GIẢI TÍCH PHỨC

Thời lượng và mục tiêu môn học

Thời lượng:

45 tiết = 30 tiết lý thuyết + 15 tiết bài tập

Mục tiêu:

1. Nắm vững các kiến thức trọng yếu về giải tích phức.
2. Vận dụng thành thạo cách tính tích phân của hàm biến phức.
3. Ứng dụng các phép biến đổi để giải các phương trình vi phân.

Kiến thức cần thiết và Tài liệu tham khảo

Kiến thức cần thiết

- Đại cương về số phức (Toán Đại Số A1).
- Giải tích thực.

Tài liệu tham khảo

1. Complex Analysis - Terence Tao.
2. Methods of Theoretical Physics (Chapter 4) - Philip M. Morse, Herman Feshbach.
3. Phương Pháp Toán Cho Vật Lý (tập II) - Lê Văn Trực, Nguyễn Văn Thỏa, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

Liên hệ

Bộ môn Vật lý lý thuyết
Võ Thành Văn - vo.thanh.van.123@gmail.com
Nguyễn Thị Huyền Nga - nga2912@gmail.com
Trương Xuân Nhựt - truongxuannhut@gmail.com
Nguyễn Hồng Sơn - nhsonau@yahoo.com.au

Nội dung chính

1. **Chương I: Số Phức và Mặt Phẳng Phức**
   3 tiết lý thuyết (1 buổi).
2. **Chương II: Hàm Biến Phức**
   3 tiết lý thuyết (1 buổi).
3. **Chương III: Các Hàm Phức Cơ Bản**
   3 tiết lý thuyết (1 buổi)+3 tiết bài tập (1 buổi).
4. **Chương IV: Tích Phân Phức**
   6 tiết lý thuyết (2 buổi)+3 tiết bài tập (1 buổi).
5. **Chương V: Thuyết Thặng Số**
   6 tiết lý thuyết (2 buổi)+3 tiết bài tập (1 buổi).
6. **Chương VI: Các Phép Biến Đổi Tích Phân**
   9 tiết lý thuyết (3 buổi)+6 tiết bài tập (2 buổi).

Chương I: Số Phức và Mặt Phẳng Phức

- Số phức và các dạng biểu diễn số phức
- Mặt phẳng phức
- Các phép toán
- Tập con trong mặt phẳng phức

I.1. Số phức

- Tập số nguyên dương (số tự nhiên) $\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \dots$
- $20 + x = 12 \Rightarrow x = -8$. Tập $\mathbb{N}$ được mở rộng thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$, bao gồm các số nguyên âm: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- $4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Tập $\mathbb{Z}$ được mở rộng thành tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, bao gồm các số không nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Tập $\mathbb{Q}$ được mở rộng thành tập số thực $\mathbb{R}$, bao gồm các số vô tỉ (nghĩa là các số không nguyên và không thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.)
- $x^2 = -1 \Rightarrow x = i$. Tập $\mathbb{R}$ được mở rộng thành tập số phức $\mathbb{C}$.

I.1. Số phức

- Tập số nguyên dương (số tự nhiên) $\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $20 + x = 12 \Rightarrow x = -8$. Tập $\mathbb{N}$ được mở rộng thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$, bao gồm các số nguyên âm: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Tập $\mathbb{Z}$ được mở rộng thành tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, bao gồm các số không nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Tập $\mathbb{Q}$ được mở rộng thành tập số thực $\mathbb{R}$, bao gồm các số vô tỉ (nghĩa là các số không nguyên và không thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.)
- $x^2 = -1 \Rightarrow x = i$. Tập $\mathbb{R}$ được mở rộng thành tập số phức $\mathbb{C}$.

I.1. Số phức

- Tập số nguyên dương (số tự nhiên) $\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $20 + x = 12 \Rightarrow x = -8$. Tập $\mathbb{N}$ được mở rộng thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$, bao gồm các số nguyên âm: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Tập $\mathbb{Z}$ được mở rộng thành tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, bao gồm các số không nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Tập $\mathbb{Q}$ được mở rộng thành tập số thực $\mathbb{R}$, bao gồm các số vô tỉ (nghĩa là các số không nguyên và không thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.)
- $x^2 = -1 \Rightarrow x = i$. Tập $\mathbb{R}$ được mở rộng thành tập số phức $\mathbb{C}$.

I.1. Số phức

- Tập số nguyên dương (số tự nhiên) $\mathbb{N}: 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $20 + x = 12 \Rightarrow x = -8$. Tập $\mathbb{N}$ được mở rộng thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$, bao gồm các số nguyên âm: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Tập $\mathbb{Z}$ được mở rộng thành tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, bao gồm các số không nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Tập $\mathbb{Q}$ được mở rộng thành tập số thực $\mathbb{R}$, bao gồm các số vô tỉ (nghĩa là các số không nguyên và không thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.)
- $x^2 = -1 \Rightarrow x = i$. Tập $\mathbb{R}$ được mở rộng thành tập số phức $\mathbb{C}$.

I.1. Số phức

- Tập số nguyên dương (số tự nhiên) $\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $20 + x = 12 \Rightarrow x = -8$. Tập $\mathbb{N}$ được mở rộng thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$, bao gồm các số nguyên âm: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Tập $\mathbb{Z}$ được mở rộng thành tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, bao gồm các số không nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Tập $\mathbb{Q}$ được mở rộng thành tập số thực $\mathbb{R}$, bao gồm các số vô tỉ (nghĩa là các số không nguyên và không thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.)
- $x^2 = -1 \Rightarrow x = i$. Tập $\mathbb{R}$ được mở rộng thành tập số phức $\mathbb{C}$.

Dạng Decartes của số phức

Trong hệ tọa độ Decartes, mỗi số phức z có thể được viết dưới dạng $z = a + ib$, trong đó:

1. a được gọi là phần thực (real part) của số phức z. Ký hiệu: $a = Re(z)$.
2. b được gọi là phần ảo (imaginary part) của số phức z. Ký hiệu: $b = Im(z)$.
3. i được gọi là đơn vị ảo. Tính chất: $i^2 = -1$.

Dạng $z = a + ib$ được gọi là dạng Decartes của số phức. Trong dạng này, độ lớn (môđun [modulus], giá trị tuyệt đối) của số phức z được định nghĩa là:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dạng mũ của số phức

Trong hệ tọa độ cực, số phức có dạng mũ:

$$z = re^{i\theta},$$

với:

- $r = |z| \in \mathbb{R}^+$: modulus của z.
- $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$: argument (pha [phase]) của z.

Trong tài liệu của Terence Tao, dạng mũ được gọi là "polar form" (dạng trong tọa độ cực).

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Mối liên hệ này được xác định bởi công thức Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1}$$

Cho trước số phức ở dạng mũ, ta tìm được số phức ở dạng Decartes:

$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta, \tag{2}$$

so sánh biểu thức này với $z = a + ib$, ta có:

$$a = r\cos\theta, \tag{3}$$

$$b = r\sin\theta. \tag{4}$$

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Ngược lại, nếu cho trước số phức ở dạng Decartes, ta tìm được số phức ở dạng mũ. Từ (3) và (4) ta có:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{5}$$

và

$$\tan\theta = \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Ví dụ: Cho $z = 1 + i$. Hãy biểu diễn z dưới dạng mũ.

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Ví dụ: Cho $z = 1 + i$. Hãy biểu diễn z dưới dạng mũ.
Từ (5), ta có:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Từ (6), ta có:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vậy

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}.$$

Lưu ý quan trọng: Có vô số khả năng chọn argument θ cho một số phức. Người ta quy ước chọn $\theta \in (-\pi, +\pi]$ làm argument chuẩn, ký hiệu là $Arg(z)$.

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Ví dụ: Cho $z = 1 + i$. Hãy biểu diễn z dưới dạng mũ.
Từ (5), ta có:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Từ (6), ta có:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vậy

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}.$$

Lưu ý quan trọng: Có vô số khả năng chọn argument θ cho một số phức. Người ta quy ước chọn $\theta \in (-\pi, +\pi]$ làm argument chuẩn, ký hiệu là $Arg(z)$.

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Ví dụ: Cho $z = 1 + i$. Hãy biểu diễn z dưới dạng mũ.
Từ (5), ta có:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Từ (6), ta có:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vậy

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}.$$

Lưu ý quan trọng: Có vô số khả năng chọn argument θ cho một số phức. Người ta quy ước chọn $\theta \in (-\pi, +\pi]$ làm argument chuẩn, ký hiệu là $Arg(z)$.

Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ

Ví dụ: Cho $z = 1 + i$. Hãy biểu diễn z dưới dạng mũ.
Từ (5), ta có:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Từ (6), ta có:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vậy

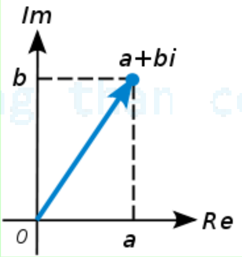
$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}.$$

Lưu ý quan trọng: Có vô số khả năng chọn argument θ cho một số phức. Người ta quy ước chọn $\theta \in (-\pi, +\pi]$ làm argument chuẩn, ký hiệu là $Arg(z)$.

Mặt phẳng phức (mặt phẳng Argand)

Mặt phẳng phức (những tên gọi khác: mặt phẳng Argand, mặt phẳng z) là mặt phẳng được xác định bởi hai trục tọa độ Decartes vuông góc với nhau:

- Trục x là trục thực, biểu diễn phần thực của số phức z.
- Trục y là trục ảo, biểu diễn phần ảo của số phức z.

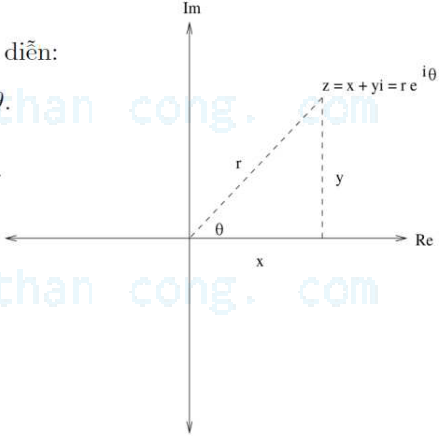


Một ví dụ về cách sử dụng mặt phẳng phức

- Mối liên hệ giữa 2 cách biểu diễn:

$x = r\cos\theta; \qquad y = r\sin\theta.$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \tan\theta = \frac{x}{y}.$



Các phép toán đại số trên $\mathbb{C}$

Phép cộng/trừ, nhân, chia trên $\mathbb{C}$ tuân theo các luật đại số thông thường với lưu ý $i^2 = -1$.

- Phép cộng/trừ:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i. \qquad (7)$$

- Phép nhân:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \qquad (8)$$

- Phép chia:

$$(a + bi)/(c + di) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \qquad (9)$$

Chú ý: phép chia cho 0 không xác định (vì không được định nghĩa).

Các phép toán đại số trên $\mathbb{C}$

Đối với các phép nhân/chia, sẽ tiện lợi hơn nếu viết số phức dưới dạng mũ:

- Phép nhân:

$$(re^{i\theta})(se^{i\alpha}) = rse^{i(\theta+\alpha)}. \tag{10}$$

- Phép chia:

$$(re^{i\theta})/(se^{i\alpha}) = (r/s)e^{i(\theta-\alpha)}. \tag{11}$$

Chú ý: dạng mũ rất tiện lợi trong đa số các tính toán có liên quan đến số phức.

Lũy thừa và căn số

Ví dụ: Tính $(1+i)^{20}$.

Lũy thừa và căn số

Ví dụ: Tính $(1+i)^{20}$.
Ta viết $z = 1 + i$ dưới dạng mũ:

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}.$$

Khi đó:

$$(1+i)^{20} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+ik2\pi})^{20} = 2^{10}e^{i\pi} = -1024.$$

Lũy thừa và căn số

Ví dụ: Tính $(1+i)^{1/2}$

Lũy thừa và căn số

Ví dụ: Tính $(1+i)^{1/2}$

$$\begin{aligned}(1+i)^{1/2} &= (\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)})^{1/2}\\ &= 2^{1/4}e^{i(\frac{\pi}{8}+k\pi)}\\ &= 2^{1/4}e^{\pi i/8} \quad \text{hoặc} \quad 2^{1/4}e^{9\pi i/8}.\end{aligned}$$

Tổng quát: Căn bậc n của một số phức khác 0 có đúng n giá trị. Thật vậy, xét $z = re^{i\phi}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi+k2\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Lũy thừa và căn số

Ví dụ: Tính $(1+i)^{1/2}$

$$\begin{aligned}(1+i)^{1/2} &= (\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)})^{1/2}\\ &= 2^{1/4}e^{i(\frac{\pi}{8}+k\pi)}\\ &= 2^{1/4}e^{\pi i/8} \quad \text{hoặc} \quad 2^{1/4}e^{9\pi i/8}.\end{aligned}$$

Tổng quát: Căn bậc n của một số phức khác 0 có đúng n giá trị. Thật vậy, xét $z = re^{i\phi}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi+k2\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Các phép toán trên modulus

- $|zw| = |z||w|$.
  $|z/w| = |z|/|w|$.
  $|z^n| = |z|^n$.
- Bất đẳng thức tam giác:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

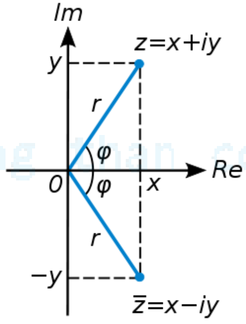
Tổng quát:

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Liên hiệp phức

Liên hiệp phức của số phức $z = x + iy$ là một số phức được ký hiệu là $\bar{z}$ hoặc z^* và được định nghĩa:

$$\bar{z} = x - iy$$



Liên hiệp phức

Dưới dạng mũ:

$$\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}. \tag{12}$$

$$\overline{(z + we^{i\varphi})(w - ize^{-i\varphi})} = (\bar{z} + \bar{w}e^{-i\varphi})(\bar{w} + i\bar{z}e^{i\varphi}). \tag{13}$$

Một số hệ thức quan trọng

Gọi z và w là các số phức. Ta có các hệ thức:

$$z\bar{z} = |z|^2 \tag{14}$$

$$e^z e^w = e^{z+w} \tag{15}$$

Bài tập: hãy chứng minh hai hệ thức trên bằng cách viết số phức dưới dạng mũ.

Tập con trong mặt phẳng phức

- **Vùng lân cận:** cho z_0 là một điểm trong $\mathbb{C}$, tập V gồm các phần tử:

$$z : |z - z_0| < \varepsilon,$$

trong đó $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, được gọi là vùng lân cận điểm z_0. Ví dụ: $\{z : |z-2| < 1\}, \{z : z+i| < 2\}, \{z : |z| < 8\}$ lần lượt là lân cận của các điểm $2, -i, 0$.

- **Phần trong (interior)** - Cho S là một tập con trong $\mathbb{C}$. Điểm z_0 được gọi là thuộc "phần trong" của S khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset S.$$

- **Tập mở - Tập đóng** - Nếu mọi điểm trong tập S đều thuộc phần trong của S, khi đó S được gọi là **tập mở**. Ngược lại, S là **tập đóng**.

Tập con trong mặt phẳng phức

- **Đường cong** - Một đường (hay đường cong) trong mặt phẳng phức là một ánh xạ:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}.$$

(từ đoạn $[a, b]$ của đường thẳng thực vào $\mathbb{C}$.)
Đường cong γ gọi là liên tục nếu x và y liên tục.

- **Tập liên thông** - Tập con S của $\mathbb{C}$ được gọi là liên thông theo nghĩa nếu hai điểm bất kỳ trong S đều nối được với nhau bằng một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong S.

Tập con trong mặt phẳng phức

Ví dụ về các tập con trong $\mathbb{C}$:

- $\{z : |z| < 1\}$: hình tròn mở đơn vị.
- $\{z : |z| \leq 1\}$: hình tròn đóng đơn vị.
- $\{z : Im(z) > 0\}$: nửa mặt phẳng trên.
- $\{z : Re(z) < 0\}$: nửa mặt phẳng trái.
- $\{z : 0 \leq Re(z) \leq 1, 0 \leq Im(z) \leq 1\}$: hình vuông đơn vị.

Qui ước: tập rỗng $\emptyset$ và $\mathbb{C}$ là các tập mở.

$\blacksquare$