ đến $(3,1)$ trong miền $x, y>0$.

Bài 7. Chứng minh rằng miền Ω thỏa định lý Green có thể tính diện tích bằng các công thức

$$\oint_{\partial\Omega} xdy\,,\ -\int_{\partial\Omega} ydx\,,\ \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} -ydx+xdy.$$

Áp dụng để làm các bài tập sau

a) Tính diện tích tam giác Ω có các đỉnh $(1,2)$, $(3,4)$, $(-3,-8)$.

b) Diện tích tứ giác với các đỉnh $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,10)$, $(6,12)$.

Bài 8. Tính

a) $\int_C zdx+xdy+dz$ trong đó C là cung $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

b) $\int_C ydx+xdy+ydz$ trong đó C là cung $x=t$, $y=2t+1$, $z=t^2$, $0\le t\le 2$.

c) $\int_C \frac{z}{y}dx+(x^2+y^2+z^2)dz$, trong đó cung C là giao của $x^2+y^2=1$ và $z=2x+4$ nằm trong phần tám thứ nhất của hệ trục tọa độ nối $(0,1,4)$ tới $(1,0,6)$.

d) Tính $\int_C (z+y)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$ trong đó C là đường gấp khúc nối các điểm $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ và $(1,1,1)$ theo thứ tự đó.

e) Tính $\int_C z^2dx$ biết C là giao của $x^2+y^2-z^2=4$ và $4z=y$ nối từ $(2,0,0)$ tới $\left(0,\frac{8}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$.

Bài 9.

a) Tính $\int_C yds$ trong đó cung C là $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$.

b) Tính $\int_C xzds$ trong đó C là đoạn thẳng nối từ $(0,1,3)$ tới $(1,2,-4)$.

c) Tính $\int xds$ trong đó cung C là giao của $x^2+y=4$ và $z=2x+4$ nằm trong phần tám thứ nhất của hệ trục tọa độ nối $(0,4,4)$ tới $(1,3,6)$.

Bài 10.

a) Tính $\iint_S x d\sigma$, trong đó mặt S cho bởi

$$S: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}, \ (0 \le u \le 3, 0 \le v \le \pi).$$

b) Tính $\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma$, trong đó S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

c) Cho S là phần mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$, $0 \le z \le 2$. Tính các tích phân sau

c1) $\iint_S d\sigma$; c2) $\iint_S y^2 d\sigma$.

d) Tính $\iint_S (y + xz) d\sigma$ trong đó S là $x + 3y - z + 1 = 0$, $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

e) Tính $\iint_S x d\sigma$ trong đó S là mặt $x + 3y + z - 1 = 0$, $0 \le x \le 1$, $2 \le z \le 3$.

f) Cho S là mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 1$. Tính các tích phân sau

f1) $\iint_S (x^2 + y^2)^2 z d\sigma$; f2) $\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma$;

f3) $\iint_S (x^2 + y^2 + (z-1)^2) z d\sigma$; f4) $\iint_S x^2 z d\sigma$.

g) Cho S là phần mặt $x + y^2 - z = 0$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. Tính các tích phân sau

g1) $\iint_S \dfrac{1}{2z - 2x + 1} d\sigma$; g2) $\iint_S y d\sigma$.

h) Cho S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$ nằm trong hình trụ $(x-4)^2 + y^2 = 16$ và $z \ge 4$. Tính các tích phân sau

h1) $\iint_S d\sigma$; h2) $\iint_S \sqrt{8z - z^2} d\sigma$.

Bài 11.

a) Tính $\iint_S z dxdy$ trong đó S là mặt phía ngoài của ellipsoid $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

b) Tính $\iint_S (x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy)$, trong đó S là phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

c) Tính $\iint_S (yzdydz + xzdxdz + xydxdy)$, trong đó S là phía ngoài của tứ diện tạo bởi bốn mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

d) Tính $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, với S là phía trên của phần mặt phẳng $x + 2y - 1 = 0$ nếu đứng dọc Ox, nằm giữa $z = 0$ và $z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

e) Tính $\iint_S dxdz + zdxdy$ với S là phía ngoài ellipsoid $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$ và thuộc góc phần tám thứ nhất.

f) Tính

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

với S là phía trên của phần mặt phẳng $x + 2z - 1 = 0$, nằm giữa hai mặt phẳng $y = 0$, $y = 2$ và thuộc góc phần tư thứ nhất.

Bài 12. Sử dụng định lý Divergence (Gauss-Ostrogradski) để làm các bài tập sau

a) Tính $\iint_S (xydxdy + yzdydz + xzdxdz)$ với S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Tính $\iint_S (x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy)$ với S là 6 mặt phía ngoài của hình hộp chữ nhật $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$.

c) Tính $\iint_S \frac{x\cos\sigma + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma$ với α, β, γ là 3 góc của vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hướng ra ngoài của mặt S tạo với $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ trong hai trường hợp sau

c1) với $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

c2) với $S: x^2 + y^2 + z^2 = ay \ (a \neq 0)$.

d) Tính $\iint_S (xdydz + ydxdz + zdxdy)$ trong đó S là phía ngoài của các mặt của tứ diện OABC với $A\left(1,0,0\right)$, $B\left(0,2,0\right)$, $C\left(0,0,3\right)$ còn O là gốc tọa độ.

e) Tính $\iint_S y^2dxdz$ trong đó S là phía ngoài của ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Bài 13. Cho $D \subset \mathbb{R}^3$ có biên ∂D là các mặt khả vi. Đặt $\vec{r} = (x, y, z)$, $R = \left|\vec{r}\right|$. Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài của ∂D. Đặt $\vec{F} = R.\vec{r}$. Chứng minh

$$\iiint_D Rdxdydz = \frac{1}{4}\iint_{\partial D} \vec{F}\vec{n}d\sigma.$$

Tính

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

bằng cách tính trực tiếp và cách ứng dụng công thức trên.

Bài 14. Cho S là biên của hình trụ $x^2+z^2=2z$, $0\le y\le 1$. Tính $\iint_S (xn_1+y^3n_2-zn_3)d\sigma$, trong đó $\vec{N}=(n_1,n_2,n_3)$ là vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài của S.

Bài 15. Sử dụng định lý Stokes để làm các bài tập sau

a) Tính $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, trong đó C là ellipse $x^2+y^2=1$, $x+z=1$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu ta đứng theo chiều dương của Oz.

b) Tính $\int_C \big((y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz\big)$ nếu C là vòng tròn $x^2+y^2+z^2=R^2$ và $x+y+z=0$ có chiều thuận chiều kim đồng hồ nếu ta đứng dọc theo chiều dương trục Ox.

Bài 16. Cho hàm u,v khả vi liên tục tới cấp hai trên tập đóng D trong $\mathbb{R}^2$ có biên C khả vi liên tục. Trong bài này ta sử dụng ký hiệu $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ và $\vec{n}$ là vectơ đơn vị pháp tuyến của đường cong hướng ra ngoài tập hợp D, $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=D_{\vec{n}}u$ là đạo hàm theo hướng $\vec{n}$.Chứng minh

a) $\iint_D \Delta u dxdy=\int_C \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds.$

b) $\iint_D \left[u\Delta v+\nabla u.\nabla v\right]dxdy=\int_C u\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}ds.$

c) $\iint_D \big(u\Delta v-v\Delta u\big)dxdy=\int_C \left(u\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)ds.$

d) Nếu v thỏa phương trình Laplace $\Delta v=0$ trên D thì

$$\int_C \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS=0$$

và

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \int_C v \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds \, .$$

Bài 17. Cho u, v khả vi liên tục bậc hai trên tập hợp $\omega \subset \mathbb{R}^3$ có biên là các mặt khả vi. Chứng minh rằng

a) $\iiint_\omega (u\Delta v + \nabla u.\nabla v) dxdydz = \iint_{\partial\omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma.$

b) $\iiint_\omega (u\nabla^2 v + \nabla u.\nabla v) dxdydz = \iint_{\partial\omega} u\nabla v.\vec{n} d\sigma.$

c) $\iiint_\omega (u\Delta v - v\Delta u) dxdydz = \iint_{\partial\omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma.$

d) $\iiint_\omega \Delta u dxdydz = \iint_{\partial\omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma.$

e) $\iiint_\omega |\nabla u|^2 \, dxdydz = \iint_{\partial\omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$ với u là nghiệm của $\Delta u = 0$.

Phần đọc thêm

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Phương trình vi phân là một loại phương trình có nhiều ứng dụng trong thực tế, dùng để nghiên cứu sự vật trong sự chuyển động. Đặc biệt, nó xuất hiện nhiều trong lĩnh vực khoa học kỹ thuật và kinh tế. Phần này giới thiệu về một số phương trình vi phân cấp một và phương pháp giải cho các phương trình đó. Tính chất nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai và phương pháp giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng cũng được trình bày chi tiết.

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. Định nghĩa phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1. Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập, hàm số phải tìm và các đạo hàm của nó.

Cấp cao nhất của *đạo hàm* có mặt trong phương trình được gọi là cấp của phương trình vi phân.

Ví dụ 1.1

a) $y'+\dfrac{1}{x}=0$; $\dfrac{dy}{dx}=3x+2$ là phương trình vi phân cấp 1.

b) $y''=3xy-\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5xy\dfrac{dy}{dx}=x^2$ là phương trình vi phân cấp 2.

c) $(y''')^2+(y'')^4+y'=7x$ là phương trình vi phân cấp 3.

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ là phương trình vi phân cấp 1.

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^3+1$ là phương trình vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân được gọi là *phương trình vi phân thường* (*ordinary differential equation - ODE*) nếu hàm cần tìm chỉ phụ thuộc vào một biến duy nhất. Phương trình vi phân được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng* (*partial differential equation* - *PDE*) nếu hàm cần tìm phụ thuộc vào hai hay nhiều biến.

Ví dụ 1.2. Trong ví dụ 1.1, các phương trình trong câu a, b, c là phương trình vi phân thường, các phương trình trong câu d, e là phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Nội dung cuốn sách này chỉ trình bày về phương trình vi phân thường. Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 1.2. Phương trình vi phân (thường) cấp n có dạng

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{6.1}$$

trong đó x là biến độc lập, y là hàm cần tìm, $y, y', ..., y^{(n)}$ là đạo hàm các cấp của y, biểu thức $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ thực sự chứa $y^{(n)}$.

II. Nghiệm của phương trình vi phân

Định nghĩa 2.1. Nghiệm của phương trình vi phân (6.1) trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$, là hàm $y = y(x)$ thỏa phương trình (6.1) tại mọi điểm $x \in I$.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là một trong các nghiệm của nó. *Nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân là tập hợp tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ 1.2. Chứng minh các hàm số sau là nghiệm của phương trình vi phân $y'' + 4y = 0$ trên $\mathbb{R}$

a) $y = \sin 2x.$

b) $y = 7\cos 2x.$

c) $y = a\sin 2x + b\cos 2x,\ a, b \in \mathbb{R}.$

Giải

a) Ta có $y' = 2\cos 2x$ và $y'' = -4\sin 2x$, suy ra

$$y'' + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy, $y = \sin 2x$ là nghiệm của phương trình $y'' + 4y = 0$ trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có $y' = -14\sin 2x$ và $y'' = -28\cos 2x$, suy ra

$$y'' + 4y = -28\cos 2x + 4(7\cos 2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy, $y = 7\cos 2x$ là nghiệm của phương trình $y'' + 4y = 0$ trên $\mathbb{R}$.

c) Ta có $y' = 2a\cos 2x - 2b\sin 2x$ và $y'' = -4a\sin 2x - 4b\cos 2x$, suy ra

$$y'' + 4y = (-4a\sin 2x - 4b\cos 2x) + 4(a\sin 2x + b\cos 2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy, $y = a\sin 2x + b\cos 2x$ là nghiệm của phương trình $y'' + 4y = 0$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.3. Trong ví dụ 1.2, $y = \sin 2x$ và $y = 7\cos 2x$ là các nghiệm riêng, $y = a\sin 2x + b\cos 2x$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + 4y = 0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

I. Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa 1.1. Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.2}$$

trong đó x là biến độc lập, y là hàm cần tìm và $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Ta thường gặp cho phương trình vi phân cấp 1 đã giải ra đối với y' có dạng

$$y' = f(x, y) \tag{6.3}$$

hoặc dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{6.4}$$

Dễ dàng biến đổi phương trình vi phân từ dạng (6.3) về dạng (6.4) và ngược lại.

1.1. Bài toán Cauchy

Định nghĩa 1.2. Bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0$$

được gọi là *bài toán Cauchy* (hay *bài toán giá trị ban đầu*).

Định lý sau đây mà ta thừa nhận, không chứng minh, cho ta biết với điều kiện nào thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.

Định lý 1.3 (Định lý Cauchy). *Nghiệm của bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất nếu hàm* $f(x,y)$ *và đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục trên một tập mở* $D \subset \mathbb{R}^2$ *chứa điểm* (x_0, y_0).

1.2. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (6.2) là biểu thức $y = f(x,C)$, trong đó C là hằng số tùy ý sao cho

i) Với mỗi hằng số C tùy ý, hàm số $y = f(x,C)$ là một nghiệm của (6.2).

ii) Với mọi điểm (x_0, y_0) thuộc miền chứa nghiệm, khi thay vào (6.2) thì có thể giải ra được $C = C_0$ duy nhất.

Nghiệm tổng quát của phương trình (6.2) được viết dưới dạng hàm ẩn $\varphi(x,y) = C$ được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình.

Mọi nghiệm $y = f(x, C_0)$ nhận được từ nghiệm tổng quát $y = f(x,C)$ ứng với giá trị cụ thể $C = C_0$ được gọi là *nghiệm riêng.*

Một số nghiệm của phương trình (6.2) mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ, được gọi là *nghiệm kỳ dị.*

Ví dụ 1.1. Phương trình $y' = \frac{1}{3}x^2$ có nghiệm tổng quát là $y = x^3 + C$. Nghiệm $y = x^3$; $y = x^3 + 5$; $y = x^3 + 13$ là các nghiệm riêng.

Ví dụ 1.2. Phương trình $y' = \frac{e^x}{3y^2}$ có tích phân tổng quát là $y^3 = e^x + C$, với C là hằng số tùy ý.

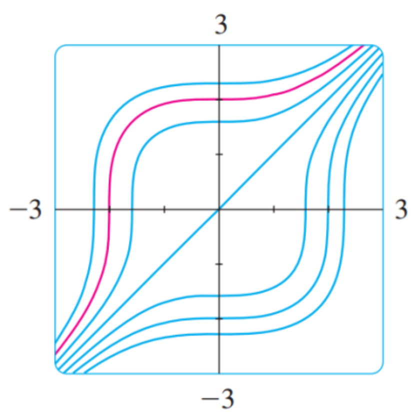
Chú ý rằng, biểu thức cho nghiệm tổng quát và cho tích phân tổng quát phải chứa một hằng số tùy ý. Biểu thức cho tích phân tổng quát có thể không duy nhất.

II. Đường cong tích phân

Đồ thị của mỗi nghiệm $y=\varphi(x)$ của phương trình vi phân đã cho, vẽ trên mặt phẳng Oxy gọi là *đường cong tích phân* của phương trình này.

Như vậy, nghiệm tổng quát $y=\varphi(x)$ trên mặt phẳng Oxy tương ứng với một họ các đường cong tích phân phụ thuộc vào một tham số là hằng số C bất kỳ. Nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện bao đầu $y(x_0)=y_0$ tương ứng với đường cong tích phân đi qua điểm (x_0, y_0) cho trước của họ đó.

Ví dụ 2.1. Phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y^2}$ có nghiệm tổng quát là $y=\sqrt[3]{x^3+C}$. Với $C=8,$ ta có nghiệm riêng của nó là $y=\sqrt[3]{x^3+8}$ (đường màu đỏ).



Họ nghiệm của phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y^2}$.

III. Một số dạng phương trình vi phân cấp 1

3.1. Phương trình tách biến

Phương trình sau đây được gọi là *phương trình tách biến*

$$g(y)y'=f(x). \tag{6.3}$$

Ta có thể viết (6.3) dưới các dạng sau

$$g(y)\frac{dy}{dx}=f(x),$$
$$g(y)dy=f(x)dx.$$

Phương pháp giải phương trình tách biến:

Nếu phương trình có dạng (6.3), lấy tích phân hai vế theo biến x, ta được

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(x) + C,$$

trong đó $G(y)$ là nguyên hàm của $g(y)$, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, và C là hằng số tùy ý.

Nếu phương trình có dạng $g(y)dy = f(x)dx$, lấy tích phân hai vế

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

Ví dụ 3.1. Giảicác phương trình sau

a) $y' = x - 2x^3$. b) $y^2y' = x$.

Giải

a) Lấy tích phân 2 vế theo biến x, ta được

$$\int y'dx = \int (x - 2x^3)dx$$

$$\Leftrightarrow \int dy = \int (x - 2x^3)dx$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + C$, với C là hằng số tùy ý.

b) Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int y^2y'dx = \int xdx$$

$$\Leftrightarrow \int y^2dy = \int xdx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} + D}, \text{ với } D = 3C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} + 3C}$, với D là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.2. Tìm nghiệm của phương trình $e^x dx - ydy = 0$ thỏa mãn $y(0) = 1$.

Giải

$$e^x dx - ydy = 0$$

$$\Leftrightarrow ydy = e^x dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int ydy = \int e^x dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = e^x + C.$$

Từ điều kiện $y(0) = 1$, suy ra

$$\frac{1^2}{2} = e^0 + C \Leftrightarrow C = \frac{-1}{2}.$$

Vậy, nghiệm y của phương trình thỏa $\frac{y^2}{2} = e^x - \frac{1}{2}$.

Chú ý 3.1. Ta có thể đưa các phương trình sau về dạng tách biến

i) Phương trình có dạng

$$M(x)Q(y)dx + N(x)P(y)dy = 0. \tag{6.4}$$

Với điều kiện $N(x) \neq 0$ và $Q(y) \neq 0, \forall x, y$, chia hai vế của phương trình (6.4) cho $N(x).Q(y)$, ta được

$$\frac{M(x)}{N(x)}dx + \frac{P(y)}{Q(y)}dy = 0.$$

ii) Phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{6.5}$$

Với điều kiện $g(y) \neq 0, \forall y$, chia hai vế của phương trình (6.5) cho $g(y)$, ta được

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

iii) Phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \tag{6.6}$$

trong đó a, b, c là các hằng số.

Đặt $z = ax + by + c$ và xem z là hàm số của x, ta có $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$. Khi đó, phương trình trở thành

$$\frac{dz}{dx} - a = bf(z).$$

Ví dụ 3.3. Giải phương trình $(1+x)y + (1-y)xy' = 0, x > 0.$

Giải

Ta thấy, $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $y \neq 0$, phương trình trở thành

$$\frac{(1-y)y'}{y} = -\frac{1+x}{x}.$$

Lấy tích phân 2 vế theo biến x, ta được

$$\int \frac{(1-y)y'}{y}dx = -\int \frac{1+x}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = -\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - y = -\ln x - x + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|xy| + x - y = C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát y của phương trình thỏa $\ln|xy| + x - y = C$, với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.4. Giải phương trình $y' = x(y^2+1)$.

Giải

Chia 2 vế của phương trình cho y^2+1, ta được

$$\frac{y'}{y^2+1} = x.$$

Lấy tích phân 2 vế theo biến *x*, ta được

$$\int \frac{y'}{y^2+1}dx = \int xdx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2+1}dy = \int xdx$$

$$\Leftrightarrow \arctan y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.5. Giải phương trình $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-2}$.

Giải

Đặt $z = x - y - 1$. Ta có $\dfrac{dz}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx}$. Khi đó, phương trình trở thành

$$\frac{dz}{dx} - 1 = -\frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-1}{z-1}.$$

Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int (1-z)dz = \int dx$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{z^2}{2} = x + C.$$

Thay $z = x - y - 1$, ta được

$$x - y - 1 - \frac{(x-y-1)^2}{2} = x + C$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)^2 + 2y + 2 + 2C = 0.$$

Vậy, nghiệm tổng quát y của phương trình thỏa

$$(x-y-1)^2 + 2y + 2 + 2C = 0,$$

với C là hằng số tùy ý.

3.2. Phương trình đẳng cấp

Phương trình vi phân

$$y' = f(x,y)$$

được gọi là *đẳng cấp* nếu hàm $f(x,y)$ có thể viết được dưới dạng

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

nghĩa là

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.7}$$

Nhắc lại rằng, hàm $f(x,y)$ được gọi là *hàm đẳng cấp bậc* m nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y).$$

Phương trình vi phân

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.8}$$

là phương trình đẳng cấp nếu các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc. Thật vậy, bằng cách đưa phương trình (6.8) về dạng $y' = \dfrac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$ rồi chia tử và mẫu cho $x^k, x^k \neq 0$ ta sẽ thấy $\dfrac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$ là hàm số theo biến $\dfrac{y}{x}$.

Ví dụ 3.6. Ta có thể viết lại phương trình $(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$ như sau

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Phương pháp giải phương trình đẳng cấp:

Đặt $u=\frac{y}{x}$, ta có $y=ux$ và $y'=u'x+u$. Khi đó, phương trình (6.7) trở thành

$$xu'+u=\varphi(u)$$

$$\Leftrightarrow xu'=\varphi(u)-u.$$

Giả sử $\varphi(u)\neq u$ và $x\neq 0$, ta đưa phương trình về dạng tách biến như sau

$$\frac{1}{\varphi(u)-u}u'=\frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

Từ đó, ta thu được phương trình dạng

$$\Phi(u)=\ln|x|+C$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C.$$

Ví dụ 3.7. Giải phương trình $y'=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}$ trên miền $x>0$.

Giải

Phương trình được viết lại dưới dạng

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\frac{y}{x}}.$$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$, ta có $y=ux$ và $y'=u'x+u$. Khi đó, phương trình trở thành

$$xu'+u=\frac{u-u^2}{1-2u}$$
$$\Leftrightarrow xu'=\frac{u-u^2}{1-2u}-u$$
$$\Leftrightarrow u'=\frac{1}{x}\frac{u^2}{1-2u}.$$

Trường hợp $u=0\Rightarrow y=0$ là nghiệm.

Trường hợp $u\neq 0$, ta có

$$\frac{1-2u}{u^2}u'=\frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int\frac{1-2u}{u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{u}-2\ln|u|=\ln x+C$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{y}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln x+C$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(K\frac{y^2}{x}\right)=\frac{-x}{y}\ \text{(với } K=e^C\text{)}$$

$$\Leftrightarrow K\frac{y^2}{x}=e^{\frac{-x}{y}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{y}}\frac{y^2}{x}=D,\ \text{(với } D=\frac{1}{K}\text{)}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát y của phương trình thỏa $e^{\frac{x}{y}}\dfrac{y^2}{x}=D$, với D là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.8. Tìm nghiệm của phương trình $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4$ thỏa mãn $y(1) = 2$.

Giải

Đặt $u = \frac{y}{x}$, ta có $y = ux$ và $y' = u'x + u$. Khi đó, phương trình trở thành

$$u'x + u = u^2 + u + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'}{u^2 + 4} = \frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int \frac{1}{u^2 + 4} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) = \ln|x| + C.$$

Thay $u = \frac{y}{x}$, ta được

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2x}\right) = \ln|x| + C.$$

Từ điều kiện $y(1) = 2$, suy ra

$$\frac{1}{2}\arctan(1) = \ln|2| + C \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{8} - \ln 2.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $y = 2x\tan\left(2\ln|x| + \frac{\pi}{4} - 2\ln 2\right)$.

Ví dụ 3.9. Giải phương trình $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$.

Giải

Ta có

$$P(x, y) = x + y,$$

$$Q(x, y) = x - y$$

và

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda P(x, y),$$
$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y = \lambda Q(x, y).$$

Vậy, P và Q là các hàm số đẳng cấp bậc một nên phương trình đã cho là phương trình đẳng cấp.

<u>*Cách 1*</u>: Với điều kiện $x - y \neq 0$, phương trình vi phân đã cho được đưa về dạng

$$y' = -\frac{x+y}{x-y}.$$

Chia tử và mẫu cho x $(x \neq 0)$ ta có

$$y' = -\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Đặt $u = \frac{y}{x}$, ta có $y = ux$ và $y' = u'x + u$. Khi đó, phương trình trở thành

$$u'x + u = -\frac{1+u}{1-u}$$

$$\Leftrightarrow u'x = \frac{u^2 - 2u - 1}{1-u}.$$

Với điều kiện $u^2 - 2u - 1 \neq 0$, ta có

$$\frac{1-u}{u^2 - 2u - 1} u' = \frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{1-u}{u^2 - 2u - 1} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln \left| u^2 - 2u - 1 \right| = \ln |x| + C$$

$$\Leftrightarrow \left| u^2 - 2u - 1 \right| = \left| x^{-2} e^{-2C} \right|$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u - 1 = \pm x^{-2} e^{-2C} = Kx^{-2}.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$, ta được

$$y^2 - 2xy - x^2 = K.$$

<u>*Cách 2*</u>: thay trực tiếp $y = ux$ và $dy = xdu + udx$ vào phương trình vi phân đã cho, ta có

$$(x - ux)(xdu + udx) + (x + ux)dx = 0.$$

Chia hai vế cho $x(x \neq 0)$, ta được

$$(1-u)(xdu + udx) + (1+u)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-u)xdu + (-u^2 + 2u + 1)dx = 0.$$

Với điều kiện $u^2 - 2u - 1 \neq 0$, ta có

$$\frac{1-u}{u^2 - 2u - 1}u' = \frac{1}{x}.$$

Các bước tính toán tiếp theo được làm như trong cách 1.

Chú ý 3.2. Phương trình dạng

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \tag{6.9}$$

trong đó $a_i,\ b_i,\ c_i\ (i = 1,2)$ là các hằng số, có thể đưa về phương trình đẳng cấp.

Thật vậy, xét hệ

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Trường hợp định thức $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, hệ có nghiệm (α, β). Đặt $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$, ta có

$$dx = du,\ dy = dv,\ v = v(u).$$

Phương trình trở thành $\dfrac{dv}{du} = f\left(\dfrac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$ là phương trình đẳng cấp.

Trường hợp định thức $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, tồn tại hằng số $\lambda \in \mathbb{R}$ thỏa $a_1 = \lambda a_2$ và $b_1 = \lambda b_2$. Đặt $z = a_2 x + b_2 y$, ta có $a_1 x + b_1 y = \lambda z$. Khi đó, phương trình trở thành

$$\frac{dz}{dx} = b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2$$

là phương trình dạng tách biến.

Ví dụ 3.10. Giải phương trình $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$.

Giải

Với điều kiện $2y - x - 1 \neq 0$, ta có

$$y' = \frac{-x + y}{-x + 2y + 1}.$$

Xét hệ $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$. Hệ có nghiệm là $(x, y) = (-1, -1)$.

Đặt $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 1 \end{cases}$, ta có $dx = du, dy = dv.$ Phương trình trở thành

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u + v}{-u + 2v}.$$

Ta tìm hàm $v = v(u)$ thỏa mãn phương trình trên. Đây là phương trình đẳng cấp. Giải tiếp, ta được nghiệm tổng quát y của phương trình ban đầu thỏa

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.11. Giải phương trình $(x + y - 2)dx + (2x + 2y - 2)dy = 0$.

Giải

Với điều kiện $2x + 2y - 2 \neq 0$, ta có

$$y' = \frac{-x - y + 2}{2x + 2y - 2}.$$

Xét hệ $\begin{cases} -x-y+2=0 \\ 2x+2y-2=0 \end{cases}$. Hệ có định thức $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Đặt $z = 2x + 2y$, ta có $-x - y = \dfrac{-z}{2}$. Khi đó, phương trình trở thành

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{z-2}$$

là phương trình dạng tách biến. Giải tiếp, ta được nghiệm tổng quát y của phương trình ban đầu thỏa

$$2(x+y-\ln|x+y|) = x + C,$$

với C là hằng số tùy ý và $y = -x$ cũng là một nghiệm của phương trình.

3.3. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (6.10)$$

được gọi là phương trình *vi phân toàn phần* nếu vế trái của nó là vi phân toàn phần của một hàm hai biến $F(x,y)$ nào đó, nghĩa là

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Khi đó, phương trình trên trở thành

$$dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Định lý 3.3. *Cho hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in D$$

thì tồn tại hàm $F(x,y)$ sao cho

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \ \text{và} \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Phương pháp giải phương trình vi phân toàn phần:

Xét phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$

Bước 1: Chứng minh phương trình vi phân có dạng phương trình vi phân toàn phần bằng cách chứng tỏ P và Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in D.$$

Do đó, tồn tại hàm F thỏa

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Khi đó, phương trình trên trở thành

$$dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Bước 2: Tìm biểu thức của F dựa vào

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

Bước 3: Từ phương trình $F(x,y) = C$, tìm biểu thức của y (nếu có thể).

Ví dụ 3.12. Giải phương trình $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

Giải

Ta có

$$P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,$$

$$Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3,$$

và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ta thấy, P và Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ nên phương trình vi phân đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

Ta tìm hàm $F(x,y)$ thỏa hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, & (6.11) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. & (6.12) \end{cases}$$

Từ (6.11) $\Rightarrow F(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2 + C(y).$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + C'(y). \qquad (6.13)$$

Từ (6.12) và (6.13), ta được $C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C,$ với C là hằng số tùy ý. Suy ra

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát y của phương trình ban đầu thỏa $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$, với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.13. Giải phương trình $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$.

Giải

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần và tìm được hàm

$$F(x,y) = xy + e^x \sin y + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát y của phương trình ban đầu thỏa $xy + e^x \sin y = C$, với C là hằng số tùy ý.

3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trinh vi phân

$$y' + p(x)y = q(x),$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$, được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính* cấp 1.

Nếu $q(x)=0$ thì phương trình trên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính *thuần nhất*. Nếu $q(x)\neq 0$ thì phương trình trên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính *không thuần nhất*.

Định lý 3.4. *Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất*

$$y' + p(x)y = 0,$$

trong đó p(x) là hàm liên tục trên khoảng $I\subseteq\mathbb{R}$.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

với C là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Nhân 2 vế của phương trình cho $e^{\int p(x)dx}$, ta được

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow\ ye^{\int p(x)dx} = C$$

$$\Leftrightarrow\ y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

với C là hằng số tùy ý. ■

Định lý 3.5. *Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1*

$$y' + p(x)y = q(x),$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I\subseteq\mathbb{R}$.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý.

Chứng minh. Nhân 2 vế của phương trình cho $e^{\int p(x)dx}$, ta được

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý. ■

Ví dụ 3.14. Giải các phương trình sau

a) $y' + 3x^2y = 0$. b) $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$.

Giải

a) Phương trình $y' + 3x^2y = 0$ có dạng tuyến tính thuần nhất với $p(x) = 3x^2$. Ta có

$$\int p(x)dx = \int 3x^2dx = x^3.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = Ce^{x^3}$, với C là hằng số tùy ý.

b) Phương trình $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ có dạng tuyến tính thuần nhất với $p(x) = -\dfrac{2}{x}$. Ta có

$$\int p(x)dx = \int \frac{-2}{x}dx = -2\ln x.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = Ce^{-2\ln x} = \dfrac{C}{x^2}$, với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.15. Giải các phương trình sau

a) $y' - 7y = \sin x$. b) $y' - \dfrac{3}{x^2}y = \dfrac{1}{x^2}$.

Giải

a) Phương trình $y' - 7y = \sin x$ có dạng tuyến tính không thuần nhất với $p(x) = -7, q(x) = \sin x$. Ta có

$$\int p(x)dx = \int -7dx = -7x,$$

và

$$e^{\int p(x)dx} = e^{-7x}.$$

Tiếp theo, ta tính

$$\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx = \int e^{-7x}\sin x dx = I.$$

Đặt $\begin{cases} u = e^{-7x} \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -7e^{-7x}dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} I &= -\cos x e^{-7x} - \int 7e^{-7x}\cos x dx \\ &= -\cos x e^{-7x} - 7\int e^{-7x}\cos x dx. \end{aligned}$$

Xét $\int e^{-7x}\cos x dx$, đặt $\begin{cases} u = e^{-7x} \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -7e^{-7x}dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} \int e^{-7x}\cos x dx &= \sin x e^{-7x} - \int -7\sin x e^{-7x}dx \\ &= \sin x e^{-7x} + 7\int \sin x e^{-7x}dx \\ &= \sin x e^{-7x} + 7I. \end{aligned}$$

Suy ra

$$I = -\cos x e^{-7x} - 7(\sin x e^{-7x} + 7I)$$

$$\Leftrightarrow I = -\frac{\cos x}{50}e^{-7x} - \frac{7\sin x}{50}e^{-7x}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{7x}\left(-\frac{\cos x}{50}e^{-7x} - \frac{7\sin x}{50}e^{-7x} + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý.

b) Phương trình $y' - \frac{3}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$ có dạng tuyến tính không thuần nhất với $p(x) = -\frac{3}{x^2}, q(x) = \frac{1}{x^2}$. Ta có

$$\int p(x)dx = \int -\frac{3}{x^2}dx = \frac{3}{x},$$

và

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\frac{3}{x}}.$$

Tiếp theo, ta tính

$$\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx = \int e^{\frac{3}{x}} \frac{1}{x^2} dx = I.$$

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx$, ta có

$$I = \int -e^{3t} dt = \frac{-e^{3t}}{3} = \frac{-e^{\frac{3}{x}}}{3}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{\frac{3}{x}} \left(\frac{-e^{\frac{3}{x}}}{3} + C \right),$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.16. Giải các bài toán Cauchy sau

a) $y' + 6xy = 0, y(\pi) = 5$.   b) $y' + 2xy = 2x^3, y(0) = 1$.

Giải

a) Phương trình $y' + 6xy = 0$ có dạng tuyến tính thuần nhất với $p(x) = 6x$. Ta có

$$\int p(x)dx = \int 6xdx = 3x^2.$$

Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = Ce^{3x^2}$, với C là hằng số tùy ý.

Từ điều kiện $y(\pi) = 5$, suy ra

$$5 = Ce^{3\pi^2} \Rightarrow C = 5e^{-3\pi^2}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình ban đầu là

$$y = 5e^{-3\pi^2} e^{3x^2}.$$

b) Phương trình $y' + 2xy = 2x^3$ có dạng tuyến tính không thuần nhất với $p(x) = 2x, q(x) = 2x^3$. Ta có

$$\int p(x)dx = \int 2xdx = x^2,$$

và

$$e^{\int p(x)dx} = e^{x^2}.$$

Ta có

$$\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx = \int e^{x^2} 2x^3 dx = I.$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$, ta có

$$I = \int te^t dt = te^t - e^t = x^2 e^{x^2} - e^{x^2}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{x^2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C\right).$$

Từ điều kiện $y(0) = 1$, ta được $C = 2$.

Vậy, nghiệm của phương trình là

$$y = e^{x^2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + 2\right).$$

3.5. Phương trình Bernoulli và phương trình Riccati

3.5.1. Phương trình Bernoulli: là phương trình vi phân có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$ và $m \in \mathbb{R}$.

Phương pháp giải phương trình Bernoulli:

Trường hợp $m = 0$, phương trình trên có dạng tuyến tính không thuần nhất.

Trường hợp $m = 1$, phương trình trên có dạng tuyến tính thuần nhất.

Trường hợp $m \neq 0$ và $m \neq 1$. Rõ ràng, $y = 0$ là một nghiệm. Xét $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình trên cho y^m ta được

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x).$$

Đặt $u = y^{1-m}$ thì $u' = (1-m)y^{-m}y'$. Từ đó, ta được phương trình vi phân cấp 1 như sau

$$u' + (1-m)p(x)u = (1-m)q(x). \qquad (6.14)$$

Phương trình (6.14) chính là phương trình vi phân cấp 1 mà ta đã biết.

Ví dụ 3.17. Giải phương trình $y' + xy = xy^2$.

Giải

Ta thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}y' + xy^{-1} = x.$$

Đặt $u = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$. Phương trình trên trở thành

$$u' - xu = -x. \qquad (6.15)$$

Phương trình (6.15) là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất và nghiệm tổng quát của phương trình (6.15) là $u = e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right)$, với C là hằng số tùy ý.

Từ đó, ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}}},$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.18. Giải phương trình $y' - \frac{3}{4}y = xy^{\frac{1}{3}}$.

Giải

Ta thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $y^{\frac{1}{3}}$, ta được

$$y^{-\frac{1}{3}}y' - \frac{3}{4}y^{\frac{2}{3}} = x.$$

Đặt $u = y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow u' = y^{-\frac{1}{3}}y'$. Phương trình trên trở thành

$$u' - \frac{3}{4}u = x. \tag{6.16}$$

Phương trình (6.16) phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với $p(x) = -\frac{3}{4}, q(x) = x$ và nghiệm tổng quát của phương trình (6.16) là $u = e^{\frac{3x}{4}}\left(-\frac{4}{9}(4+3x)e^{-\frac{3x}{4}} + C\right)$, với C là hằng số tùy ý.

Từ đó, ta tìm được nghiệm tổng quát y của phương trình ban đầu thỏa

$$y^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{3x}{4}}\left(-\frac{4}{9}(4+3x)e^{-\frac{3x}{4}} + C\right),$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.19. Tìm nghiệm của phương trình $y' + \frac{2}{x}y = -x^9y^5$, $y(-1) = 2$.

Giải

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^5, ta được

$$y^{-5}y' + \frac{2}{x}y^{-4} = -x^9.$$

Đặt $u = y^{-4} \Rightarrow u' = y^{-5}y'$. Phương trình trên trở thành

$$u' + \frac{2}{x}u = -x^9. \tag{6.17}$$

Phương trình (6.17) là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với $p(x) = \frac{2}{x}, q(x) = -x^9$ và nghiệm tổng quát của phương trình (6.17) là

$$u = x^{-2}\left(-\frac{x^{12}}{12} + C\right) = -\frac{x^{10}}{12} + \frac{C}{x^2},$$

với C là hằng số tùy ý.

Từ đó, ta tìm được nghiệm y của phương trình ban đầu thỏa $\frac{1}{y^4} = \frac{-x^{10}}{12} + \frac{7}{48x^2}$.

3.5.2. Phương trình Riccati: là phương trình vi phân có dạng

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$.

Phương pháp giải phương trình Riccati:

Giả sử đã biết một nghiệm y_0 của phương trình, đặt $u = y - y_0$. Khi đó, phương trình Riccati được đưa về phương trình Bernoulli.

Thật vậy, với cách đặt trên, ta có

$$(u + y_0)' = p(x)(u + y_0)^2 + q(x)(u + y_0) + r(x)$$

suy ra

$$u' = p(x)u^2 + (2p(x)y_0 + q(x))u$$

là phương trình Bernoulli.

Ví dụ 3.20. Giải phương trình vi phân $y' = \frac{y^2}{2x} - \frac{1}{2x}$.

Giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Ta thấy, $y = 1$ là một nghiệm của phương trình.

Đặt $u = y - 1 \Rightarrow y = u + 1$, ta có

$$(u+1)' = \frac{1}{2x}(u+1)^2 - \frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow u' = \frac{1}{2x}u^2 + \frac{1}{x}u.$$

Ta được phương trình Bernoulli $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{2x}u^2$. Giải phương trình này, ta được nghiệm tổng quát của phương trình là $y = 1 + \frac{2}{2Cx - 1}$, với C là hằng số tùy ý.

3.6. Phương trình vi phân không giải theo y'

Xét trường hợp phương trình vi phân

$$F(x,y,y')=0. \tag{6.18}$$

khó giải theo đạo hàm y', ta có thể viết lại phương trình (6.18) dưới dạng

$$F(x,y,t)=0, \quad t=y'. \tag{6.19}$$

Khi đó chúng ta sẽ tìm nghiệm của phương trình (6.19) dưới dạng

$$x=x(t), y=y(t).$$

3.6.1. Phương trình dạng $x=f(y'), y=f(y')$

Thay $t=y'$ vào phương trình $x=f(y')$ ta có biểu thức của x đối với tham số t là $x=f(t)$. Lấy vi phân phương trình $x=f(t)$ theo t, ta được

$$dx=f'(t)dt,$$

vì $dy=y'dx=tdx$ nên

$$dy=tf'(t)dt.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$y=\int tf'(t)dt+C.$$

Vậy, nghiệm của phương trình $x=f(y')$ được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=\int tf'(t)dt+C, \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

Tương tự, thay $t=y'$ vào phương trình $y=f(y')$ ta có biểu thức của x đối với tham số t là $y=f(t)$. Lấy vi phân phương trình $y=f(t)$ theo t, ta được

$$dy=f'(t)dt,$$

vì $dy=y'dx=tdx$ nên

$$dx=\frac{f'(t)dt}{t}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$x = \int \frac{f'(t)}{t} dt + C.$$

Vậy, nghiệm của phương trình $x = f(y')$ được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(t)}{t} dt + C \\ y = f(t), \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.21. Giải phương trình $x = y'\cos y'$.

Giải

Đặt $t = y'$, thế vào phương trình $x = y'\cos y'$ ta có

$$x = t\cos t.$$

Lấy vi phân phương trình trên, ta được

$$dx = (\cos t - t\sin t)dt$$

Vì $dy = y'dx = tdx$ nên

$$dy = t(\cos t - t\sin t)dt.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$y = \int t(\cos t - t\sin t)dt = -\cos t - t\sin t + t^2\cos t + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = -\cos t - t\sin t + t^2\cos t + C, \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.22. Giải phương trình $y = (y'-1)e^{y'}$.

Giải

Đặt $t = y'$, thế vào phương trình $y = (y'-1)e^{y'}$ ta có

$$y = (t-1)e^t$$

Lấy vi phân phương trình trên, ta được

$$dy = (t-1)e^t = te^t$$

Vì $dy = y'dx = tdx$ nên

$$dx = e^t dt.$$

Lấy tích phân hai vế, ta có

$$x = \int e^t dt = e^t + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = e^t + C \\ y = (t-1)e^t, \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.23. Giải phương trình $x = y' + \ln y'$.

Giải

Đặt $t = y'$. Phương trình trở thành

$$x = t + \ln t.$$

Lấy vi phân hai vế, ta được

$$dx = \left(1 + \frac{1}{t}\right)dt.$$

Vì $dy = y'dx = tdx$ nên

$$dy = t\left(1 + \frac{1}{t}\right)dt = (t+1)dt.$$

Lấy tích phân hai vế, ta có

$$y = \int (t+1)dt = \frac{1}{2}t^2 + t + C.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + t + C, \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

3.6.2. Phương trình Lagrange

Đó là phương trình có dạng

$$y = xf(y') + g(y'), \tag{6.20}$$

trong đó f, g là các hàm một biến.

Phương pháp giải phương trình Lagrange:

Đặt $t = y'$. Phương trình (6.20) trở thành

$$y = xf(t) + g(t).$$

Lấy vi phân phương trình trên và thay $dy = tdx$, ta được

$$tdx = f(t)dx + xf'(t)dt + g'(t)dt.$$

Với điều kiện $t - f(t) \neq 0$, suy ra

$$x' - \frac{f'(t)}{t - f(t)}x = \frac{g'}{t - f(t)}$$

là phương trình vi phân tuyến tính của x theo biến t, và ta giải ra được

$$x = F(t,C).$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = F(t,C) \\ y = F(t,C)f(t) + g(t), \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.24. Giải phương trình $y = 2xy' + \dfrac{5}{y'}$.

Giải

Đây là phương trình Lagrange. Đặt $t = y'$. Phương trình trở thành

$$y = 2xt + \frac{5}{t}.$$

Lấy vi phân phương trình trên và thay $dy = tdx$, ta được

$$tdx = 2tdx + 2xdt - \frac{5}{t^2}dt,$$

Với điều kiện $t \neq 0$, suy ra

$$x' + \frac{2}{t}x = \frac{5}{t^3}.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và ta có nghiệm là

$$x = \frac{1}{t^2}(5\ln|t| + C).$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}(5\ln|t| + C) \\ y = \dfrac{2}{t}(5\ln|t| + C) + \dfrac{5}{t}, \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 3.25. Giải phương trình $y = xy'^2 + y'^2$.

Giải

Đây là phương trình Lagrange. Đặt $t = y'$. Phương trình trở thành

$$y = xt^2 + t^2.$$

Lấy vi phân phương trình trên và thay $dy = tdx$, ta được

$$tdx = t^2dx + 2xtdt + 2tdt.$$

Với điều kiện $t \neq 0$, suy ra

$$(1 - t)dx = 2(x + 1)dt.$$

Nếu $t = 1 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y = x$ không là nghiệm.

Nếu $t \neq 1$, ta có

$$x' - \frac{2}{1-t}x = \frac{2}{1-t}.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và ta có nghiệm là

$$x = \frac{C}{(t-1)^2} - 1.$$

Trường hợp $t=0 \Rightarrow y'=0$ và thay vào phương trình ban đầu, ta có $y=0$ là nghiệm kỳ dị.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(t-1)^2} - 1 \\ y = \dfrac{C}{(t-1)^2}, \end{cases}$$

với C là hằng số tùy ý và nghiệm kỳ dị là $y=0$.

Chú ý, từ nghiệm tổng quát của phương trình trên, ta có thể đưa về dạng

$$(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})^2 = C.$$

3.6.3. Phương trình Clairaut

Đó là phương trình có dạng

$$y = xy' + g(y'), \tag{6.21}$$

trong đó g là hàm một biến. Đây là trường hợp riêng của phương trình Lagrange.

Phương pháp giải phương trình Clairaut:

Đặt $t = y'$. Phương trình (6.21) trở thành

$$y = xt + g(t).$$

Lấy vi phân phương trình trên và thay $dy = tdx$, ta được

$$(x + g'(t))dt = 0.$$

Trường hợp $dt = 0 \Rightarrow t = C$, với C là hằng số tùy ý, ta được nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = xC + g(C).$$

Trường hợp $x + g'(t) = 0$, ta được $x = -g'(t)$. Khi đó, ta có nghiệm kỳ dị của phương trình (6.21) là

$$\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t). \end{cases}$$

Chú ý rằng, nghiệm tổng quát của phương trình Clairaut chính là họ các tiếp tuyến của nghiệm kỳ dị. Phương trình Lagrange cũng có thể có nghiệm kỳ dị, đồng thời các nghiệm kỳ dị của phương trình (nếu tồn tại) là các tiếp tuyến chung với tất cả các đường cong tích phân xác định bởi nghiệm tổng quát.

Ví dụ 3.26. Giải phương trình $y = xy' - \ln y'$.

Giải

Đây là phương trình Clairaut. Đặt $t = y'$. Phương trình trở thành

$$y = xt - \ln t.$$

Lấy vi phân phương trình trên và thay $dy = tdx$, ta được

$$tdx = tdx + xdt - \frac{1}{t}dt,$$

suy ra

$$\left(x - \frac{1}{t}\right)dt = 0.$$

Trường hợp $dt = 0 \Rightarrow t = C$ và thay vào phương trình $y = xt - \ln t$ ta có nghiệm tổng quát là

$$y = xC - \ln C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Trường hợp $x - \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ và thay vào phương trình $y = xt - \ln t$ ta có nghiệm kỳ dị của phương trình là

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = 1 - \ln t. \end{cases}$$

Ví dụ 3.27. Giải phương trình $y = xy' - e^{y'}$.

Giải

Đây là phương trình Clairaut. Đặt $t = y'$. Phương trình trở thành

$$y = xt - e^t.$$

Lấy vi phân phương trình trên và thay $dy = tdx$, ta được

$$tdx = tdx + xdt - e^t dt,$$

suy ra

$$\left(x - e^t\right)dt = 0.$$

Trường hợp $dt = 0 \Rightarrow t = C$ và thay vào phương trình $y = xt - e^t$ ta có nghiệm tổng quát là

$$y = xC - e^C,$$

với C là hằng số tùy ý.

Trường hợp $x - e^t = 0 \Rightarrow x = e^t$ và thay vào phương trình $y = xt - e^t$ ta có nghiệm kỳ dị của phương trình là

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = (t-1)e^t. \end{cases}$$

Khử tham số t, ta có nghiệm kỳ dị dạng

$$y = (\ln x - 1)x.$$

Sau cùng, ta kiểm tra lại để thấy tập hợp các đường thẳng được xác định bởi nghiệm tổng quát chính là họ các tiếp tuyến của đường cong tích phân kỳ dị.

Như đã biết, phương trình tiếp tuyến của hàm $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$ cho bởi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Áp dụng cho hàm $y = (\ln x - 1)x$, với $y' = \ln x$ ta có

$$\begin{aligned} & y - (\ln x_0 - 1)x_0 = \ln x_0 (x - x_0) \\ \Leftrightarrow\ & y = x \ln x_0 - x_0. \end{aligned}$$

Đặt $C = \ln x_0$, ta được $y = xC - e^C$. Đây chính là công thức nghiệm tổng quát.

Chú ý, quá trình giải phương trình vi phân khó giải ra đối với y' sẽ dẫn về các phương trình đã biết như tách biến, tuyến tính ... nên ta cần để ý dạng để giải bài.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

I. Đại cương về phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Định nghĩa 1.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{6.22}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ và $f(x)$ là các hàm xác định trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

Phương trình (6.22) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất*. Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình (6.22) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất*. Phương trình thuần nhất có cùng vế trái như phương trình không thuần nhất đã cho được gọi là *phương trình thuần nhất tương ứng*. Nếu $p(x)$ và $q(x)$ là các hằng số thì phương trình (6.22) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 2 *với hệ số hằng*.

Bài toán Cauchy đối với phương trình tuyến tính (6.22) là bài toán tìm nghiệm của phương trình (6.22) thỏa các điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0. \tag{6.23}$$

Định lý sau đây cho ta một kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình tuyến tính (6.22) trên toàn bộ khoảng *I*.

Định lý 1.2. *Nếu các hàm p*(*x*), *q*(*x*) *và f*(*x*) *liên tục trên khoảng mở* $I \subset \mathbb{R}$ *và nếu* $x_0 \in I$, y_0 *và* y'_0 *là hai số bất kỳ thì bài toán Cauchy đối với phương trình tuyến tính* (6.22) *có nghiệm duy nhất xác định trên toàn bộ khoảng I.*

1.1. Sự độc lập tuyến tính

Định nghĩa 1.3. Các hàm số $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* trên khoảng I nếu tồn tại các hằng số $c_1, c_2, \ldots, c_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0,\ \forall x \in I. \tag{6.24}$$

Các hàm số $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu chúng không phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là chỉ tồn tại duy nhất các hằng số $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ thỏa (6.24).

Ví dụ 1.1. Các hàm số $y_1(x) = x,\ \ y_2(x) = 3x,\ \ y_3(x) = \sin x,\ \ y_4(x) = \cos x$ phụ thuộc tuyến tính trên $[-1,1]$ do tồn tại $c_1 = -3, c_2 = 1, c_3 = c_4 = 0$ thỏa $-3.x + 1.3x + 0.\sin x + 0.\cos x = 0$.

Ví dụ 1.2. Các hàm số $y_1(x) = x^p,\ \ y_2(x) = x^q\ (p \neq q)$ độc lập tuyến tính trên $I = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Thật vậy, giả sử x^p, x^q phụ thuộc tuyến tính trên I, nghĩa là tồn tại các hằng số c_1, c_2 không đồng thời bằng 0 thỏa

$$c_1x^p + c_2\, x^q = 0.$$

Giả sử $c_1 \neq 0$, chia hai vế của phương trình trên cho c_1x^q, ta được

$$x^{p-q} = -\frac{c_2}{c_1},$$

điều này vô lý do vế trái của phương trình trên là hàm số, nhưng vế phải là hằng số. Vậy, $x^p, x^q\ (p \neq q)$ độc lập tuyến tính trên $I = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Định lý 1.4. *Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.25}$$

Khi đó $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (6.25).

Chứng minh. Do y_1 và y_2 là hai nghiệm của phương trình, ta có

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}.$$

Nhân hai vế của phương trình trên cho c_1, hai vế của phương trình dưới cho c_2 rồi cộng lại, ta được

$$c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0.$$

Đặt $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$, ta có $y_3'' + p(x)y_3' + q(x)y_3 = 0$. Vậy, y_3 cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất. ■

1.2. Định thức Wronski

Định nghĩa 1.5. Giả sử y_1, y_2 là các hàm khả vi trên khoảng *I*. *Định thức Wronski* của y_1, y_2 được cho bởi công thức

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Định lý 1.6. *Nếu hai hàm số* $y_1(x), y_2(x)$ *phụ thuộc tuyến tính trên* I *thì* $W[y_1, y_2](x) = 0$ *trên* I.

Chứng minh. Do $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại các hằng số c_1, c_2 sao cho

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0.$$

Giả sử $c_2 \neq 0$, đặt $k = -\dfrac{c_1}{c_2}$, ta có $y_2(x) = ky_1(x)$, suy ra $y_2'(x) = ky_1'(x)$. Ta có

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y_1' & ky_1' \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$ ■

Định lý 1.7 (Định lý Abel). *Giả sử* y_1, y_2 *là hai nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất* (6.25) *với* $p(x)$, $q(x)$ *liên tục trên một khoảng mở I,* $x_0 \in I$. *Khi đó, định thức Wronski của* y_1, y_2 *được cho bởi*

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \forall x \in I. \tag{6.26}$$

Người ta gọi công thức (6.26) là công thức Abel.

Chứng minh. Vì y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình (6.25) nên

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Nhân đẳng thức trên với $-y_2$, nhân đẳng thức dưới với $-y_1$ rồi cộng lại, ta được

$$(y_1y_1''-y_2y_1'')+p(x)(y_1y_2'-y_2y_1')=0. \tag{6.27}$$

Mà

$$W[y_1,y_2](x)=y_1y_2'-y_2y_1',$$

$$W'[y_1,y_2](x)=y_1y_2''+y_1'y_2'-y_2y_1''-y_1'y_2'=y_1y_2''-y_2y_1''.$$

Do đó, đẳng thức (6.27) có thể viết là

$$W'+p(x)W=0\Rightarrow \frac{dW}{W}=-p(x)dx.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{W}{C}\right|=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt,$$

với C là hằng số tùy ý, do đó

$$W[y_1,y_2](x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}. \tag{6.28}$$

Thế $x=x_0$ vào hai vế, ta được $W(x_0)=C$. Vậy

$$W[y_1,y_2](x)=W[y_1,y_2](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt},\ \forall x\in I.$$ ■

Hệ quả 1.8. *Hoặc $W[y_1,y_2](x)$ bằng 0 trên toàn bộ I, hoặc $W[y_1,y_2](x)$ khác 0 trên toàn bộ I.*

Chứng minh. Từ (6.26) suy ra nếu $W[y_1,y_2](x_0)=0$ thì $W[y_1,y_2](x)=0,\ \forall x\in I$, còn nếu $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0$ thì $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0,\ \forall x\in I$. ■

Định lý 1.9. *Giả sử y_1,y_2 là hai nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y''+p(x)y'+q(x)=0$ trên I. Khi đó, y_1,y_2 độc lập tuyến tính trên I khi và chỉ khi $W[y_1,y_2](x)\neq 0,\ \forall x\in I$.*

Chứng minh.

Chiều ngược: Do $W[y_1,y_2](x)\neq 0, \forall x\in I$ nên theo định lý 1.6 ta có y_1,y_2 độc lập tuyến tính.

Chiều thuận: Giả sử $\exists x_0 \in I$ sao cho $W[y_1, y_2](x_0) = 0$.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W[y_1, y_2](x_0) = 0,$$

và

$$D_{c_1} = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = 0 = D_{c_2} = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 0 \end{vmatrix}.$$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm không tầm thường c_1, c_2.

Do y_1, y_2 là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất, nên theo định lý 1.4 ta có

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

cũng là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất. Hơn nữa, ta còn có

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_0) = 0,$$
$$y'(\mathrm{x}_0) = c_1 y_1'(x_1) + c_2 y_2'(x_0) = 0.$$

Vậy, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x) y' + q(x) = 0 \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Ngoài ra, ta dễ dàng kiểm tra $y(x) = 0$ cũng là nghiệm của bài toán Cauchy trên nên theo định lý 1.2 ta có

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0,$$

nghĩa là y_1, y_2 là hai hàm phụ thuộc tuyến tính. Điều này mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của y_1, y_2. Vậy, $W[y_1, y_2](x) \neq 0,\ \forall x \in I.$ ■

Ví dụ 1.3. Các hàm số $y_1(x)=1,\ \ y_2(x)=x,\ \ y_3(x)=x^2$ độc lập tuyến tính trên (a,b) bất kỳ. Thật vậy, ta có

$$W=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Ví dụ 1.4. Xét hai hàm số $y_1(x)=x,\ \ y_2(x)=x^2$, ta có

$$W=\begin{vmatrix}x & x^2\\ 1 & 2x\end{vmatrix}=x^2.$$

Ta thấy hai hàm số $y_1(x)=x,\ \ y_2(x)=x^2$ độc lập tuyến tính $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ví dụ 1.5. Xét các hàm số $y_1(x)=1,\ \ y_2(x)=x^2,\ \ y_3(x)=5x^2+7$, ta có

$$W=\begin{vmatrix}1 & x^2 & 5x^2+7\\ 0 & 2x & 10x\\ 0 & 2 & 10\end{vmatrix}=20x-20x=0.$$

Vậy, các hàm số $y_1(x)=1,\ \ y_2(x)=x^2,\ \ y_3(x)=5x^2+7$ phụ thuộc tuyến tính. Ta có thể dễ dàng thấy rằng, với $c_1=-1, c_2=-5, c_3=1$, ta có

$$-1.7-5.x^2+1(5x^2+7)=0,$$

hay

$$5x^2+7=5(x^2)+1(7).$$

Chú ý, nếu $y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm số phụ thuộc tuyến tính thì ta có thể biểu diễn y_i theo các hàm số $y_j,\ j\neq i$.

1.3. Công thức nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính

Định nghĩa 1.10. Tập gồm hai nghiệm y_1, y_2 độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (6.25) được gọi là *tập nghiệm cơ bản* của phương trình (6.25).

Định lý 1.11. *Giả sử* y_1, y_2 *là một tập nghiệm cơ bản của phương trình vi phân thuần nhất* (6.25)*. Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất* (6.25) *có dạng*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{6.29}$$

trong đó c_1, c_2 *là các hằng số.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh mọi nghiệm của phương trình (6.25) đều có dạng như trong (6.29). Giả sử $u(x)$ là một nghiệm của phương trình (6.25), thỏa điều kiện

$$u(x_0) = u_0,\ u'(x_o) = u_0',\ x_0 \in I. \tag{6.30}$$

Xét hệ phương trình tuyến tính ẩn c_1, c_2 như sau

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = u_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = u_0' \end{cases}.$$

Vì y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất nên theo định lý 1.9, ta có $W(x_0) \neq 0$, suy ra hệ có nghiệm duy nhất là c_1^0, c_2^0.

Vậy, ta có $c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (6.25) với điều kiện ban đầu (6.30). Theo định lý 1.2, ta được $c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x) = u(x)$ và ta có điều phải chứng minh. ■

Định lý 1.12. *Xét phương trình không thuần nhất* (6.22) *có phương trình thuần nhất tương ứng* (6.25)*, với* $p(x),\ q(x)$ *và* $f(x)$ *là các hàm số liên tục trên* I*. Giả sử* $y_0(x)$ *là nghiệm tổng quát của phương trình* (6.25) *và* $y_p(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình* (6.22)*. Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* (6.22) *có dạng*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Chứng minh. Giả sử $y(x)$ là một nghiệm của phương trình (6.22). Theo giả thiết $y_p(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình (6.22) nên ta có

$$y''+p(x)y'+q(x)=f(x),$$
$$y_p''+p(x)y_p'+q(x)=f(x).$$

Suy ra

$$(y''-y_p'')+p(x)(y'-y_p'')+q(x)=0.$$

Đặt $u(x)=y(x)-y_p(x)$, ta được $u(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$u''+p(x)u'+q(x)=0.$$

Theo định lý 1.11, tồn tại c_1^0, c_2^0 sao cho

$$u(x)=c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x).$$

Vậy, ta có $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x)=y_0(x)+y_p(x).$ ■

II. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

2.1. Phương trình thuần nhất

Xét phương trình vi phân

$$y''+ay'+by=0, \tag{6.31}$$

trong đó a và b là các hằng số thực.

Phương trình đặc trưng của phương trình (6.31) là phương trình bậc 2 theo ẩn k như sau

$$k^2+ak+b=0. \tag{6.32}$$

Ví dụ 2.1.

a) Phương trình đặc trưng của phương trình $y''+5y'+2y=0$ là $k^2+5k+2=0$.

b) Phương trình đặc trưng của phương trình $y''-2y'+y=0$ là $k^2-2k+1=0$.

Định lý 1.13. *Nghiệm của phương trình vi phân* (6.31) *được xác định thông qua nghiệm của phương trình đặc trưng* (6.32) *như sau*

i) Nếu phương trình (6.32) *có 2 nghiệm thực phân biệt* k_1, k_2 *thì nghiệm tổng quát của phương trình* (6.31) *có dạng*

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x},$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

ii) *Nếu phương trình* (6.32) *có nghiệm kép* k_0 *thì nghiệm tổng quát của phương trình* (6.31) *có dạng*

$$y = e^{k_0 x}(C_1 x + C_2),$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

iii) *Nếu phương trình* (6.32) *có hai nghiệm phức liên hợp* $\alpha \pm i\beta$ *thì nghiệm tổng quát của phương trình* (6.31) *có dạng*

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Xem trong [].

Ví dụ 2.2. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân sau

a) $y'' - y' - 2y = 0.$

b) $y'' - 8y' + 16y = 0.$

c) $y'' - 3y' + 4y = 0.$

Giải

a) Phương trình đặc trưng là $k^2 - k - 2 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

b) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 8k + 16 = 0$, suy ra $k = 4$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{4x}(C_1 x + C_2),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

c) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 3k + 4 = 0$, suy ra $k = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

2.2. Phương trình không thuần nhất

Xét phương trình vi phân

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{6.33}$$

trong đó a và b là các hằng số thực.

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình (6.33) bằng hai phương pháp: *phương pháp hệ số bất định* và *phương pháp Lagrange*.

2.2.1. Phương pháp hệ số bất định

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát y_0 của phương trình thuần nhất (6.31) tương ứng với phương trình (6.33).

Bước 2: Nếu $f(x)$ có dạng đặc biệt ta có thể tìm một nghiệm riêng y_p của phương trình (6.33) bằng phương pháp hệ số bất định, sẽ được trình bày sau đây.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình (6.33) là $y = y_0 + y_p$.

Phương pháp hệ số bất định: xét phương trình đặc trưng $ak^2 + bk + c = 0$.

Dạng 1:

$f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$, trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$; $P_n(x)$ là đa thức bậc *n*.	
Trường hợp	**Dạng nghiệm riêng**
λ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng	$y_p = e^{\lambda x}Q_n(x)$
λ trùng với một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng	$y_p = xe^{\lambda x}Q_n(x)$
λ trùng với nghiệm kép của phương trình đặc trưng	$y_p = x^2e^{\lambda x}Q_n(x)$

trong đó $Q_n(x) = A_0 + A_1x + ... + A_nx^n$ là một đa thức cùng bậc với $P_n(x)$. Các hệ số $A_i, i = \overline{0,n}$ được tìm bằng cách tính $y_p{}'$, $y_p{}''$, sau đó thay tất cả vào phương trình ban đầu (6.33), đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được hệ phương trình để xác định chúng.

Dạng 2:

<table>
<tr><td colspan="2">$$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\gamma x + Q_n(x)\sin\gamma x\right],$$ trong đó $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$; $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là các đa thức bậc m, n tương ứng.</td></tr>
<tr><th>Trường hợp</th><th>Dạng nghiệm riêng</th></tr>
<tr><td>$\lambda \pm i\gamma$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng</td><td>$y_p = e^{\lambda x}\left[R_l(x)\cos\gamma x + S_l(x)\sin\gamma x\right]$</td></tr>
<tr><td>$\lambda \pm i\gamma$ trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng</td><td>$y_p = xe^{\lambda x}\left[R_l(x)\cos\gamma x + S_l(x)\sin\gamma x\right]$</td></tr>
</table>

trong đó $R_l(x) = A_0 + A_1x + ... + A_lx^l$, $S_l(x) = B_0 + B_1x + ... + B_lx^l$, là hai đa thức có cùng bậc $l = \max\{m,n\}$. Các hệ số $A_i, B_i, i = \overline{0,l}$ được tìm tương tự như Dạng 1.

Ví dụ 2.3. Giải phương trình $y'' - y' - 2y = 4x^2$.

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - y' - 2y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - k - 2 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta thấy $f(x) = 4x^2$ suy ra $\lambda = 0$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_2(x) = 4x^2$ là đa thức bậc hai. Do đó, ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất ban đầu dưới dạng

$$y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2,$$

suy ra

$$y_p' = A_1 + 2A_2x,$$
$$y_p'' = 2A_2,$$

thay vào phương trình ban đầu, ta có

$$-2A_2x^2 + (-2A_1 - 2A_2)x + (-2A_0 - A_1 + 2A_2) = 4x^2 + 0.x + 0.$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} -2A_2 = 4 \\ -2A_2 - 2A_1 = 0 \\ 2A_2 - A_1 - 2A_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -2 \\ A_1 = 2 \\ A_0 = -3 \end{cases}.$$

Suy ra

$$y_p = -3 + 2x - 2x^2.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.4. Giải phương trình $y'' - 4y' + 3y = e^x(x+2)$.

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 3 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k = 1, \\ k = 3. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{3x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta thấy $f(x) = e^x(x+2)$ suy ra $\lambda = 1$ trùng với một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng và $P_1(x) = x + 2$ là đa thức bậc nhất. Do đó, ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất ban đầu dưới dạng

$$y_p = xe^x(Ax+B) = e^x(Ax^2+Bx),$$

suy ra

$$y_p{}' = e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B\right],$$

$$y_p{}'' = e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+2A+2B\right],$$

thay vào phương trình ban đầu, ta có

$$e^x\left(-4Ax+2A-2B\right) = e^x\left(x+2\right).$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} -4A=1, \\ 2A-2B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{4}, \\ B=\dfrac{-5}{4}. \end{cases}$$

Suy ra

$$y_p = -e^x\left(\frac{x^2+5x}{4}\right).$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1e^x + C_2e^{3x} - e^x\left(\frac{x^2+5x}{4}\right),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.5. Tìm nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2\sin x, \\ y(0)=0, y'(0)=1. \end{cases}$$

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y''-3y'+2y=0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2-3k+2=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k=1, \\ k=2. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta thấy $f(x) = 2\sin x = e^{0x}(0.\cos x + 2\sin x)$, suy ra $\lambda = 0$, $\gamma = 1$ và $\lambda \pm i\gamma = \pm i$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng. Hơn nữa $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 2$, suy ra $l = \max\{0,0\} = 0$. Do đó, ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất ban đầu dưới dạng

$$y_p = A\cos x + B\sin x,$$

suy ra

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y_p'' = -A\cos x - B\sin x,$$

thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x.$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} A - 3B = 0, \\ 3A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{5}, \\ B = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Suy ra

$$y_p = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Từ đó, suy ra

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x,$$

mà

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ y'(0)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{-3}{5}, \\ C_1+2C_2=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được $\begin{cases} C_1=-2, \\ C_2=\dfrac{7}{5}. \end{cases}$

Vậy, nghiệm của bài toán ban đầu là

$$y=-2e^x+\frac{7}{5}e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

2.2.2. Phương pháp biến thiên hệ số Lagrange

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát y_0 của phương trình thuần nhất (6.31) tương ứng với (6.33). Giả sử nghiệm tổng quát của (6.31) là

$$y_0=C_1y_1+C_2y_2,$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý; $y_1=y_1(x)$ và $y_2=y_2(x)$.

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (6.33) dưới dạng

$$y_p=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2,$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thỏa hệ $\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0, \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x). \end{cases}$

Giải hệ trên, ta được $\begin{cases} C_1'=\varphi_1(x), \\ C_2'=\varphi_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\underbrace{\int \varphi_1(x)dx}_{\Phi_1(x)}+k_1, \\ C_2=\underbrace{\int \varphi_2(x)dx}_{\Phi_2(x)}+k_2. \end{cases}$

Chọn $k_1=k_2=0$, ta được $y_p=\Phi_1(x)y_1+\Phi_2(x)y_2$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (6.33) là

$$y=y_0+y_p.$$

Ví dụ 2.6. Giải phương trình $y''-4y'+3y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y''-4y'+3y=0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2-4k+3=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l}k_1=1\\ k_2=3\end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y_p=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{3x},$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ thỏa hệ

$$\begin{cases}C_1'e^x+C_2'\mathrm{e}^{3x}=0,\\ C_1'e^x+3C_2'\mathrm{e}^{3x}=\dfrac{e^x}{e^x+1}.\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$\begin{cases}C_1'=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^x+1},\\ C_2'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}(e^x+1)}.\end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases}C_1(x)=\dfrac{1}{2}\ln(e^x+1)-\dfrac{1}{2}x+k_1,\\ C_2(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\ln(e^x+1)+\dfrac{1}{2}e^{-x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}+k_2.\end{cases}$$

Chọn $k_1=k_2=0$, ta được

$$y_p=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(e^x+1)\right)\left(e^{3x}-e^x\right)+\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^x}{4}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x + 1)\right)\left(e^{3x} - e^x\right) + \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định lý 2.1 (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Xét phương trình $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x),$ *trong đó a, b là các hằng số thực,* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *là những hàm liên tục trên khoảng* $I \subset \mathbb{R}$. *Khi đó, nghiệm riêng* y_p *của phương trình trên được tìm dưới dạng*

$$y_p = y_1^* + y_2^*,$$

trong đó y_1^* *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

còn y_2^* *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} y_p'' + ay_p' + by_p &= (y_1^* + y_2^*)'' + a(y_1^* + y_2^*)' + b(y_1^* + y_2^*) \\ &= (y_1^*{}'' + ay_1^*{}' + by_1^*) + (y_2^*{}'' + ay_2^*{}' + by_2^*) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Vậy, $y_p = y_1^* + y_2^*$ là nghiệm riêng của phương trình đã cho. ■

Ví dụ 2.7. Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2\sin x$.

Giải

Xét phương trình thuần nhất $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 3k + 2 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k = 1, \\ k = 2. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ dưới dạng

$$y_1^* = xe^{2x}A,$$

tương tự ví dụ 2.4, ta được $A = 3$, suy ra $y_1^* = 3xe^{2x}$.

Tiếp theo, theo ví dụ 2.5, nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$$

là

$$y_2^* = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = y_0 + y_1^* + y_2^* = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

2.3. Phương trình Euler

Phương trình Euler thuần nhất trên $I \setminus \{0\}$ là phương trình vi phân có dạng

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{6.34}$$

trong đó a, b, c là các hằng số thực.

Phương trình đặc trưng của (6.34) là phương trình bậc 2 theo ẩn k như sau

$$k^2 + (a-1)k + b = 0. \tag{6.35}$$

Định lý 2.2. *Nghiệm của phương trình vi phân* (6.34) *được xác định thông qua nghiệm của phương trình đặc trưng* (6.35) *như sau*

i) *Nếu phương trình* (6.35) *có hai nghiệm phân biệt* k_1, k_2 *thì phương trình* (6.34) *có nghiệm tổng quát là*

$$y = C_1x^{k_1} + C_2x^{k_2},$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

ii) *Nếu phương trình* (6.35) *có nghiệm kép* k_0 *thì phương trình* (6.34) *có nghiệm tổng quát là*

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)e^{k_0},$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

iii) *Nếu phương trình* (6.35) *có nghiệm phức liên hợp* $\alpha \pm i\beta$ *thì phương trình* (6.34) *có nghiệm tổng quát là*

$$y = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|)],$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Xem [].

Ví dụ 2.8. Giải phương trình $x^2 y" + 2xy - 12y = 0, x \neq 0.$

Giải

Phương trình đặc trưng là $k^2 + k - 12 = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = -4 \end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^{-4},$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 2.9. Giải phương trình $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, $x > 0$.

Giải

Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 4 = 0$, suy ra $k = 2$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = (C_1 \ln x + C_2)x^2,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Chú ý 2.3. Ta có thể giải phương trình Euler bằng cách đưa phương trình Euler về phương trình tuyến tính cấp hai có hệ số hằng bằng cách đổi biến $x = e^t$. Thật vậy, với cách đổi biến $x = e^t \Rightarrow t = \ln x,$ ta có

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}.\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Thay vào phương trình (6.34), ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0,$$

là phương trình tuyến tính cấp hai có hệ số hằng mà biến độc lập là *t*.

Ví dụ 2.10. Giải phương trình $x^2y'' - xy' + y = \cos(\ln x)$, $x > 0$.

Giải

Đặt $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$. Phương trình trở thành

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = \cos t,$$

và có nghiệm tổng quát là

$$y = e^t(C_1t + C_2) - \frac{1}{2}\sin t.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = x(C_1\ln x + C_2) - \frac{1}{2}\sin(\ln x).$$

BÀI TẬP PHẦN ĐỌC THÊM

Bài 1. Giải các phương trình vi phân có dạng tách biến sau

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y}.$

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x}{y^2}.$

3) $\frac{dy}{dx}=y.$

4) $\frac{dy}{dx}=5y+2.$

5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2}.$

6) $\frac{dy}{dx}=y^2x^2.$

7) $y'=\frac{xe^x}{2y}.$

8) $y'=e^{x+y}.$

9) $xy'=2y.$

10) $(x+1)y'+xy=0.$

11) $xdx-y^3dy=0.$

12) $(x^2+3)dx+(2y^2+y)dy=0.$

13) $(x+1)dx-\frac{1}{y^2}dy=0.$

14) $\frac{1}{x}dx+dy=0.$

15) $\frac{1}{x}dx-\frac{1}{y}dy=0.$

16) $dx-\frac{1}{y^2+1}dy=0.$

17) $dx-\frac{1}{y^2-6y+13}dy=0.$

18) $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0.$

19) $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$

20) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0.$

21) $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dy+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}dx=0.$

22) $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dx+(\sqrt{xy}+\sqrt{y})dy=0.$

23) $y'\cos x=y.$

24) $y'\cos x=\frac{y}{\ln y}.$

25) $y'\tan x=1-y.$

26) $\ln\cos y dx+x\tan y dy=0.$

27) $\tan x\sin^2 y dx+\cot y\cos^2 x dy=0.$

28) $e^{x+1}\tan y dx+\cos y dy=0.$

29) $y'+y=0,\quad y(1)=1.$

30) $y'=e^{x+y},\quad y(0)=0.$

31) $\sin x dx + y dy = 0, \quad y(0) = -2.$

32) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+y^2}, \quad y(0) = 1.$

33) $x\cos x = (e^{3y} + 2y)y', \quad y(0) = 0.$

34) $\dfrac{y}{x}y' + e^{y} = 0, \quad y(1) = 0.$

35) $y'\sin x = y\ln y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

36) $y'\tan x = y + a, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = a, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

37) $y' = e^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y}, \quad y(0) = 0.$

38) $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x)+2} = 0, \quad y(1) = 1.$

39) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

40) $\dfrac{dL}{dt} = kL^2 \ln t, \quad L(1) = -1.$

Bài 2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau

1) $y' = \dfrac{y}{x} - 1.$

2) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1.$

3) $y' = \dfrac{y-x}{x}.$

4) $y' = \dfrac{2y+x}{x}.$

5) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}.$

6) $y' = \dfrac{y^2+2x}{xy}.$

7) $y' = \dfrac{y^2+x^2}{2xy}.$

8) $y' = \dfrac{4xy}{y^2-x^2}.$

9) $(x + \sqrt{y^2 - xy})dy - ydx = 0.$

10) $y^2dx + (x\sqrt{y^2-x^2} - xy)dy = 0.$

11) $(x + \sqrt{xy})dy = ydx.$

12) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx.$

13) $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y.$

14) $2ye^{\frac{x}{y}}dx + \left(y - 2xe^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0.$

15) $xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)+x.$

16) $ydx+x\log\dfrac{y}{x}dy-2xdy=0.$

17) $xy'-y-x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)=0.$

18) $\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}dx-\left(\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}\right)dy=0.$

19) $\left(xe^{\frac{y}{x}}-y\sin\dfrac{y}{x}\right)dx+x\sin\dfrac{y}{x}dy=0.$

20) $xdy-y\cos\ln\dfrac{y}{x}dx=0.$

21) $(x^2+y^2)dx=2xydy,\quad y(-1)=0.$

22) $(xy-y^2)dx-x^2dy=0,\quad y(1)=1.$

23) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+\text{y},\quad y(1)=0.$

24) $xy'-y=x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right),\quad y(1)=\dfrac{\pi}{2}.$

25) $(x^4+6x^2y^2+y^4)dx+2xy(x^2+y^2)dy=0,\quad y(1)=0.$

26) $y'=\dfrac{y-6x}{2x-y},\quad y(1)=0.$

Bài 3. Giải các phương trình dạng $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ sau đây

1) $y'=\dfrac{x+y-3}{-x+y+1}.$

2) $y'=-\dfrac{2x-4y+2}{5x-y-4}.$

3) $y'=\dfrac{3x+2y+1}{3x+2y-1}.$

4) $y'=-\dfrac{x+2y}{y-1}.$

5) $(x+2y-4)dx-(2x-4y)dy=0.$

6) $(x+y+1)dx+(2x+2y+2)dy=0.$

7) $(x-2y+9)dx-(3x-6y+19)dy=0.$

8) $(x-2y+3)dx+(2x+y-1)dy=0.$

9) $(7x-3)dx+(2x+1)dy=0.$

10) $(x-y+4)dx+(x+y-2)dy=0.$

11) $(x+y-1)^2dy-2(y+2)^2dx=0.$

12) $(3x+3y-1)dx+2(x+y)dy=0,\quad y(0)=2.$

13) $(3x+2y+3)dx-(x+2y-1)dy=0,\quad y(-2)=1.$

14) $(x+y+2)dx-(x-y-4)dy=0,\quad y(1)=0.$

Bài 4. Giải các phương trình vi phân sau nếu nó có dạng vi phân toàn phần

1) $(xy+1)dx+(xy-1)dy=0.$

2) $(x-y)dx+(x+y)dy=0.$

3) $(y+1)dx - xdy = 0.$

4) $ydx + (1-x)dy = 0.$

5) $(y-3x^2)dx - (4y-x)dy = 0.$

6) $(3x^2+6xy-2y^2)dx + (3x^2-4xy-3y^2)dy = 0.$

7) $(3x^2y - x^2)dx + dy = 0.$

8) $2(xy^2+y^3)dx + (2x^2y+y^2)dy = 0.$

9) $(y+x^3y^3)dx + xdy = 0.$

10) $y(y+x^4y^2)dx + xdy = 0.$

11) $(x^3y^2-y)dx + (x^2y^4-x)dy = 0.$

12) $3x^2y^2dx + (2x^3y + x^3y^4)dy = 0.$

13) $\left(y+\dfrac{2}{x^2}\right)dx + \left(x-\dfrac{3}{y^2}\right)dy = 0.$

14) $\dfrac{3x^2+y}{y^2}dx - \dfrac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}dy = 0.$

15) $\left(2xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx + 4x^2ydy = 0.$

16) $\left(\dfrac{2xy+1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y-x}{y^2}\right)dy = 0.$

17) $\sin x\cos ydx + \sin y\cos xdy = 0.$

18) $\cos ydx - (x\sin y - y^2)dy = 0.$

19) $(2x + y\cos x)dx + (2y + \sin x - \sin y)dy = 0.$

20) $(xy + \mathrm{siny})dx + (0{,}5x^2 + x\cos y)dy = 0.$

21) $(\sin y - (1-y)\cos x)dx + ((1+x)\cos y + \sin x)dy = 0.$

22) $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$

23) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0.$

24) $(e^x\sin y + e^{-y})dx - (xe^{-y} - e^x\cos y)dy = 0.$

25) $ye^xdx + (y+e^x)dy = 0.$

26) $(e^x\sin y + x)dx + (1 + e^x\cos y)dy = 0.$

27) $(y + x\ln y)dx + \left(\dfrac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0.$

28) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy = 0.$

29) $\sin x\cos ydx + \cos x\sin ydy = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

30) $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0, \quad y(0)=0.$

31) $(e^{x+y}+3x^2)dx+(e^{x+y}+4y^3)dy=0, \quad y(0)=0.$

32) $e^x(y^3+xy^3+1)dx+3y^2(xe^x-6)dy=0, \quad y(0)=1.$

33) $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0, \quad y(1)=0.$

34) $(\ln y-5y^2\sin 5x)dx+\left(\dfrac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0, \quad y(0)=e.$

35) $(2xye^{x^2}+\ln y)dx+\left(e^{x^2}+\dfrac{x}{y}\right)dy=0, \quad y(0)=1.$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau

1) $y'+3x^2y=0.$

2) $y'-3x^4y=0.$

3) $y'+\dfrac{1}{x}y=0.$

4) $y'-\dfrac{2}{x^2}y=0.$

5) $y'-7y=14x.$

6) $y'+y=\sin 2x.$

7) $y'-3y=x^2.$

8) $y'-\dfrac{3}{x^2}y=\dfrac{1}{x^2}.$

9) $y'=\sin x.$

10) $y'+2y=3e^{-2x}.$

11) $y'+\cos x.y=\dfrac{1}{2}\sin x.$

12) $xy'+y=x\sin x.$

13) $xy'-y=x^2\cos x.$

14) $y'+2xy=xe^{-x^2}.$

15) $\cos x.y'+y=1-\sin x.$

16) $y'-y\sin x=\sin x.\cos x.$

17) $y'-\dfrac{y}{\sin x}=x^2\ln\tan\left(\dfrac{x}{2}\right).$

18) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1.$

19) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2.$

20) $\dfrac{dy}{dt}+50y=0.$

21) $\dfrac{dN}{dt}=kN$, k là hằng số.

22) $\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{2}{20-t}Q=4.$

23) $y' + 6xy = 0, \quad y(\pi) = 5.$

24) $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x, \quad y(0) = 0.$

25) $y' - 2y = e^x - x, \quad y(0) = \dfrac{1}{4}.$

26) $y' + 3y\tan 3x = \sin 6x, \quad y(0) = \dfrac{1}{3}.$

27) $y' - \tan x.y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$

28) $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2.$

29) $y' + 2xy = 2x^3, \quad y(0) = 1.$

30) $\dfrac{dv}{dt} + 2v = 32, \quad v(0) = 0.$

31) $\dfrac{dq}{dt} + qy = 4\cos 2t, \quad q(0) = 1.$

32) $\dfrac{dN}{dt} + \dfrac{1}{t}N = t, \quad N(2) = 8.$

Xem x là hàm theo y, hãy giải các phương trình

33) $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0.$

34) $(y^4 + 2x)y' = y.$

35) $(x + y^2)y' = y.$

36) $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0.$

37) $ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0.$

38) $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)dy.$

Bài 6. Giải các phương trình Bernoulli sau

1) $y' + y = y^2.$

2) $xy' + y = xy^3.$

3) $y' + y = y^3 e^x.$

4) $y' + xy = 2x\sqrt{y}.$

5) $y' + y = y^{-3}.$

6) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}.$

7) $xy' + y = y^2 \log x.$

8) $y' + 2xy = e^{-x^2}.$

9) $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

10) $y' + \dfrac{2}{x}y = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}.$

11) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

12) $2y' + y = \dfrac{x^2}{y}.$

13) $y' = y\left(y^3 \cos x + \tan x\right).$

14) $xy' + y = 2x^2 y \ln y.y'.$

15) $y'x^3 \sin y + 2y = xy'.$

16) $y' + \dfrac{2}{x}y = -x^9 y^5, \quad y(-1) = 2.$

17) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$

18) $3y' + y\sin x = -3\sin x.y^4, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

19) $2\cos x.dy = (y\sin x - y^3)dx, \quad y(0) = 1.$

20) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0, \quad y(1) = 0.$

Bài 7. Giải các phương trình Riccati sau

1) $y' = y^2 - y - 2.$

2) $y' = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 + 1}.$

3) $2xy' = y^2 - 1.$

4) $x^2y' - xy + x^2y^2 + 1 = 0,$ với $y_0(x) = -\dfrac{1}{x^2}.$

5) $y' = -\dfrac{1}{x}y^2 + \dfrac{2}{x}y + x^3,$ với $y_0(x) = -x^2.$

6) $y' = -\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 1,$ với $y_0(x) = x.$

7) $y' = -y^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2},$ với $y_0(x) = \dfrac{1}{x}.$

Bài 8. Giải các phương trình dạng $x = f(y'), y = f(y')$

1) $x = -2y' + 2\ln y'.$

2) $x = 3y'^2 + 2y'.$

3) $x = y'^3 - y' + 2.$

4) $x = 2y' - \ln y'.$

5) $x = y' + e^{y'}.$

6) $x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1).$

7) $x = y' + \dfrac{1}{y'}.$

8) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}.$

9) $x = \sqrt{1 + \dfrac{1}{y'^2}}.$

10) $x = \sin y' + \cos y'.$

11) $y = 4y'^3 + y'^2.$

12) $y = y'^4 - y'^3 - 2.$

13) $y = e^{y'}(y'-1)$. 14) $y = y'\ln y'$.

15) $y = y'^2 \tan y'$. 16) $y = \sqrt{1-y'^2}$.

17) $y = y'\sqrt{1+y'}$. 18) $y = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'}}$.

19) $y = \dfrac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$. 20) $y = yy' + 2xy'$.

Bài 9. Giải các phương trình Lagrange và phương trình Clairaut sau

1) $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'^2}$. 2) $y = xy'^2 + y'^3$.

3) $y = \dfrac{1}{2}xy' + \dfrac{1}{2}y'\ln y'$. 4) $y = x\dfrac{1+y'^2}{2y'}$.

5) $y = xy'^2 + y'^2$. 6) $xy' + y - y'^2 = 0$.

7) $y = 2xy' + \dfrac{x^2}{2} + y'^2$. 8) $y = x(1+y') + y'^2$.

9) $y = x\left(\dfrac{1}{x} + y'\right) + y'^2$. 10) $2y(y'+1) = xy'^2$.

11) $y = xy' + 5$. 12) $y = xy' - \dfrac{1}{2y'}$.

13) $y = xy' + e^{y'}$. 14) $y = xy' + \cos y'$.

15) $y = xy' + y' - y'^2$. 16) $y = xy' + \sqrt{1-y'^2}$.

17) $y = xy' + y' - y'\ln|y'|$. 18) $xy' - y - \ln y' = 0$.

19) $y' = \ln(xy' - y)$. 20) $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{y'}} - \dfrac{1}{y'}\right) = x$.

Bài 10. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình vi phân tuyến tính (thuần nhất, không thuần nhất, có hệ số hằng)

1) $y'' + xy' + 2y = 0$. 2) $y'' + \sin xy' + 4xy = 0$.

3) $y'' + y + y^2 = e^{3x}$. 4) $y'' + yy' = x^2$.

5) $y''+2xy'+y=4xy^2$.

6) $y''+y'+yy'=x^2$.

7) $y''+e^x=0$.

8) $y''+e^y=0$.

Bài 11. Tập các hàm số nào sau đây độc lập tuyến tính.

1) $\{x,3x\}$.

2) $\{5,x^2\}$.

3) $\{x,x^3\}$.

4) $\{e^x,e^{2x}\}$.

5) $\{x,3x+1\}$.

6) $\{e^{2x},e^{-3x}\}$.

7) $\{\ln x,\ln x^2\}$.

8) $\{\sin x,2\cos x\}$.

9) $\{\sqrt{x},\sqrt{x+a}\}$.

Bài 12. Có thể lập nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân sau, nếu biết hai nghiệm y_1,y_2 của chúng không ?

1) $y''+16y=0,\ y_1=\sin 4x,\ y_2=\cos 4x.$

2) $y''+y'=0,\ y_1=1,\ y_2=4.$

3) $y''-8y'=0,\ y_1=e^{8x},\ y_2=1.$

4) $y''+\dfrac{1}{x}y'+1-\dfrac{1}{4x^3}=0,\ y_1=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}},\ y_2=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}.$

Bài 13.Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1) $y''-y'+y=0.$

2) $y''-y'-2y=0.$

3) $y''-5y=0.$

4) $y''-y'-12y=0.$

5) $y''+y=0.$

6) $y''-y'=0.$

7) $y''-2y'+y=0.$

8) $y''+6y'+9y=0.$

9) $y''+2y'-3y=0.$

10) $y''-2y'+2y=0.$

11) $y''-25y'=0.$

12) $y''-25y=0.$

13) $y''+16y=0.$

14) $y''-7y'+10y=0.$

15) $y''+y'+2y=0.$

16) $y''+8y'+16y=0.$

17) $y''-4y'+20y=0.$

18) $y''-y'+\frac{1}{4}y=0.$

19) $y''-2y'+5y=0.$

20) $y''=0.$

21) $4\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+9y=0.$

22) $\frac{d^2N}{dt^2}-5\frac{dN}{dt}+7N=0.$

Bài 14. Tìm nghiệm của các bài toán sau

1) $y''=0, y(1)=2, y'(1)=-1.$

2) $y''-y=0, y(0)=2, y'(0)=0.$

3) $y''+5y'+6y=0, y(0)=1, y'(0)=-6.$

4) $y''-10y'+25y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$

5) $y''+2y=0, y(3)=0, y'(3)=0.$

6) $y''+3y'=0, y(0)=1, y'(0)=2.$

7) $y''-2y'+y=0, y(2)=1, y'(2)=2.$

8) $4y''-4y'+y=0, y(0)=-1, y'(0)=2.$

9) $12y''+5y'-2y=0, y(0)=1, y'(0)=-1.$

10) $3y''+y'-142y=0, y(0)=2, y'(0)=-1.$

11) $4y''+4y'+5y=0, y(\pi)=1, y'(\pi)=0.$

12) $y''+2y=0, y(3)=0, y'(3)=0.$

13) $y''+2y=0, y(3)=0, y'(3)=0.$

14) $y''-4y'+20y=0, y(\pi/2)=0, y'(\pi/2)=1.$

Bài 15. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình không thuần nhất sau

1) $y''-3y'-10y=-3.$

2) $y''+3y'+2y=4.$

3) $y''-3y'-10y=2x-3.$

4) $y''-2y'+y=x+1.$

5) $y''+2y'+y=x^2.$

6) $y''-2y'+y=x^2-1.$

7) $y''-y=x^2-x+1.$

8) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3.$

9) $y''-y'=x^3.$

10) $y''-y=e^x.$

11) $y''-2y'+y=3e^{2x}$.

12) $y''+3y'+y=12e^{x}$.

13) $y''+3y'+y=e^{ix}$.

14) $y''+3y'-4y=e^{-x}$.

15) $y''-2y'-8y=10e^{-x}$.

16) $y''+3y'+2y=e^{-2x}$.

17) $y''-2y'+y=xe^{x}$.

18) $y''+8y'+16y=2xe^{4x}$.

19) $y''+y'-2y=3xe^{x}$.

20) $y''-2y'+y=e^{x}(x+1)$.

21) $y''-3y'+2y=(4-12x)e^{x}$.

22) $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$.

23) $y''-y'=\sin x$.

24) $y''+y'=\cos 3x$.

25) $y''-y'-2y=20\cos x$.

26) $y''+2y'+y=6\sin 2x$.

27) $y''+y=4x\sin x$.

28) $y''+4y=x\sin 2x$.

29) $y''-3y'+2y=x\cos x$.

30) $y''+y=(x+2)\cos x$.

31) $y''+9y=x^2\sin x$.

32) $y''+2y'+10y=x^2e^{-x}\cos 3x$.

33) $y''-2y'+2y=xe^{x}\sin x$.

34) $y''-2y'+2y=e^{x}(2\cos x+4x\sin x)$.

Bài 16. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1) $y''-y=e^{x}+x^2$.

2) $y''+y=2x+3e^{x}$.

3) $y''+y'-6y=x+e^{2x}$.

4) $y''-3y'=e^{3x}-12x$.

5) $y''+2y'=x^2-e^{x}$.

6) $y''+3y'+2y=e^{-2x}+x^2$.

7) $y''-3y'+2y=e^{x}-e^{2x}$.

8) $y''-y=xe^{2x}+1$.

9) $y''+3y'+2y=e^{-x}+e^{-2x}-x$.

10) $y''+y=\sin x+e^{-x}$.

11) $y''-y'-6y=e^{-x}-7\cos x$.

12) $y''-y=\sin x+\cos 2x$.

13) $y''+y=\cos x+\cos 2x$.

14) $y''+y=\sin^2 x$.

15) $y''+y=\sin x\sin 2x$.

16) $y''-y=\cos^2 x$.

17) $y''+4y=\cos^2 x$.

18) $y''+y=\sin x\cos 3x$.

Bài 17. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1) $y''-y=\dfrac{2}{x}.$ 2) $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}.$

3) $y''-y=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}.$ 4) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}.$

5) $y''-y'=2^x.$ 6) $y''+2y'+y=e^x.$

7) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}.$ 8) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^5}.$

9) $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}.$ 10) $y''-y'=\dfrac{2-x}{x^3}e^x.$

11) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}.$ 12) $y''-2y'+y=e^x\log x.$

13) $y''+2y'+y=e^{-2}\log x.$ 14) $y''-3y'+2y=\cos(e^{-x}).$

15) $y''+y=\tan x.$ 16) $y''+y=\cot x.$

17) $y''-y=\sin^2 x.$ 18) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}.$

19) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}.$ 20) $y''+y=\tan^2 x.$

21) $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}.$ 22) $y''+y=-\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}.$

Bài 18. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

1) $x^2y''+2xy'-12y=0, x\neq 0.$ 2) $x^2y''-xy'-3y=0, x\neq 0.$

3) $x^2y''+5xy'+13y=0, x\neq 0.$ 4) $x^2y''-3xy'+4y=0, x\neq 0.$

5) $x^2y''-2xy'-4y=0, x\neq 0.$ 6) $x^2y''+xy'+4y=0, x\neq 0.$

7) $4x^2y''+y=0, x\neq 0.$ 8) $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{2}{x}, x\neq 0.$

Bài 19. Giải các bài toán sau

1) $y''-y'-2y=e^{3x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

2) $y''-5y'+6y=e^{x}(2x-3)$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

3) $y''+y=x$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$.

4) $y''+4y=\sin^2 2x$, $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$.

5) $y''-2y'+2y=2\sin 2x+\cos 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

6) $9y''+y'=3x+e^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

7) $y''-2y'+2y=4e^{x}\cos 2x$, $y(\pi)=e^{\pi}$, $y'(\pi)=e^{\pi}$.

8) $x^2y''-xy'+4y=0$, $y(1)=0$, $y(2)=1$.

9) $x^2y''+3xy'+y=1/x$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6 Edition, 2008.

[2] Robert A. Adams, Christopher Essex, *Calculus Several Variables*, 7 edition, Pearson Education Canada, 2009.

[3] Angus E. Taylor, W. Robert Mann, *Advanced Calculus*, Wiley Inc., 1982.

[4] Jean-Marie Monier, *Giải tích 2*, NXB Giáo dục, 1999.

[5] Y.Y. Liaskô, A.C. Bôiatruc, IA.G. Gai, G.P. Gôlôvac, *Giải tích toán học-Các ví dụ và các bài toán*, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp Hà Nội, 1979.

[6] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

[7] Wilfred Kaplan, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1993.

[8] William R. Parzynski, Philip W. Zipse, *Introduction to Mathematical Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1987.

[9] Ya. S. Bugrov, S. M. Nikolsky, *A collection of problems*, Mir Publishers, 1984.

[10] M. Spivak (Hoàng Hữu Đường dịch), *Giải tích Toán học trên đa tạp*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1985.

[11] Richard Bronson, Gabriel Costa, *Schaum's Outline of Differential Equations*, 4th Edition, McGraw-Hill Education, 2014.

[12] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình Giải tích 2*, NXB ĐHQG TP.HCM, 2008.

[13] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình Giải tích các hàm nhiều biến*, NXB ĐHQG TP.HCM, 2008.

[14] PGS. TS. Tô Văn Ban, *Giáo trình Giải tích II*, NXB Giáo dục, 2012.

[15] Phạm Hồng Danh, *Giáo trình Toán cao cấp-Giải tích*, NXB ĐHQG TP.HCM, 2007.

[16] Lê Đình Thúy, *Giáo trình Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, NXB ĐH Kinh tế quốc dân, 2012.

[17] Đỗ Công Khanh, *Giải tích nhiều biến*, Tủ sách trường ĐH Khoa học Tự Nhiên.

[18] Nguyễn Đình Trí, Lê Trọng Vinh, Dương Thụy Vỹ, *Giáo trình Toán học cao cấp*, tập 1, 2, NXB Giáo dục, 1999.

[19] Đậu Thế Cấp, Nguyễn Huỳnh Phán, Nguyễn Thái Sơn, Trần Đình Thanh, *Giải tích Toán học*, NXB Giáo dục, 2007.

[20] Lê Trọng Vinh, Tống Đình Quỳ, *Ôn tập Toán cao cấp*, NXB Bách Khoa Hà Nội, 2011.

[21] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Dĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Bài tập Toán cao cấp*, NXB Giáo dục, 2008.

[22] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Dĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập 3, NXB Giáo dục, 2003.

[23] Trần Bình, *Giải tích II+III*, NXB Khoa học & Kỹ thuật, 2000.

[24] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích vectơ*, NXB Giáo dục, 2012.

[25] Đặng Đình Áng, *Nhập môn Giải tích*, NXB Giáo dục, 1998.

[26] Đặng Đình Áng, *Lý thuyết tích phân*, NXB Giáo dục, 1998.

[27] Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo, *Toán học cao cấp (tập 3)-Chuỗi và phương trình vi phân*, NXB Giáo dục, 2015.

[28] Nguyễn Thanh Vũ, *Phương trình vi phân*, NXB ĐHQG TP.HCM, 2001.

[29] Nguyễn Công Tâm, *Phương trình vật lý toán nâng cao*, NXB ĐH Quốc gia TP. HCM, 2002.

[30] Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương, *Toán cao cấp-Chuỗi và phương trình vi phân*, NXB ĐH Quốc gia TP. HCM, 2008.

[31] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục, 2009.

[32] Phan Huy Thiện, *Tuyển tập bài tập phương trình vi phân*, NXB Giáo dục, 2010.

MỤC LỤC

Trang