V. Các công thức tính xác suất

5. 1. Công thức cộng xác suất

Với A, B là hai biến cố bất kỳ, ta có

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

Nếu A, B xung khắc ($A.B = \emptyset$), thì

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

Tổng quát

- Với n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ xung khắc từng đôi, ta có

$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

- Với biến cố đối, ta có

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Ví dụ 51

1 lớp có 80 HS, trong đó có 30 em giỏi Toán, 40 em giỏi Anh, và 20 em giỏi cả Toán và Anh. Giả sử giỏi ít nhất một môn thì được thưởng. Gọi tên ngẫu nhiên một em trong danh sách. Tính xác suất để em đó được thưởng.

Ví dụ 52

Trong bộ bài 52 cây có 4 cây Át, lấy ngẫu nhiên 3 cây. Tính xác suất để có

1. 1 hoăc 2 cây Át.
2. Ít nhất 1 cây Át.

Ví dụ 53

1 lớp học có 80 SV chia thành 20 nhóm thực tập. Trong lớp có bạn Nam, Hoa , Liên, Phượng. Tính xác suất để:

1. Nam cùng nhóm với Liên.
2. Nam cùng nhóm với Liên hay Hoa.

3, Nam cùng Liên, Hoa và Phượng lập thành 1 nhóm.

5.2. Xác suất có điều kiện

- Xác suất của biến cố A với điều kiện B (đã biết)

$$P(A|B) = \frac{P(A.B)}{P(B)}.$$

- Xác suất có điều kiện cho phép chúng ta sử dụng thông tin về sự xảy ra của biến cố này để dự đoán xác suất xảy ra của biến cố khác.

- Tính chất:

1. $P(A|A) = 1$.

2 . $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

3. $P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ nếu A_1, A_2 xung khắc.

Ví dụ 54

Một hộp có 10 vé trong đó có 3 vé trúng thưởng. Tính xác suất người thứ 2 bốc được vé trúng thưởng, biết rằng người đầu đã bốc được 1 vé trúng thưởng.

Ví dụ 55

Một cơ quan phân 3 lô đất cho 5 nhân viên xây nhà bằng cách bốc thăm. Ba thăm đánh dấu x và 2 thăm trống. Năm người lần lượt bốc thăm, người nào bắt được thăm có dấu x thì được 1 lô đất. Theo bạn bắt thăm trước hay sau có lợi hơn?

Ví dụ 56

Trong 1000 người tại 1 vùng được điều tra, có 300 người trên 525 nam hút thuốc lá, 50 trên 475 nữ hút thuốc lá.

1. Chọn 1 người nam trong vùng, tính xác suất người đó hút thuốc lá.
2. Giả sử chọn được người hút thuốc lá, tính xác suất người đó là nam.

5.3. Biến cố độc lập

- A và B được gọi là *độc lập* nếu sự xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

$$A, B \text{ độc lập } \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

- Hệ quả: A, B độc lập $\Leftrightarrow P(A.B) = P(A).P(B)$
- n biến cố $A_i, i = 1, .., n$ độc lập nếu bất kỳ một biến cố A_k nào đều độc lập với (n-1) biến cố còn lại và độc lập với mọi biến cố tích bất kỳ tạo thành từ (n-1) biến cố còn lại.

$$P(A_1.A_2....A_n) = P(A_1)....P(A_n)$$

Ví dụ 57

Gieo 10 con xúc xắc. Tính xác suất chúng đều xuất hiện mặt số 6.

Ví dụ 58

Quan sát 1 gia đình có hai con.
Gọi
A : biến cố lần 1 sinh con trai = $\{TT, TG\}$
B : biến cố lần 2 sinh con trai =$\{TT, GT\}$
C : biến cố chỉ có 1 lần sinh con trai = $\{TG, GT\}$
Hỏi A, B, C có độc lập.

Giải
- $P(A.B) = P(TT) = \frac{1}{4} = P(A).P(B)$
- $P(A.C) = P(TG) = \frac{1}{4} = P(A).P(C)$
- $P(B.C) = P(GT) = \frac{1}{4} = P(B).P(C)$

Vậy A, B, C độc lập từng đôi.
Ta có $A.B.C = \emptyset$, nên $P(A.B.C) = P(\emptyset) = 0$
Mà $P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} \neq 0$
Suy ra $P(A).P(B).P(C) \neq P(ABC)$
Do đó A, B, C không độc lập toàn bộ, nên A, B , C không độc lập

Ví dụ 59

Có 3 hộp bi, mỗi hộp có 10 bi. Trong hộp thứ i có i bi đỏ, $10 - i$ bi xanh $i = 1, 2, 3$. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 bi.
1. Tính xác suất cả 3 bi lấy ra đều đỏ.
2. Tính xác suất ba bi lấy ra có 2 bi đỏ, 1 bi xanh.
3. Biết 3 bi lấy ra có 2 đỏ, 1 xanh, Tính xác suất bi lấy ra từ hộp thứ 2 màu xanh.

5.4. Công thức nhân xác suất

Với A, B là hai biến cố, ta có

$$P(A.B) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

Nếu A, B độc lập, ta có

$$P(A.B) = P(A).P(B)$$

Tổng quát
- với n biến cố $A_1, A_,2, ..., a_n$ ta có
$P(A_1.A_2....A_n) =$
$P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1.A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$
- Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ độc lập

$$P(A_1.A_2....A_n) = P(A_1)...P(A_n)$$

Ví dụ 60

Một bình chứa 6 quả cầu đen, 4 cầu trắng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 3 quả không hoàn lại. Tính xác suất 3 quả cầu này là trắng.

Ví dụ 61

Một lô hàng 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm ra kiểm tra cho đến khi gặp đủ 3 phế phẩm thì dừng lại.
1. Tính xác suất dừng lại ở lần kiểm tra thứ 3.
2. Tính xác suất dừng lại ở lần kiểm tra thứ 4.
3. Biết đã dừng lại ở lần KT thứ 4, tính xác suất ở lần kiểm tra thứ 2 gặp phế phẩm.

Giải

Gọi A_i: lần KT thứ i gặp phế phẩm $i = \overline{1,10}$.
1. A: biến cố dừng lại ở lần kiểm tra thứ 3.
$\Rightarrow A = A_1A_2A_3$
$\Rightarrow P(A) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1A_2) = \frac{3}{10}.\frac{2}{9}.\frac{1}{8} = \frac{1}{120}$
2. B = Biến cố dừng lại ở lần KT thứ 4
$\Rightarrow B = A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4$
Ta có $P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)$
$= P(A_1).P(A_2|A_1).P(\overline{A_3}|A_1A_2).P(A_4|A_1A_2\overline{A_3})$
$= \frac{3}{10}.\frac{2}{9}.\frac{7}{8}.\frac{1}{7} = \frac{1}{120}$

Tương tự, ta có
$P(A_1\overline{A_2}A_3A_4) = P(\overline{A_1}A_2A_3A_4) = \frac{1}{120}$.
Do $A_1A_2\overline{A_3}A_4; A_1\overline{A_2}A_3A_4;$ và $\overline{A_1}A_2A_3A_4$ đôi một xung khắc nên
$P(B) =$
$P(A_1A_2\overline{A_3}A_4) + P(A_1\overline{A_2}A_3A_4) + P(\overline{A_1}A_2A_3A_4) = \frac{3}{120}$
3. Ta có
$P(A_2|B) = \frac{P(A_2.B)}{P(B)} =$
$\frac{P(A_1A_2\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4)}{P(B)} = \frac{2.\frac{1}{120}}{\frac{1}{40}} = \frac{2}{3}$

5. Công thức xác suất đầy đủ - công thức Bayes

Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là *nhóm đầy đủ* các biến cố, ta có

1. *Công thức Xác suất đầy đủ*
$$P(H) = P(H|A_1).P(A_1) + P(H|A_2).P(A_2) + ... + P(H|A_n).P(A_n)$$
2. *Công thức Bayes*
$$P(A_k|H) = \frac{P(H|A_k).P(A_k)}{P(H)}$$

- Công thức xác suất đầy đủ cho ta cách tính xác suất của 1 biến cố thông qua một nhóm đầy đủ.
- Công thức Bayes (hay xác suất hậu nghiệm) cho biết xác suất của các biến cố trong nhóm đầy đủ thay đổi như thế nào khi một biến cố đã xảy ra.

Ví dụ 62

Một lô thuốc gồm nhiều lọ, trong đó có 25% sản suất từ xí nghiệp A, 35% từ xí nghiệp B, và 40% từ xí nghiệp C. Tỉ lệ thuốc không đạt tiêu chuẩn từ 3 xí nghiệp lần lượt là 2%, 1% và 1, 5%.
1. Lấy ngẫu nhiên 1 lọ từ lô thuốc đó, tính xác suất để lọ này là phế phẩm.
2. Nếu lọ lấy ra là phế phẩm, Tính khả này lọ này thuộc xí nghiệp C.

Giải

1. Gọi

A: biến cố lấy được lọ thuốc của xí nghiệp A.

$P(A) = 0,25$

B: biến cố lấy được lọ thuốc của xí nghiệp B.

$P(B) = 0,35$

C: biến cố lấy được lọ thuốc của xí nghiệp C.

$P(C) = 0,40$

K : biến cố lấy được lọ phế phẩm. Ta có

$P(K|A) = 0,02;\ P(K|B) = 0,01;\ P(K|C) = 0,015$

$\Rightarrow P(K) =$

$P(A).P(K|A) + P(B).P(K|B) + P(C).P(K|C)$

$= 0,25.0,02 + 0,35.0,01 + 0,4.0,015 = 0,0145$

2. Theo công thức Bayes, ta có

$$P(C|K) = \frac{P(C).P(K|C)}{P(K)} = \frac{0,4.0,015}{0,0145} \approx 0,41.$$

Ví dụ 63

Có 20 kiện hàng, mỗi kiện có 10 sản phẩm. Trong số đó có 8 kiện loại 1, mỗi kiện có 1 phế phẩm; bảy kiện loại 2, mỗi kiện có 3 phế phẩm; năm kiện loại 3, mỗi kiện có 5 phế phẩm.

Lấy ngẫu nhiên 1 kiện, rồi từ kiện đó lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

1. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là phế phẩm.
2. Biết sản phẩm lấy ra là phế phẩm, tính xác suất để kiện lấy ra là loại 2.