XÁC SUẤT THỐNG KÊ A
(864001, 45 Tiết)
(Lý thuyết 30 , Bài tập 10, Thảo luận 5)

GV: Hoàng Đức Thắng
hdthang@sgu.edu.vn

Khoa Toán-Ứng dụng
Đại học Sài Gòn

2020

Nội dung - tài liệu

Nội dung
Chương 1: Đại cương về xác suất.
Chương 2: Biến ngẫu nhiên.
Chương 3: Một số phân phối xác suất thông dụng.
Chương 4: Lý thuyết mẫu và ước lượng tham số.
Chương 5: Kiểm định giả thuyết thống kê.

Tài liệu tham khảo

Lê Sĩ Đồng, *Xác suất thống kê và ứng dụng*, NXB Giáo Dục .
Lê Sĩ Đồng, *Bài tập Xác suất thống kê và ứng dụng*, NXB Giáo Dục.
Phạm Hoàng Quân, Đinh Ngọc Thanh, *Xác suất tống kê*, NXB Giáo dục.
... ...

Kiểm tra, đánh giá môn học

Điểm chuyên cần, hệ số 0.1:
- Đi học đầy đủ: 10đ
- Nghỉ 1 buổi, hoặc đi trễ 2 buổi: - 1đ
- Được vắng có phép 3 buổi.

Điểm kiểm tra giữa kỳ,các bài kiểm tra nhanh, hệ số 0.3:
- Tự luận, không dùng tài liệu.

Điểm kiểm tra cuối kỳ, hệ số 0.6:
- Tự luận, không dùng tài liệu.

Điểm cộng:
- Lên bảng 1 lần, làm đúng: + 0,5đ.
- Được cộng tối đa: 2đ.
- Nếu không ai lên bảng, GV gọi theo danh sách.
  Làm đúng + 0.5, làm sai hoặc không biết làm -0.5

Chương 1: Đại cương về xác suất

I. Tập hợp
1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm nguyên thủy, không có định nghĩa.

Sự gom góp một số đối tượng lại với nhau cho ta hình ảnh của tập hợp, và các đối tượng được gom góp này trở thành *phần tử* của tập hợp.

Ví dụ 1
Tập hợp các sinh viên trường ĐH Sài Gòn, khóa 2019.

1.2. Ký hiệu

- Tập hợp: $A, B, C, D, \ldots$
- Phần tử: $x, y, z, \ldots$
- $x \in A$: phần tử x thuộc tập A.
- $x \notin A$: phần tử x không thuộc tập A.
- $|A|$ hay $n(A)$: số phần tử của tập A.

1.3. Biểu diễn tập hợp

▷*Phương pháp liệt kê:* thường dùng khi các phần tử là hữu hạn, mỗi phần tử xuất hiện 1 lần, không chú ý thứ tự liệt kê.

Ví dụ 2

Cho $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Ta có
$1 \in A$; $2 \notin A$; $|A| = 5$.

Ví dụ 3

Tập các bội dương của 3 là

$$B(3) = \{3, 6, 9, 12, ...\}$$

▷*Phương pháp trưng tính:* nêu tính chất đặc trưng của các phần tử, thường dùng khi số phần tử là vô hạn.

Ví dụ 4

Tập các bội dương của 3 là

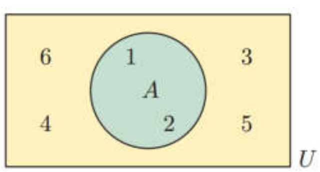
$$B(3) = \{x \in \mathbb{N} | x \vdots 3\}$$

$1 \notin B(3)$, $150 \in B(3)$, $|B(3)| = \infty$.

▷*Giản đồ Venn*

Với 1 đường con đơn khép kín, chia mặt phẳng thành hai miền.

Miền phía trong đường cong để liệt kê các phần tử của tập hợp, miền phía ngoài liệt kê các phần tử không thuộc tập hợp.

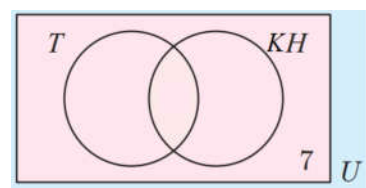


Ta có $1 \in A$, $3 \notin A$.

U =*không gian mẫu*

Ví dụ 5

Trong một lớp học gồm 100 sinh viên, có 35 SV thích khoa học, 45 SV thích toán, 10 SV thích cả hai. Hỏi có bao nhiêu người thích một trong hai môn và bao nhiêu SV không thích cả hai môn?



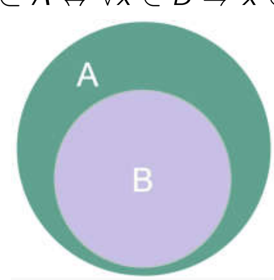
. . .

. . .

1.4. Quan hệ giữa các tập hợp

▷**Tập con:** Tập B được gọi là tập con của tập A, ký hiệu $B \subset A$, nếu mọi phần tử thuộc B đều thuộc A.

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$



▷**Hai tập bằng nhau:** $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

▷**Tập rỗng:** $\emptyset$

Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào.

Ví dụ 6

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} \Rightarrow A = \emptyset$.

Quy ước:

Tập $\emptyset$ là con của tất cả các tập.

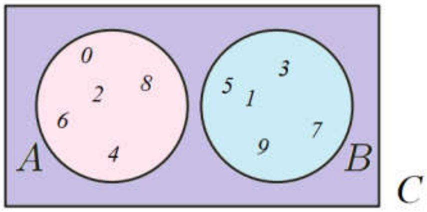
Tập $P(X)$ là tập tất cả các tập con của X.

$P(X) = \{A | A \subset X\}$.

$|P(X)| = 2^n$ với n là số phần tử của X.

Ví dụ 7

Cho
$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

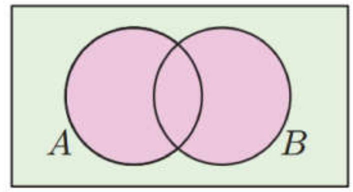


Ta có $A \subset C$; $B \subset C$; $A \not\subset B$.

1.5. Các phép toán trên tập hợp

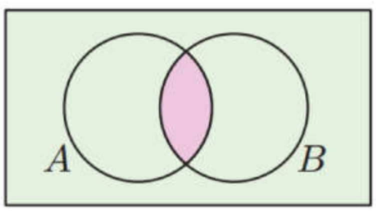
▷**Phép hội:** Hội của A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A và B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

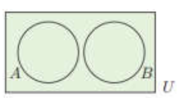


▷**Phép giao:** Giao của hai tập A và B là tập hợp tất cả các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$$

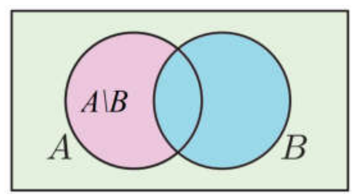


Nếu $A \cap B = \emptyset$, ta nói A và B rời nhau.



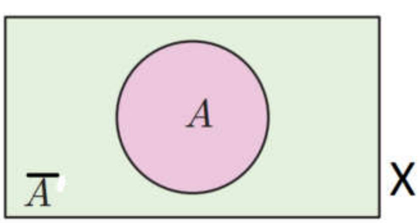
▷**Phép lấy hiệu:** Hiệu của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$$



▷**Phép lấy phần bù:** Phần bù của A trong X, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc X, nhưng không thuộc A.

$$\overline{A} = \{x \in X | x \notin A\}$$



Ví dụ 8

Cho

$X = \{1, 2, 3, 4, ..., 19, 20\}$
$A = \{1, 3, 5, 7, , 17, 19\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$
$C = \{1, 4, 5, 12, 15\}$

Tìm

1. $A \cup B; A \cup C, B \cup C, C \cup \emptyset$
2. $A \cap B; A \cap C; B \cap C; C \cap \emptyset$
3. $A \backslash B; A \backslash C; B \backslash A; B \backslash C; C \backslash A; C \backslash B; A \backslash A; A \backslash \emptyset$.
4. $\overline{A}; \overline{B}; \overline{C}$

1.6. Tính chất

▷**Luật phân phối:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

▷**Luật De Morgan:**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

▷ Nếu $A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = X$ và $B \subset X$, ta có

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

II. Các quy tắc đếm

2.1. Quy tắc cộng

Để hoàn thành 1 công việc ta có k *phương án*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Phương án 1 : } n_1 \text{ cách} \\ \text{Phương án 2 : } n_2 \text{ cách} \\ \cdots \\ \text{Phương án k : } n_k \text{ cách} \end{array}\right\} \Rightarrow n_1 + n_2 + \cdots + n_k \text{ cách}$$

Ví dụ 9

Có 6 quyển sách Toán, 5 quyển sách Lý, 4 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển bất kỳ trong 3 loại sách trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Ví dụ 10

Lớp XSTK có 45 SV nam, 35 SV nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 sinh viên lên bảng giải bài?

2.2. Quy tắc nhân

Để hoàn thành 1 công việc, ta phải *lần lượt hoàn thành k* bước

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bước 1 : } n_1 \text{ cách} \\ \text{Bước 2 : } n_2 \text{ cách} \\ \cdots \\ \text{Bước k : } n_k \text{ cách} \end{array}\right\} \Rightarrow n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k \text{ cách}$$

Ví dụ 11

Trong một đội văn nghệ gồm 8 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 đôi song ca nam nữ?

Ví dụ 12

Một biển số xe bao gồm phần chữ và số như hình.

Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 biển số xe.

2.3. Hoán vị

▷ **Hoán vị**

Xếp n vật vào n vị trí khác nhau có thứ tự hoặc đổi chỗ n vật cho nhau có: $n!$ cách.

Nhắc lại:

- $n! = 1.2.3.....(n-1).n$
- $0! = 1$
- $n!.(n+1) = (n+1)!$

▷ **Hoán vị tròn**

Xếp n vật trên 1 đường tròn theo một thứ tự nhất định có: $(n-1)!$ cách.

Ví dụ 13

Có bao nhiêu cách xếp 6 cuốn sách lên kệ, biết rằng hai cuốn sách A và B luôn nằm cạnh nhau.

Giải

A	B	×	×	×	×
B	A	×	×	×	×
×	A	B	×	×	×
×	B	A	×	×	×
×	×	A	B	×	×
×	×	B	A	×	×
×	×	×	A	B	×
×	×	×	B	A	×
×	×	×	×	A	B
×	×	×	×	B	A

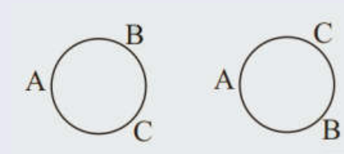
10

Cách 1:

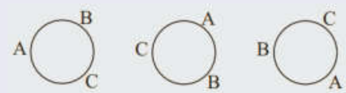
Cách 2:

Ví dụ 14

Xếp 3 ký tự A, B, C trên một đường thẳng ta có:
ABC ACB BAC BCA CAB CBA.
Xếp 3 ký tự A, B, C trên một đường tròn ta có:



Lưu ý: các trường hợp sau là như nhau



Ví dụ 15

Một gia đình muốn trồng một số bụi quanh lối đi hình tròn. Họ có bảy bụi hoa khác nhau. Hỏi họ có bao nhiêu cách trồng.

2.4. Chỉnh hợp

▷ Một *chỉnh hợp* chập k của n phần tử là một bộ gồm k phần tử lấy từ n phần tử thỏa:
- các phần tử khác nhau,
- có xét thứ tự.

Công thức: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}, \quad (0 \le k \le n).$

▷ Một *chỉnh hợp lặp* chập k của n phần tử là một bộ gồm k phần tử lấy từ n phần tử thỏa:
- các phần tử có thể giống nhau,
- có xét thứ tự.

Công thức: n^k.

Ví dụ 16

Một lớp học gồm 80 SV.
Có bao nhiêu cách chọn 1 lớp trưởng, 1 bí thư, 1 hội trưởng hội sinh viên. Biết
1. Các chức danh không được kiêm nhiệm.
2. Các chức danh được kiêm nhiệm.

Ví dụ 17

1 dãy 5 ghế dành cho 3 người. Có bao nhiêu cách xếp 3 người vào ngồi.

5.Tổ hợp

▷ Một *tổ hợp* chập k của n phần tử là một bộ gồm k phần tử lấy từ n phần tử thỏa:
- các phần tử khác nhau,
- không xét thứ tự.

Công thức: $C_n^k = \dfrac{n!}{(k)!\,(n-k)!} \quad (0 \le k \le n).$

▷ Một *tổ hợp lặp* chập k của n phần tử là một bộ gồm k phần tử lấy từ n phần tử thỏa:
- các phần tử có thể giống nhau,
- không xét thứ tự.

Công thức: C_{n+k-1}^k.

Chú ý: $A_n^k = k!.C_n^k$.

Ví dụ 18

Có bao nhiêu cách chọn 3 người từ 30 người đi dự đại hội sinh viên.

Ví dụ 19

Có bao nhiêu cách chọn 3 người từ 30 người nhận 3 học bổng giống nhau, biết rằng mỗi sinh viên có thể nhận cả 3 học bổng.

Chú ý:

	Có thứ tự	Không thứ tự
Không lặp	Chỉnh hợp	Tổ hợp
Có lặp	Chỉnh hợp lặp	Tổ hợp lặp

Một số ví dụ

Ví dụ 20

Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có có 2 cà vạt màu vàng. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn áo - cà vạt nếu:
1. Chọn áo nào cũng được - cà vạt nào cũng được. (35)
2. Đã chọn áo trắng, thì không chọn cà vạt vàng. (29)

Ví dụ 21

Đội học sinh giỏi của trường gồm 18 em, trong đó có 7 HS khối 12, 6 HS khối 11 và 5 HS 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 HS trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một HS.

Hướng dẫn: $C_{18}^8 - C_{11}^8 - C_{12}^8 - C_{13}^8$

Ví dụ 22

Một hộp đựng 8 bi xanh, 6 bi đỏ và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ đó 4 viên bi sao cho
1. Có đúng 2 bi xanh.
2. Số bi xanh bằng số bi vàng.

Hướng dẫn: $1.C_8^2.C_{10}^2$; $2.C_8^2.C_4^2 + C_8^1.C_4^1.C_6^2$

Ví dụ 23

Xếp 10 sinh viên vào 1 ghế dài 10 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp
1. Tùy ý
2. Sinh viên A, B, C ngồi cạnh nhau.

Ví dụ 24

Chọn 5 người từ 10 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn:
1. Tùy ý
2. Có 3 nam, 2 nữ.
3. Tất cà là nam
4. Ít nhất 3 nam
5. Ít nhất 1 nam, 1 nữ.

Ví dụ 25

Từ N điểm khác nhau trên mặt phẳng (không có bộ 3 điểm nào thẳng hàng). Có thể tạo được
1. Bao nhiêu đường thẳng.
2. Bao nhiêu vecto.

Ví dụ 26

Một lô hàng gồm 50 sản phẩm. Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên cùng lúc 5 sản phẩm để kiểm tra. Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên lần lượt 5 sản phẩm để kiểm tra.

III. Biến cố ngẫu nhiên

3.1. Hiện tượng ngẫu nhiên

Hiện tượng tất định là hiện tượng khi xảy ra trong điều kiện như nhau sẽ cho ra kết quả như nhau.

Hiện tượng ngẫu nhiên là hiện tượng dù xảy ra trong điều kiện như nhau, vẫn cho ra kết quả khác nhau.

Hiện tượng ngẫu nhiên là đối tượng nghiên cứu của xác suất.

3.2. Phép thử và biến cố

- **Phép thử** là một thí nghiệm, quan sát hiện tượng mà ta không biết trước kết quả.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là **không gian mẫu**, ký hiệu Ω.
- Tập $A \subset \Omega$: gọi là một **biến cố**.

Chú ý:

Cần xác định rõ phép thử, từ phép thử ta đi tìm:

- Kết quả của phép thử có "dạng gì",
- Không gian mẫu là gì, có bao nhiêu phần tử.
- Quan sát biến cố ta đang cần.

Ví dụ 27

Tung 1 đồng xu.

Phép thử: tung đồng xu.
Không gian mẫu: $\Omega = \{S, N\}$, $|\Omega| = 2$.
Xét biến cố: A: xuất hiện mặt sấp.
B: xuất hiện mặt ngửa.

Ví dụ 28

Chọn ngẫu nhiên 3 sinh viên trong lớp 81 sinh viên lên làm 3 bài khác nhau.

Phép thử:
Không gian mẫu: $\Omega = \ldots\ldots\ldots$, $|\Omega| = \ldots\ldots\ldots$
Xét biến cố: A: cả 3 sinh viên là nữ;

Ví dụ 29

Rút 3 lá bài từ bộ bài 52 lá. (chơi ba lá).

Phép thử:
Không gian mẫu: $\Omega = \ldots\ldots\ldots$, $|\Omega| = \ldots\ldots\ldots$

3.3. Các loại biến cố

▷ **Biến cố không thể** là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu $\emptyset$.
▷ **Biến cố chắc chắn** là biến cố luôn luôn sảy ra khi thực hiện phép thử. Ω.
▷ **Biến cố ngẫu nhiên** là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện phép thử.

Ví dụ 30

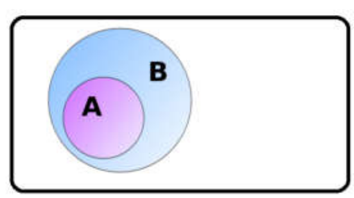
Tung 1 súc sắc.

Phép thử: tung 1 súc sắc.
Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $|\Omega| = 6$
Xét biến cố A : xuất hiện mặt chẵn, ta có
$A = \{2, 4, 6\}$, $|A| = 3$
Xét biến cố B: số chấm xuất hiện nhỏ hơn 7
$\Rightarrow B = \Omega$.
Xét biến cố C: số chấm suất hiện là 10 $\Rightarrow C = \emptyset$.

3.4. Quan hệ giữa biến cố

▷ **Quan hệ kéo theo**

$A \subset B \Leftrightarrow$ biến cố A kéo theo biến cố B
$\Leftrightarrow$ A xảy ra thì B xảy ra.



Ta có: $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

Ví dụ 31

Tung 1 con súc sắc. Gọi

A_i: là biến cố xuất hiện nút i.

B: là biến cố số nút chia hết cho 3.

C: là biến cố nút là chẵn.

Ta có: $A_2 \subset C$; $A_3 \subset B$; $A_1 \not\subset B$

Ví dụ 32

Đặt

$A =$ 'đạt điểm 8 môn XSTKA" kéo theo biến cố "

$B =$ "qua môn XSTHA"

Ta có: A kéo theo B.

▷ **Biến cố bằng nhau**

$A = B \Leftrightarrow$ biến cố A và B bằng nhau (tương đương),

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

Ví dụ 33

1. Trong thí nghiệm tung xúc xắc, ta quy ước nếu xuất hiện nút lẻ thì đươc 10.000VND.

$B = \{1, 3, 5\}$,

D: được 10.000 VND.

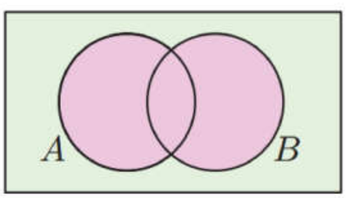
$\Rightarrow B = D$

2. $A = \{|x| < a\}$; $B = \{-a < x < a\}$. $\Rightarrow A = B$.

▷ **Tổng của hai biến cố**

$$A + B = A \cup B$$

$A + B \Leftrightarrow$ A xảy ra, hoặc B xảy ra, hoặc cả A và B đều xảy ra.



Tổng quát: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Ví dụ 34

Hai sinh viên A và B thi môn XSTKA. Đặt

A = sinh viên A đậu.

B = sinh viên B đậu.

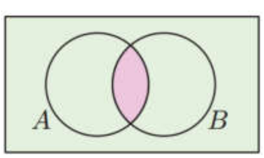
C = có ít nhất 1 sinh viên đậu.

Ta có $C = A + B$

▷ **Tích của hai biến cố**

$$AB = A \cap B$$

$AB \Leftrightarrow$ A xảy ra và B xảy ra (A, B cùng xảy ra).



Tổng quát: $A_1 A_2 ... A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Ví dụ 35

1. Có 81 SV thi môn XSTHA. Đặt

A_i = sinh viên thứ i đậu, $i = 1, ..., 81$

C = tất cả sinh viên đậu!!!

Ta có $C = \bigcap_{i=1}^{81} A_i$

2. Trong kỳ kiểm tra bắn súng của SV Trường ĐH Sài Gòn. Đặt

A: sinh viên thi đậu lý thuyết.

B: sinh viên thi đậu thực hành.

C: sinh viên thi đậu.

$C = A.B$

▷ **Hiệu của hai biến cố**

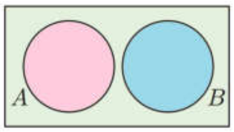
$$A - B = A \backslash B$$

$A - B \Leftrightarrow$ A xảy ra và B không xảy ra.

▷ **Biến cố xung khắc**

A và B xung khắc $\Leftrightarrow$ A, B không thể đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$



Các biến cố $A_1, A_2, .., A_n$ gọi là xung khắc nếu xung khắc từng đôi

Ví dụ 36

Từ hộp bi có 10 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh lấy ngẫu nhiên **1 viên**. Đặt

A = {Lấy được bi trắng}

B = {Lấy được bi đỏ}

Ta thấy A, B là hai biến cố không thể đồng thời xảy ra nên A và B là hai biến cố xung khắc.

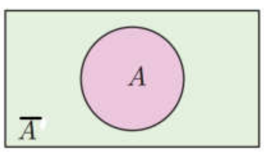
$\Rightarrow A.B = \emptyset$

Ví dụ 37

▷ **Biến cố đối lập**

A và B đối lập $\Leftrightarrow$ **luôn** có đúng 1 trong hai biến cố xảy ra.

Ký hiệu $\overline{A}$ là biến cố đối của A.



Ta có:

- $A + \overline{A} = \Omega$
- $A.\overline{A} = \emptyset$

Ví dụ 38

1. Tung 1 súc sắc. Gọi

   A = {xuất hiện mặt chẵn}

   B = {xuất hiện mặt lẻ}

   Ta có A và B là hai biến cố xung khắc.

2. Gọi 1 SV trong lớp lên bảng

   A = {gọi được sinh viên nam}

   B = {gọi được sinh viên nữ}

   Hỏi A , B có xung khắc?

Chú ý:

1. Đối $\Rightarrow$ xung khắc, chiều ngược không đúng.
2. $\overline{A}$ xảy ra $\Leftrightarrow$ A không xảy ra.

▷**Tính chất**. Cho các biến cố A, B, C ta có

1. $A + B = B + A; \quad A.B = B.A.$
2. $(A + B) + C = A + (B + C); \quad (A.B)C = A.(AB).$
3. $A(B + C) = AB + AC;$
   $A + (B.C) = (A + B).(A + C).$
4. $A - (B + C) = (A - B)(A - C),$
   $A - (B.C) = (A - B) + (A - C).$
5. $A \subset B$ thì $A + B = B; \quad A.B = A$
6. $\overline{\overline{A}} = A.$
7. $A + A = A; \quad A.A = A; \quad A + \emptyset = A; \quad A.\emptyset = \emptyset.$
8. $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$
9. $B = B.A + B.\overline{A}.$

Ví dụ 39

Một vận động viên bắn ba phát vào bia.

Gọi A_i là biến cố phát thứ i trúng.

Hãy biểu diễn qua A_1, A_2, A_3 các biến cố sau

A: "cả ba phát đều trúng"

B: "có ít nhất 1 phát trúng"

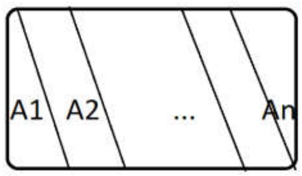
C: "có 1 và chỉ 1 phát trúng"

D: "có nhiều nhất 2 phát trúng"

▷ **Nhóm đầy đủ các biến cố**

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là đầy đủ nếu luôn có 1 và chỉ 1 biến cố xảy ra.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{đầy đủ} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega, \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j. \end{cases}$$



Ví dụ 40

Với mọi biến cố A, ta luôn có A và $\overline{A}$ là nhóm đầy đủ.

Ví dụ 41

Tung 1 súc sắc.
Gọi A_i là biến cố được nút i.
Ta có $A_1, A_2, \ldots, A_6$ là nhóm đầy đủ.

VI. Xác suất

Mọi biến cố ngẫu nhiên giống nhau ở chỗ chúng không chắc chắn xảy ra. Nhưng khả năng xảy ra của chúng có thể khác nhau với *cùng phép thử*.

Ví dụ 42

Mua 1 tờ vé số
A = {trúng bất kỳ giải nào}
B = {trúng độc đắc}
Ta thấy khách quan khả năng xảy ra A lớn hơn B.

Vậy, để đặc trưng cho khả năng xảy ra của 1 biến cố, ta gắn cho nó 1 con số, gọi là xác suất.
Ký hiệu $P(A)$.

Ta quy ước:
Biến cố chắc chắn: $P(\Omega) = 1$.
Biến cố vô phương: $P(\emptyset) = 0$.
Biến ngẫu nhiên bất kỳ: $0 \leq P(A) \leq 1$.

4.1. Định nghĩa xác suất theo nghĩa cổ điển

Giả sử 1 phép thử có:
- không gian mẫu là Ω.
- $A \subset \Omega$.

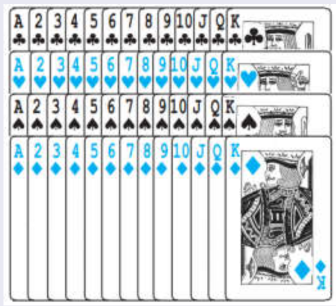
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{số trường hợp thuận lợi cho A}}{\text{tổng số trường hợp}}$$

Ví dụ 43

1. Tung 1 đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất suất hiện mặt sấp, mặt ngửa
2. Tung 1 súc sắc cân đối đồng chất . Tính xác suất suất hiện 1 chấm.
3. Một hộp có 15 bi đỏ, 9 bi xanh và 6 bi trắng. Rút ngẫu nhiên 6 bi. Tính xác suất để trong 6 bi đó có 3 đỏ, 2 xanh, 1 trắng.
4. Một lớp học có 80 SV, có 3 bài tập cần giải quyết. Tính xác suất được lên bảng làm bài. Biết mỗi SV chỉ được là 1 bài.

Ví dụ 44

1 bộ bài 52 lá. Rút ngẫu nhiên 1 lá. Tính xác suất để



1. Rút được lá tim. 2. Rút được lá 7 tim
3. Rút được là ách. 4. Rút được là hình.

Ví dụ 45

Tung 1 đồng xu và 1 súc sắc. Gọi N là mặt ngửa, S là mặt sấp. Tính xác suất để được
1. N6.
2. S và số lẻ.
3. Ngửa và số nguyên tố.
4. S5 hoặc S6.

Hướng dẫn: Dùng lưới 2 chiều (2-dimensional grids) - Cây.

4.2. Định nghĩa xác suất theo nghĩa thống kê

Thực hiện 1 phép thử n lần, ta thấy số lần xuất hiện của A là k (k<n).

Tần số xuất hiện của A là $\frac{k}{n}$.

Khi n đủ lớn, ta coi $P(A) = \frac{k}{n}$.

Chú ý: nhược điểm của định nghĩa này là có những thí nghiệm ta không thể làm nhiều lần được.

Ví dụ 46

Tung 1 đồng xu 30 lần rồi điền vào bảng kết quả sau

	S	N	S	N
lần 1				
lần 2				
xác suất				

Ví dụ 47

Theo dõi 10 000 em bé mới sinh, ta thấy có 5097 bé trai. Vậy xác suất sinh bé trai là $0,5097$.

4.3. Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

- Độ đo của 1 tập trên 1 đường là độ dài, trong 1 mặt là diện tích, trong không gian là thể tích.
- Trong mặt phẳng các tập nằm trên 1 đường có độ đo 0, trong không gian các tập nằm trên 1 mặt có độ đo 0.
- Xét 1 phép thử đồng khả năng, có không gian mẫu là Ω là "miền" hình học, và $S \subset \Omega$.

Đặt: A = {điểm M thuộc S }

Ta có

$$P(A) = \frac{\text{độ đo của S}}{\text{độ đo của } \Omega}$$

Ví dụ 48

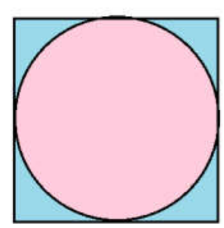
Ném 1 chất điểm vào trong hình vuông có cạnh dài 2R.

Tính xác suất để chất điểm đó rơi vào hình tròn nội tiếp hình vuông.

Giải

Gọi A: chất điểm rơi vào hình tròn.

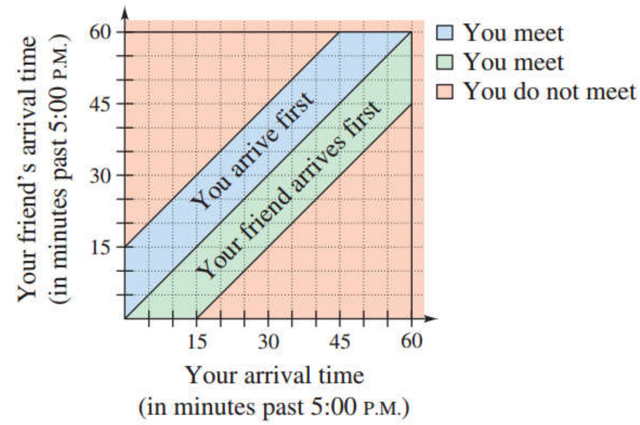
$$P(A) = \frac{S_{\text{h.tròn}}}{S_{\text{h.vuông}}} = \frac{2\pi R^2}{4R^2}$$



Ví dụ 49

You and a friend agree to meet at your favorite fast-food restaurant between 5:00 P.M. and 6:00 P.M. The one who arrives first will wait 15 minutes for the other, and then will leave (see figure).

What is the probability that the two of you will actually meet, assuming that your arrival times are random within the hour?



Nguyên lý xác suất lớn - xác suất nhỏ

Một biến cố có xác suất lớn (β), trên thực tế hầu như chắc chắn xảy ra khi ta thực hiện thí nghiệm đôi lần, còn biến cố có xác suất nhỏ (α), trên thực tế hầu như không xảy ra khi ta thực hiện thí nghiệm đôi lần.

Trong từng loại bài toán mà α có thể lấy giá trị 0.01, 0.05,... ; β có thể lấy giá trị 0.95, 0.99, ...

Ví dụ 50

- Xác suất của 1 loại dù không mở khi nhảy ra khỏi phi cơ là 0,01 thì không thể coi là nhỏ.!!!
- Xác suất tàu lửa đến ga trễ 5 phút là 0,01 thì thực tế coi như đến đúng giờ.

Ý nghĩa xác suất

- Xác suất của 1 biến cố là số đo về khả năng xảy ra của biến cố đó, về mức độ tin tưởng của biến cố đó có xảy ra hay không?
- Số đo này có thể thay đổi, nó phụ thuộc vào các điều kiện và tùy thuộc vào các biến cố khác liên quan tới nó.
- Số đo này có giá trị trung bình, nó có ý nghĩa khi ta thực hiện thí nghiệm nhiều lần.