TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

HOÀNG ĐỨC THẮNG

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

(864006)

Tp. Hồ Chí Minh, 2020

Thông tin môn học

Nội dung

Chương 1: Phép tính vi phân hàm hiều biến.

Chương 2: Tích phân bội.

Chương 3: Tích phân đường.

Chương 4: Tích phân mặt.

Chương 5: Phương trình vi phân.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp tập 3, NXB Giáo Dục Việt Nam 2007.

2. Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương, Toán cao cấp Giải tích hàm nhiều biến, NXB D9HQG TP.HCM.

3.James Stewart (2011), Multivariable Calculus, 7th Edition, Brooks Cole.

4. Phạm Hoàng Quân (2011), Giáo trình Giải tích 3, 4, Khoa Toán- Ứng dụng, ĐH Sài Gòn.

5. Phan Quốc Khánh (1998), Phép tính vi tích phân (tập 2), NXB Giáo Dục Việt Nam.

...

Kiểm tra, đánh giá môn học

Điểm chuyên cần, hệ số 0.1:

- Đi học đầy đủ: 10đ
- Nghỉ 1 buổi, hoặc đi trễ 2 buổi: - 1đ
- Được vắng có phép 3 buổi.

Điểm kiểm tra giữa kỳ, hệ số 0.3:

- Tự luận, không dùng tài liệu.

Điểm kiểm tra cuối kỳ, hệ số 0.6:

- Tự luận, không dùng tài liệu.

Điểm cộng:

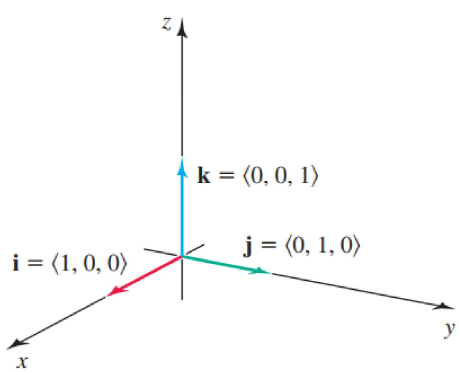
- Lên bảng 1 lần, làm đúng: + 0,5đ.
- Được cộng tối đa: 2đ.

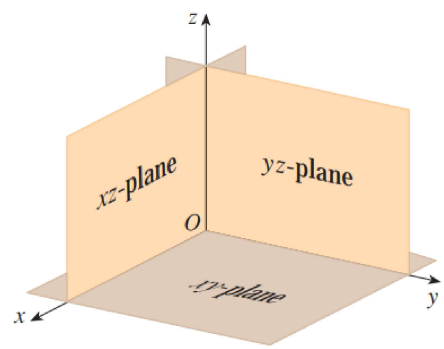
Chương 1

Phép tính vi phân hàm nhiều biến

1.1 Không gian ba chiều

Định nghĩa 1.1. Hệ gồm ba trục tọa độ $Ox,\ Oy,\ Oz$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là hệ tọa độ vuông góc trong không gian.





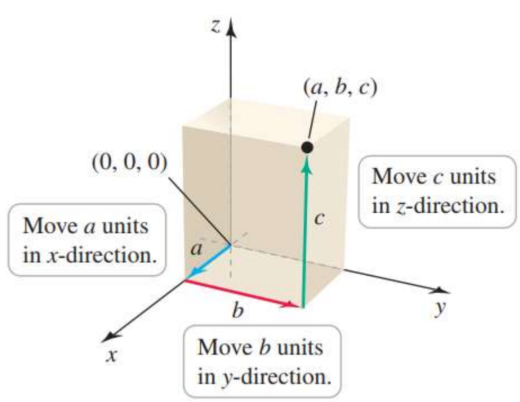
Trong đó:

Điểm O gọi là gốc tọa độ, trục Ox gọi là trục hoành, trục Oy gọi là trục tung, trục Oz gọi là trục cao.

Vectơ $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ gọi là vectơ đơn vị.

Mặt $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$ gọi là mặt phẳng tọa độ.

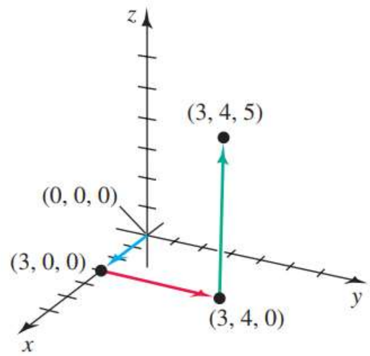
Định nghĩa 1.2. Tọa độ điểm P trong không gian ba chiều: $P = (a, b, c)$

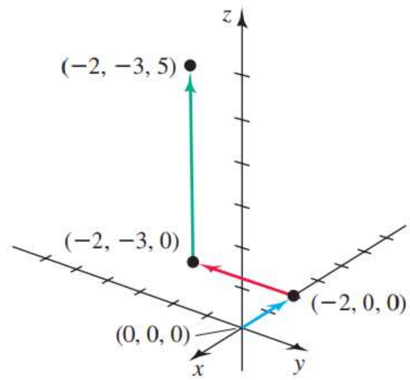


Ví dụ 1.1 (Điểm trong không gian)**.** Vẽ các điểm sau trong không gian $Oxyz$

1. $(3, 4, 5)$
2. $(-2, -3, 5)$

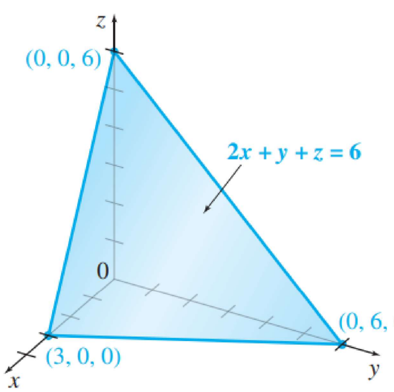
Giải

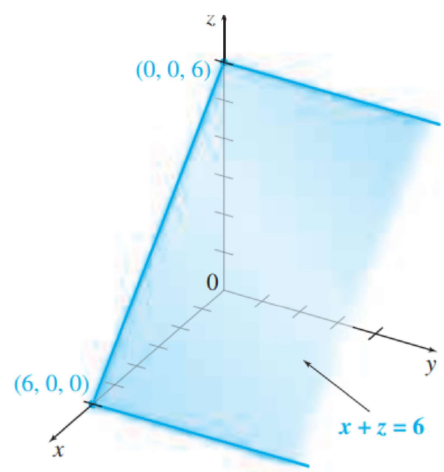




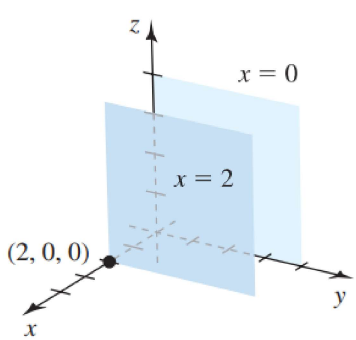
Ví dụ 1.2 (Mặt phẳng trong không gian $ax + by + cz + d = 0$)**.** .

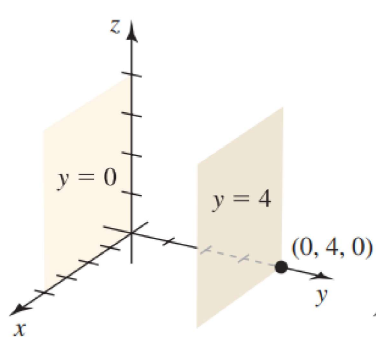
Mặt phẳng $2x + y + z = 6$ và mặt phẳng $x + z = 6$ có dạng sau

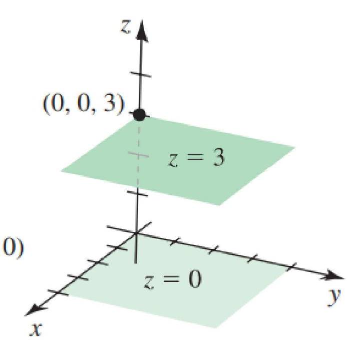




Phương trình mặt phẳng dạng $x = a, y = b$ hoặc $z = c$.







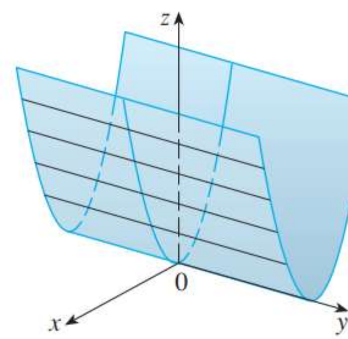
Chú ý: phương trình $x = a, y = b$ hoặc $z = c$ biểu diễn các đường thẳng trong không gian hai chiều.

Ví dụ 1.3 (Mặt trụ)**.** Mặt trụ là một mặt bao gồm tất cả các đường thẳng (được gọi là đường sinh) song song với đường thẳng được cho và đi qua đường cong phẳng cho trước.

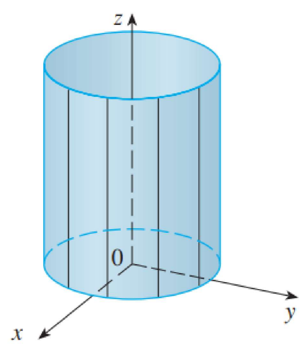
a. Mặt $z = x^2$

Phương trình đồ thị $z = x^2$ không liên quan tới y, điều này có nghĩa rằng bất kỳ mặt phẳng thẳng đứng nào có phương trình $y = k$ (song song với mặt Oxz) đều cắt đồ thị theo đường cong có phương trình $z = x^2$.

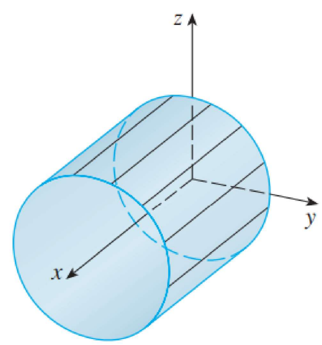
Chúng ta vẽ đồ thị bằng cách lấy parabol $z = x^2$ trong mặt phẳng Oxz và di chuyển nó theo phương của trục Oy.



b. Mặt $x^2 + y^2 = 1$ và $y^2 + z^2 = 1$ có đồ thị như sau



$x^2 + y^2 = 1$



$y^2 + z^2 = 1$

Ví dụ 1.4 (Một số mặt bậc 2)**.** .

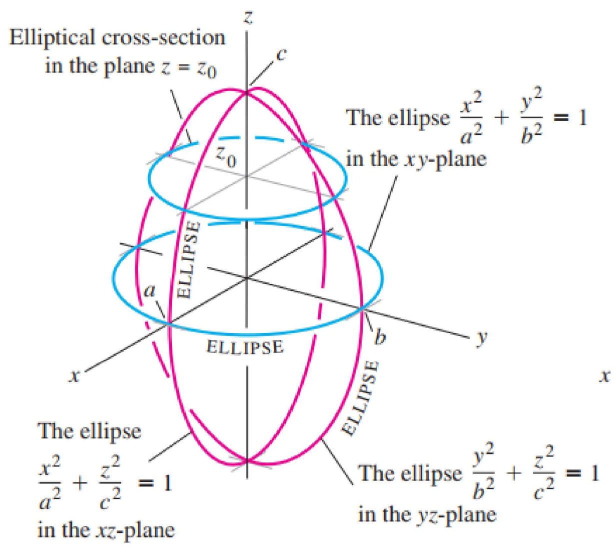
Mặt bậc hai là đồ thị của một phương trình bậc hai theo ba biến số x, y, z:

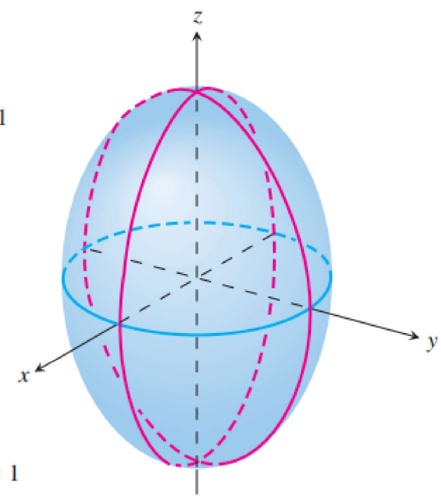
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyx + Fzx + Gx + Hy + Lz + J = 0$$

trong đó $A, B, ..., J$ là các hằng số.

Ellipsoid: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

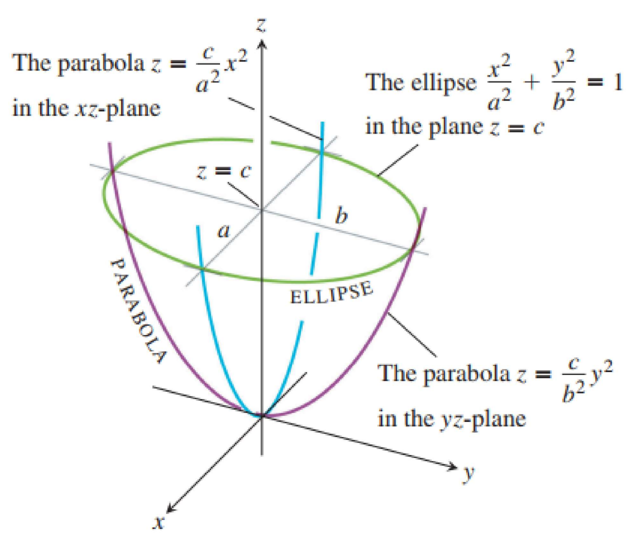
Tất cả nhát cắt đều là ellipse. Nếu $a = b = c$ thì elipsoid là một mặt cầu.

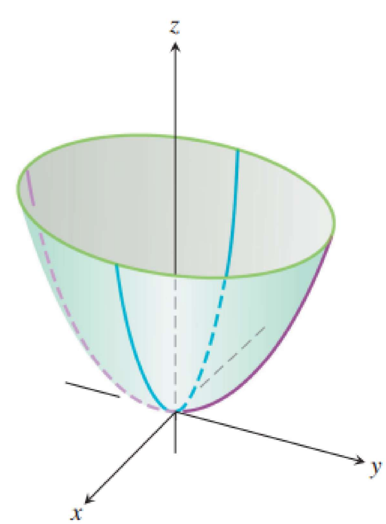




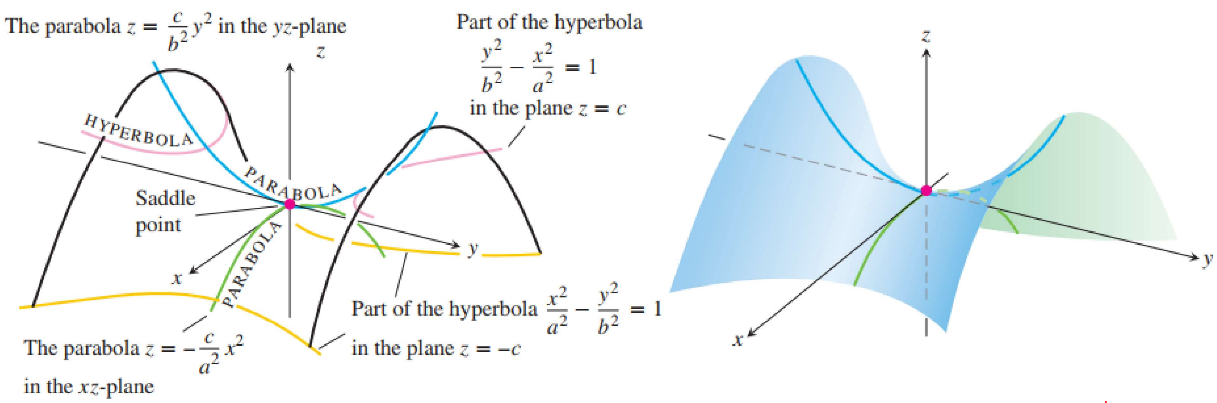
Paraboloid elliptic: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}.$

Các nhát cắt ngang là ellipse. Các nhát cắt đứng là parabol. Biến số lũy thừa 1 chỉ trục paraboloid.

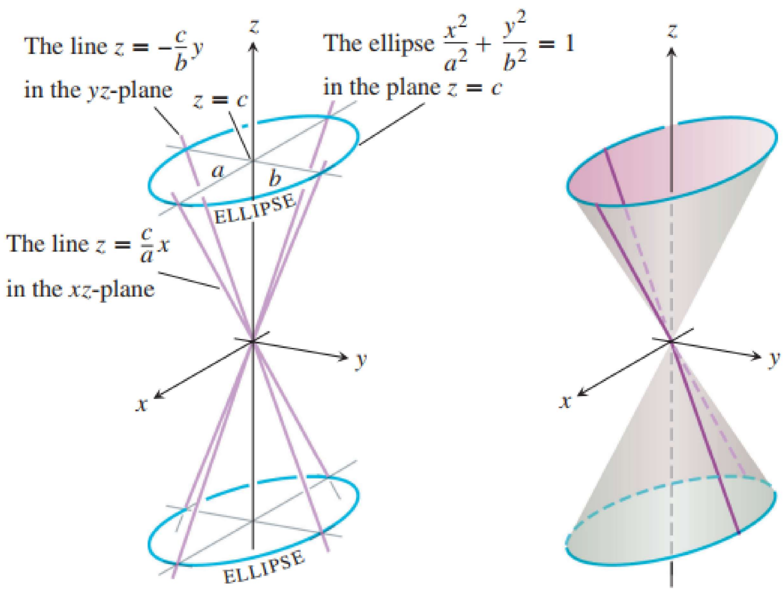




Paraboloid hyperbolic: $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.
Các nát cắt ngang là hyperbol. Các nhát cắt đứng là parabol. Hình bên mô tả cho trường hợp $c < 0$.

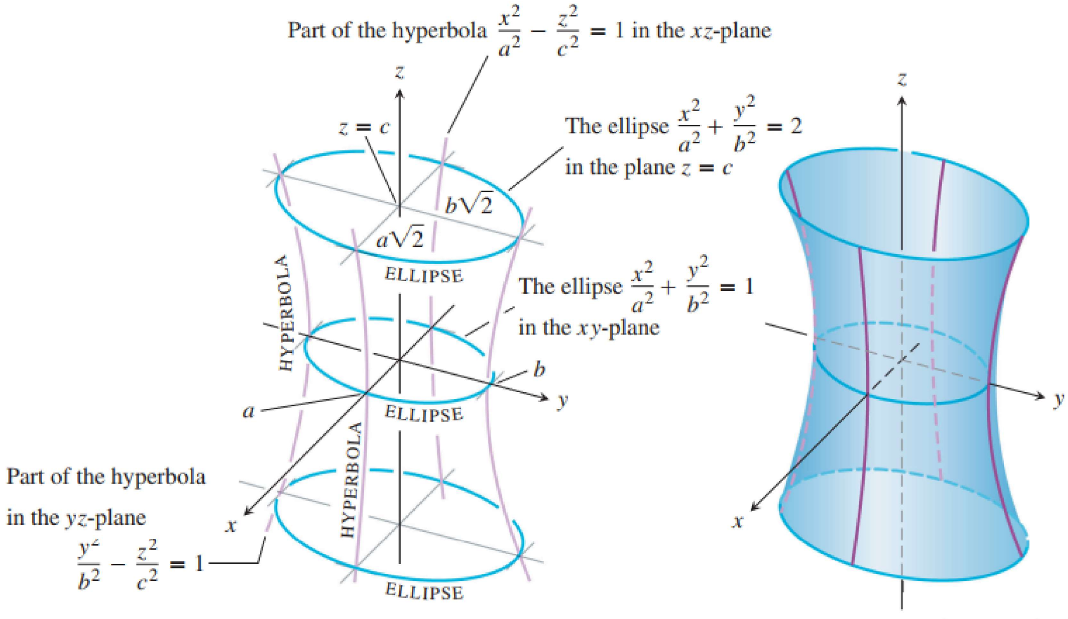


Mặt nón
Phương trình $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
Các nhát cắt ngang là eliptic.
Các nhát cắt đứng trong mặt $x = k$ và $y = k$ là huperbolic nếu $k \neq 0$ nhưng là cặp đường thẳng nếu $k = 0$.



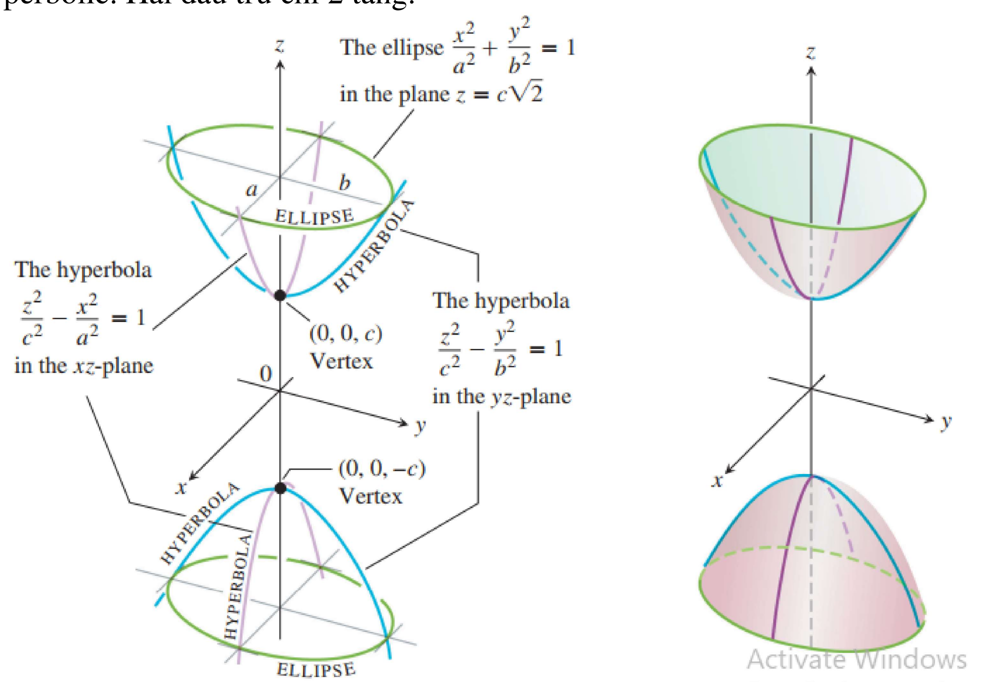
Hyperbolic một tầng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Các nhát cắt ngang là eliptic. Các nhát cắt đứng là hyperbolic. Trục đối xứng tương ứng với biến số mà hệ số của nó âm.



Hyperbolic hai tầng: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Các nhát cắt ngang trong $z = k$ là ellipse nếu $k > c$ hoặc $k < -c$. Nhát cắt đứng là hyperbolic. Hai dấu trừ chỉ 2 tầng.



1.2 Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 1.3. Tích Descartes của n tập số thực $\mathbb{R}$ được định nghĩa là tích

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

hay $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\,|x_k \in R, \forall k = 1, 2, ..., n.\}$.

Không gian $\mathbb{R}^n$ là không gian tất cả các bộ số thực có n phần tử

$$(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ví dụ 1.5. Với $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ đường thẳng thực.

Với $n = 2$, $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes.

Với $n = 3$, $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\,|x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ không gian 3 chiều với hệ tọa độ Descartes.

Định nghĩa 1.4. Khoảng cách giữa hai điểm $x, y \in \mathbb{R}^n$ là

$$d\left(x, y\right) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i\right)^2}.$$

Ví dụ 1.6. Trong $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

Trong $\mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}$.

Trong $\mathbb{R}^3$, $d(x, y) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2 + \left(x_3 - y_3\right)^2}$.

Ví dụ 1.7. Cho $x = (5, 3, 0, 2), y = (2, 0, 1, 8) \in \mathbb{R}^4$.

Khoảng cách từ x tới gốc tọa độ là

$d(x, 0) = \|x\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{61}$.

Khoảng cách giữa hai điểm x, y là

$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (3 - 0)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{55}$.

Định nghĩa 1.5. Cho $x_0 \in \mathbb{R}^n$, lân cận của điểm x_0 là tập hợp tất cả các điểm thuộc quả cầu mở tâm x_0, bán kính nhỏ tùy ý.

$$B\left(x_0, \varepsilon\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^n|\, \|y - x_0\| < \varepsilon\right\}.$$

1.3 Hàm nhiều biến

1.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.6. Hàm n biến là một quy tắc đặt tương ứng mỗi bộ số thực $(x_1, x_2, ..., x_n)$ với một số thực duy nhất, ký hiệu $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Hay, ánh xạ

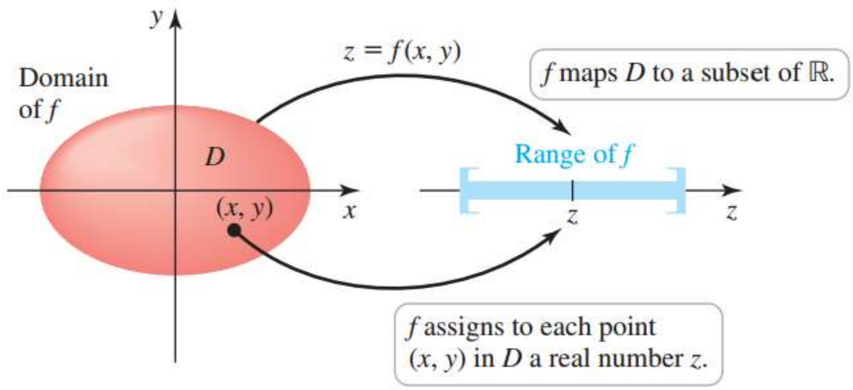
$$\begin{gathered} f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \end{gathered}$$

được gọi là hàm n biến trên D.

Tập *D: miền xác định* của hàm f.

(tập tất cả các điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có nghĩa).

Tập $Imf = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R} | (x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$: miền giá trị của hàm f.



Với $n = 2$, ta có *hàm hai biến* $z = f(x, y)$.

Với $n = 3$, ta có *hàm ba biến* $u = f(x, y, z)$.

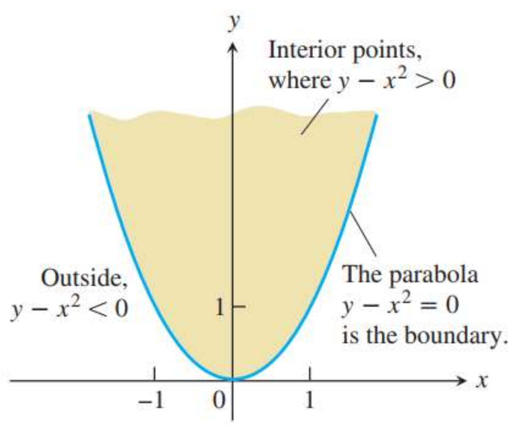
Ví dụ 1.8. Tính giá trị của hàm số $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tại điểm $(3, 0, 4)$.

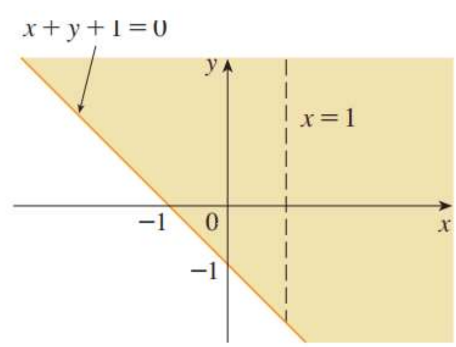
Giải.

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ví dụ 1.9. Tìm miền xác định của các hàm số sau

1. $u(x, y) = \sqrt{y - x^2}$. $\quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - x^2 \geq 0\right\}$
2. $u = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$. $\quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y + 1 \leq 0, x \neq 1\right\}$.





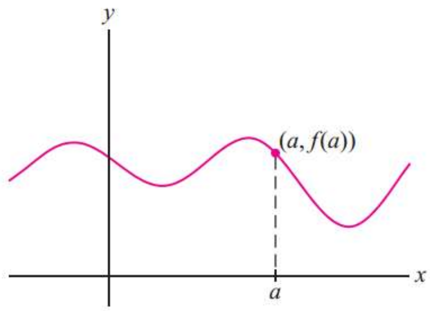
1.3.2 Đồ thị của hàm nhiều biến

Đồ thị của hàm số n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định trên D là tập

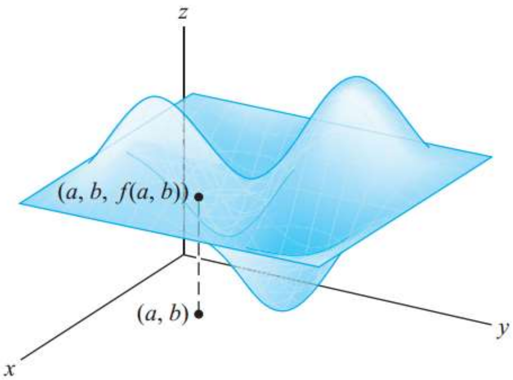
$$G_f = \{(x_1, x_2, ..., x_n, u) | u = f(x_1, x_2, ..., x_n), f(x_1, x_2, ..., x_n)\}.$$

Trường hợp $n = 1$, đồ thị hàm f được biểu diễn trong mặt phẳng, $\mathbb{R}^2$. Dễ vẽ.

Trường hợp $n = 2$, đồ thị hàm f được biểu diễn trong không gian 3 chiều, $\mathbb{R}^3$. Khó vẽ.

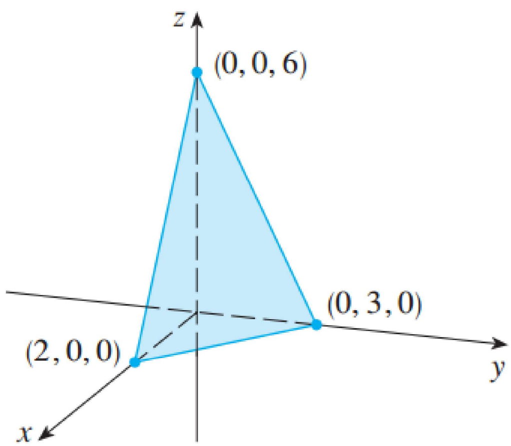


(A) Graph of $y = f(x)$

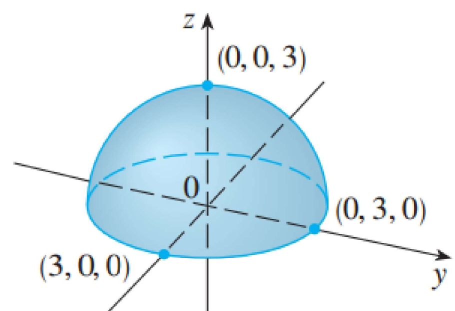


(B) Graph of $z = f(x, y)$

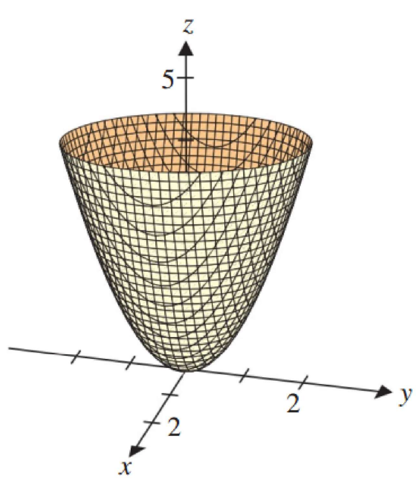
Ví dụ 1.10. Đồ thị của một số hàm số



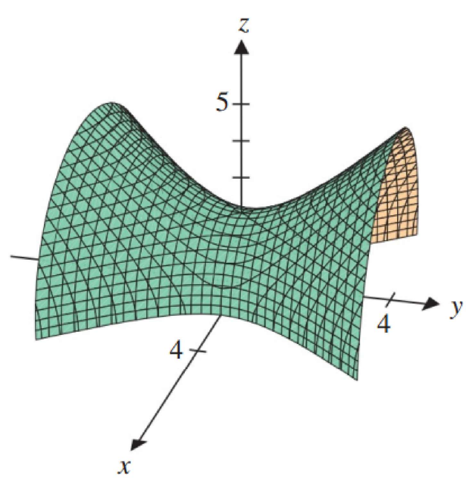
$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$



$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



$z = x^2 + y^2$



$z = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$

1.3.3 Đường mức của hàm hai biến

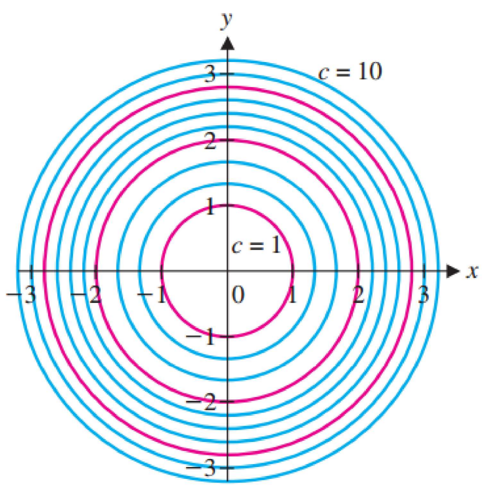
Định nghĩa 1.7. *Đường mức* của hàm hai biến $f(x, y)$ là những đường cong trong mặt phẳng Oxy có phương trình $f(x, y) = c$ với c là một hằng số (thuộc miền giá trị của f).

Nói cách khác, khi ta lấy mặt phẳng $z = C$ song song với mặt phẳng Oxy cắt đồ thị hàm số f, ta được một vết, sau đó chiếu vuông góc vết này lên mặt phẳng Oxy cho ta một đường mức.

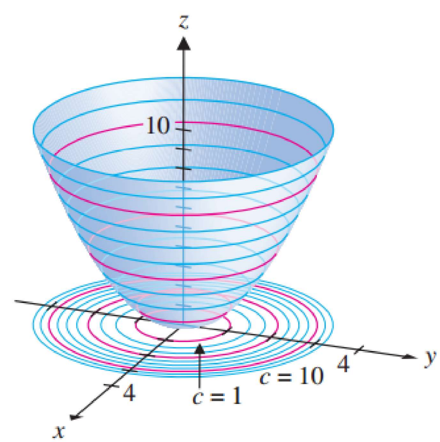
Đường mức này cho biết cao độ của mặt $z = C$.

Trong áp dụng thực tế, các bản đồ địa lý và khí tượng thường ở dạng tập các đường mức.

Ví dụ 1.11. Các đường mức của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2$.

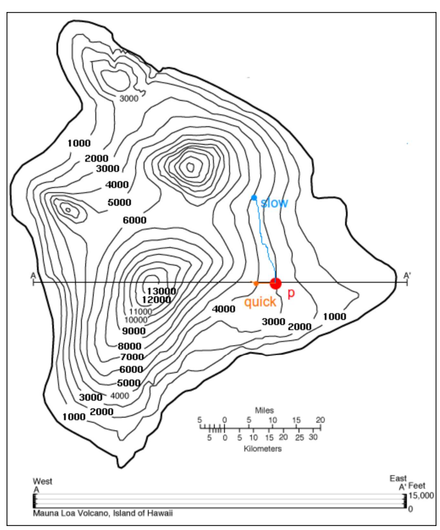


Contour plot of $g(x, y) = x^2 + y^2$

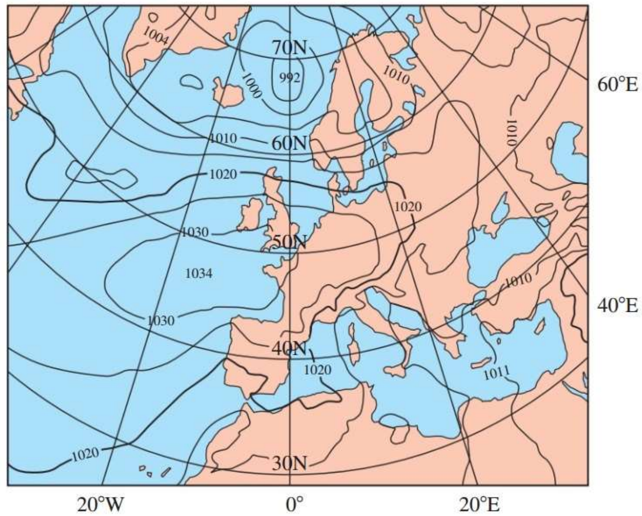


$z = x^2 + y^2$

Ví dụ 1.12. Biểu đồ chiều cao

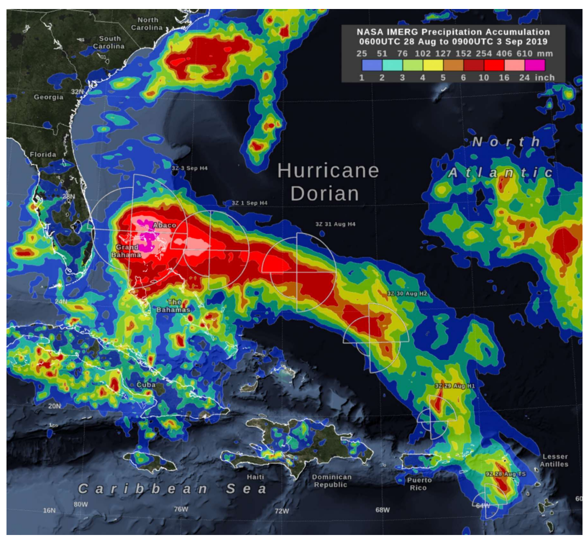


Ví dụ 1.13. Biểu đồ áp suất khí quyển.



Dọc theo đường mức, áp suất khí quyển không đổi.

Ví dụ 1.14. Biểu đồ lượng mưa do bão Dorian gây ra từ 31/8 đến 4/9.



1.4 Giới hạn và liên tục

1.4.1 Giới hạn hàm hai biến

Định nghĩa 1.8. Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là điểm tụ của D. Ta nói hàm $z = f(x, y)$ có giới hạn là L khi (x, y) tiến về (x_0, y_0) nếu

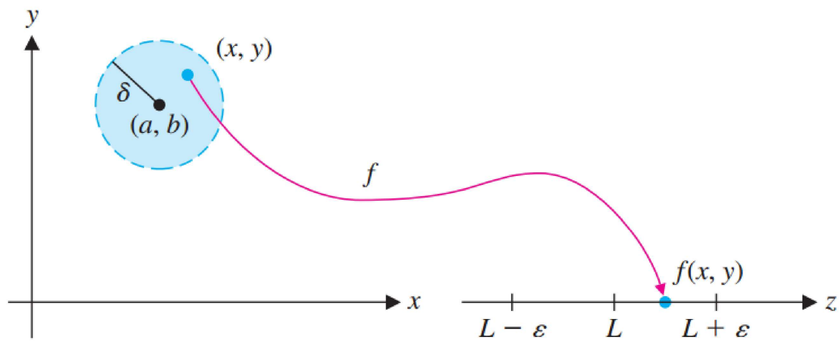
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ \forall (x, y) \in D, \ 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

Chú ý:

1. $|f(x) - L|$: khoảng cách từ $f(x, y)$ tới L trong $\mathbb{R}$.

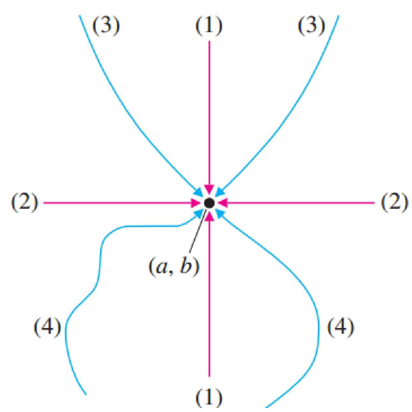
2. $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$: khoảng cách từ điểm (x, y) tới điểm (x_0, y_0) trong $\mathbb{R}^2$.



3. Giới hạn của hàm $f(x, y)$ nếu có là duy nhất.

4. Giới hạn L của hàm số $f(x, y)$ khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ không phụ thuộc đường đi của (x, y) đến (x_0, y_0) . Do đó, nếu ta chỉ ra được hai đường C_1, C_2 thỏa

$$\begin{cases} \bullet \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{theo } C_1}} f(x, y) = L_1 \\ \bullet \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{theo } C_2}} f(x, y) = L_2 \\ \bullet L_1 \neq L_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \text{ không tồn tại}$$



Định nghĩa 1.9. Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là điểm tụ của D. Ta nói

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

khi và chỉ khi

$$\forall (x_n, y_n) \subset D \setminus \{(x_0, y_0)\} : (x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \Rightarrow f(x_n, y_n) \to L.$$

Chú ý: Với định nghĩa trên, để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ không tồn tại, ta cần chỉ ra hai dãy

$$\begin{cases} \bullet \left(x_n^1, y_n^1\right) \to (x_0, y_0) \Rightarrow f\left(x_n^1, y_n^1\right) \to L_1 \\ \bullet \left(x_n^2, y_n^2\right) \to (x_0, y_0) \Rightarrow f\left(x_n^2, y_n^2\right) \to L_2 \\ \bullet L_1 \neq L_2 \end{cases}$$

Định lý 1.1. *Giả sử hai hàm f, g thỏa $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = K$, ta có*

i. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm K$,
ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c.f(x,y) = c.L, c \in \mathbb{R}$,
iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).g(x,y) = L.K$,
iv. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{K}, K \neq 0$,
v. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y))^{r/s} = L; r, s \in \mathbb{Z}$.

Định lý 1.2. *Ta có*

i. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$
ii. Nếu $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y), \forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *và*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$$

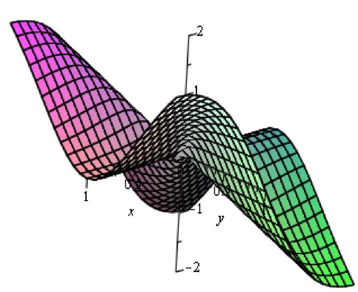
thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Ví dụ 1.15. Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

Giải.
Hàm $f(x,y) = \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}$ xác định trên $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
$\forall \varepsilon > 0$, tìm $\delta > 0$ sao cho: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$.
$\forall \varepsilon > 0$, tìm $\delta > 0$ sao cho: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \dfrac{4\left|xy^2\right|}{x^2+y^2} < \varepsilon$.
Ta có $y^2 \leq x^2 + y^2$, suy ra

$$\frac{4|x|\,y^2}{x^2+y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta$$

Chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left|\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < 4.\dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.
Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$.



Ví dụ 1.16. Chứng minh giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x-y}$ không tồn tại.

Giải.

Cách 1.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{theo } x=0}} \frac{x}{x-y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{theo } x=0}} \frac{0}{0-y} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{theo } y=0}} \frac{x}{x-y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{theo } y=0}} \frac{x}{x-0} = 1$$

Ta thấy $0 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y-x}$.

Cách 2.

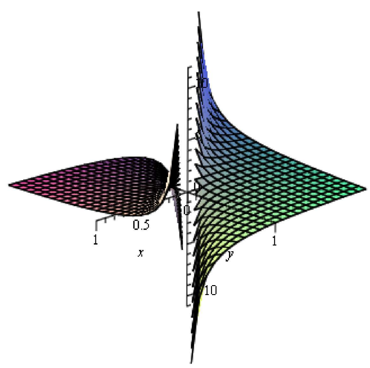
Chọn $\left(x_n^1, y_n^1\right) = \left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, khi $n \to \infty$ ta có

$$\left(x_n^1, y_n^1\right) \to (0,0) \text{ và } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x-y} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn $\left(x_n^2, y_n^2\right) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$, khi $n \to \infty$ ta có

$$\left(x_n^2, y_n^2\right) \to (0,0) \text{ và } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x-y} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n}} = -1.$$

Ta thấy $2 \neq -1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y-x}$.



Ví dụ 1.17. Tính các giới hạn sau, nếu có

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2+x}{1+xy+x^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(1+e^{xy}\right)$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(xye^{-x^2-y^2}\right)$

Giải

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2+x}{1+xy+x^2} = \dfrac{2+0}{1+0.0+0^2} = 2.$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(1+e^{xy}\right) = \ln\left(1+e^{1.0}\right) = \ln(2)\,.$
3. Đặt $u = x^2+y^2$, ta có $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow u \to 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

4. Đặt $u = x^2 + y^2$, ta có $(x, y) \to (0, 0) \Rightarrow u \to 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{u\to 0} u \sin \frac{1}{u}.$$

Tính $\lim\limits_{u\to 0} u \sin \frac{1}{u}$, ta có

- $-u \le u \sin \frac{1}{u} \le u$,
- $\lim\limits_{u\to 0} u = 0$,

Suy ra $\lim\limits_{u\to 0} u \sin \frac{1}{u} = 0$.

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$.

5. Ta có $0 \le \frac{|xy|}{e^{x^2+y^2}} \le \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}}$.

Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}}$. Đặt $u = x^2 + y^2$, ta có $(x, y) \to (+\infty, +\infty) \Rightarrow u \to +\infty$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^u} \overset{L'H}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{e^u} = 0.$$

1.4.2 Liên tục

Định nghĩa 1.10. Hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ nếu

1. f xác định tại (x_0, y_0),
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ tồn tại,
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Ta nói f liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi $(x_0, y_0) \in D$.

Mệnh đề 1.3. *Cho hai hàm $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$ và một số thực $k \in \mathbb{R}$ thì các hàm $kf, f + g, f - g, f.g$ cũng liên tục tại (x_0, y_0) và f/g cũng liên tục tại (x_0, y_0) nếu $g(x_0, y_0) \ne 0, \forall (x_0, y_0) \in D$.*

Mệnh đề 1.4. *Nếu $f : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to D_2 \subset \mathbb{R}$ liên tục tại $(x_0, y_0) \in D_1$ và $g : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $f(x_0, y_0) \in D_2$ thì $g \circ f$ liên tục tại (x_0, y_0).*

Ví dụ 1.18. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $O(0, 0)$

1. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Giải

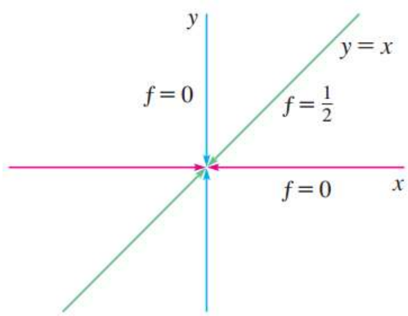
1. Ta thấy $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không xác định tại $(0,0)$ nên nó không liên tục tại $(0,0)$.
2.
i. Ta có $f(0,0) = 0$.
ii. Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo đường thẳng $y = x$, ta có

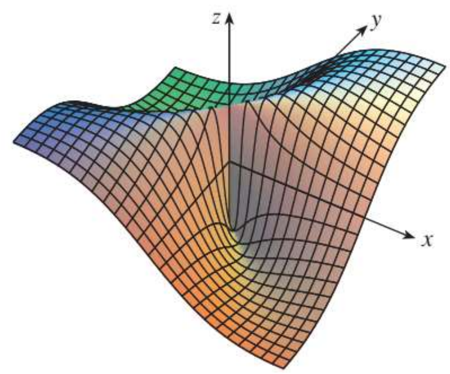
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xx}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.(*)$$

Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo đường thẳng $y = 0$, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.0}{x^2 + 0^2} = 0.(**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$, ta có $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Vậy, f không liên tục tại $(0,0)$.



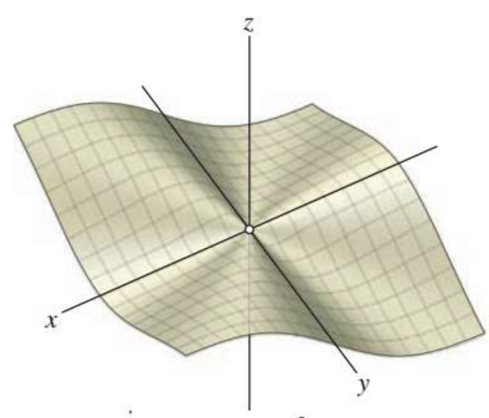


3. Ta có

- $\left|\dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}\right| \le \dfrac{\left(x^2 + y^2\right) y}{x^2 + y^2} = y,$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0.$

Suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \ne f(0,0),$$ nên f không liên tục tại $(0,0)$.



$f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}.$

Ví dụ 1.19. Tìm a để hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \ne (0,0), \\ a^2 - 4, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ liên tục tại $(0,0)$.

Định nghĩa 1.11. Hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là bị chặn trên D nếu

$$\exists M > 0, \forall (x,y) \in D : |f(x,y)| \le M.$$

Tính chất 1.5. Nếu hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ thì f đạt được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên D, nghĩa là, tồn tại $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ sao cho

$$f(x_1, y_1) = m \leq f(x, y) \leq M = f(x_2, y_2), \forall (x, y) \in D.$$

1.5 Đạo hàm riêng

1.5.1 Đạo hàm riêng cấp 1

Định nghĩa 1.12. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Giới hạn

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_1},$$

nếu có, được gọi là đạo hàm riêng theo biến thứ nhất của f tại x, ký hiệu $D_1 f(x)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ hay $f_{x_1}(x)$.

Tương tự cho các đạo hàm riêng theo các biến thứ $i,\ i = \overline{2, n}$ của f tại x, ký hiệu $D_i f(x)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ hay $f_{x_i}(x)$.

Với $n = 2, z = f(x, y)$ thì đạo hàm riêng cấp 1 tại điểm (x_0, y_0) là

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Chú ý

f_x: đạo hàm của f theo biến x, xem y là hằng số.

f_y: đạo hàm của f theo biến y, xem x là hằng số.

Với $n = 3, u = f(x, y, z)$ thì đạo hàm riêng cấp 1 tại điểm (x_0, y_0, z_0) là

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h},$$
$$f_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k, z) - f(x, y, z)}{k},$$
$$f_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{l \to 0} \frac{f(x, y, z + l) - f(x, y, z)}{l}.$$

Chú ý

f_x: đạo hàm của f theo biến x, xem y và z là hằng số.

f_y: đạo hàm của f theo biến y, xem x và z là hằng số.

f_z: đạo hàm của f theo biến z, xem x và y là hằng số.

Ví dụ 1.20. Cho hàm số $f(x, y) = 3x^2 + x^3 y + 4y^2$. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $f_x(1, 0)$ và $f_y(2, -1)$.

Ví dụ 1.21. Tìm các đạo hàm riêng của các hàm số sau

1. $f(x, y) = sin(xcos(y))$
2. $f(x, y) = e^{xy} + \dfrac{x}{y}$
3. $f(x, y, z) = xsin(y - z)$.

Ví dụ 1.22. Phương trình Van der Waals của một chất khí như sau

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

trong đó

$-P$: áp suất khí,

$-V$: thể tích khí,

$-T$: nhiệt độ (Kelvin),

$-n$: số mol khí,

$-a,\ b$: hằng số.

Tìm $\dfrac{\partial P}{\partial V}(V,T)$ và $\dfrac{\partial T}{\partial P}(P,V)$.

Ví dụ 1.23. Cho hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Giải

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Chú ý: hàm trên không liên tục tại điểm $(0,0)$!

Định lý 1.6. *Nếu $f(x,y)$ có đạo hàm tại điểm (x_0,y_0), thì $f(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0).*

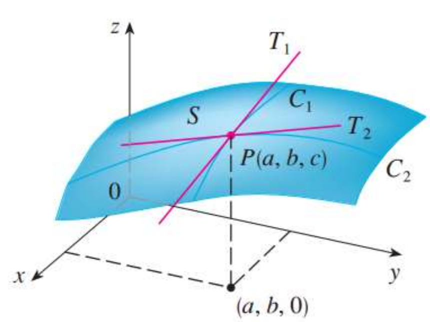
1.5.2 Ý nghĩa của đạo hàm riêng

▷ Ý nghĩa hình học

Cho hàm số $f(x,y)$ có đồ thị S, điểm $P(a,b,c) \in S$. Khi đó

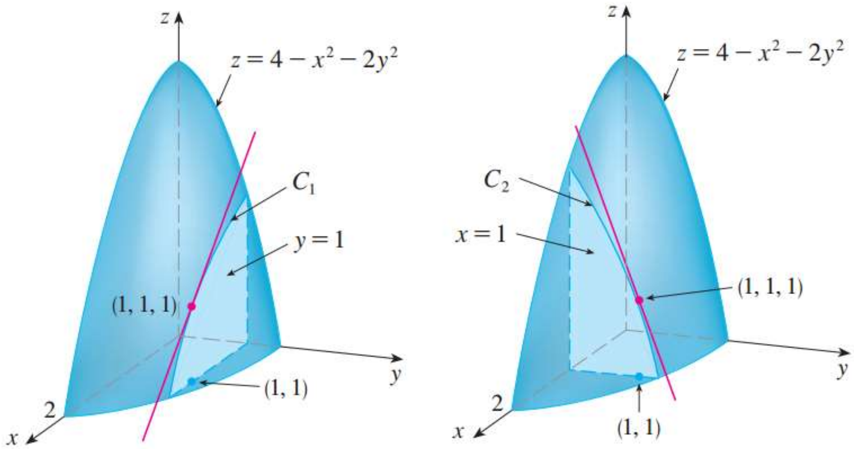
$f_x(a,b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $P(a,b,c)$ của giao tuyến C_1 của S với mặt $y = b$.

$f_y(a,b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $P(a,b,c)$ của giao tuyến C_2 của S với mặt $x = a$.



Ví dụ 1.24. Cho $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tìm $f_x(1,1)$ và $f_y(1,1)$ và giải thích.

Giải



$f_x(x,y) = \left(4 - x^2 - 2y^2\right)_x = -2x \Rightarrow f_x(1,1) = -2$
$f_y(x,y) = \left(4 - x^2 - 2y^2\right)_y = -4y \Rightarrow f_x(1,1) = -4$

Đồ thị hàm f là mặt paraboloid.

Giao của đồ thị hàm f với mặt $y = 1$ là parabola $z = 2 - x^2$, với mặt $x = 1$ là parabola $z = 3 - 2y^2$.

Trong mặt phẳng $y = 1$, parabola $z = 2 - x^2$ có tiếp tuyến tại điểm $(1,1,1)$ với độ dốc (hệ số góc) là $f_x(1,1) = -2$.

Trong mặt phẳng $x = 1$, parabola $z = 3 - 2y^2$ có tiếp tuyến tại điểm $(1,1,1)$ với độ dốc (hệ số góc) là $f_y(1,1) = -4$.

▷ **Tốc độ biến thiên**

Ví dụ 1.25. Chỉ số lạnh do gió lạnh được mô hình hóa bằng tham số

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

trong đó T là nhiệt độ ${}^0C$ và v là tốc độ gió km/h. Khi $T = -15^0C$ và $v = 30$km/h, bạn dự tính nhiệt độ biểu kiến giảm bao nhiêu độ nếu nhiệt độ thật giảm 1^0C? Điều gì xảy ra nếu tốc độ gió tăng 1km/h.

1.5.3 Vi phân cấp 1

Định nghĩa 1.13. Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi tại điểm $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ thì

Vi phân cấp 1 (vi phân toàn phần) của f tại x là

$$df\left(x\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x\right)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)dx_n.$$

Vi phân cấp 2 của f tại x là

$$d^2f\left(x\right) = d\left(df\right)$$

Trong trường hợp hàm hai biến

$$df\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

$$d^2f\left(x,y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Trong trường hợp hàm ba biến

$$df\left(x,y,z\right)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

$$d^2f\left(x,y,z\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(dz)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz.$$

Ví dụ 1.26. Cho $z=f(x,y)=x^2+xy-y^3$. Tính $dz, dz(0,1), d^2z$

Giải

Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x-2y.$$

Suy ra:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(2x+y\right)dx+\left(x-2y\right)dy$$
$$dz\left(0,1\right)=dx-2dy$$

Ví dụ 1.27. Bán kính đáy và chiều cao của hình nón là 10cm và 25cm, với sai số tối đa của mỗi phép đo là 0,1cm. Sử dụng vi phân để ước tính sai số tối đa khi tính thể tích hình nón.

Giải

Thể tích hình nón bán kính r chiều cao h: $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h$

Ta có

$$dV=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial h}dh=\frac{2\pi rh}{3}dr+\frac{\pi r^2}{3}dh$$

Vì sai số tối đa 0.1 cm, ta có $|\Delta r|\leq 0,1, |\Delta h|\leq 0,1$. Để ước tính sai số thể tích tối ta, chọn $dr=0.1$ và $dh=0.1$, ta có

$$dV=\frac{500\pi}{3}\left(0,1\right)+\frac{100\pi}{3}\left(0,1\right)=20\pi$$

Do đó, sai số thể tích tối đa là $20\pi\approx 63\ cm^2$

1.5.4 Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $z=f(x,y)$ xác định trên miền D. Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $f(x,y)$ là

$$f''_{xx}=\left(f'_x\right)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$
$$f''_{yy}=\left(f'_y\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$
$$f''_{xy}=\left(f'_x\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Chú ý: Các đạo hàm f_{xy}, f_{yx} được gọi là đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2.

Định nghĩa 1.14. Đạo hàm riêng cấp $m(m > 1)$ của hàm số n biến là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp $m-1$ của nó. Các đạo hàm riêng cấp m được ký hiệu tương tự như đạo hàm riêng cấp 2. Chẳng hạn

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) \equiv (f_{yz})_x = f_{yzx}.$$

Chú ý: ta có f_{xy} và f_{yx} nói chung là khác nhau, tuy nhiên chúng có thể bằng nhau nếu thỏa định lý sau

Định lý 1.7. (Định lý Schwarz) *Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên D thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

trên D, với mọi $i, j = \overline{1, n}$.

Ví dụ 1.28. Tính đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau

1. $f(x, y) = x^3 y^5 + 2x^4 y$,
2. $f(x, y) = e^x siny$.

Ví dụ 1.29. Cho $f(x, y) = sin(xy)$. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

1.5.5 Đạo hàm hàm hợp

- Cho hàm $z = f(x, y)$, trong đó $x = x(t), y = y(t)$. Khi đó, đạo hàm của z theo biến t là

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- Cho hàm $z = f(x, y)$, trong đó $x = x(s, t), y = y(s, t)$. Khi đó, các đạo hàm riêng của z là

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Chú ý: các công thức trên có thể mở rộng cho hàm ≥ 3 biến.

Ví dụ 1.30. 1. Cho $z = x^2 y + 3xy^3$, trong đó $x = cos2t, y = sint$. Tính z_t.

2. Cho $z = e^x siny$, trong đó $x = st^2, y = s^3 t$. Tính z_s, z_t.

3. Cho $z = e^{xy}.ln(x^2 + y^2 + 1)$. Tính z_x, z_y

Ví dụ 1.31. Áp suất P (Kilopascal), thể tích V (lít), và nhiệt độ T (Kenvin) của một chất khí lý tưởng có mối liên hệ với nhau qua phương trình $PV = 8.31T$. Tìm tốc độ biến thiên của áp suất khi nhiệt độ là 300K và tăng với tốc độ 0.1 K/s, và thể tích là 100L và tăng với tốc độ 0.2 L/s.

1.6 Công thức Taylor của hàm hai biến

Định lý 1.8. *Nếu hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp $n+1$ trong lân cận Ω của (x_0,y_0) thì trong Ω ta có công thức Taylor cấp n của $f(x,y)$ như sau*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} + R_n(\Delta x, \Delta y)$$

Trong đó, $R_n(\Delta x,\Delta y)$ được gọi là phần dư của công thức Taylor, ta có

Phần tư dạng Larange:

$R_n(\Delta x,\Delta y) = \dfrac{d^{n+1} f(x_0+\alpha\Delta x, y_0+\alpha\Delta y)}{(n+1)!}, \alpha\in(0,1)\, x - x_0 = \Delta x = dx,\ y - y_0 = \Delta y = dy$

Phần dư dạng Peano: $R_n(\Delta x,\Delta y) = o(p^n)$, *trong đó*$p = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

Chú ý

1. $df(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy;$

2. $$\begin{aligned} d^2 f(x_0,y_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0,y_0) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right) f(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2; \end{aligned}$$

3. $d^n f(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0,y_0)$

Ví dụ 1.32. Viết khai triển Taylor của $f(x,y) = sinxsiny$ xung quanh điểm $(0,0)$ đến cấp 2.

Giải

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{df(0,0)}{1!} + \frac{d^2 f(0,0)}{2!} + \frac{d^3 f(\theta\Delta x,\ \theta\Delta y)}{3!}$$

với $x - 0 = \Delta x = dx,\ y - 0 = \Delta y = dy$

Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \cos x\cos y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x\sin y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\cos x\sin y, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = -\sin x\cos y, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = -\cos x\sin y, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\sin x\cos y$$

- $$\begin{aligned} df(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy \\ &= x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = x\cos 0\sin 0 + y\sin 0\cos 0 = 0 \end{aligned}$$

- $d^2f(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)dy^2$
$= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$
$= x^2\left(-\sin 0 \sin 0\right) + 2xy\left(\cos 0 \cos 0\right) + y^2\left(-\sin 0 \sin 0\right)$
$= 2xy$
- $d^3f(\alpha\Delta x, \alpha\Delta y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(\alpha x, \alpha y)$

$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\alpha x, \alpha y)(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\alpha x, \alpha y)(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\alpha x, \alpha y)dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\alpha x, \alpha y)(dy)^3$
$= x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\alpha x, \alpha y) + 3x^2y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\alpha x, \alpha y) + 3xy^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\alpha x, \alpha y) + y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\alpha x, \alpha y)$
$= -x^3\cos\theta x \sin\theta y - 3x^2y\sin\theta x\cos\theta y - 3xy^2\cos\theta x\sin\theta y - y^3\sin\theta x\cos\theta y$

Vậy, khi triển Taylor của hàm $f(x,y) = sinxsiny$ xung quanh diểm $(0,0)$ đền cấp 2 là
$f(x,y) = xy - \frac{1}{6}x^3\cos\alpha x\sin\alpha y - \frac{1}{2}x^2y\sin\alpha x\cos\alpha y - \frac{1}{2}xy^2\cos\alpha x\sin\alpha y - \frac{1}{6}y^3\sin\alpha x\cos\alpha y,$
với $\alpha \in (0,1)$.

Ta có thể thay phần dư R_n bằng phần dư Peano để tiện hơn,khi đó
$f(x,y) = xy + o(p^2)$ với $p = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$.

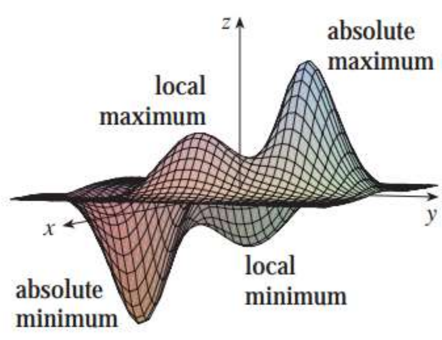
Ví dụ 1.33. Viết khai triển Taylor của $f(x,y) = y^x$ xung quanh điểm $(1,1)$ đến cấp 2.

1.7 Cực trị hàm nhiều biến

Định nghĩa 1.15. Cho f là hàm nhiều biến xác định trên một miền $D \in \mathbb{R}^n$ và $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in D$.

f được gọi là cực đại địa phương (cực đại) tại x^0 nếu tồn tại lân cận $U \in D$ của x^0 sao cho $f\left(x\right) \leq f\left(x^0\right),\ \forall x \in U$.

f được gọi là cực tiểu địa phương (cực tiểu) tại x^0 nếu tồn tại lân cận $U \in D$ của x^0 sao cho $f\left(x\right) \geq f\left(x^0\right),\ \forall x \in U$.



Chú ý.

1. Cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương gọi chung là cực trị địa phương.

2. Cực đại địa phương chưa chắc là cực đại toàn cục (giá trị lớn nhất), cực tiểu địa phương chưa chắc là cực tiểu toàn cục (giá trị nhỏ nhất)

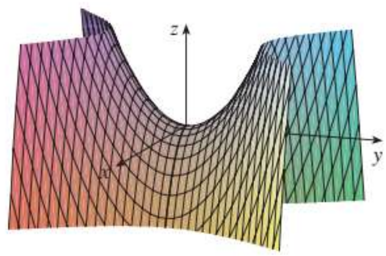
Mệnh đề 1.9. ***(Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị)*** *Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm riêng theo các biến trên D. Nếu hàm số đạt cực trị địa phương tại $x^0 \in D$ thì*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0,\ \forall i = \overline{1, n} \tag{1.2}$$

Những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 được gọi là **điểm dừng**.

Những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 hoặc có ít nhất một trong các đạo hàm riêng không tồn tại được gọi là **điểm tới hạn**, đó là điểm nghi ngờ có cực trị.

Điểm x^0 mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 và trong một lân cận bất kỳ của nó tồn tại các điểm y^0, z^0 sao cho $f(y^0) < f(x^0) < f(z^0)$, được gọi là điểm yên ngựa.



Chú ý. Nếu f đạt cực trị tại x^0 thì x^0 là điểm dừng của f. Điều ngược lại không chắc đúng, nghĩa là không phải mọi điểm dừng đều là cực trị.

Ví dụ 1.34. Cho $f(x, y) = y^2 - x^2$.

1. Chứng minh $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

2. Chứng minh f không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

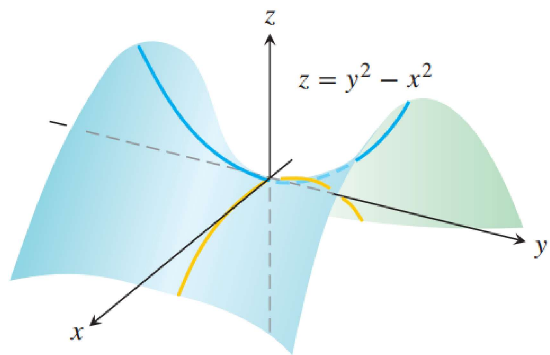
Giải

1. Ta có
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$

2. Với mọi quả cầu $B((0, 0), r) = \left\{(x, y) \,|\, \sqrt{x^2 + y^2} < r\right\}$, lấy 2 điểm $\left(\frac{r}{2}, 0\right), \left(0, \frac{r}{2}\right) \in B((0, 0), r)$, ta có

$$f\left(\frac{r}{2}, 0\right) = \frac{-r^2}{4} < 0 = f(0, 0),$$
$$f\left(0, \frac{r}{2}\right) = \frac{r^2}{4} > 0 = f(0, 0).$$

Vậy f không đạt cực trị tại $(0, 0)$.



Chú ý: Xảy ra trường hợp hàm f không tồn tại đạo hàm riêng tại x^0, nhưng f vẫn đạt cực trị tại x^0.

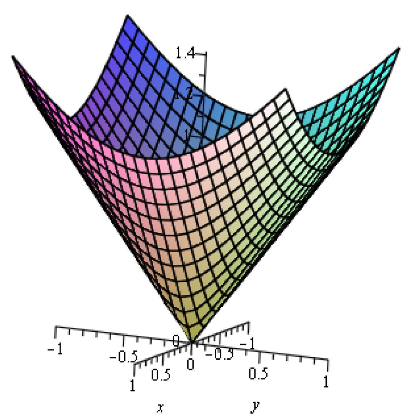
Ví dụ 1.35. Hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ với $D = \mathbb{R}^2$ thỏa

$$f(x,y) \geq f(0,0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Nghĩa là, f đạt cực tiểu địa phương tại điểm $(0,0)$. nhưng

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f\,(0+h) - f\,(0,0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{|h|}{h}$$

không tồn tại.



Định lý 1.10. ***(Điều kiện đủ để hàm nhiều biến đạt cực trị)*** *Giả sử hàm n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên lân cận của điểm dừng $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Đặt*

$$\Delta_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_k} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_kx_1} & f_{x_kx_2} & \cdots & f_{x_kx_k} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,n}$$

là định thức của ma trận con có được từ ma trận $H_f(x)$ bằng cách lấy các phần tử ở k dòng đầu và k cột đầu.

i. Nếu $\Delta_1(x^0) > 0,\ \Delta_2(x^0) > 0,\ \Delta_3(x^0) > 0, ...,\ \Delta_n(x^0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x^0.

ii. Nếu $\Delta_1(x^0) < 0,\ \Delta_2(x^0) > 0,\ \Delta_3(x^0) < 0, ..., (-1)^n\Delta_n(x^0) > 0$ *thì* f *đạt cực dại tại* x^0.

iii. Nếu $\Delta_k(x^0) \neq 0,\ \forall k = \overline{1, n}$ *nhưng không thỏa i và ii thì* f *không đạt cực trị tại* x^0.

iv. Nếu $\exists k \in \{1, ..., n\}$ *sao cho* $\Delta_k(x^0) = 0$ *thì ta không có kết luận tổng quát.*

Cụ thể từng trường hợp ta làm như sau

1.7.1 Cực trị tự do

Cách tìm:

▷ **Đối với hàm hai biến:**

Bước 1: Tính f_x, f_y

Bước 2: giải hệ $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ các điểm dừng.

Bước 3: Tính $A(x, y) = f_{xx}; B(x, y) = f_{xy}; C(x, y) = f_{yy}; \Delta(x, y) = AC - B^2$.

Bước 4: Xét Δ và A của từng điểm dừng, biện luận

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$: cực tiểu.
- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ cực đại.
- $\Delta < 0$: không đạt cực trị.
- $\Delta = 0$: chưa có kết luận.

▷ **Đối với hàm ba biến:**

Bước 1: Tính f_x, f_y, f_z

Bước 2: giải hệ $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ các điểm dừng.

Bước 3: tính $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yz}, f_{zy}, f_{xz}, f_{zx}$, suy ra

$$\Delta_1 = |f_{xx}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}. \end{vmatrix}$$

Bước 4: xét từng điểm dừng x^0, biện luận

1. Nếu $\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0$: thì x^0 đạt cực tiểu.
2. Nếu $\Delta_1 < 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 < 0$: thì x^0 đạt cực đại.
3. Nếu $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$ nhưng không thỏa 1 và 2 thì x^0 không là cực trị.
4. Nếu tồn tại $\Delta_k = 0$: chưa có kết luận.

Ví dụ 1.36. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Giải

Miền xác định $D = \mathbb{R}^2$.

Ta có $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15; \quad f_y = 6xy - 12$.

Giải hệ

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

ta được 4 điểm dừng $(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)$!!!

Ta có

$$A(x,y) = f_{xx} = 6x; \quad B(x,y) = f_{xy} = 6y; \quad C(x,y) = f_{yy} = 6x,$$

suy ra $\Delta = 36x^2 - 36y^2$.

Xét

Điểm	Δ	A	Kết luận
$(1,2)$	-108		không đạt cực trị
$(2,1)$	108	12	cực tiểu
$(-1,-2)$	-108		không đạt cực trị
$(-2,-1)$	108	-12	cực đại

Ví dụ 1.37. Tìm cực trị của hàm $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 2z^2 - 3x - 2y - 4z$.

Giải

Ta có $f_x = 3x^2 - 3; \quad f_y = 2y - 2; \quad f_z = 4z - 4.$

Giải hệ $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 4z - 4 = 0 \end{cases}$ ta được 2 điểm dừng $M(1,1,1)$ và $N(-1,1,1)$.

Ta có $f_{xx} = 6x; \quad f_{yy} = 2; \quad f_{zz} = 4; \quad f_{xy} = f_{yx} = f_{xz} = f_{zx} = f_{yz} = f_{zy} = 0$, suy ra

$$\Delta_1 = 6x; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48x.$$

Xét điểm M, ta có $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = 12 > 0, \Delta_3 = 48 > 0$ nên M là điểm cực tiểu, suy ra $f(M) = -5$.

Xét điểm N, ta có $\Delta_1 = -6 < 0, \Delta_2 = -12 < 0, \Delta_3 = -48 < 0$ nên M không là điểm cực trị.

1.7.2 Cực trị có điều kiện

Bài toán: Tìm cực trị của hàm f với điều kiện $g = 0$.

$\triangleright$ **Đối với hàm hai biến:**

Cách 1: Phương pháp thế

Từ điều kiện $g(x,y) = 0$ rút $y = y(x)$ hoặc $x = x(y)$ thế vào $f(x,y)$ ta được bài toán tìm cực trị hàm 1 biến.

Ví dụ 1.38. Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$, với điều kiện $x + y = 1$.

Cách 2: Phương pháp nhân tử Larange

Bước 1: Lập hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.

Bước 2: Tính L_x, L_y

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ các điểm dừng (x^0, y^0) ứng với λ^0 .

Bước 3: Tính $\Delta(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}$.

Bước 4: Biện luận tại điểm (x^0, y^0) ứng với λ^0

Nếu $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì hàm f đạt cực tiểu .

Nếu $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì hàm f đạt cực đại.

Nếu $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ ta không có kết luận tổng quát.

Ví dụ 1.39. Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$, với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải.

Miền xác định: $D = \mathbb{R}^2$

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$L(x, y, \lambda) = f + \lambda g = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$L_x = 2x + 2\lambda x$

$L_y = 4y + 2\lambda y$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + \lambda) = 0 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Trường hợp x = 0

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Trường hợp $\lambda = -1$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có 4 điểm dừng: $(0, 1, -2)$; $(0, -1, -2)$; $(1, 0, -1)$; $(-1, 0, -1)$

$$\Delta(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4 + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}$$

$\Delta(0, 1, -2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow (0, 1, -2)$ là điểm cực đại.

$\Delta(0, -1, -2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow (0, -1, -2)$ là điểm cực đại.

$\Delta(1, 0, -1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow (1, 0, -1)$ là điểm cực tiểu.

$\Delta(-1, 0, -1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow (-1, 0, -1)$ là điểm cực tiểu.

$\triangleright$ **Đối với hàm ba biến:**

Bước 1: Lập hàm Lagrange $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Bước 2: Tính L_x, L_y, L_z

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ các điểm dừng (x^0, y^0, z^0) ứng với λ^0 .

Bước 3: Tính

$$H_2 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} & g_y \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix}.$$

.

Bước 4: Biện luận tại điểm (x^0, y^0, z^0) ứng với λ^0

Nếu $\begin{cases} H_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0 \\ H_3(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực tiểu .

Nếu $\begin{cases} H_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0 \\ H_3(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực đại.

Nếu $\begin{cases} H_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \neq 0 \\ H_3(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0 \end{cases}$ thì f không đạt cực trị.

Nếu $\exists k \in \{2, 3\}$ sao cho $H_k(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$ ta không có kết luận tổng quát.

Ví dụ 1.40. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$, với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

1.8 Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên miền đóng, bị chặn

Tìm GTLN - GTNN của hàm hai biến $f(x, y)$ trong miền D (đóng, bị chặn).

$D = D^0 \cup \partial D$

D^0: phần trong của D.

$\partial D = \{(x, y)\, | g(x, y) = 0\}$: biên của D.

Cách giải:

Bước 1: Tìm điểm dừng của f trong D^0 bằng cách giải hệ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \ \forall i = \overline{1, n}$$

hoặc những điểm mà tại đó đạo hàm riêng không tồn tại.

Bước 2: tìm điểm dừng (có điều kiện) của f trên biên ∂D của D.

- Cách 1: dùng phương pháp thế.
- Cách 2: dùng phương pháp Larange.

Bước 3: Tính giá trị của f tại các điểm trong bước 1 và 2, số nhỏ nhất trong chúng là min, lớn nhất là max.

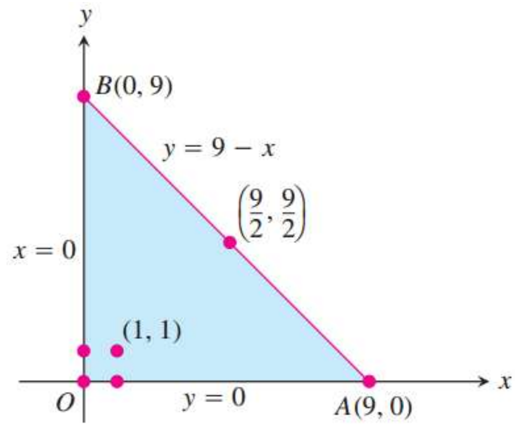
Chú ý: nếu trong bước 2 dùng cách 1, thì trong bước 3 ta tính thêm giá trị của f tại giao điểm của các *cạnh hay cung*.

Ví dụ 1.41. Tìm GTNN - GTLN của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ trên miền $x^2 + y^2 \leq 1$

Ví dụ 1.42. Tìm GTLN - GTNN của $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ trên miền

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 9\}$$

Giải

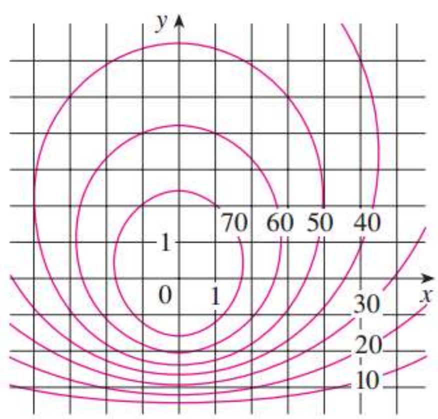

y
B(0, 9)
y = 9 − x
(9/2, 9/2)
x = 0
(1, 1)
O
y = 0
A(9, 0)
x

1.9 Bài tập chương 1

Bài tập 1.1. Tìm và vẽ miền xác định của các hàm số sau

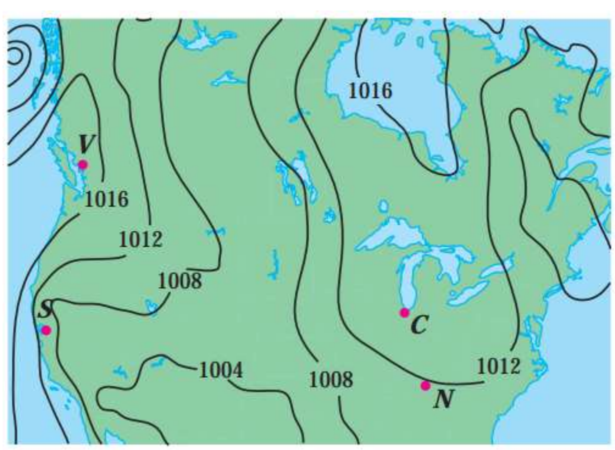
1. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \sqrt{4x^2+9y^2-36}$
5. $f(x,y) = \ln xy$
6. $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{2x^2-1}$
7. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
8. $f(x,y) = \ln(9-x^2-9y^2)$
9. $f(x,y) = \dfrac{3x+5y}{x^2+y^2-4}$.
10. $f(x,y) = \sqrt{y-x}\ln(y+x)$
11. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
12. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}\ln(4-x^2-y^2)$

Bài tập 1.2. Dưới đây là đồ thị đường mức của một hàm f. Sử dụng nó để ước tính giá trị của $f(-3,3)$ và $f(3,-2)$.

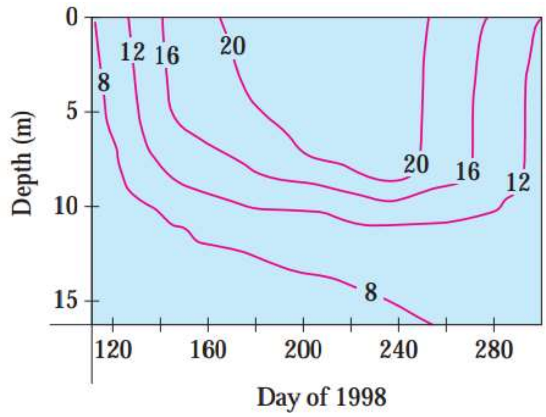


Bài tập 1.3. Dưới đây là biểu đồ đường mức của áp suất khí quyển ở bắc Mỹ vào ngày 12 tháng 8 năm 2008. Trên các đường mức (được gọi là đường đẳng áp), áp suất được tính bằng millibar (mb).

1. Ước tính áp suất tại C (Chicago), N (Nashville), S (San Francisco), và V (Vancouver).
2. Gió mạnh nhất tại địa điểm nào trong số các địa điểm này.



Bài tập 1.4. Các đường mức (đường đẳng nhiệt) biểu diễn nhiệt độ nước (^{0}C) ở Long Lake (Minnesota) vào năm 1998 như một hàm theo độ sâu và thời gian trong năm. Hãy ước tính nhiệt độ trong hồ vào ngày 9 tháng 6 (ngày 160) tại độ sâu 10m và ngày 29 tháng 6 (ngày 180) tại độ sâu 5m.



Bài tập 1.5. Tìm giới hạn, nếu nó tồn tại, hoặc chứng minh giới hạn không tồn tại

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(5x^3 - x^2y^2\right)$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4-xy}{x^2+3y^2}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\dfrac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^4+3y^4}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+\sin^2 y}{2x^2+y^2}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\cos y}{3x^2+y^2}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^3y}{2x^4+y^4}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$
15. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+2y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}$
16. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$
17. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$

Bài tập 1.6. Xét sự tồn tại giới hạn của các hàm số sau tại điểm $(0,0)$

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$
6. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$
7. $f(x,y) = \dfrac{\left(x^2-y^4\right)^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}$
8. $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{x^2+y^2}$

9. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^4)+\sin(y^4)}{\sqrt{x^4+y^4}}$

10. $f(x,y) = \dfrac{\sin x - y}{x - \sin y}$

11. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$

12. $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$

Bài tập 1.7. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y}{x+y-1}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^2\ln x}{(x-1)^2+y^2}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (1+xy)^{\frac{1}{x^2+xy}}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-2xy}{y-2x}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2-\sqrt{4+xy^2}}$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} x^y$

Bài tập 1.8. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

Bài tập 1.9. Xét tính liên tục của các hàm số sau

1. $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$

2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2+y^2}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0. \end{cases}$

6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0. \end{cases}$

Bài tập 1.10. Cho

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Định a để hàm số liên tục tại $(0,0)$.

Bài tập 1.11. Cho

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Định a để hàm số liên tục tại $(0,0)$.

Bài tập 1.12. Tính đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau tại điểm cho trước

1. $z = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x + \sin y}$, tại $(0,0)$
2. $z = \sin(x\sqrt{y})$, tại $\left(\dfrac{\pi}{3}, 4\right)$
3. $z = \sin(xy\ln z)$, tại $(1,0,1)$
4. $z = xy^2z^3$ tại $(1,2,0)$

Bài tập 1.13. Chứng minh rằng

1. Hàm số $z = y\ln(x^2-y^2)$ thỏa $\dfrac{1}{x}z_x + \dfrac{1}{y}z_y = \dfrac{z}{y^2}$
2. Hàm số $z = y^{\frac{y}{x}}\sin\dfrac{y}{x}$ thỏa $x^2z_x + xyz_y = yz$
3. Hàm số $u = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ thỏa $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{3}{x+y+z}$.

Bài tập 1.14. Xét sự khả vi của các hàm số sau tại $(0,0)$

1. $f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } y \neq \pm x, \\ 0 & \text{nếu } y = x \text{ hay } y = -x. \end{cases}$

Bài tập 1.15. Tìm df (vi phân toàn phần) của các hàm số sau

1. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$
2. $f(x,y) = xy^3$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{-}y^2x^2+y^2$
4. $f(x,y) = sin^2x + cos^2y$
5. $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$
6. $f(x,y) = e^{x+y}sin(x-y)$
7. $f(x,y,z) = xyz$
8. $f(x,y,z) = x\sqrt{y^2+z^2}$
9. $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^{-x}$
10. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^3}{z^4}$

Bài tập 1.16. .

1. Tính dz(1,1), biết $z = \dfrac{x}{y^2}$

2. Tính $du(3,4,5)$ biết $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Bài tập 1.17. Hàm f được gọi là hàm điều hòa 2 biến nếu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

trên miền xác định của nó. kiểm tra các hàm sau đây có phải là hàm điều hòa không

1. $x^2 - y^2$
2. $\ln(x^2+y^2)$
3. $(e^y + e^{-y})\sin x$
4. $\dfrac{x}{x^2+y^2}$

Bài tập 1.18. 1. Cho hàm số $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Tính $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + z$.

2. Cho hàm số $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Biểu thức $P = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \dfrac{2}{u}$ có phụ thuộc giá trị của x, y hay không?

Bài tập 1.19. Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số

1. $f(x,y) = \cos(xe^y)$, tìm $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.
2. $f(x,y) = \sin(xy)$, tìm $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ và $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.
3.$f(x,y) = 2x^2y + x^2 \ln y$, tìm $f_{xy},\ f_{xyy}$.
4. $f(x,y) = e^x \sin y$, tìm$\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(0,0)$

Bài tập 1.20. Dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $f(u,v) = u^3 \sin(uv), \quad u = y\cos x, \quad v = y \sin x$
2. $f(u,v) = u^2 + uv + v^2, \quad u = s+t, \quad v = st$
3. $f(u,v) = \dfrac{u}{v}, \quad u = xe^y, \quad v = 1 + xe^{-y}$
4. $f(u,v) = e^{u^2-2v^2}, \quad u = \cos x, \quad v = \sqrt{x^2+y^2}$
5. $f(u,v) = ue^v + ve^{-u}, \quad u = e^x, \quad v = yx^2$
6. $f(x,y) = x^2 \ln y, \quad x = \dfrac{u}{v}, \quad y = 3u - 2v$
7. $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}, \quad x = \cos t, \quad y = e^{2t}$
8. $f(x,y) = x^2 - 3x^2y^3, \quad x = ue^v, \quad y = ue^{-v}$
9. $f(x,y) = \sin x \cos y, \quad x = (s-t)^2, \quad y = s^2 - t^2$
10. $f(x,y) = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3$
11. $f(u,v,w) = u^2 + 4uvw, \quad u = x+y, \quad v = 3y - x, \quad w = y^2$

Bài tập 1.21. Cho

1. $z = f(x^2+y^2)$. Chứng minh $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$
2. $u = F\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-x}{xz}\right)$. Chứng minh $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

3. $u = x^3 F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$. Chứng minh $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3u$
4. $z = y\,f(x^2 - y^2)$. Chứng minh $z = y\,f(x^2 - y^2)$
5, $z = xy + xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Chứng minh $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$
6, $u = f(r)$ với $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$.
Chứng minh $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2$

Bài tập 1.22. Chỉ số lạnh do gió được mô hình hóa bằng hàm số

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

trong đó T nhiệt độ ^{0}C và $v$là vận tốc gió (km/h). Khi $T = -15^0$C và $v = 30$km/h, bạn dự tính nhiệt độ biểu kiến W giảm đi bao nhiêu nếu nhiệt độ thật giảm 1^0C? Điều gì sẽ xảy ra nếu tốc độ gió tăng 1km/h.

Bài tập 1.23. Áp suất, thể tích, và nhiệt độ của một mol chất khí lý tưởng có mối liên hệ với nhau qua phương trình $Pv = 8.31T$, trong đó P là áp suất (kilopascal), V (lít), T(kenvin). Sử dụng vi phân để tìm mức biến thiên áp suất xáp xỉ nếu thể tích tăng từ 12 L lên 12,3 L và nhiệt độ giảm từ 310 K xuống 305 K.

Bài tập 1.24. Áp suất của 1 mol chất khí lý tưởng tăng với tốc độ 0.05 kPa/s và nhiệt độ tăng với tốc độ 0.15 K/s. Dùng phương trình $PV = 8.31T$ để tìm tốc độ biến thiên của thể tích khi áp suất là 20 kPa và nhiệt độ là 320 K.

Bài tập 1.25. Một cạnh của tam giác tăng với tốc độ 3 cm/s, cạnh thứ 2 giảm với tốc độ 2 cm/s. Nếu diện tích hình tam giác không đổi, thì tốc độ biến thiên của góc giữa các cạnh là bao nhiêu khi cạnh đầu tiên dài 20 cm, cạnh thứ 2 dài 30 cm, và góc là $\dfrac{\pi}{6}$

Bài tập 1.26. Điện áp V trong một mạch điện giảm chậm khi pin tiêu hao năng lượng. Điện trở R tăng chậm khi cái điện trở nóng lên. Sử dụng định luật Ohm, $V = I.R$, để tìm tốc độ biến thiên của cường độ dòng điện khi $R = 400\Omega$, $I = 0,08A$, $\dfrac{dV}{dt} = -0,01\ V/s$ và $\dfrac{dR}{dt} = 0,03\ \Omega/s$.

Bài tập 1.27. Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật được đo tương ứng là 30 cm và 24 cm với sai số tối đa là 0,1 cm. Sử dụng vi phân để ước tính sai số tối đa diện tích hình chữ nhật.

Bài tập 1.28. Sử dụng vi phân để ước tính lượng thiếc trong một hộp thiếc khép kín có đường kính 8cm và cao 12 cm nếu hộp dày 0,04 cm.

Bài tập 1.29. Nếu R là tổng điện trở của ba đện trở mắc song song R_1, R_2, R_3 thì

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Nếu điện trở được tính bằng Ohm, $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ và $R_3 = 50\ \Omega$, với sai số khả dĩ $0,5\%$ mỗi điện trở, ước tính sai số tối đa của giá trị R tính được.

Bài tập 1.30. Viết khai triển Taylor tới cấp n của hàm $f(x, y)$ quanh (x_0, y_0)

1. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5,\ n = 2,\ (x_0, y_0) = (1, -2)$
2. $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4, n = 2,\ (x_0, y_0) = (2, -1)$
3. $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4, n = 10, (x_0, y_0) = (-2, 1)$
4. $f(x, y) = \cos x \cos y, n = 2, (x_0, y_0) = (0, 0)$
5. $f(x, y) = \sin x \cos y, n = 1, (x_0, y_0) = (0, 0)$
6. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}, n = 3, (x_0, y_0) = (1, 1)$
7. $f(x, y) = e^x \cos y, n = 3, (x_0, y_0) = (0, \pi)$
8. $f(x, y) = \ln(xy), n = 3, (x_0, y_0) = (1, 1)$

Bài tập 1.31. Tìm cực trị của các hàm số sau

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
2. $f(x, y) = -x^2 + 4xy - 10y^2 - 2x + 16y$
3. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x - y + 1$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$
5. $f(x, y) = x^3 + y^2 + 12xy + 1$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
7. $f(x, y) = x^3 + 27x + y^2 + 2y + 1$
8. $f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$
9. $f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$
10. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$
11. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
12. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$
13. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
14. $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x + 32y + 8$
15. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
16. $f(x, y) = 4 - \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$
17. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

Bài tập 1.32. Tìm cực trị của các hàm số sau

1. $f(x, y) = x + 2e^y - e^x - e^{2y}$
2. $f(x, y) = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$
3. $f(x, y) = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$
4. $f(x, y) = x^2 - y - \ln|y| - 2$
5. $f(x, y) = \ln x - x + \ln y - \dfrac{y^2}{2}$
6. $f(x, y) = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y$

7. $f(x,y) = x(\ln^2 x + y^2)$
8. $f(x,y) = x\sin y$
9. $f(x,y) = e^x \cos y$
10. $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$
11. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
12. $f(x,y) = x + y - xe^y$
13. $f(x,y) = x^2 - e^{y^2}$
14. $f(x,y) = (y-2)\ln xy$
15. $f(x,y) = e^{xy}$
16. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$
17. $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$ trên $x > 0,\ y > 0$.
18. $f(x,y) = 2x^2 - 4x + \sin y - \dfrac{y}{2}$ trên $x \in \mathbb{R},\ -\pi < y < \pi$
19. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ trên $x > 0,\ y > 0$
20. $f(x,y) = \sin x.\sin y.\sin(x+y)$ trên $0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$

Bài tập 1.33. Tìm cực trị của các hàm số sau

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
2. $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$
3. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 2z^2 - 3x - 2y - 4z$
4. $f(x,y,z) = -x^2 - y^3 - \dfrac{3}{2}z^2 + 3yz + 2x + 40$
5. $f(x,y,z) = x + \dfrac{2y}{x} + \dfrac{z}{2y} + \dfrac{1}{z}$
6. $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ trên $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$
7. $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$

Bài tập 1.34. Cho hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 + Cxy$

1. CMR $(0,0)$ là điểm dừng của f.
2. Tìm C để hàm số đạt cực tiểu tại $(0,0)$.
3. Tìm C để hàm số đạt cực đạt tại $(0,0)$.
4. Tìm C để hàm số không đạt cực trị tại $(0,0)$.

Bài tập 1.35. Tìm cực trị của các hàm số sau với điều kiện được cho

1. $f(x,y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$
2. $f(x,y) = x^2 + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$
3. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$
4. $f(x,y) = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$
5. $f(x,y) = x^2(y-1) - 3x + 2$ với điều kiện $x - y + 1 = 0$
6. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 3x + y$ với điều kiện $-x^2 + y = 1$
7. $f(x,y) = 8x + 15y + 28$ với điều kiện $2x^2 + 3y^2 = 107$

8. $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$
9. $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ với điều kiện $y - x = \dfrac{\pi}{4}$
10. $f(x,y,z) = 2x + y + 3z$ với điều kiện $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 35$
11. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$
12 . $f(x,y,z) = x + y + z$ với điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$
13. $f(x,y,z) = x + y + z$ với điều kiện $xyz = 8$
14. $f(x,y,z) = xy^2z^3$ với điều kiện $x + y + z = 1, x, y, z > 0$
15. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ với điều kiện $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, x, y, z > 0$

Bài tập 1.36. Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của các hàm số sau

a. $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$, D là miền đóng giới hạn bởi các điểm $(0,0), (2,0), (0,3)$.

b. $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$, D là miền đóng giới hạn bởi các điểm $(1,0), (5,0), (1,4)$.

c. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4, \quad D = \{(x,y) \,|\, |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

d. $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2 \quad D = \{(x,y) \,|0 \le x \le 4, 0 \le y \le 5\}$.

e. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 \quad D = \{(x,y) \,|0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

f. $f(x,y) = xy^2 \quad D = \left\{(x,y) \,|x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 3\right\}$.

g. $f(x,y) = 2x^3 + y^4 \quad D = \left\{(x,y) \,|x^2 + y^2 \le 1\right\}$.