Chương 3

Một số phân phối xác suất thường gặp

I. Phân phối nhị thức (Binomial Distribution)

Một phép thử nhị thức thỏa mãn 4 tính chất sau:
1. Dãy gồm n phép thử giống nhau,
2. Các phép thử độc lập với nhau.
3. Mỗi phép thử chỉ có 2 kết quả: thành công (A), và thất bại $\overline{A}$.
4. Xác suất thành công, ký hiệu p, không thay đổi. Xác suất thất bại $q = 1 - p$.

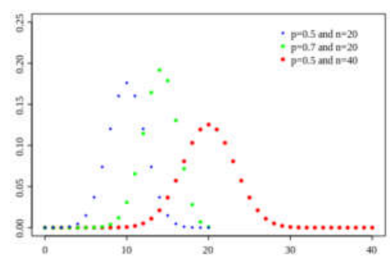
Gọi X là số lần xuất hiện biến cố A trong n lần thử.
⇒X có phân phối nhị thức, ký hiệu $X \sim B(n, p)$.

• Bảng phân phối

X	0	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$\underbrace{C_n^0.p^0.q^n}_{P(X=0)}$	$\cdots$	$\underbrace{C_n^k p^k q^{n-k}}_{P(X=k)}$	$\cdots$	$\underbrace{C_n^n p^n.q^0}_{P(X=n)}$

• Kỳ vọng: $\mu = E(X) = n.p.$
• Phương sai: $\sigma^2 = Var(X) = n.p.q$
• $n.p - q \leq Mod(X) \leq n.p + p.$

• Đồ thị của phân phối nhị thức



Nhận xét:
+ p càng nhỏ đồ thị càng lệch trái, p càng lớn đồ thị càng lệch phải, p gần 0,5 đồ thị càng đối xứng.
+ n lớn đồ thị đối xứng.

Ví dụ 92

Tình huống nào sau đây thỏa phân phối nhị thức:
1. Tung 1 đồng xu 100 lần. Gọi X = số lần suất hiện mặt sấp.
2. Tung 100 đồng xu 1 lần. Gọi X = số đồng suất hiện mặt sấp.
3. Một hộp chứa 5 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ. Rút ra 5 viên bi (có hoàn lại). Gọi X = số bi xanh.
4. Một hộp chứa 5 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ. Rút ra 5 viên bi (không hoàn lại). Gọi X = số bi xanh.
5. Một thùng chứa 10 000 bulông, 1% trong đó bị lỗi. Lấy 1 mẫu 10 bu lông từ thùng.
Gọi X = số bu lông lỗi.

Ví dụ 93

Một trường đại học nhận thấy rằng có 20% SV của mình bỏ không hoàn thành khóa học XSTK. Giả sử rằng có 20 SV đăng ký khóa học này.
1. Lập bảng pp xác suất.
2. Tính XS có đúng 4 SV không hoàn thành khóa học.
3. Tính XS có hơn 3 SV không hoàn thành khóa học.
4. Tính số SV kỳ vọng không hoàn thành khóa học. Phương sai số SV không hoàn thành khóa học. Giá trị tin chắc nhất số SV không hoàn thành khóa học.

Giải

1. Gọi X là số SV không hoàn thành khóa học.
$X = \{0, 1, 2, ..., 20\}$

C1:

• Tính $P(X = k)$

B1: có C_n^k cách lấy k SV từ 20 SV (không thứ tự).

B2: XS để k SV trên không hoàn thành p^k.

B3: XS để $(20 - k)$ SV còn lại hoàn thành q^{20-k}

Vậy $P(X = k) = C_n^k.p^k.q^{20-k}$

C2:

• có 20 phép thử.

• mỗi SV độc lập với nhau.

• có 2 kq: qua , không qua. XS không qua $p = 0,20$

• XS không qua không đổi.

Vậy $X \sim B(20, 0.2)$

Bảng phân phối xác suất

X	0	...	k	...	20
P	$C_{20}^0.0.2^0.0.8^{20}$	...	$C_{20}^k 0.2^k 0.8^{20-k}$	...	$C_{20}^{20} 0.2^{20}.0.8^0$

2. $P(X = 4) = C_{20}^4 0.2^4 0.8^{20-4}$

3. $P(X > 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$-P(X = 2) - P(X = 3)$
$=$

4. $EX =$; $Var(X) =$
$20.0,2 - 0,8 \leq Mod(X) \leq 20.0,2 + 0,8 \Rightarrow$
$Mod(X) =$

Ví dụ 94

Một xạ thủ có xác suất bắn trúng mục tiêu là 0,6. Anh ấy bắn 20 viên. Số viên trúng mục tiêu trung bình là bao nhiêu? Phương sai của số viên trúng là bao nhiêu?

Ví dụ 95

Có 23% xe ô tô không được bảo hiểm (CNN, 23/2/2006). Vào một ngày cuối tuần, có 35 xe ô tô gặp ta nạn giao thông.
1. Số lượng xe ô tô kỳ vọng không được bảo hiểm là bao nhiêu?
2. Phương sai và độ lệch chuẩn là bao nhiêu.

Ví dụ 96

Một hộp có 10 phiếu trong đó có 3 phiếu trúng thưởng. Lấy ngẫu nhiên 3 phiếu từ hộp, mỗi phiếu trúng thưởng được 1 phần quà.

Gọi X là số phần quà có được khi lấy 3 phiếu.

Lập bảng phân phối, tính kỳ vọng, phương sai trong 2 trường hợp

1. Lấy có hoàn lại
2. Lấy không hoàn lại.

Định lý tổng các phân phối nhị thức độc lập

Định lý 0.1

Nếu

$$\begin{cases} X_i \sim B(n_i, p), & i = 1, 2, ..., m \\ X_i \quad \text{độc lập} \end{cases}$$

thì

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim B\left(n = \sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$$

II. Phân phối siêu bội, $X \sim H(N, M_A, n)$

Bài toán

Một tổng thể có N phần tử gồm 2 loại, trong đó có M_A phần tử có tính chất A.

Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại n phần tử từ tổng thể.

Gọi X : số phần tử có tính chất A trong n phần tử.
$\Rightarrow$ X có phân phối siêu bội. $X \sim H(N, M_A, n)$.

Chú ý: PP siêu bội thỏa 2 tính chất sau

1. Kết quả của phép thử được phân thành 2 biến cố đối lập nhau.
2. Xác suất thành công thay đổi sau mỗi phép thử.

Nếu $X \sim H(N, M_A, n)$, ta có

• Bảng phân phối

X	0	⋯	k	⋯	n
P	$\underbrace{\frac{C^0_{M_A}.C^n_{N-M_A}}{C^n_N}}_{P(X=0)}$	⋯	$\underbrace{\frac{C^k_{M_A}.C^{n-k}_{N-M_A}}{C^n_N}}_{P(X=k)}$	⋯	$\underbrace{\frac{C^n_{M_A}.C^0_{N-M_A}}{C^n_N}}_{P(X=n)}$

• Kỳ vọng: $\mu = E(X) = n.p$, trong đó $p = \dfrac{M_A}{N}$

• Phương sai: $\sigma^2 = Var(X) = n.p.q.\dfrac{N-n}{N-1}$, $q = 1 - p$

Ví dụ 97

Một hộp gồm 20 viên bi, trong đó có 8 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi. Tính xác suất để có không quá 2 viên đỏ.

Ví dụ 98

Hãng Axline Computer sản xuất máy tính cá nhân tại hai nhà máy, một ở Texas và một ở Hawaii. Nhà máy Texas có 40 người lao động, nhà máy Hawaii có 20 người. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 nhân viên sẽ được yêu cầu điền vào một bảng câu hỏi.

1. Tính xác suất không ai trong số các nhân viên trong mẫu làm việc tại nhà máy Hawaii.
2. Tính xác suất có 1 nhân viên trong mẫu làm tại nhà máy Hawaii.
3. Tính xác suất có ít nhất 2 nhân viên trong mẫu làm việc tại nhà máy Hawaii.
4. Tinh xác suất có 9 nhân viên trong mẫu làm việc tại nhà máy Texas.

Liên hệ giữa phân phối nhị thức và siêu bội

1. Giả sử $X \sim H(N, M_A, n)$, nếu N khá lớn, n rất nhỏ so với N, thì pp siêu bội có thể xấp xỉ bằng pp nhị thức với

$$P(X = k) = \frac{C^k_{M_A}.C^{n-k}_{N-M_A}}{C^n_N} \approx C^k_n.p^k.q^{n-k}, \qquad p = \frac{M_A}{N}$$

Thường dùng khi n < 0,05N

2. Khi N khá lớn so với n. Việc lấy n phần tử từ tổng thể N phần tử theo hai phương thức: có hoàn lại và không hoàn lại được coi là như nhau.

Ví dụ 99

Trong kho có 10 000 sản phẩm, trong đó có 3000 sản phẩm loại A. Lấy ngẫu nhiên từ kho 5 sản phẩm(SP). Tính xác suất trong 5 SP lấy ra có 3 SP loại A.

Giải

Gọi X là số SP loại A trong 5 SP lấy ra từ kho
$\Rightarrow X \sim B(10000, 3000, 5)$.

Ta thấy $N = 10000$ khá lớn, và $n = 5$ là khá nhỏ so với N nên ta có thể xấp xỉ

$X \sim B(5, p)$ với $p = \dfrac{3000}{10000} = 0,3$

$P(X = 3) = \frac{C^3_{3000}.C^{5-3}_{7000}}{C^5_{10000}} \approx C^3_5.0,3^3.0,7^{5-3} = 0,1323$

III. Phân phối Poisson (Poisson distribution)

Gọi X là BNN chỉ số lần xảy ra (biến cố A) trong một khoảng thời gian hoặc không gian xác định.

Ta nói X có phân phối Poisson nếu thỏa

1. Số lần xuất hiện biến cố A trong 1 khoảng tỉ lệ với độ dài của khoảng đó.
2. Việc xuất hiện hoặc không xuất hiện (biến cố A) trong khoảng này thì độc lập với việc xuất hiện hoặc không xuất hiện trong khoảng khác.

Ví dụ 100

1. X: số ô tô đi qua trạm thu phí trong 1 giờ.
2. X: số hư hỏng cần sửa trên 1km đường cao tốc.

Nếu X có pp Poisson, ký hiệu

$$X \sim P(\lambda)$$

trong đó λ số lần biến cố A trong khoảng thời gian (t), hoặc không gian (h).
Ta có

1. $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k . e^{-\lambda}}{k!}$
2. $E(X) = Var(X) = \lambda$
3. $\lambda - 1 \le Mod(X) \le \lambda$

Ví dụ 101

Tại trạm thu phí BOT, việc các xe đến trạm là ngẫu nhiên và độc lập với nhau. Biết rằng trung bình có 10 xe đến trạm trong 15 phút.
1. Tính xác suất có đúng 5 xe đến trạm trong 15 phút.
2. Tính xác suất có đúng 1 xe đến trạm trong 3 phút.
3. Tính xác suất có không có xe đến trạm trong 1 giờ.

Giải
1. X là số xe đến trạm trong 15p. $X \sim P(10)$.
$P(X = 5) = \dfrac{10^5 . e^{-10}}{5!} = 0,0378$
2. Gọi Y là số xe đến trạm trong 3p. $Y \sim P(2)$
$P(Y = 1) = \dfrac{2^1 . e^{-2}}{1!} = 0,2707$
3. Gọi Z là số xe đến trạm trong 1h. $Z \sim P(40)$
$P(X = 0) = \dfrac{40^0 . e^{-40}}{0!} \approx 5,2.10^{-66}$

Ví dụ 102

Sau một tháng sửa đường cao tốc. Trung bình có 2 ổ gà trên 1 km đường. Hãy tìm xác suất không có hư hại nào trên 3km đường cao tốc.

Ví dụ 103

Trung bình có 15 tai nạn máy bay xảy ra mỗi năm (The World Almanac và Book of Facts, 2004).
1. Tính số vụ tai nạn máy bay trung bình mỗi tháng.
2. Tính xác suất không có tai nạn máy bay nào trong vòng một tháng.
3. Tính XS có đúng một tai nạn máy bay 1 tháng.
4. Tính XS có nhiều hơn 1 tai nạn máy bay trong 1 tháng.

Định lý tổng phân phối Poisson độc lập

Nếu

$$\begin{cases} X_i \sim P(\lambda_i), & i = 1, 2, ..., m \\ X_i \quad \text{độc lập} \end{cases}$$

thì

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim P\left(\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)$$

Liên hệ giữa phân phối nhị thức và Poisson

1. Giả sử $X \sim B(n, p)$, nếu n khá lớn (n>50) và p khá bé (p<0,1) thì
$X \sim B(n, p) \to X \sim P(\lambda), \lambda = n.p$
2. Do n lớn và p rất bé nên ta còn gọi phân phối Poisson là phân phối của biến cố hiếm.

Ví dụ 104

Xác suất để 1 máy sản xuất ra 1 phế phẩm là $0,1\%$. Cho máy sản xuất 1000 sản phẩm. Tính xác suất có đúng 2 phế phẩm.

Giải
Gọi X: số phế phẩm trong 1000 SP.

$$X \sim B(1000, 0,001)$$

Ta có

$$\begin{cases} n = 1000 > 50 \\ p = 0,001 < 0,1 \\ n.p = 1 \end{cases}$$

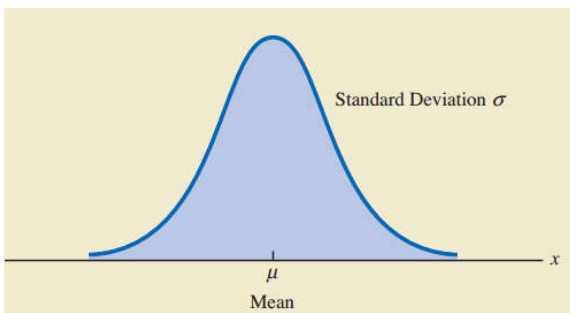
Suy ra: $X \sim P(1)$
Ta có
$P(X = 2) \approx \dfrac{1^2.e^{-1}}{2!} \approx 0,1839.$

IV. Phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối chuẩn với tham số μ và $\sigma^2, \sigma > 0$, ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ta có
1. $Mod(X) = Med(X) = \mu$
2. $E(X) = \mu$; $Var(X) = \sigma^2$



Đặc biệt khi $X \sim N(0, 1)$, ta nói X có phân phối chuẩn tắc và
1. Hàm mật độ (hàm Gauss) của X :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Hàm phân phối (hàm Laplace) của X:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tính chất 6
1. $f(-x) = f(x)$ 2. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

Tính giá trị hàm Gauss và hàm Laplace

Cách 1: tính trực tiếp.
Cách 2: dùng bảng giá trị hàm Gauss hoặc hàm Laplace
Chú ý:
1. Với $x > 4,09$ ta lấy $f(x) = 0,0001$ và $\varphi(x) = 0,5$
2. $\varphi(+\infty) = 0,5, \quad \varphi(-\infty) = -0,5.$

Ví dụ 105
Tính
1. $f(1,05) =$ $\varphi(1,05) =$
2. $f(-3,5) =$ $\varphi(-3,5) =$
3. $f(5,1) =$ $\varphi(5,1) =$

Ví dụ 106
Cho BNN X có phân phối chuẩn tắc, tính
1. $P(0 \le X \le 0,83)$
2. $P(-1,57 \le X \le 0)$
3. $P(X > 0,44)$
4. $P(X \ge -0,23)$
5. $P(X \le 1,2)$
6. $P(X \le -0,71)$

Tính xác suất của phân phối chuẩn

Định lý 0.2

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì biến ngẫu nhiên $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ có phân phối chuẩn tắc $Z \sim N(0,1)$.

Tính xác suất của phân phối chuẩn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Cách 1: chuyển về pp chuẩn tắc $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Cách 2: dùng trực tiếp công thức

1. $P(a \le X \le b) = \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
2. $P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\varphi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \forall \varepsilon > 0.$
3. Quy tắc $k - sigma$: $P(|X-\mu| < k\varepsilon) = 2\varphi(k)$.

Ví dụ 107

Giá cổ phiếu bình quân của các công ty trong danh sách W&S 500 là 30 USD, độ lệch chuẩn là 8,2 USD. Giả sử giá cổ phiếu có phân phối chuẩn.

1. Tính XS để một công ty sẽ có giá cổ phiếu ít nhất 40 USD.
2. Tính XS để một công ty sẽ có giá cổ phiếu không cao hơn 20 USD.
3. Giá cổ phiếu phải cao bao nhiêu để 1 công ty được đứng trong top 10% cao nhất.

Giải.

Ta có $\mu = 30, \sigma = 8,2$. Gọi X là giá cổ phiếu.

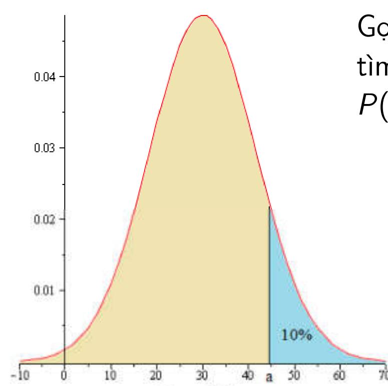
1. XS một CT có giá cổ phiếu ít nhất 40 USD

$$P(X \ge 40) = \varphi\left(\frac{+\infty - 30}{8,2}\right) - \varphi\left(\frac{40-30}{8,2}\right)$$
$$= \varphi(+\infty) - \varphi(1,22)$$
$$=$$

2. XS một CT có giá cổ phiếu không cao hơn 20 USD.

$$P(X \le 20) = \varphi\left(\frac{20-30}{8,2}\right) - \varphi\left(\frac{-\infty-30}{8,2}\right)$$
$$= \varphi(-1,22) - \varphi(-\infty)$$
$$=$$

3.



$\mu = 30$

Gọi a là giá cổ phiếu cần tìm. Top 10%, nghĩa là, $P(X \ge a) = 10\%$

Ta có

$$P(X \ge a) = 10\% \Leftrightarrow \varphi(+\infty) - \varphi\left(\frac{a-30}{8,2}\right) = 0,1$$
$$\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{a-30}{8,2}\right) = 0,5 - 0,1 = 0,4$$

Tra bảng ngược, ta được

$$\frac{a-30}{8,2} = 1,28 \Rightarrow a = 30 + 1,28.8,2 = 40,05$$

Ví dụ 108

Trong tháng giêng năm 2003, người lao động Mỹ dành trung bình 77 giờ đăng nhập vào Internet trong giờ làm việc (CNBC, 15/03/2003). Giả sử trung bình tổng thể là 77 giờ, số giờ đăng nhập có phân phối chuẩn, và độ lệch chuẩn là 20 giờ.

1. Xác suất để trong tháng giêng năm 2003, một người lao động được chọn ngẫu nhiên dành ít hơn 50 giờ đăng nhập vào Internet là bao nhiêu.
2. Có bao nhiêu phần trăm người lao động dành hơn 100 giờ trong tháng giêng năm 2003 để đăng nhập vào Internet.

3. Một người được phân loại là người sử dụng nhiều nếu người này thuộc vào nhóm 20% sử dụng nhiều nhất. Trong tháng giêng năm 2003, một người đăng nhập vào Internet bao nhiêu giờ thì được xem là sử dụng nhiều.

V. Liên hệ giữa phân phối nhị thức và phân phối chuẩn

Giả sử $X \sim B(n,p)$. Nếu $n.p \geq 5$ và $n.(1-p) \geq 5$ thì

$$X \sim B(n,p) \to X \sim N(\mu, \sigma^2),$$
$$\mu = n.p$$
$$\sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$$

Khi đó

1. $P(X = k) \approx \dfrac{1}{\sigma}.f\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma}\right)$.

2.
$$P(a \leq X < b) \approx \varphi\left(\frac{b-\mu-0,5}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu-0,5}{\sigma}\right)$$

Khi gặp các biến cố $(a \leq X \leq b)$, $(a < X \leq b)$ và $(a < X < b)$ ta đưa về dạng $(a \leq X < b)$

- $(a \leq X \leq b) = (a \leq X < b+1)$
- $(a < X < b) = (a+1 \leq X < b)$
- $(a < X \leq b) = (a+1 \leq X < b+1)$

Ví dụ 109

Một khách sạn nhận đặt chỗ của 325 khách hàng cho 300 phòng trong ngày 30/4. Theo kinh nghiệm từ những năm trước, tỉ lệ khách hàng đặt chỗ nhưng không tới là 10 %. Tính xác suất

1. Có 300 khách hàng tới vào ngày 30/4.
2. Tất cả các khách hàng tới vào ngày 30/4 đều có phòng.

Giải.

Gọi X là số khách hàng đặt phòng và đến vào ngày 30/4. $X \sim B(325; 0,9)$.

1.

Cách 1. $P(X = 300) = C_{325}^{300}.0,9^{325}.0,1^{25} \approx$

Cách 2.

Vì $n.p = 282,5 > 5$ và $n.(1-p) = 32,5 > 5$, nên ta xấp xỉ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ với $\mu = 292,5; \sigma = 5,4083$

$$P(X = 300) \approx \frac{1}{5,4083}.f\left(\frac{300-292,5}{5,4083}\right)$$
$$= \frac{1}{5,4083}.f(1,39) \approx \frac{0,1518}{5,4083} \approx 0,0281$$

2. Xác suất tất cả khách hàng đến ngày 30/4 đều nhận được phòng.

Cách 1. $P(X \leq 300) =$

Cách 2.

$$P(X \leq 300) = P(0 \leq X < 301)$$
$$\approx \varphi\left(\frac{301-292,5-0,5}{5,4083}\right) - \varphi\left(\frac{0-292,5-0,5}{5,4083}\right)$$
$$\approx \varphi(1,48) - \varphi(-55,47)$$
$$= \varphi(1,48) + \varphi(55,47)$$
$$=$$

VI. Phân phối đều $X \sim U(a,b)$

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phhối đều trong khoảng (a,b), kí hiệu $X \sim U(a,b)$, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & khi \quad x \in [a,b], \\ 0, & khi \quad x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Khi $X \sim U(a,b)$, ta có

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $\qquad Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

- Hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0, & khi \quad x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & khi \quad x \in (a,b), \\ 1, & khi \quad x \ge b. \end{cases}$$

Ví dụ 110

Vietnam Airlines cho biết thời gian bay từ Sài Gòn đi Hà Nội là 2 giờ 5 phút. Giả sử thời gian bay thật sự có phân phối đều trong khoảng giữa 2 giờ đến 2 giờ 20 phút.

1. Tính xác suất để chuyến bay không bị trễ hơn 5 phút.
2. Thời gian bay kỳ vọng là bao nhiêu.

Giải.
Gọi X là số phút tính từ 2 giờ 5 phút tới 2 giờ 20 phút.
Ta có $X \sim U(0,15)$. Ta có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15}, & khi \quad x \in [0,15], \\ 0, & khi \quad x \notin [0,15]. \end{cases}$$

- $P(X \le 5) = \int\limits_0^5 f(x)\,dx = \int\limits_0^5 \frac{1}{15}dx = \frac{1}{3}$
- $E(X) = \dfrac{0+15}{2} = 7,5$

Ví dụ 111

Nhãn trên chai nước giặt cho biết mỗi chai nước chứa 12 ounces. Giả sử dung tích các chai sản xuất được phân phối đều theo hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} 8, & \text{khi } 11,975 \le x \le 12,1 \\ 0, & \text{chỗ khác} \end{cases}$$

1. Xác suất để một chai nước chứa từ 12 đến 12,05 ounces là bao nhiêu.
2. Xác suất để một chai nước chứa từ 12,02 ounces trở lên là bao nhiêu.

3. Những chai có dung tích sai lệch không quá 0,02 ounces so với số in trên nhãn được chấp nhận là đạt tiêu chuẩn. Xác suất để một chai không đạt tiêu chuẩn là bao nhiêu.

VII. Phân phối mũ $X \sim E(\lambda)$

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối mũ với tham số $\lambda > 0$, kí hiệu $X \sim E(\lambda)$, nếu hàm mật độ xác suất có dạng

$$f(x) = \begin{cases} 0, & khi \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & khi \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Khi $X \sim E(\lambda)$, ta có

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$; $\qquad Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- Hàm phân phối:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & khi \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & khi \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Ví dụ 112

Giả sử tuổi thọ (năm) của một mạch điện tử trong máy tính là một BNN có phân phối mũ với kì vọng 6,25. Thời gian bảo hành của mạch điện tử này là 5 năm.

Hỏi có bao nhiêu phần trăm mạch điện tử phải thay thế trong thời gian bảo hành.

Giải

- $\lambda = \dfrac{1}{6,25}$

- $P(X \leq 5) = 1 - e^{-\frac{1}{6,25}.5} =$

Vậy có

Ví dụ 113

Thời gian để đi qua trạm kiểm tra an ninh tại sân bay có thể gây phiền nhiễu cho khách du lịch. Thời gian chờ đợi trung bình trong giờ cao điểm tại Sân bay Quốc tế Cincinnati/Northern Kentucky là $12,1$ phút (The Cincinnati Enquirer, 02/02/2006). Giả sử thời gian để qua kiểm tra an ninh tuân theo phân phối mũ.

1. Xác suất mất ít hơn 10 phút để qua kiểm tra an ninh trong thời gian cao điểm là bao nhiêu.

2. Xác suất mất nhiều hơn 20 phút để qua kiểm tra an ninh trong thời gian cao điểm là bao nhiêu.

3. Xác suất mất từ 10 đến 20 phút để qua kiểm tra an ninh trong thời gian cao điểm là bao nhiêu.

4. Bây giờ là 08 : 00 sáng (giờ cao điểm) và bạn mới đứng xếp hàng chờ kiểm tra an ninh. Để kịp chuyến bay, bạn phải có mặt tại cửa ra máy bay trong vòng 30 phút. Nếu phải mất 12 phút kể từ thời điểm bạn xong kiểm tra an ninh cho đến khi bạn đến cửa ra máy bay của bạn thì xác suất bạn bỏ lỡ chuyến bay là bao nhiêu.