Chương 2

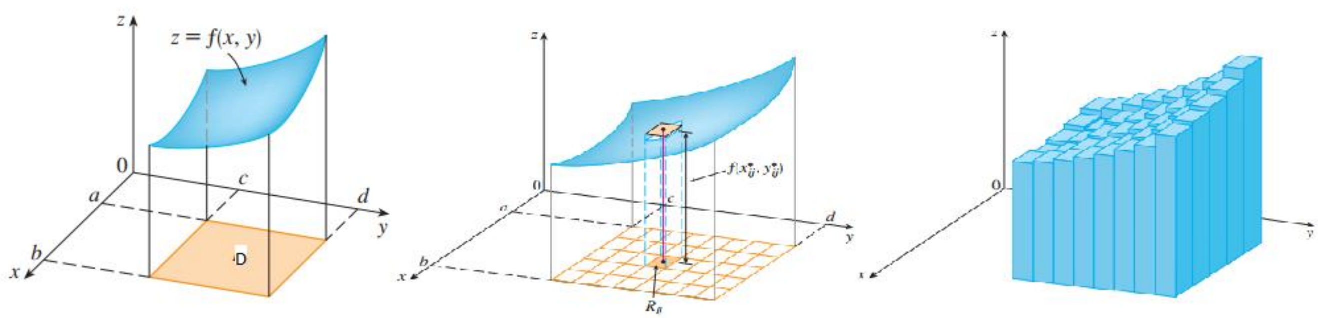
Tích phân bội

2.1 Tích phân bội 2

2.1.1 Ký hiệu

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

trong đó: $D \subset \mathbb{R}^2$, D bị chặn.



Tích phân của hàm f trên miền D chính là thể tích của hình khối S nằm dưới đồ thị hàm f và nằm trên miền D.

Tính chất 2.1. Ta có

1. $\iint\limits_D (f \pm g)dxdy = \iint\limits_D fdxdy \pm \iint\limits_D gdxdy,$
2. $\iint\limits_D cfdxdy = c\iint\limits_D fdxdy$, với c là hằng số,
3. Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, thì
$$\iint\limits_D fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy,$$
4. Nếu $f(x, y) \leq g(x, y),\ \forall (x, y) \in D$, thì
$$\iint\limits_D fdxdy \leq \iint\limits_D gdxdy.$$

2.1.2 Tích phân lặp

Ta có

$$\triangleright \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

$$\triangleright \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Chú ý:

- Khi tính tích phân lặp, ta tính từ trong ra ngoài.
- $\int f(x,y)dx$: tích phân theo x, xem y là hằng.
- $\int f(x,y)dy$: tích phân theo y, xem x là hằng.

Ví dụ 2.1. Tính tích phân lặp $\int_0^1 \int_0^2 (4-x-y)dxdy$.

Giải

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^2 (4-x-y)dxdy &= \int_0^1 \left(4x - \frac{x^2}{2} - xy\right)_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^1 (6-2y)\,dy \\ &= \left(6y - y^2\right)_{y=0}^{y=1} \\ &= 5.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.2. Tính tích phân lặp $\int_{-2}^{4} \int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2} dxdy$.

Giải

Tính tích phân bên trong theo biến x, ta có

$$\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}dx = y^3 \int_0^y \frac{1}{x^2+y^2}dx = y^3.\frac{1}{y} arctg\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=y} = y^2 \left(arctg\frac{y}{y} - arctg\frac{0}{y} \right) = y^2 \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra

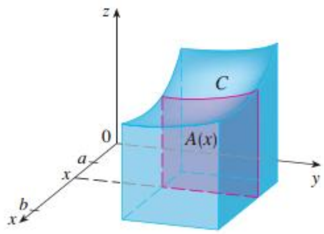
$$\int_{-2}^{4} \int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \int_{-2}^{4} \frac{\pi y^2}{4}dy = \frac{\pi y^3}{12}\Big|_{y=-2}^{y=4} = 6\pi.$$

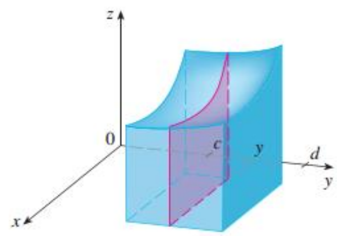
Định lý 2.2. *(Định lý Fubini) Nếu hàm f liên tục trên hình chữ nhật*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\right\},$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$





Chú ý: Nếu $f(x,y) = h(x).g(y)$, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \left(\int\limits_a^b h(x)dx\right)\left(\int\limits_c^d g(y)dy\right).$$

Ví dụ 2.3. Tính $\iint\limits_D (x-y)^2dxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $[0,1]\times[0,2]$.

Giải

Cách 1:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-y)^2dxdy &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^2 (x-y)^2dydx \\
&= \int\limits_0^1 \left(-\frac{(x-y)^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{(x-2)^3}{3}\right)dx \\
&= \left(\frac{x^4}{12} - \frac{(x-2)^4}{12}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-y)^2dxdy &= \int\limits_0^2 \int\limits_0^1 (x-y)^2dxdy \\
&= \int\limits_0^2 \left(\frac{(x-y)^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \left(1-3y+3y^2\right)dy = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Cách 3:

$$\iint\limits_D (x-y)^2dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} x^2dxdy - \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} 2xydxdy + \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} y^2dxdy$$

$$= \left(\int\limits_0^1 x^2dx\right)\left(\int\limits_0^2 dy\right) - 2\left(\int\limits_0^1 xdx\right)\left(\int\limits_0^2 ydy\right) + \left(\int\limits_0^1 dx\right)\left(\int\limits_0^2 y^2dy\right)$$

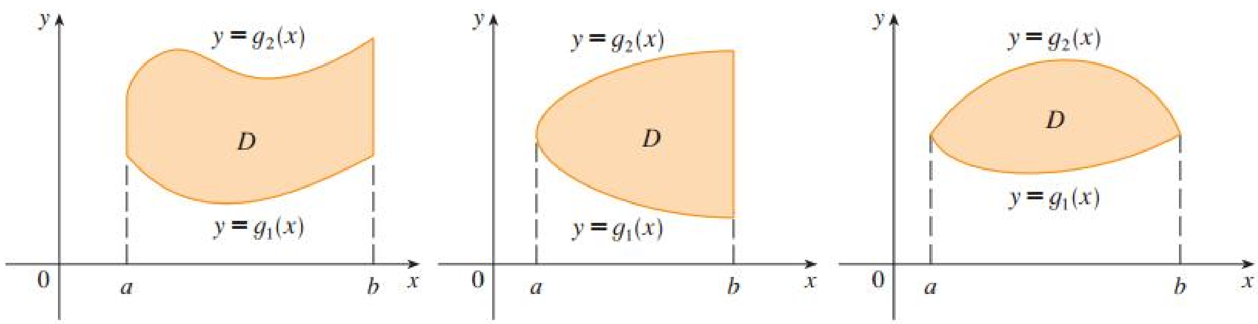
$$= 2.\frac{1}{3} - 2.\frac{1}{2}.\frac{2}{4} + 1.\frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

2.1.3 Biểu diễn miền

A. Miền loại I: Miền D được gọi là miền loại 1 nếu nó nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục theo biến x, nghĩa là

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

trong đó, g_1, g_2 là hai hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$.



Nếu hàm f liên tục trên miền loại 1 D, thì

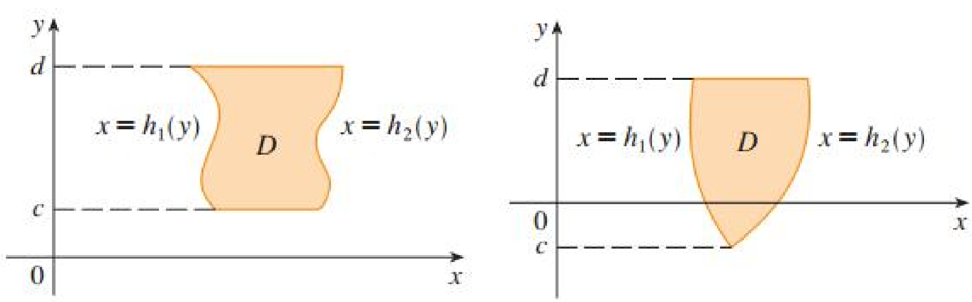
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

Chú ý: miền loại 1 nhìn theo hướng Oy.

B. Miền loại II: Miền D được gọi là miền loại 2 nếu nó nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục theo biến y, nghĩa là

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}$$

trong đó, h_1, h_2 là hai hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$.



Nếu hàm f liên tục trên miền loại 2 D, thì

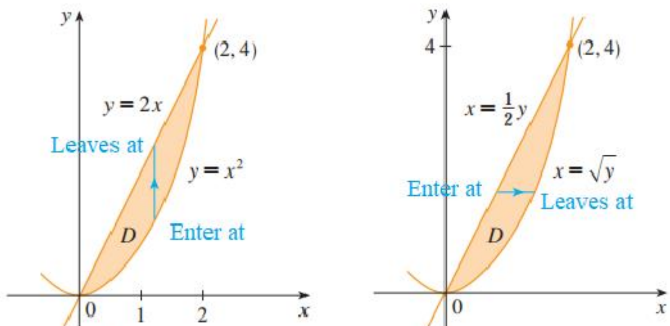
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

Chú ý: miền loại loại 2 nhìn theo hướng Ox.

Ví dụ 2.4. Tính tích phân $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = 2x$ và $y = x^2$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.



Miền loại I Miền loại II

Cách 1: Viết D theo dạng miền loại I: $D = \left\{(x,y)\,|0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x\right\}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy &= \int\limits_0^2 \int\limits_{x^2}^{2x} (2x+y)\,dydx \\ &= \int\limits_0^2 \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int\limits_0^2 \left(6x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx \\ &= \left(-\frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

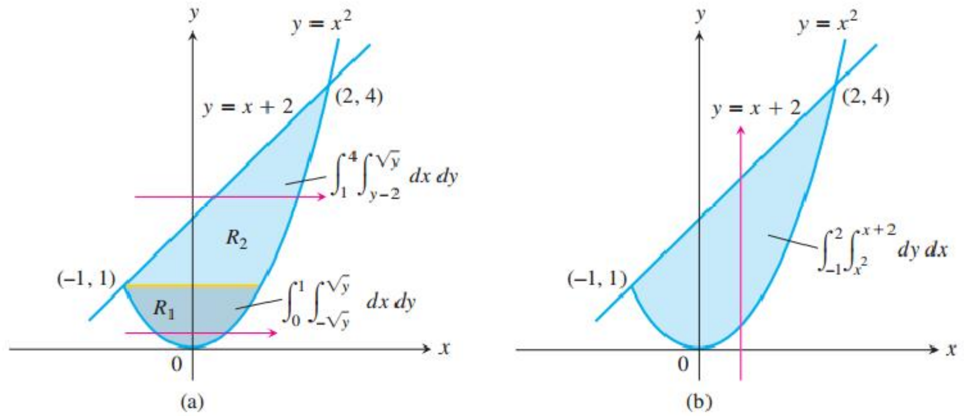
Cách 2: Viết D theo dạng miền loại II: $D = \left\{(x,y)\,|0 \le y \le 4, \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}\right\}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy &= \int\limits_0^4 \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (2x+y)\,dxdy \\ &= \int\limits_0^4 \left(x^2 + xy\right)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int\limits_0^4 \left(y - \frac{3}{4}y^3 + y\sqrt{y}\right) dy \\ &= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{4} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4} = \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.5. Tính diện tích miền D giới hạn bởi parabol $= x^2$ và đường thẳng $y = x + 2$.

Giải



Cách 1: Viết D theo dạng miền loại I: $D = \left\{(x, y) \,|\, -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\right\}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dxdy &= \int\limits_{-1}^{2} \int\limits_{x^2}^{x+2} 1dydx = \int\limits_{-1}^{2} (y)_{x^2}^{x+2}\, dx \\
&= \int\limits_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{2} \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Cách 2: Viết D theo dạng miền loại II: $D = D_1 \cup D_2$, trong đó

$D_1 = \{(x, y) \,|0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}$,

$D_2 = \{(x, y) \,|1 \leq y \leq 4, y - 2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$.

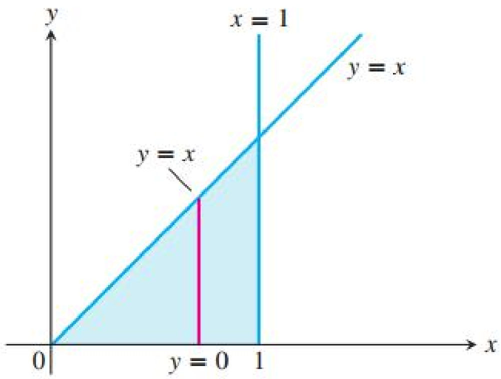
Ta có

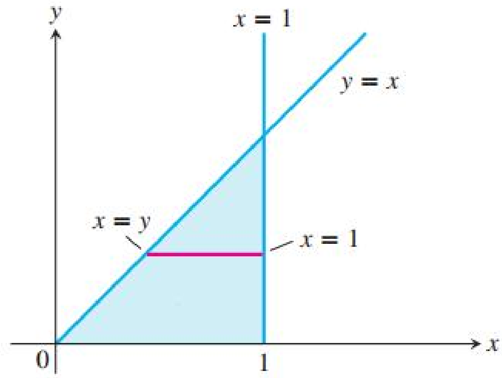
$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dxdy &= \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy \\
&= \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 1dxdy + \int\limits_{1}^{4} \int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} 1dxdy \\
&= \int\limits_{0}^{1} (x)_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}\, dy + \int\limits_{1}^{4} (x)_{x=y-2}^{x=\sqrt{y}}\, dy \\
&= \int\limits_{0}^{1} 2\sqrt{y}dy + \int\limits_{1}^{4} (\sqrt{y} - y + 2)\, dy \\
&= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)_1^4 \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Nhận xét: trong bài này nên chọn cách 1.

Ví dụ 2.6. Tinh $\iint\limits_D e^{-x^2}dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi $x = 1, y = 0, y = x$.

Giải





Cách 1: Viết D theo dạng miền loại I: $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

Ta có

$$\iint\limits_D e^{-x^2}dxdy = \int_0^1\int_0^x e^{-x^2}dydx = \int_0^1 \left(ye^{-x^2}\right)_{y=0}^{y=x}dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

Cách 2: Viết D theo dạng miền loại II: $D = \{(x,y)|0 \le y \le 1, y \le x \le 1\}$

Ta có

$$\iint\limits_D e^{-x^2}dxdy = \int_0^1\int_y^1 e^{-x^2}dxdy \qquad \text{không tính được. !!!}$$

Nhận xét: không phải bài nào ta cũng giải được bằng 2 cách.

2.1.4 Phương pháp đổi biến tổng quát

Dấu hiệu: miền lấy tích phân, hoặc hàm lấy tích phân phức tạp.

Bước 1: đặt

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} (*)$$

Bước 2: đổi miền từ $D_{xy} \Rightarrow D_{uv}$ (tìm điều kiện của u, v)

Bước 3: tính $|J|$ (trị tuyệt đối), với $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\text{định thức}} \neq 0.$

Cách 1: Từ $(*) \Rightarrow \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$

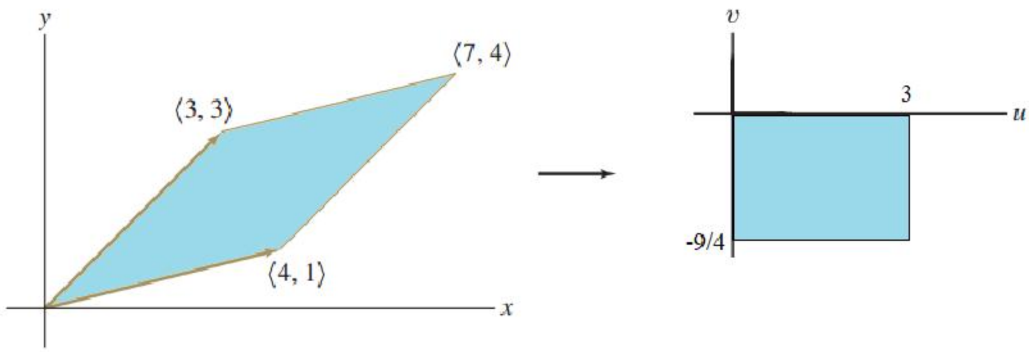
Cách 2: từ $(*) \Rightarrow \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}_{\text{định thức}} \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$

Bước 4: áp dụng công thức

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right).|J|.dudv$$

Ví dụ 2.7. Tính tích phân $\iint\limits_D e^{4x-y}dxdy$, trong đó D là hình bình hành tạo bởi 2 vectơ $\overrightarrow{a} = (3,3)\,;\ \overrightarrow{b} = (4,1)\,.$

Giải



Phương trình các đường của hình bình hành.

$y = x; \qquad y = x - 3; \qquad y = \frac{1}{4}x; \qquad y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

Nhận xét:

- Nếu viết D theo miền loại I, ta phải tách D thành 3 miền.

- Nếu viết D theo miền loại II ta phải tách D thành 2 miền $\Rightarrow$ dài.

- Nhìn vào phương trình đường (của miền), ta thấy có 2 yếu tố $(x-y)$ và $(\frac{1}{4}x - y)$ được lặp lại $\Rightarrow$ dấu hiệu đổi biến.

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = x - y \\ v = \frac{1}{4}x - y \end{array}\right. \quad (*)$

Ta có

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x - y = 3 \Rightarrow u = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le u \le 3,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{4}x - y = 0 & \Rightarrow v = 0 \\ \frac{1}{4}x - y = -\frac{9}{4} & \Rightarrow v = -\frac{9}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{9}{4} \le v \le 0.$$

Suy ra $D = \left\{(u,v)\,|0 \le u \le 3, -\frac{9}{4} \le v \le 0\right\}$

Ta lại có

$$\left\{\begin{array}{l} u = x - y \\ v = \frac{1}{4}x - y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4}{3}u - \frac{4}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{4}{3}v \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \ne 0.$$

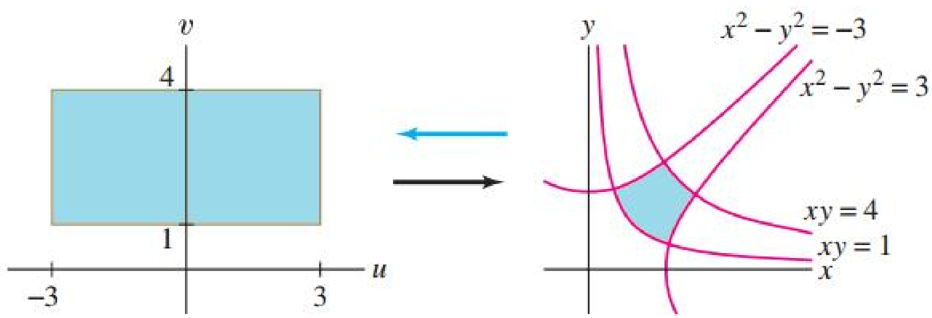
Suy ra $|J| = \frac{4}{3}$

Vậy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_{xy}} e^{4x-y}dxdy &= \iint\limits_{D_{uv}} e^{4\left(\frac{4}{3}u-\frac{4}{3}v\right)-\left(\frac{1}{3}u-\frac{4}{3}v\right)}.\frac{4}{3}.dudv \\
&= \frac{4}{3}\iint\limits_{D_{uv}} e^{5u-4v}dudv \\
&= \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{-9/4}^{0} e^{5u-4v}dvdu \\
&= \cdots = \frac{1}{15}\left(e^{15}-1\right)\left(e^{9}-1\right).
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.8. Tính tích phân $\iint\limits_{D} xy\left(x^2+y^2\right)dxdy$, trong đó $D = -3 \le x^2-y^2 \le 3; 1 \le xy \le 4$.

Giải

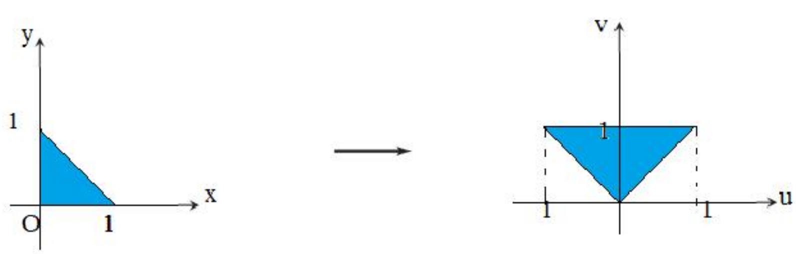


Dành cho Sinh viên.

Ví dụ 2.9. Tính $\iint e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, trong đó D là miền xác định bởi $x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1$.

Nhận xét. Ta thấy hàm bên trong dấu tích phân có 2 lượng $(x-y)$ và $(x+y)$ gây khó khăn cho việc lấy nguyên hàm $\Rightarrow$ dấu hiệu đổi biến.

Giải



Đặt $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$ $(*)$

Ta có

$Ox : y = 0$, từ $(*) \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = v.$

$Oy: x = 0$, từ $(*) \Rightarrow \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow u = -v.$

$x + y = 1 \Rightarrow v = 1.$

Vậy $D_{uv} = \{(u, v)\,|0 \le v \le 1, -v \le u \le v\}$.

Từ $(*)$, ta có $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$, suy ra

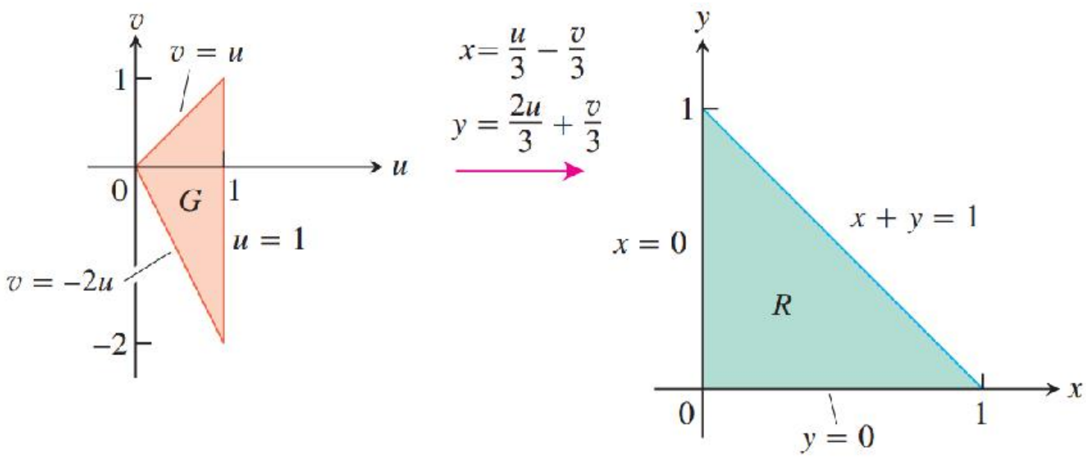
$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}.$$

Vậy

$$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} e^{\frac{u}{v}}.\frac{1}{2}.dudv = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} dudv = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)\int\limits_{0}^{1} vdv = \frac{1}{4}\left(e - e^{-1}\right).$$

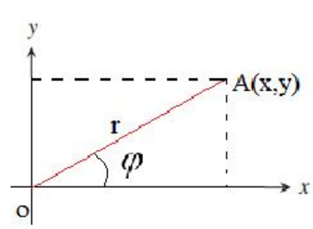
Ví dụ 2.10. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx.$

Giải



2.1.5 Đổi biến trong tọa độ cực

Dấu hiệu: miền có "dạng" tròn (có $x^2 + y^2$) hoặc elip ($\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$).



Bước 1: Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Bước 2: đổi miền $D_{xy} \Rightarrow D_{r\varphi}$

φ: "quét" miền.

r: tìm r vào , ra miền.

Bước 3: $|J| = r$.

Bước 4:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.r.drd\varphi. \tag{2.1}$$

Chú ý:

1. Với đường tròn tâm $I(a,b) \neq O(0,0) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, ta đặt

$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}$$

khi đó $|J| = r$ và r, φ *xác định theo gốc* $I(a,b)$.

2. Với miền elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, ta đặt

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$$

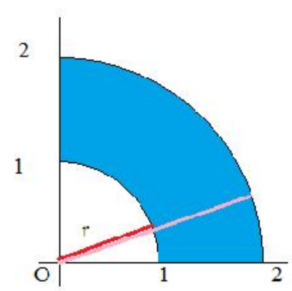
khi đó $|J| = abr$.

3. Trong công thức 2.1 các cận của tích phân ở bên trong nói chung là hàm số của φ, các cận này chỉ là hằng số khi miền lấy tích phân là hình quạt tròn hoặc hình tròn, hay hình vành khăn giới hạn bởi các đường tròn đồng tâm. Thực chất việc tìm cận trong công thức 2.1 là nhằm *quét* hết miền D.

4. Khi thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình liên hệ giữa x, y ta được phương trình liên hệ giữa r, φ.

Ví dụ 2.11. Tính $\iint\limits_{D} (3x+4y^2)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 = 1, x^2+y^2 = 4$ và nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Giải



Ta có $D_{xy} = \left\{(x,y) \,|\, x, y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Ta có

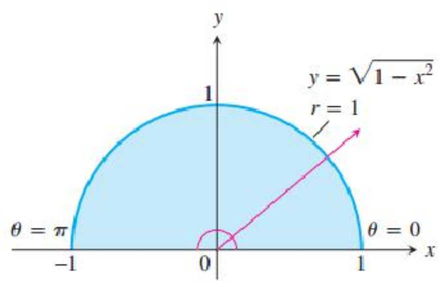
- $|J| = r$,
- $D_{r\varphi} = \left\{(r,\varphi) \,|\, 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2\right\}$.

Vậy

$$\iint\limits_{D_{xy}} \left(3x+4y^2\right) dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \left(3r\cos\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\right).r.drd\varphi$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_1^2 \left(3r^2\cos\varphi + 4r^3\sin^2\varphi\right) drd\varphi$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^3\cos\varphi + r^4\sin^2\varphi\right)_{r=1}^{r=2} d\varphi$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(7\cos\varphi + 15\sin^2\varphi\right) d\varphi$$
$$= \left(7\sin\varphi + \frac{15\varphi}{2} - \frac{15}{4}\sin 2\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 7 + \frac{15}{4}\pi.$$

Ví dụ 2.12. Tính tích phân $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dxdy$ với D là nửa trên hình tròn đơn vị.

Giải



Ta có $D_{xy} = \left\{(x,y) \mid y \geq 0; x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Ta có

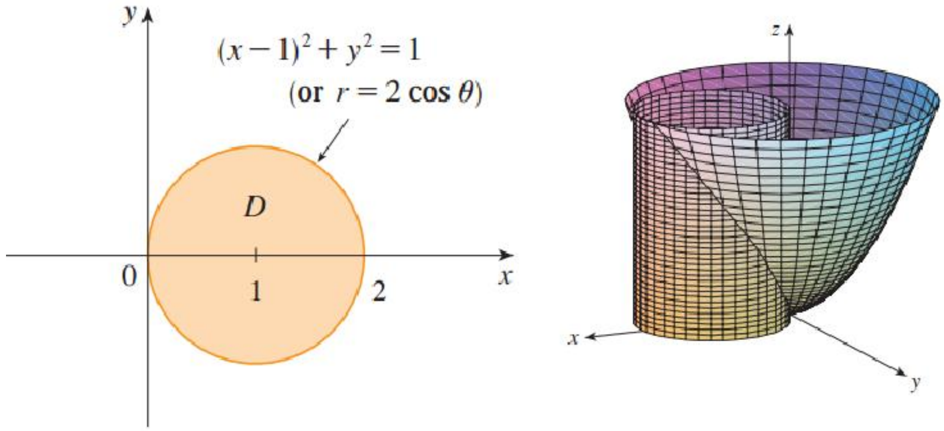
- $|J| = r$,
- $D_{r\varphi} = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\}$.

Vậy

$$\iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}.r.drd\varphi$$
$$= \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} drd\varphi$$
$$= \left(\int\limits_0^{\pi} d\varphi\right) \left(\int\limits_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} dr\right)$$
$$= \left(\varphi|_0^{\pi}\right).\left(\sqrt{1+r^2}|_0^1\right)$$
$$= \pi\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ví dụ 2.13. Tính tích phân $\iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy$, với D là hình tròn $x^2+y^2 = 2x$.

Giải



Ta có $D_{xy}=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=2x\right\}=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2=1\right\}$.

Cách 1:

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}\quad (*)$

Ta có

- $|J|=r$,
- $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

  thay $(*)$ vào $x^2+y^2=2x$, ta có

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi &= 2r\cos\varphi \\ r^2 &= 2r\cos\varphi \\ r &= 2\cos\varphi. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{r\varphi}=\left\{(r,\varphi)\,|\,-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\varphi\right\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy &= \iint\limits_{D_{r\varphi}} r^2.r.drd\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3drd\varphi \\ &= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Cách 2:

Đặt $\begin{cases} x=1+r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}\quad (*)$

Ta có

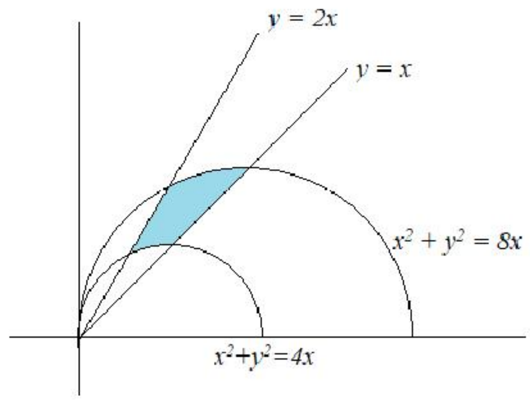
- $|J|=r$,
- $D_{r\varphi}=\{(r,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi,0\le r\le 1\}$.

Vậy

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy &= \iint\limits_{D_{r\varphi}}\left((1+r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi\right).r.drd\varphi \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\left(r+2r^2\cos\varphi+r^3\right)drd\varphi=\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.14. Tính tích phân $\iint\limits_{D} dxdy$, biết D là miền giới hạn bởi các đường tròn $x^2+y^2=4x, x^2+y^2=8x$ và các đường thẳng $y=x, y=2x$.

Giải



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (*)$

Tìm r, ta có

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4x \\ r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi &= 4r\cos\varphi \\ r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) &= 4r\cos\varphi \\ r &= 4\cos\varphi \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 8x \\ r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi &= 8r\cos\varphi \\ r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) &= 8r\cos\varphi \\ r &= 8\cos\varphi \end{aligned}$$

Tìm φ, ta có

$y = x \Rightarrow r\sin\varphi = r\cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$,

$y = 2x \Rightarrow r\sin\varphi = 2r\cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi = 2 \Rightarrow \varphi = \arctan 2$.

Suy ra $D = \left\{(r,\varphi)\,|\,\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \arctan 2, 4\cos\varphi \le r \le 8\cos\varphi\right\}$

Vậy

$$\iint\limits_{D} dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r.drd\varphi = 4\text{cos(x)}(\text{arctan(2)}-\frac{\pi}{4}).$$

2.1.6 Ứng dụng của tích phân bội 2

A. Tính diện tích hình phẳng $D \subset \mathbb{R}^2$

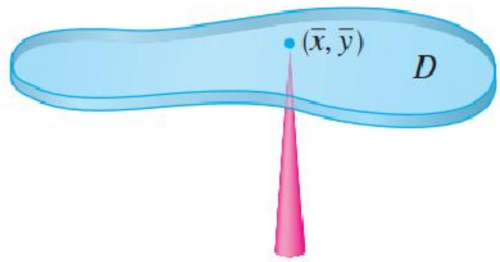
$$S = \iint\limits_{D} 1.dxdy.$$

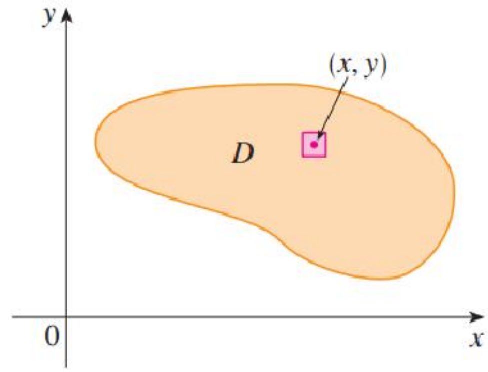
B. Tính diện tích mặt cong $S \subset \mathbb{R}^3$

Cho mặt cong $S: z = z(x,y), (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, khi đó

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(z_x^/\right)^2 + \left(z_y^/\right)^2} dxdy.$$

C. Ứng dụng cơ học





Cho bản phẳng mỏng $D \subset \mathbb{R}^2$, có khối lượng riêng là $\rho(x,y)$, ta có

Khối lượng bản $D: m = \iint\limits_D \rho(x,y)\, dxdy$,

Tọa độ trọng tâm $G(x_G, y_G)$: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x,y)\, dxdy \\ y_G = \dfrac{1}{m} \iint\limits_D y\rho(x,y)\, dxdy \end{cases}$

Momen tĩnh đối với trục Ox: $M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)\, dxdy$,

Momen tĩnh đối với trục Oy: $M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)\, dxdy$,

Momen quán tính quay quanh trục Ox: $I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)\, dxdy$,

Momen quán tính quay quanh trục Oy: $I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)\, dxdy$,

Momen quán tính đối với gốc O: $I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y)\, dxdy$.

Ví dụ 2.15. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi parabol $y^2 = 2x$ và đường thẳng $y = x - 4$.

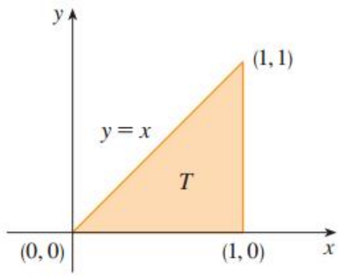
Giải

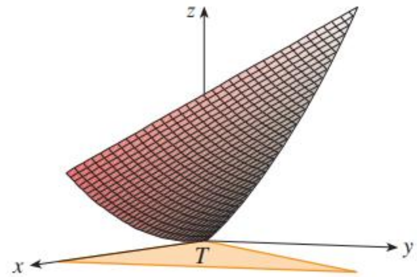
Ta có $D = \left\{(x,y) \,|\, -2 \le y \le 4, \dfrac{y^2}{2} \le x \le y + 4\right\}$.

Suy ra $S_D = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{-2}^{4} \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} 1.dxdy = \cdots = 18.$

Ví dụ 2.16. Tính diện tích của một phần mặt phẳng $z = x^2 + 2y$ nằm trên tam giác T trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh là $(0,0),\ (1,0),\ (1,1)$.

Giải





Ta có:

- $T = \{(x,y)\,|0 \le x \le 1; 0 \le y \le x\}$
- $f(x,y) = x^2 + 2y \Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2 \end{cases}$

Suy ra

$$A = \iint\limits_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1}dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x \sqrt{4x^2+5}dydx$$

$$= \int\limits_0^1 x\sqrt{4x^2+5}dx = \frac{1}{8}.\frac{2}{3}\left(4x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right).$$

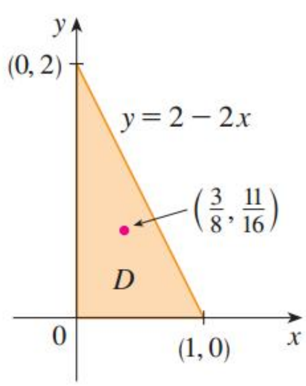
Ví dụ 2.17. Một bản phẳng D hình tam giác có các đỉnh $(0,0), (1,0)$ và $(0,2)$ và khối lượng riêng là $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.

Tìm

1. Khối lượng và tâm của bản.

2. Momen tĩnh, momen quán tính quay quay trục Ox.

Giải



$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\,dydx$$

$$= 4\int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = \frac{8}{3}$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy = \frac{3}{8}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2-2x} \left(x + 3x^2 + yx\right) dydx = ... = \frac{3}{8}.$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy = \frac{3}{8}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2-2x} \left(y + 3xy + y^2\right) dydx = ... = \frac{11}{6}.$$

2.2 Tích phân bội ba

2.2.1 Ký hiệu

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz,$$

trong đó: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω bị chặn.

Định lý 2.3. *(Định lý Fubini) Nếu f liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, thì*

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_r^s \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Chú ý: $\int\limits_r^s \int\limits_c^d \int\limits_a^b h(x)\,g(y)\,k(z)\,dxdydz = \left(\int\limits_a^b h(x)\,dx\right)\left(\int\limits_c^d g(x)\,dy\right)\left(\int\limits_r^s k(z)\,dz\right).$

Ví dụ 2.18. Tính $\iiint_B xyz^2dxdydz$ trong đó B là hình hộp chữ nhật

$B = \{(x,y,z)\,|0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}.$

Giải

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B xyz^2dxdydz &= \int\limits_0^3 \int\limits_{-1}^2 \int\limits_0^1 xyz^2dxdydz = \int\limits_0^3 \int\limits_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dydz \\
&= \int\limits_0^3 \int\limits_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}dydz \\
&= \int\limits_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz = \int\limits_0^3 \frac{3z^2}{4}dz \\
&= \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

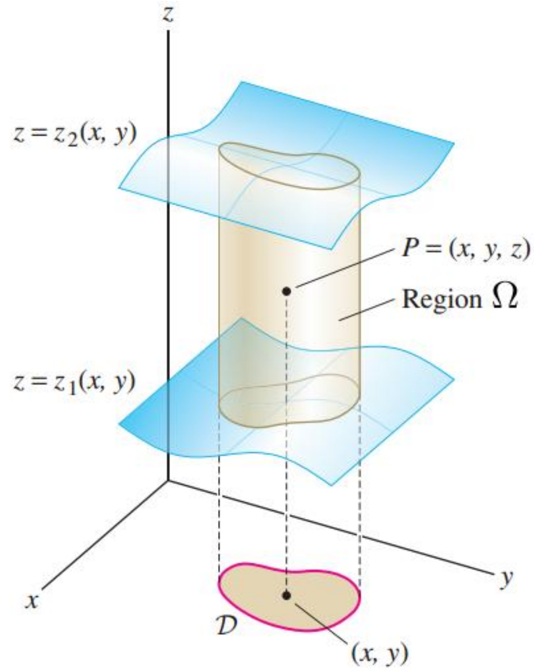
2.2.2 Biểu diễn miền

A. Miền loại I (nhìn theo hướng Oz)

Miền Ω được gọi là miền loại 1 nếu nó nằm giữa đồ thị của 2 hàm liên tục của biến x, y

$$\Omega = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\,D, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$$

trong đó, D là miền trong mặt phẳng Oxy



Khi đó

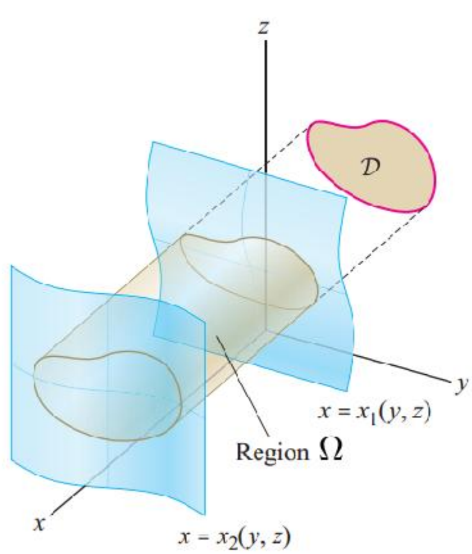
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\left(x,y,z\right)dzdxdy.$$

B. Miền loại II (nhìn theo hướng Ox)

Miền Ω được gọi là miền loại 2 nếu nó nằm giữa đồ thị của 2 hàm liên tục của biến y, z

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,|\,(y,z)\,D, x_1\left(y,z\right) \leq x \leq x_2\left(y,z\right)\right\}$$

trong đó, D là miền trong mặt phẳng Oyz



Khi đó

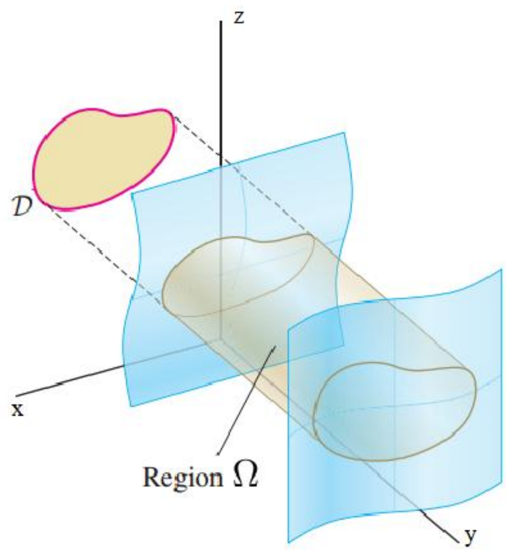
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

C. Miền loại III (nhìn theo hướng Oy)

Miền Ω được gọi là miền loại 3 nếu nó nằm giữa đồ thị của 2 hàm liên tục của biến x, z

$$\Omega = \{(x,y,z) \,|\, (x,z)\, D, y_1\left(x,z\right) \le y \le y_2\left(x,z\right)\}$$

trong đó, D là miền trong mặt phẳng Oxz



Khi đó

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f\left(x,y,z\right)dydxdz.$$

Chú ý:

1. Miền D trong các trường hợp trên là *hình chiếu* của Ω lên mặt phẳng tương ứng.

2. Việc tính tích phân bội ba được đưa về việc tính tích phân lặp, và ta *thường phải vẽ* miền lấy tích phân, tuy nhiên, việc vẽ miền lấy tích phân không phải lúc nào cũng dễ dàng.

3. Cần chú ý trường hợp miền Ω chỉ gồm hai mặt giới hạn $z = g(x,y)$ và $z = h(x,y)$. Khi đó, mục tiêu là chuyển về tích phân bội 2 với

$g(x,y) \le z \le h(x,y)$ hoặc $h(x,y) \le z \le g(x,y)$

Bước 1: xác định miền D_{xy}

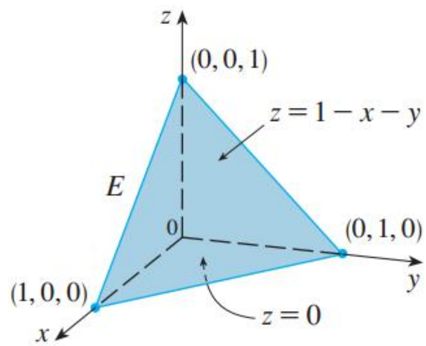
$\left\{\begin{array}{l}\text{giải } g\left(x,y\right) = h\left(x,y\right)\\ \text{kiểm tra các phương trình không chứa z}\end{array}\right. \Rightarrow$ biên D_{xy} (biên phải kín)

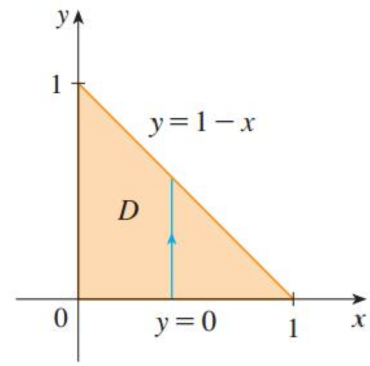
Vẽ miền $D_{x,y}$.

Bước 2: Lấy điểm $(x_0, y_0) \in D_{x,y} \Rightarrow g < h$ hoặc $g > h$.

Ví dụ 2.19. Tính $\iiint_{\Omega} zdxdydz$, trong đó Ω là khối lập phương giới hạn bởi các mặt $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Giải





Ta có

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

trong đó

$$D = \{(x, y) \,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}.$$

Suy ra

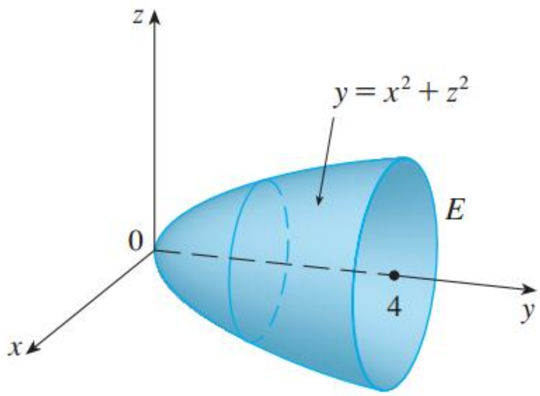
$$\Omega = \{(x, y, z) \,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}.$$

Vậy

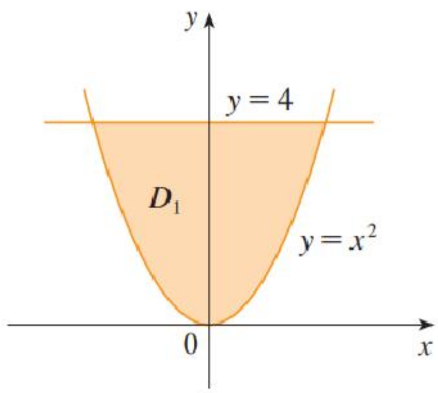
$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} zdxdydz &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} zdzdydx \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dydz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 dydz \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dz = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x)^3 dz \\
&= \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.20. Tính tích phân $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi parabol $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

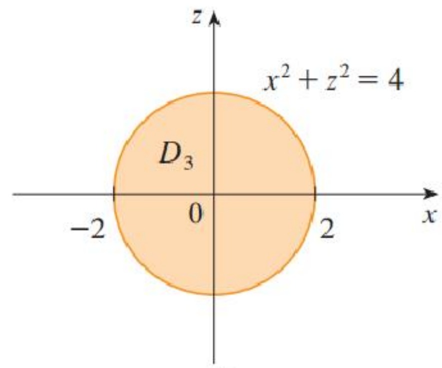
Giải



Cách 1: Viết Ω theo dạng miền loại 1



Hình chiếu Ω lên Oxy



Hình chiếu Ω lên Oxz

Ta có: $\Omega = \left\{(x,y,z)\,|\,-2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4, -\sqrt{y-x^2} \le z \le \sqrt{y-x^2}\right\}$.
Vậy

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+z^2}dxdydz = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{x^2}^{4}\int\limits_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}dzdydx.$$

(ta thấy tích phân trên tính khó !!!)

Cách 2: Viết Ω theo dạng miền loại 3

Ta có:

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,|\,(x,z) \in D_{xz}, x^2+z^2 \le y \le 4\right\},$$

trong đó $D_{xz} = \left\{(x,z)\,|x^2+z^2 \le 4\right\}$

Vậy

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+z^2}dxdydz = \iint\limits_{D_{xz}} \int\limits_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}dzdxdy = \iint\limits_{D_{xz}} \left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}dxdy.$$

Đổi biến, $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Ta có

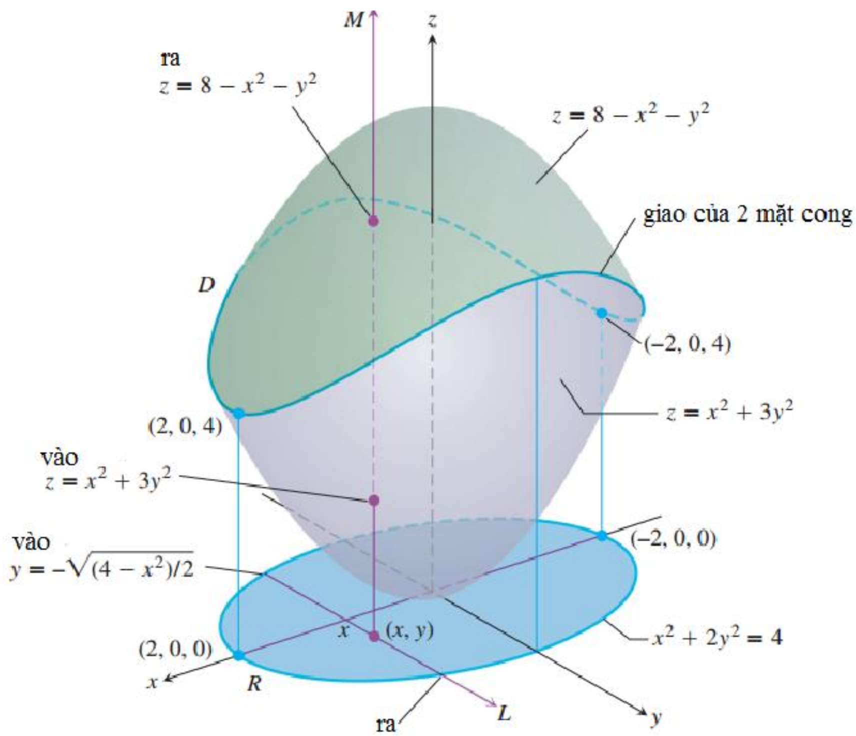
- $|J| = r$,
- $D_{r\varphi} = \{(r,\varphi)\,|\,0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 2\}$.

Suy ra

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4 - r^2\right) r dr d\varphi = \frac{128}{15}\pi.$$

Ví dụ 2.21. Tìm thể tích miền Ω giới hạn bởi 2 mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 8 - x^2 - y^2$.

Giải



Ta có $8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$ suy ra

$$D_{xy} = \left\{(x,y)\,|x^2 + 2y^2 \le 4\right\}.$$

Lấy $(x,y) \in D$, ta thấy $z = 8 - x^2 - y^2 \ge z = x^2 + 3y^2$, nên ta có

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in D_{xy}, x^2 + 3y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\right\}.$$

Suy ra

$$V_\Omega = \iint\limits_{D_{xy}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} 1 dz dx dy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(8 - 2x^2 - 4y^2\right) dx dy = \cdots = 8\pi\sqrt{2}.$$

2.2.3 Phương pháp đổi biến tổng quát

Bước 1: Đặt $\begin{cases} x = x\left(u,v,w\right) \\ y = y\left(u,v,w\right) \\ z = z\left(u,v,w\right) \end{cases}$

Bước 2: Đổi miền $\Omega_{xyz} \Rightarrow \Omega_{uvw}$

Bước 3: Tính

$$J = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bước 4:

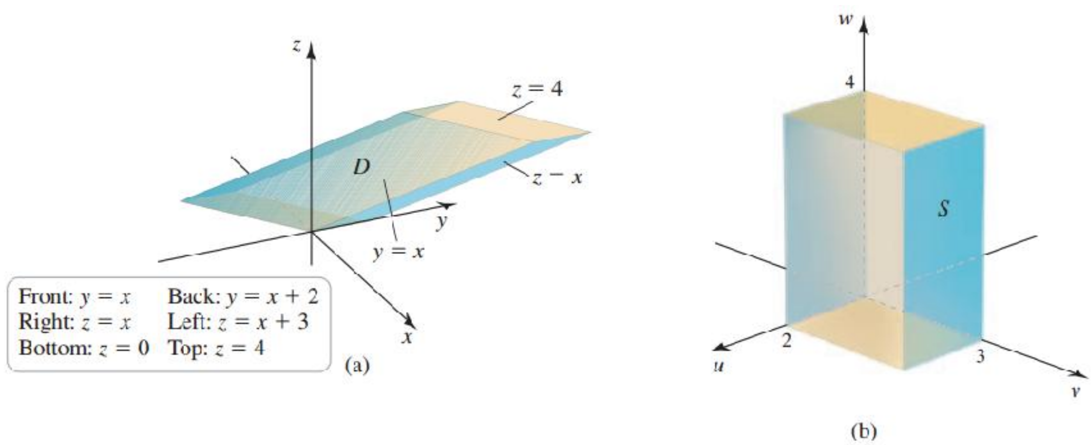
$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw.$$

Chú ý: Nếu đặt $\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$, thì $J = \frac{1}{\frac{\partial (u,v,w)}{\partial (x,y,z)}}$.

Ví dụ 2.22. Tính tích phân $\iiint\limits_{\Omega} (xz)dxdydz$, với Ω là miền giới hạn bởi các mặt

$$y = x, \quad y = x+2; \quad z = x; \quad z = x+3; \quad z = 0; \quad z = 4$$

Giải



Nhận xét: ta thấy

- $y - x = 0$ và $y - x = 2$
- $z - x = 0$ và $z - x = 3$
- $z = 0$ và $z = 4$.

Đặt

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = z - x \\ w = z \end{cases} (*) \Rightarrow \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 3 \\ 0 \le w \le 4 \end{cases}$$

Vậy $\Omega_{uvw} = \{(u,v,w)\,|0 \le u \le 2, 0 \le v \le 3, 0 \le w \le 4\}$

Từ $(*)$, ta có

$$\begin{cases} x = w - v \\ y = u - v - w \\ z = w \end{cases}$$

Suy ra

$$J = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Vậy

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} xzdxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} \left(w^2 - vw\right).\left|J\right|.dudvdw$$
$$= \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 \left(w^2 - vw\right).1.dudvdw$$
$$= ... = 56.$$

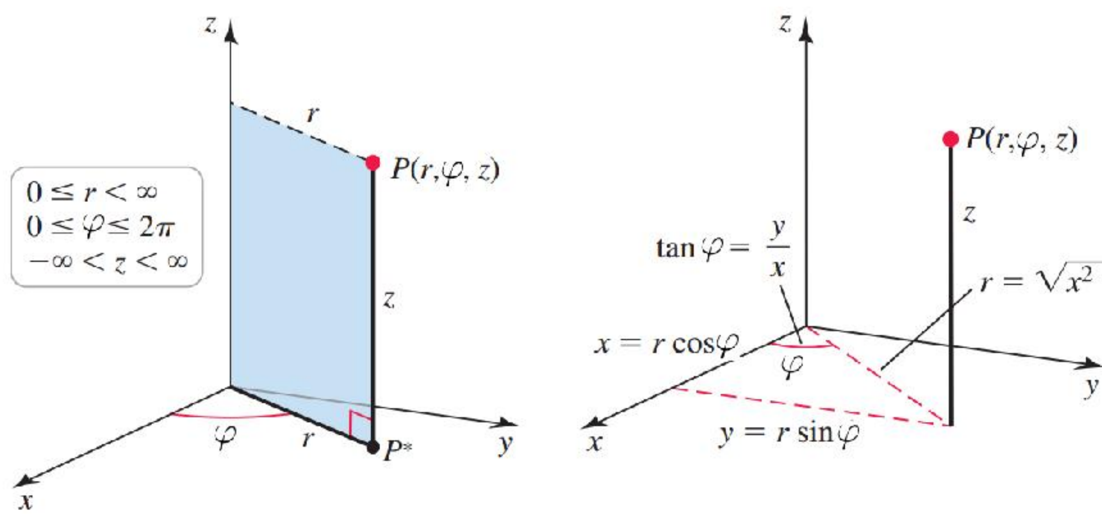
2.2.4 Đổi biến trong tọa độ trụ

▷ Tọa độ trụ

Trong hệ tọa độ trụ, điểm P trong $\mathbb{R}^3$ được mô tả bởi 3 tọa độ (r, φ, z), trog đó

r là độ dài hình chiếu của OP lên mặt Oxy,

φ là góc tạo bởi hình chiếu của OP lên mặt Oxy với tia Ox, chiều dương ngược chiều kim đồng hồ.



Biến đổi giữa hệ tọa độ trụ và Descartes

Descartes ⇒ Tọa độ trụ	Tọa độ trụ ⇒ Descartes
$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\varphi = y/x \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

▷ Đổi biến

Bước 1: Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$$

Bước 2: Đổi miền $\Omega_{xyz} \Rightarrow \Omega_{r\varphi z}$

φ: quét đáy,

r: tìm r "vào, ra" đáy,

z: tìm z trên , dưới.

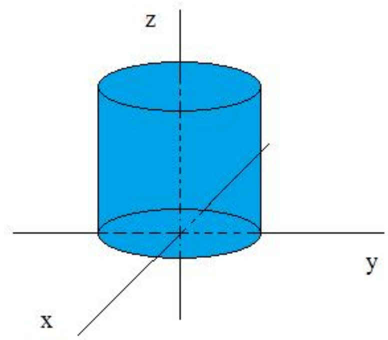
Bước 3: ta có $|J| = r$.

Bước 4:

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega_{r\varphi z}} f(rcos\varphi, rsin\varphi, z).\mathbf{r}.drd\varphi dz.$$

Ví dụ 2.23. Tính $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)zdxdydz$, với Ω được giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=1, z=0, z=2$.

Giải



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

Đổi miền $\Omega_{xyz} \Rightarrow \Omega_{r\varphi z}$

- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
- $0 \leq r \leq 1$
- $0 \leq z \leq 2$

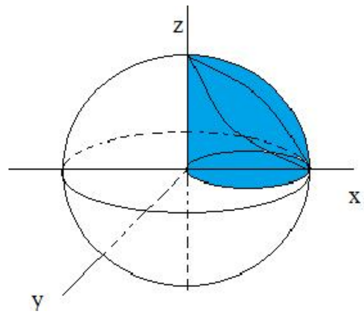
Ta có $|J| = r$.

Vậy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega_{xyz}}(x^2+y^2)dxdydz &= \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi z}}(r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi)rdrd\varphi dz \\ &= \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 r^3dzd\varphi dr \\ &= \cdots \\ &= \pi\,(???)\,.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.24. Tính $\iiint_{\Omega} dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi $z \geq 0, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

Giải



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \quad (*) \\ z = z \end{cases}$

Đổi miền $\Omega_{xyz} \Rightarrow \Omega_{r\varphi z}$

- $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$
- Thay $(*)$ vào $x^2 + y^2 = 2x$, ta được $r = 2cos\varphi$, ruy ra $0 \leq r \leq 2cos\varphi$
- Thay $(*)$ vào $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, ta được $z = \sqrt{4 - r^2}$, ruy ra $0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$

Ta có $|J| = r$.

Vậy

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} dxdydz &= \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi z}} rdrd\varphi dz \\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2cos\varphi} \int\limits_{0}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\varphi \\
&= \cdots \\
&= \frac{8}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)(???)\,.
\end{aligned}$$

Chú ý: việc đổi biến trong tọa độ trụ "giống" việc ta đưa tích phân bội 3 về bội 2 và dùng đổi biến trong tọa độ cực.

2.2.5 Đổi biến trong tọa độ cầu

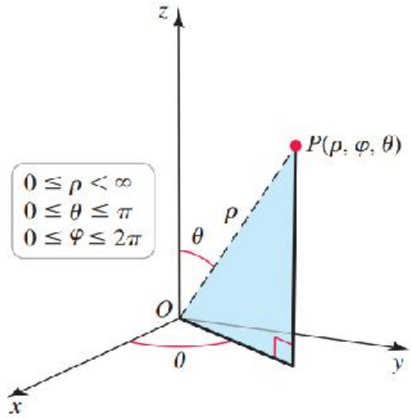
▷ Tọa độ cầu

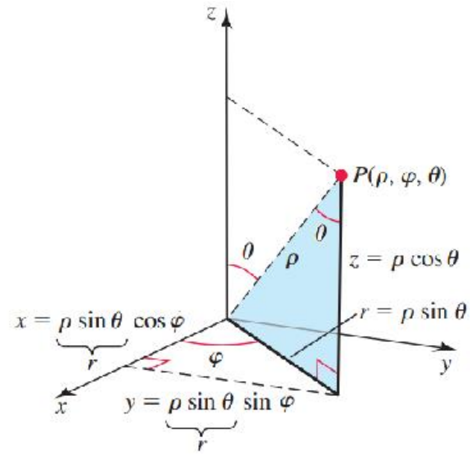
Trong tọa độ cầu, điểm P trong $\mathbb{R}^3$ được mô tả bởi 3 tọa độ (p, φ, θ), trong đó

p là khoảng cách từ P đến gốc tọa độ O,

φ là góc tạo bởi hình chiếu của OP lên mặt Oxy với tia Ox, chiều dương ngược chiều kim đồng hồ.

θ góc giữa tia Oz và OP.





Biến đổi giữa hệ tọa cầu và Descartes

Descartes $\Rightarrow$ Tọa độ cầu	Tọa độ cầu $\Rightarrow$ Descartes
$\begin{cases} p^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \cos\theta = z/p \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{p.\sin\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} x = p\sin\theta\cos\varphi \\ y = p\sin\theta\sin\varphi \\ z = p\cos\theta \end{cases}$

$\triangleright$ **Đổi biến**

Bước 1: Đặt

$$\begin{cases} x = p\sin\theta\cos\varphi \\ y = p\sin\theta\sin\varphi \\ z = p\cos\theta \end{cases} \qquad 0 \le p < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta < \pi$$

Bước 2: Đổi miền $\Omega_{xyz} \Rightarrow \Omega_{p\varphi\theta}$

φ: quét đáy,

θ: quét thẳng đứng từ trên xuống,

p: tìm p "vào", "ra" khối.

Bước 3: ta có $|J| = p^2 sin\theta$.

Bước 4;

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\theta}} f(psin\theta cos\varphi, psin\theta sin\varphi, pcos\theta).\mathbf{p^2 sin}\theta.dpd\theta d\varphi.$$

Chú ý:

1. Nếu Ω có dạng ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ ta đặt

$$\begin{cases} x = ap\sin\theta\cos\varphi \\ y = bp\sin\theta\sin\varphi \\ z = cp\cos\theta \end{cases}$$

khi đó $|J| = abcp^2 sin\theta$.

2. Nếu Ω có dạng mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, ta đặt

$$\begin{cases} x = a + p\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + p\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + p\cos\theta \end{cases}$$

khi đó $|J| = p^2 sin\theta$, p, φ, θ xác định theo $I(a,b,c)$.

Ví dụ 2.25. Tính $\iiint\limits_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$, với $\Omega = \left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$

Giải

Đặt

$$\begin{cases} x = p\sin\theta\cos\varphi \\ y = p\sin\theta\sin\varphi \quad (*) \\ z = p\cos\theta \end{cases}$$

Đổi miền $\Omega_{xyz} \Rightarrow \Omega_{p\varphi\theta} = \{(p,\varphi,\theta)\,|0 \le p \le 1, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta < \pi\}$

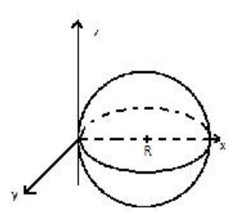
Ta có $|J| = p^2 sin\theta$

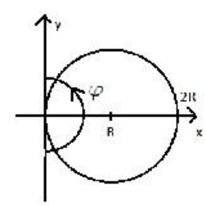
Vậy

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz &= \iiint\limits_{\Omega_{p\varphi\theta}} e^{(p^2)^{3/2}}.p^2\sin\theta.dpd\varphi d\theta \\ &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} p^2 e^{p^3}\sin\theta dpd\varphi d\theta \\ &= \left(\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int\limits_0^{1}p^2e^{p^3}dp\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(e-1\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.26. Tính $\iiint_{\Omega} dxdydz$, với Ω là hình cầu tâm $I(R,0,0)$, bán kính R.

Giải





Phương trình hình cầu tâm $(R,0,0)$ bán kính R là

$$(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

hay

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx.$$

Đặt $\begin{cases} x = p\sin\theta\cos\varphi \\ y = p\sin\theta\sin\varphi \\ z = p\cos\theta \end{cases}$

Ta có $|J| = p^2 sin\theta$.

Tìm p, φ, θ

- $0 \le \theta \le \pi$,
- $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$,

- Thay x, y, z vào $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$

$$(p\sin\theta\cos\varphi)^2 + (p\sin\theta\sin\varphi)^2 + (p\cos\theta)^2 = 2Rp\sin\theta\cos\varphi$$
$$p = 2R\sin\theta\cos\varphi$$

Suy ra $0 \le p \le 2R\sin\theta\cos\varphi$

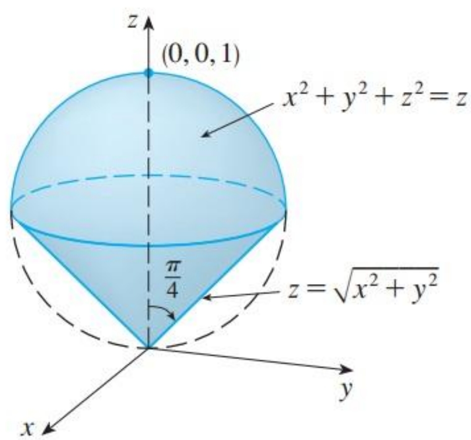
Vậy $\Omega = \left\{(p, \varphi, \theta)\,|0 \le \theta \le \pi, -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le p \le 2R\sin\theta\cos\varphi\right\}$

Suy ra

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{p\varphi\theta}} (p^2 sin\theta)dpd\varphi d\theta$$
$$= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2R\sin\theta\cos\varphi} p^2 sin\theta dpd\varphi d\theta$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$

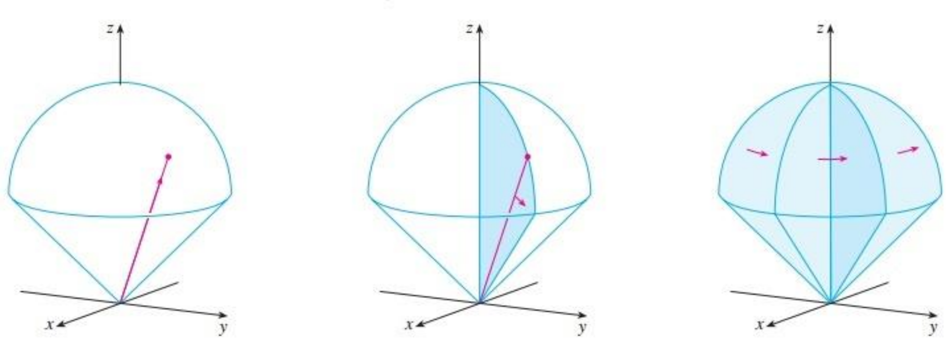
Ví dụ 2.27. Tính $\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$ với Ω nằm trên nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Giải



Đặt $\begin{cases} x = p\sin\theta\cos\varphi \\ y = p\sin\theta\sin\varphi \\ z = p\cos\theta \end{cases}$

Ta có $|J| = p^2 sin\theta$



Tìm p, φ, θ

- $0 \le \varphi \le 2\pi$

- $0 \le \theta$,
$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$
$\Rightarrow (p\cos\theta)^2 = (p\sin\theta\cos\varphi)^2 + (p\sin\theta\sin\varphi)^2$
$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$
$\Rightarrow 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$
- $0 \le p$,
$x^2+y^2+z^2 = z \Rightarrow (p\sin\theta\cos\varphi)^2 + (p\sin\theta\sin\varphi)^2 + (p\cos\theta)^2 = p\cos\theta$
$\Rightarrow p = \cos\theta$
$\Rightarrow 0 \le p \le \cos\theta$

Vậy $D = \left\{ (p,\varphi,\theta) \,|0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{4}, 0 \le p \le \cos\theta \right\}$
Suy ra

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\cos\theta} p.p^2\sin\theta dpd\theta d\varphi = \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{2}}{80}\right)\pi.$$

2.2.6 Ứng dụng của tích phân bội 3

A. Tính thể tích vật $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dxdydz.$$

B. Ứng dụng cơ học Cho vật $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, có khối lượng riêng là $\rho(x,y,z)$, ta có

Khối lượng vật Ω : $m = \iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với Ox: $M_x = \iiint\limits_\Omega \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với Oy: $M_y = \iiint\limits_\Omega \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với Oz: $M_z = \iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với Oxz: $M_{Oxz} = \iiint\limits_\Omega y^2\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với Oyz: $M_{Oyz} = \iiint\limits_\Omega x^2\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với Oxy: $M_{Oxy} = \iiint\limits_\Omega z^2\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen quán tính đối với gốc O: $M_O = \iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$,

Momen tĩnh đối với Oxz: $M_{Oxz} = \iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)\,dxdydz$, Momen tĩnh đối với Oyz: $M_{Oyz} = \iiint\limits_{\Omega} x\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$

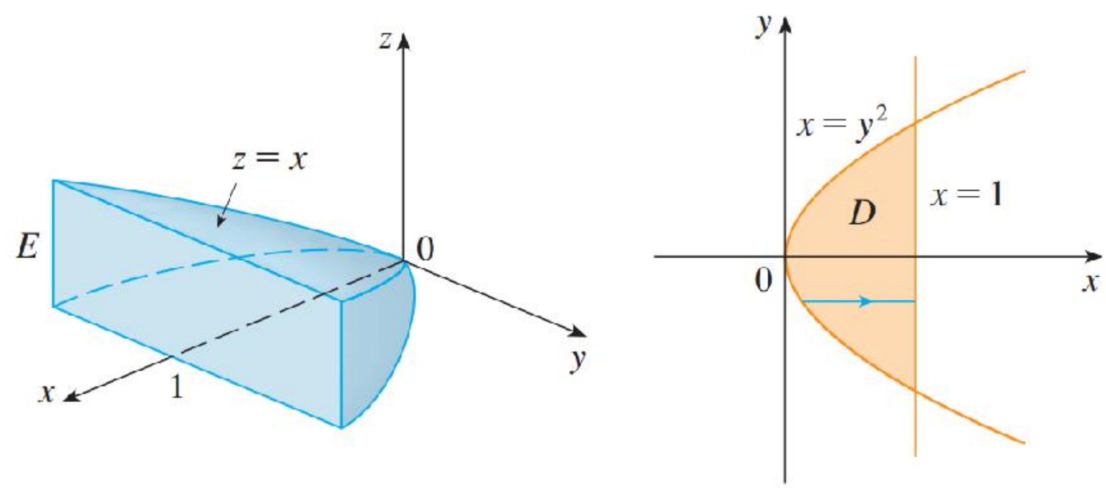
Momen tĩnh đối với Oxy: $M_{Oxy} = \iiint\limits_{\Omega} z\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$

Tọa độ trọng tâm $G(x_G, y_G)$: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} x\rho\left(x,y,z\right)dxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} y\rho\left(x,y,z\right)dxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} z\rho\left(x,y,z\right)dxdydz \end{cases}.$

Ví dụ 2.28. .

Tìm khối tâm của hình khối có mật độ không đổi, bị giới hạn bởi mặt trụ $x = y^2$ và các mặt phẳng $x = z,\ z = 0,$ và $x = 1$.

Giải. Dành cho sinh viên.



2.3 Bài tập

Bài tập 2.1. Biểu diễn các miền D sau dưới dạng đơn giản, tính diện tích miền D và tích phân $\iint_D f(x,y)dxdy$ với

1. D là hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 2, x = 3, y = 4, y = 6, f(x,y) = x + y$.
2. D giới hạn bởi $y = 2x, x = 0, y = 4, f(x,y) = x$.
3. D giới hạn bởi $x = 4 - y^2, x = 0, -1 \leq y \leq 1, f(x,y) = xy^2$.
4. D là hình thang giới hạn bởi $x = 0, y = 0, y = 3, x + y = 4, f(x,y) = x$.
5. D là tam giác giới hạn bởi $x = 0, y = 0, x + y = 2, f(x,y) = x(x-1)e^{xy}$.
6. D giới hạn bởi $y = x + 5, y = 7 - x, x = 10, f(x,y) = 3x - 5$.
7. D là miền $|x| + |y| \leq 1, f(x,y) = x$.
8. D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 16$ nằm trong góc phần tư thứ hai, $f(x,y) = x$.
9. D là miền nằm phía trên đường $y = \dfrac{1}{2}$ và nằm trong vòng tròn $x^2 + y^2 = 1, f(x,y) = x\sqrt{y^2+1}$.
10. $D = [0,4] \times [1,3], f(x,y) = xy$.
11. $D = [-2,2] \times [0,1].f(x,y) = x - y$.
12. D là hình tròn $x^2 + y^2 = 4$ nằm trong góc phần tư thứ nhất, $f(x,y) = x^2 + y$.

Bài tập 2.2. Tính tích phân $\int\limits_0^5 f(x,y)\,dx$ và $\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$

1. $f(x,y) = 12x^2y^3$
2. $f(x,y) = y + xe^y$

Bài tập 2.3. Tính các tích phân sau

1. $\int\limits_1^3 \int\limits_0^1 (1 + 4xy)\,dxdy$
2. $\int\limits_0^3 \int\limits_0^2 \left(4 - y^2\right) dydx$
3. $\int\limits_{-1}^0 \int\limits_{-1}^1 (x + y + 1)\,dxdy$
4. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (\sin x + \cos y)\,dydx$
5. $\int\limits_0^1 \int\limits_1^2 \dfrac{xe^x}{y}dydx$
6. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^3 e^{x+3y}dxdy$

7. $\int\limits_1^4 \int\limits_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dydx$

8. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2} dydx$

9. $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^x x \sin(y) \, dydx$

10. $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\sin(x)} ydydx$

11. $\int\limits_1^2 \int\limits_y^{y^2} dxdy$

12. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dxdy$

Bài tập 2.4. Hãy đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân kép sau

1. $\int\limits_{-2}^2 \int\limits_{x^2}^4 f(x, y) \, dydx$

2. $\int\limits_1^3 \int\limits_0^{2y} f(x, y) \, dxdy$

3. $\int\limits_0^1 \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dxdy$

4. $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dydx$

5. $\int\limits_{-6}^2 \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) \, dydx$

6. $\int\limits_1^2 \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dydx$

7. $\int\limits_1^e \int\limits_0^{\ln(x)} f(x, y) \, dydx$

Bài tập 2.5. Tính các tích phân sau

1. $\iint_D \frac{x}{1 + xy} dxdy, D = [0, 1] \times [0, 1]$

2. $\iint_D x\sin(x+y)\,dxdy, D = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

3. $\iint_D \left(6x^2y^3 - 5y^4\right) dxdy, D = \{(x,y)\,|0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$

4. $\iint_D \cos(x+2y)\,dxdy, D = \left\{(x,y)\,|0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

5. $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+1} dxdy, D = \{(x,y)\,|0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$

6. $\iint_D \frac{1+x^2}{1+y^2} dxdy, D = \{(x,y)\,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

Bài tập 2.6. Tính các tích phân sau

1. $\iint_D xdxdy, D = \{(x,y)\,|0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin(x)\}$

2. $\iint_D x^3dxdy, D = \{(x,y)\,|0 \le x \le e, 0 \le y \le \ln(x)\}$

3. $\iint_D x\sqrt{y^2-x^2}dxdy, D = \{(x,y)\,|0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$

4. $\iint_D y^3dxdy$, D là hình tam giác có đỉnh $(0,2),(1,1),(3,2)$

5. $\iint_D 2xydxdy$, D là hình tam giác có đỉnh $(0,0),(1,2),(0,3)$

6. $\iint_D (x+y)(x-y)\,dxdy$ D là hình vuông có đỉnh $(0,2),(1,1),(2,2),(1,3)$

7. $\iint_D xydxdy$ D là hình vuông có đỉnh $(0,0),(1,1),(2,0),(1,-1)$

8. $\iint_D xcos(y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y=0, y=x^2, x=1$

9. $\iint_D (x+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y=\sqrt{x}, y=x^2$

10. $\iint_D xy^2dxdy$, D là miền giới hạn bởi $x=0, x=\sqrt{1-y^2}$

11. $\iint_D (cos(2x)+sin(y))dxdy$, D là miền giới hạn bởi $x=0, y=0, 4x+4y-\pi=0$

12. $\iint_D (x+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $|x|+|y| \le 2$

13. $\iint_D (|x|+|y|)dxdy$, DD là miền giới hạn bởi $|x|+|y| \le 1$

14. $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, D là miền giới hạn bởi $|x| \le 1, 0 \le y \le 2$

15. $\iint_D xdxdy$, D là hình thang giới hạn bởi $x=0, y=0, x+y=2$

16. $\iint_D (3x-5)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y=x+5, y=-x+7, x=10$

17. $\iint_D x\sqrt{y^2+1}dxdy$, D là miền phía trên đường $y=1/2$ và nằm trong đường tròn $x^2+y^2=1$

18. $\iint_D (x^2+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $x^2+y^2=4$ và nằm trong góc phần tư thứ nhất

19. $\iint_D xdxdy$, D là miền nằm trong đường tròn $x^2+y^2=16$ và nằm trong góc phần tư thứ hai

20. $\iint_D (2x^2y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các miền $y=x, y=-x, y=2-x^2$

Bài tập 2.7. Tính các tích phân sau (đổi biến)

1. $\iint_D \frac{y}{x}dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường cong $xy=1, xy=2, y=x, y=3x$ (lấy trong miền $x,y\geq 0$)

2. $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x+y=1, x-y=1, x+y=3, x-y=-1$

3. $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y^2=x, y^2=2x, xy=1, xy=4$

4. $\iint_D xydxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y^2=x, y^2=2x, x=y, y=2x$

5. $\iint_D arcsin\sqrt{x+y}dxdy$, D giới hạn bởi các đường $x+y=0, x+y=1, y=-1, y=1$

6. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, $D=\left\{(x+y)\,|x^2+y^2\leq 4, x\geq 0\right\}$

7. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, $D=\left\{(x+y)\,|x^2+y^2\leq 2x, y\geq 0\right\}$

8. $\iint_D xydxdy$, D là miền giới hạn bởi đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính 3.

9. $\iint_D (x+y)dxdy$, D là miền nằm bên trái Oy, và nằm trong hình vành khăn $x^2+y^2=1$ và $x^2+y^2=4$

10. $\iint_D cos(x^2+y^2)dxdy$, D là miền nằm bên trên Ox và bên trong đường tròn $x^2+y^2=9$

11. $\iint_D ye^xdxdy$, D là miền nằm bên trong góc phần tư thứ nhất và bên trong đường tròn $x^2+y^2=25$

12. $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, D là miền giới hạn bởi $x=\sqrt{4-y^2}$ và trục Oy

13. $\iint_D xdxdy$, D là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất và nằm giữa đường tròn $x^2+y^2=4$ và $x^2+y^2=2x$

14. $\iint_D arctan(y/x)dxdy$, $D=\left\{(x+y)\,|0\leq x^2+y^2\leq 4, 0\leq y\leq x\right\}$

15. $\iint_D \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D giới hạn bởi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$

16. $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D=\left\{(x,y)\,|\frac{\pi^2}{16}\leq x^2+y^2\leq\frac{\pi^2}{9}\right\}$

17. $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

18. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dxdy$

19. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \int\limits_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

20. $\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dydx$

21. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right) dydx$

Bài tập 2.8. Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường cong sau

1. $x = y^2 - 2y, x + y = 0$
2. $y = lnx, x = y + 1, y = -1$
3. $x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 4x$
4. $y = -x^2 + 4x, y = 2x^2 - 5x$

Bài tập 2.9. 1. Tính diện tích phần mặt parabol $x = 1 - y^2 - z^2$ nằm phía trong hình trụ $y^2 + z^2 = 1$

2. Tính diện tích phần mặt phẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ bị chặn bởi các mặt phẳng tọa độ
3. Tính diện tích phần mặt cầu nằm giữa hai mặt phẳng $z = \frac{\sqrt{3}y}{3}$ và $z = y$
4. Tính diện tích phần mặt trụ $y^2 = 2x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$
5. Tính diện tích của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

Bài tập 2.10. Tìm khối lượng và trọng tâm của bản phẳng đồng chất

1. D là tam giác giới hạn bởi $x = 0, y = x, 2x + y = 6$ và $\rho(x, y) = x^2$
2. D giới hạn bởi $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$ và $\rho(x, y) = y$
3. D giới hạn bởi $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$ và $\rho(x, y) = x$
4. D giới hạn bởi parabol $y = x^2$, $x = y^2$ và $\rho(x, y) = \sqrt{x}$

Bài tập 2.11. Tính tích phân lặp

1. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{z} \int\limits_{0}^{x+z} 6xzdydxdz$
2. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{x}^{2x} \int\limits_{0}^{y} 2xyzdzdydx$
3. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{z} \int\limits_{0}^{y} ze^{-y^2} dxdydz$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y}\int_0^{x}\cos(x+y+z)\,dydxdz$

5. $\displaystyle\iiint_\Omega \sin^{100}x.\ln(y+z)\,dxdydz, \Omega = \{(x,y,z)\,|0\le x\le 2\pi, 1\le y\le e, 1\le z\le e\}$

6. $\displaystyle\iiint_\Omega \left(x^3ye^z\right)dxdydz, \Omega = \{(x,y,z)\,|1\le x\le 2, 1\le y\le 1, 0\le z\le \ln 2\}$

7. $\displaystyle\iiint_\Omega (x+y+z)\,dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi các mặt $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

Bài tập 2.12. Tính tích phân sau

1. $\displaystyle\iiint_\Omega 2xdxdydz$, trong đó $E=\left\{(x,y,z)\,|0\le y\le 2, 0\le x\le\sqrt{4-y^2}, 0\le z\le y\right\}$

2. $\displaystyle\iiint_\Omega yzcos(x^5)dxdydz$, trong đó $E=\{(x,y,z)\,|0\le x\le 1, 0\le y\le x, x\le z\le 2x\}$

3. $\displaystyle\iiint_\Omega 6xydxdydz$, trong đó Ω nằm bên dưới mặt $z=1+x+y$ và bên trên miền thuộc mặt phẳng Oxy giới hạn bởi các đường cong $y=\sqrt{x}, y=0$ và $x=1$

4. $\displaystyle\iiint_\Omega ydxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi các mặt $x=0, y=0, z=0$ và $2x+2y+z=4$

5. $\displaystyle\iiint_\Omega x^2e^ydxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi các mặt $z=1-y^2, z=0, x=1$ và $x=-1$

6. $\displaystyle\iiint_\Omega xydxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi các mặt $y=x^2, x=y^2$ và $z=0, z=c+y$

7. $\displaystyle\iiint_\Omega x^2dxdydz$, trong đó Ω là tứ diện có các đỉnh $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ và $(0,0,1)$

8. $\displaystyle\iiint_\Omega xyzdxdydz$, trong đó Ω là tứ diện có các đỉnh $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)$ và $(1,0,1)$

9. $\displaystyle\iiint_\Omega xdxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi $x=4y^2+4z^2$ và mặt $x=4$

10. $\displaystyle\iiint_\Omega zdxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi mặt trụ $y^2+z^2=9$, $x=0, y=3x$ và $z=0$ trong góc phần tám thứ nhất.

Bài tập 2.13. Dùng tích phân bội 3, tính thể tích

1. Tứ diện giới hạn bởi các mặt tọa độ và mặt $2x+y+z=4$
2. Khối giới hạn bởi $y=x^2$ và các mặt $z=0, z=4, y=9$
3. Khối giới hạn bởi $x^2+y^2=9$ và mặt $y+z=5$ và $z=1$
4. Khối giới hạn bởi $x=y^2+z^2$ và $x=16$

Bài tập 2.14. Dùng tọa độ trụ, tính

1. $\displaystyle\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó Ω là miền nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=16$ và nằm giữa mặt $z=-5$ và $z=4$

2. $\iiint_{\Omega}(x^3+xy^2)dxdydz$, trong đó Ω là miền trong góc phần tám thứ nhất và nằm bên dưới parabol $z=1-x^2-y^2$

3. $\iiint_{\Omega} e^z dxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi $z=1+x^2+y^2$, mặt trụ $x^2+y^2=5$ và mặt phẳng Oxy

4. $\iiint_{\Omega} xdxdydz$, trong đó Ω là miền giới hạn bởi mặt $z=0$, $z=x+y+5$ và mặt trụ $x^2+y^2=4$ và $x^2+y^2=9$

5. $\iiint_{\Omega} x^2dxdydz$, trong đó Ω là miền nằm trong hình trụ $x^2+y^2=1$, nằm trên $z=0$, nằm dưới $z^2=4x^2+4y^2$

6. Tính thể tích khối nằm trong cả hai khối $x^2+y^2=1$ và khối cầu $x^2+y^2+z^2=4$

Bài tập 2.15. Dùng tọa độ cầu, tính

1. $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^2dxdydz$, trong đó Ω là quả cầu tâm O bán kính 5.

2. $\iiint_{\Omega}(9-x^2-y^2)dxdydz$, trong đó Ω là bán cầu rắn $x^2+y^2+z^2\leq 9$ và $z\geq 0$

3. $\iiint_{\Omega} zdxdydz$, trong đó Ω nằm giữa các mặt $x^2+y^2+z^2=1$ và $x^2+y^2+z^2=4$ và trong góc phần tám thứ nhất

4. $\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi mặt $x^2+y^2+z^2=9$ trong góc phần tám thứ nhất

5. $\iiint_{\Omega} x^2dxdydz$, trong đó Ω giới hạn bởi mặt Oxz và $y=\sqrt{9-x^2-y^2}$ và $y=\sqrt{16-x^2-z^2}$

6. Thể tích của khối nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$, trên mặt Oxy, dưới nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Bài tập 2.16. Tìm thể tích khối

1. Giới hạn bởi mặt $y=x^2$, và các mặt phẳng $z=0, z=0$ và $y=9$.

2. Nằm trong hình trụ $x^2+y^2=9$ và nằm giữa hai mặt $z=0, z=2x+1, (x\geq 0)$.

3. Giới hạn bởi Parabol $x=y^2+z^2$ và $x=16$.

4. Nằm trong hình trụ $x^2+y^2=9$ và nằm giữa mặt $z=0, z=x^2+y^2$

5. Giới hạn bởi các mặt $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=x$ và $x^2+y^2=2x$.

Bài tập 2.17. Tìm

1. Tọa độ trọng tâm của vật giới hạn bởi $2x+3y-12=0, x=0, y=0, z=0, z=\dfrac{y^2}{2}$ và $\rho=1$.

2. Tọa độ trọng tâm và moment quán tính của V giới hạn bởi $z=0$ và $z=1-x^2-2y^2$.

3. Khối lượng hình lập phương $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2, 0\leq z\leq 2$ biết $\rho(x,y,z)=x+y+z$.