# Chương 6: Biến đổi Laplace

- *Giảng viên Ths. Nguyễn Thị Huyền Nga*

# Nội dung

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**0.1 – Định nghĩa phép biến đổi Laplace.**

**0.2 – Tính chất của biến đổi Laplace.**



**0.3- Định nghĩa phép biến đổi Laplace ngược.**

**04. Ứng dụng biến đổi Laplace: giải phương trình vi phân.**

# 0.1 Định nghĩa biến đổi Laplace.

---

## Định nghĩa biến đổi Laplace

Cho $f(t)$ là một hàm trên $[0,+\infty)$. Biến đổi Laplace L của $f$ là một hàm F được định nghĩa bởi tích phân suy rộng



$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$



*F(s) được gọi là biến đổi Laplace của f(t), còn f(t) là biến đổi ngược của F(s). F(s) và f(t) là một cặp biến đổi Laplace. Trước mắt, ta xem s là số thực.*

# 0.1 Định nghĩa phép biến đổi Laplace.

Nhắc lại:

Tích phân suy rộng (1) được định nghĩa

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^{N} f(t)e^{-st}dt$$

# 0.1 Định nghĩa phép biến đổi Laplace

## Ví dụ 1

Tìm biến đổi Laplace của hàm hằng

$$f(t) = 1, \quad \forall t > 0.$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\,dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^{N} e^{-st}\,dt = \lim_{N \to +\infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^N$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s} \right] = \frac{1}{s}$$

## Ví dụ 2

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = e^{at}, \quad s > a.$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} \, dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^N e^{(a-s)t} \, dt$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^N = \lim_{N \to +\infty} \left[ \frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)N}}{s-a} \right] = \frac{1}{s-a}$$

---

## Ví dụ 3:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = \sin bt,\ b \neq 0.$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \sin bt \cdot e^{-st} dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^{N} \sin bt e^{-st} dt$$

sử dụng tích phân từng phần ta tính được

$$F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

---

## Ví dụ 4:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = \cos bt,\ b \neq 0.$$

## Giải



$$F(s) = \int_0^{+\infty} \cos bt \cdot e^{-st} dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^N \cos bt e^{-st} dt$$

sử dụng tích phân từng phần ta tính được



$$F(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

---

## Ví dụ 5:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = t^n ; n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-st} dt \qquad = \lim_{N \to +\infty} \int_0^N t^n e^{-st} dt$$

sử dụng tích phân từng phần ta tính được

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

---

## Ví dụ 6

Tìm biến đổi Laplace của hàm hyperbolic

$$f(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$





$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

---

## Ví dụ 7:

Tìm biến đổi Laplace của hàm hyperbolic

$$f(t) = \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$



## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right)$$



$$L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace.

---

## 1.Tính tuyến tính

Cho $f_1$ và $f_2$ là hai hàm có biến đổi Laplace trên $[\alpha, +\infty)$ và $c$ là một hằng số. Khi đó:



1. $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}$

2. $L\{cf_1(t)\} = cL\{f_1(t)\}$



Chứng minh trực tiếp từ định nghĩa.

## Ví dụ 1:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = 11 + 5e^{4t} - 6\sin 2t.$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} (11 + 5e^{4t} - 6\sin 2t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} 11\cdot e^{-st}\,dt + 5\int_0^{+\infty} e^{4t}\cdot e^{-st}\,dt - 6\int_0^{+\infty} \sin 2t\cdot e^{-st}\,dt$$

$$F(s) = \frac{11}{s} + \frac{5}{s-4} - \frac{12}{s^2+4}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

Ví dụ 2:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = 6e^{-3t} - t^2 + 2t - 8$$

Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} (6e^{-3t} - t^2 + 2t - 8) \cdot e^{-st} dt$$

$$= 6\int_0^{+\infty} e^{-3t} \cdot e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-st} dt + 2\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st} dt - 8\int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

$$F(s) = \frac{6}{s+3} - \frac{2!}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

## Ví dụ 3:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = 5 - e^{2t} + 6t^2$$

## Giải



$$F(s) = \int_0^{+\infty} (5 - e^{2t} + 6t^2) \cdot e^{-st} dt$$

$$= 5\int_0^{+\infty} e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} e^{2t} \cdot e^{-st} dt + 6\int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-st} dt$$



$$F(s) = \frac{5}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{6 \cdot 2!}{s^3}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace.

---

## 2. Tính chất dời thứ nhất ( dời theo s ):

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$. Khi đó

$$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a).$$



### Chứng minh.

$$L\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt$$



$$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(a+s)t} dt = F(s+a).$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

## Ví dụ 1:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = e^{-4t}\sin 2t + e^{3t}t^2$$

## Giải

$$F(s) = \int_0^{+\infty} (e^{-4t}\sin 2t + e^{3t}t^2)\cdot e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin 2te^{-st}dt + \int_0^{+\infty} e^{3t}t^2\cdot e^{-st}dt$$



$$F(s) = \frac{2}{(s+4)^2 + 2^2} + \frac{2!}{(s-3)^3}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

## Ví dụ 2:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = 2e^{7t}\sin^2 t$$

## Giải



$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{7t}(1 - \cos 2t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{7t}e^{-st}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{7t}\cos 2t \cdot e^{-st}\,dt$$



$$F(s) = \frac{1}{s-7} + \frac{s-7}{(s-7)^2 + 2^2}$$

## 3. Tính chất dời thứ hai ( dời theo t ):

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$. Khi đó

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$



trong đó $u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$

Trong thực tế ta thường gặp dạng sau đây

$$L\{g(t)u(t-a)\} = e^{-as}L\{g(t+a)\}.$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

## Ví dụ1:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$g(t) = \begin{cases} \cos(t - \dfrac{\pi}{6}), & t > \dfrac{\pi}{6} \\ 0, & t < \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$



## Giải

$$f(t) = \cos t \Rightarrow g(t) = f(t - \frac{\pi}{6})u(t - \frac{\pi}{6})$$



$$L\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow L\{g(t)\} = e^{-\frac{\pi}{6}s}\frac{s}{s^2+1}$$

Ví dụ 2:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$g(t) = \begin{cases} (t-5)^3, & t > 5 \\ 0, & t < 5 \end{cases}$$



Giải

$$f(t) = t^3 \Rightarrow g(t) = f(t-5)u(t-5)$$



$$L\{f(t)\} = \frac{3!}{s^4} \qquad \Rightarrow L\{g(t)\} = e^{-5s}\frac{3!}{s^4}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

Ví dụ 3:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = \cos t \cdot u(t - \pi)$$

Giải



$$g(t) = \cos t; \; a = \pi. \qquad g(t + a) = \cos(t + \pi) = -\cos t$$

$$L\{g(t + a)\} = -\frac{s}{s^2 + 1}$$



$$L\{\cos t \cdot u(t - \pi)\} = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2 + 1}$$

## 4. Tính chất đổi thang đo.

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$. Khi đó

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right);\ a > 0.$$



**Chứng minh.**

$$L\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt$$ Đặt $x = at \Rightarrow dt = \frac{dx}{a}$



$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{s}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

## Ví dụ 1:

Cho $L\{f(t)\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$

tìm $L\{e^{-t} f(3t)\}$

## Giải

$$L\{f(3t)\} = \frac{1}{3} F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{e^{-3/s}}{s/3} = \frac{e^{-3/s}}{s}$$

$$\Rightarrow L\{e^{-t} f(3t)\} = \frac{e^{-\frac{3}{s+1}}}{s+1}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace.

---

## 5. Nhân với $t^n$.

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$. Khi đó

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$



**Chứng minh.**

$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ Đạo hàm hai vế, ta có



$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st}dt$$

$= -L\{tf(t)\} \Rightarrow L\{tf(t)\} = -F'(s)$ Dùng qui nạp, suy ra kết quả.

## Ví dụ 1:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = t\sin 3t$$

## Giải

$$L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

$$\Rightarrow L\{t\sin(3t)\} = (-1)^1\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)' = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

---

## Ví dụ2:

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = (t^2 - 2)\cos 4t$$

## Giải



$$L\{(t^2 - 2)\cos 4t\} = L\{t^2\cos 4t\} - 2L\{\cos 4t\}$$



$$\Rightarrow F(s) = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2 + 4^2}\right)'' - \frac{2s}{s^2 + 4^2}$$

---

## 6. Chia cho t.

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$. Khi đó

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(x)\,dx.$$

**Chứng minh.**



$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Tích phân hai vế, ta có

$$\int_s^{+\infty} F(x)\,dx = \int_s^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt\right]dx = \int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dx\right]dt$$



$$= \int_0^{+\infty} f(t)\left.\frac{e^{-xt}}{-t}\right|_s^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

## Giải



$$L\{\frac{\sin t}{t}\} = \int_{s}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = arctg s \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} s$$

## 7. Đạo hàm của hàm gốc.

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$ và $f'(t)$ liên tục. Khi đó

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$



## Hệ quả.

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$



$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0).$$

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

## Ví dụ

$$f(t) = t^2$$

Tìm $L\{f(t)\};\ L\{f'(t)\}$



## Giải



$$L\{f(t)\} = \frac{2!}{s^3}$$

$$\Rightarrow L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) = \frac{2!}{s^2} - 0 = \frac{2!}{s^2}$$

## 8. Tích phân của hàm gốc.

Giả sử $L\{f(t)\} = F(s)$. Khi đó

$$L\{\int_0^t f(x)dx\} = \frac{F(s)}{s}$$

**Chứng minh.**

Sử dụng tính chất 7, đạo hàm của hàm gốc.

# 0.2 Tính chất của phép biến đổi Laplace

---

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace của hàm $Si(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$

## Giải



$$L\{\frac{\sin t}{t}\} = \operatorname{arctg}\frac{1}{s} \Rightarrow L\{\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx\} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}$$

---

**Bài tập 1.** Tìm biến đổi Laplace của hàm

$1.\ f(t) = 2e^{4t}$ $\qquad$ $1.\ \dfrac{2}{s-4}$

$2.\ f(t) = 3e^{-2t}$ $\qquad$ $2.\ \dfrac{3}{s+2}$



$3.\ f(t) = 5t - 3$ $\qquad$ $3.\ \dfrac{5}{s^2} - \dfrac{3}{s}$

$4.\ f(t) = 2t^2 - e^{-t}$ $\qquad$ $4.\ \dfrac{4}{s^3} - \dfrac{1}{s+1}$



$5.\ f(t) = 3\cos 5t$ $\qquad$ $5.\ \dfrac{3s}{s^2+25}$

## Định nghĩa biến đổi Laplace ngược

Biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s)$ là một hàm $f(t)$ liên tục trên $[0,+\infty)$ và thỏa

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

Ký hiệu phép biến đổi Laplace ngược là



$$f(t) = L^{-1}\{F\}$$



$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{2}{s^3}$$

Giải

Dựa vào các biến đổi Laplace xuôi cơ bản ta thấy

$$f(t) = t^2 \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{2!}{s^3}$$

Vậy biến đổi Laplace ngược của hàm đã cho là

$$L^{-1}\{F(s)\} = t^2$$

# 0.1 Định nghĩa phép biến đổi Laplace ngược

---

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{2}{(s-5)^3}$$

## Giải

$$f(t) = t^2 \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{2!}{s^3}$$

Sử dụng tính chất dời theo s, ta có

$$L\{e^{5t} f(t)\} = \frac{2!}{(s-5)^3}$$

Vậy biến đổi Laplace ngược của hàm đã cho là

$$L^{-1}\{F(s)\} = e^{5t} t^2$$

# 0.1 Định nghĩa phép biến đổi Laplace ngược

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

## Giải



Dựa vào các biến đổi Laplace xuôi cơ bản ta thấy

$$f(t) = \sin 3t \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{3}{s^2 + 9}$$



Vậy biến đổi Laplace ngược của hàm đã cho là

$$L^{-1}\{F(s)\} = \sin 3t$$

# 0.1 Định nghĩa phép biến đổi Laplace ngược

---

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 5}$$

## Giải



$$\frac{s-1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}$$

Vậy biến đổi Laplace ngược của hàm đã cho là



$$L^{-1}\{F(s)\} = e^t \cos 2t$$

# 0.2 Tính chất của biến đổi Laplace ngược

----------------------------------------------------------------------------------------------------

## 1. Tính tuyến tính

Giả sử các biến đổi Laplace ngược $L^{-1}\{F_1(s)\}; L^{-1}\{F_2$ tồn tại và liên tục *trên* $[0,+\infty)$ và *c* là hằng số. Khi đó



$$1.\ L^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\} = L^{-1}\{F_1(s)\} + L^{-1}\{F_2(s)\}$$

$$2.\ L^{-1}\{cF_1(s)\} = cL^{-1}\{F_1(s)\}$$

# 0.2 Tính chất của biến đổi Laplace ngược

---

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}$$



## Giải

$$L^{-1}\{F(s)\} = 5L^{-1}\{\frac{1}{s-6}\} - 6L^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}\} + \frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4s+5}\}$$



$$L^{-1}\{F(s)\} = 5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3}{2}e^{-2t}\sin t$$

# 0.2 Tính chất của biến đổi Laplace ngược

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10}$$



## Giải

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+9} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{(s+1)^2+9}$$



$$L^{-1}\{F(s)\} = 3e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

## 2. Tính chất dời theo *s*

$$L^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at} L^{-1}\{F(s)\}$$

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm



$$F(s) = \frac{s}{s^2+4s+13}$$

$$\frac{s}{s^2+4s+13} = \frac{s+2-2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{2}{(s+2)^2+3^2}$$



$$L^{-1}\{F(s)\} = e^{-2t}\cos 3t - \frac{2}{3} e^{-2t}\sin 3t$$

---

## 3. Tính chất dời theo *t*

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

Qui tắc để tìm Laplace ngược của hàm có chứa $e^{-as}$

1. bỏ thừa số $e^{-as}$

2. Tìm Laplace ngược của hàm còn lại.

3. Dời hàm theo *t* vừa tìm được về phía phải *a* đơn vị, sau đó ngắt bỏ phía trái nếu $a>0$.

# 0.2 Tính chất của biến đổi Laplace ngược

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = e^{-5s}\frac{s}{s^2-9}$$



## Giải

$$L^{-1}\{\frac{s}{s^2-9}\} = \cosh 3t$$



$$L^{-1}\{e^{-5s}\frac{s}{s^2-9}\} = \cosh 3(t-5)\cdot \boxed{u(t-5)}$$

# 0.2 Tính chất của biến đổi Laplace ngược

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{8e^{-3s}}{s^2 + 4}$$

## Giải

$$L^{-1}\{\frac{8}{s^2+4}\} = 4\sin 2t$$

$$L^{-1}\{e^{-3s}\frac{8}{s^2+4}\} = 4\sin 2(t-3)\cdot \boxed{u(t-3)}$$

# 0.2 Tính chất của biến đổi Laplace ngược

---

## Ví dụ

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm

$$F(s) = \frac{e^{-2s}s}{s^2 - 3s + 2}$$



## Giải

$$\frac{s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow L^{-1}\{\frac{s}{s^2 - 3s + 2}\} = 2e^{2t} - e^{t}$$



$$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-2s}\frac{s}{s^2 - 3s + 2}\} = 2e^{2(t-2)} - e^{t-2} \quad u(t-2)$$

# ỨNG DỤNG: Giải phương trình hoặc hệ phương trình vi phân.

---

Để giải phương trình hoặc hệ phương trình vi phân với hàm cần tìm là $y(t)$ cùng với các điều kiện ban đầu:

1. Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình đã cho thu được phương trình theo $Y(s)$.

2. Giải phương trình tìm $Y(s)$.

3. Lấy biến đổi Laplace ngược tìm $y(t)$.



$$L\{y(t)\} = Y(s)$$



$$L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$$

$$L\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

## Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y'(t) + 2y(t) = 1$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 4$.

$$L\{y'(t) + 2y(t)\} = L\{1\}$$

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s(s+2)} \qquad Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{7}{2(s+2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{-2t}$$

## Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y''(t) + 4y(t) = 9t$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 0; y'(0) = 7.$

$$L\{y''(t) + 4y(t)\} = 9L\{t\}$$



$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{9}{s^2}$$

$$s^2Y(s) - 7 + 4Y(s) = \frac{9}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{7s^2 + 9}{s^2(s^2 + 4)}$$



$$Y(s) = \frac{9/4}{s^2} + \frac{19/4}{s^2 + 4}$$

$$y(t) = \frac{9}{4}t + \frac{19}{8}\sin 2t$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + 12e^{-t}$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 6; y'(0) = -1.$



$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-2}$$



$$y(t) = 3 + 2t + 2e^{-t} + 3e^{t} - 2e^{2t}$$