Chương II: Hàm Biến Phức

25th June 2011

Hàm số phức với biến số phức

- Cho D là một tập con trong $\mathbb{C}$. Ta ký hiệu các phần tử của D là $z = x + iy$.
- Xét một hàm
$$f : D \to \mathbb{C}.$$
- Nếu f tồn tại, ta sẽ tìm được một số phức $w = u + iv$ sao cho $w = f(z)$.
- Khi đó ta viết:
$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$
ở đây, $u(x, y) = Ref(z)$ và $v(x, y) = Imf(z)$.

Hàm số phức với biến số phức

Ví dụ: Cho hàm $f(z) = z^2$. Tìm phần thực và phần ảo của $f(z)$.

Hàm số phức với biến số phức

Ví dụ: Cho hàm $f(z) = z^2$. Tìm phần thực và phần ảo của $f(z)$.
Ta có thể viết:

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + 2ixy$$

Do đó, phần thực của $f(z)$ là:

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

phần ảo của $f(z)$ là:

$$v(x, y) = 2xy.$$

Đa trị và đơn trị

- Nếu ứng với một giá trị của biến phức z ta có nhiều giá trị của w, thì ta gọi $f(z)$ là hàm đa trị.
- Tính đa trị của hàm phức xuất phát từ tính đa trị của argument θ.
- Nếu chia miền giá trị của θ ra thành những khoảng có chiều dài 2π, thì trên những khoảng đó, hàm phức là đơn trị.
- Một hàm $f : D \to G$ được gọi là đơn trị một - một hay đơn diệp nếu các ảnh của những điểm khác nhau của D là khác nhau. Nói cách khác, $f(z)$ là đơn diệp nếu:

$$\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2).$$

Giới hạn

Cho hàm $f(z)$ xác định trên D, và điểm $z_0 \in D$. Ta nói hàm $f(z)$ có giới hạn là L khi z tiến tới z_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Định lý

Nếu giới hạn L của f tồn tại, thì giới hạn này là duy nhất, và giá trị của L không phụ thuộc vào lộ trình mà theo đó $z \to z_0$.

Giới hạn

Cho hàm $f(z)$ xác định trên D, và điểm $z_0 \in D$. Ta nói hàm $f(z)$ có giới hạn là L khi z tiến tới z_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Định lý

Nếu giới hạn L của f tồn tại, thì giới hạn này là duy nhất, và giá trị của L không phụ thuộc vào lộ trình mà theo đó $z \to z_0$.

Liên tục

Cho hàm $f(z)$ xác định trên D, và điểm $z_0 \in D$. Ta nói hàm $f(z)$ liên tục tại điểm z_0 nếu:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Liên tục

Định lý

Nếu f và g xác định trên tập D, liên tục tại $z_0 \in D$, thì các hàm $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ cũng liên tục tại z_0 (đối với trường hợp $\frac{f}{g}$ ta phải có điều kiện $g(z) \neq 0$).

Định lý

Nếu hàm f liên tục tại z_0 và g liên tục tại $w = f(z_0)$ thì hàm hợp $g \circ f$ (xác định bởi $(g \circ f)(z) = g[f(z)]$) cũng liên tục tại z_0.

Định lý

Nếu f liên tục tại z_0 thì $|f|$ cũng liên tục tại z_0 (chú ý rằng $|f|(z) = |f(z)|$).

Liên tục

Định lý

Nếu f và g xác định trên tập D, liên tục tại $z_0 \in D$, thì các hàm $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ cũng liên tục tại z_0 (đối với trường hợp $\frac{f}{g}$ ta phải có điều kiện $g(z) \neq 0$).

Định lý

Nếu hàm f liên tục tại z_0 và g liên tục tại $w = f(z_0)$ thì hàm hợp $g \circ f$ (xác định bởi $(g \circ f)(z) = g[f(z)]$) cũng liên tục tại z_0.

Định lý

Nếu f liên tục tại z_0 thì $|f|$ cũng liên tục tại z_0 (chú ý rằng $|f|(z) = |f(z)|$).

Liên tục

Định lý

Nếu f và g xác định trên tập D, liên tục tại $z_0 \in D$, thì các hàm $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ cũng liên tục tại z_0 (đối với trường hợp $\frac{f}{g}$ ta phải có điều kiện $g(z) \neq 0$).

Định lý

Nếu hàm f liên tục tại z_0 và g liên tục tại $w = f(z_0)$ thì hàm hợp $g \circ f$ (xác định bởi $(g \circ f)(z) = g[f(z)]$) cũng liên tục tại z_0.

Định lý

Nếu f liên tục tại z_0 thì $|f|$ cũng liên tục tại z_0 (chú ý rằng $|f|(z) = |f(z)|$).

Đạo hàm

Cho $f(z)$ xác định trên D, và $z_0 \in D$. Đạo hàm phức f' hoặc $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ được định nghĩa như sau:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}.
\end{aligned}
$$

Nếu giới hạn trên đây tồn tại, ta nói hàm $f(z)$ khả vi tại z_0.

Điều kiện Cauchy - Riemann I

Điều kiện Cauchy - Riemann (Phương trình Cauchy - Riemann)

Nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là các hàm thực đơn trị có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục, thì điều kiện cần và đủ để hàm $f(z) = u + iv$ có đạo hàm là:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Các phương trình (1) và (2) được gọi là các phương trình Cauchy - Riemann.

Điều kiện Cauchy - Riemann II

Để chứng minh định lý trên, ta viết biểu thức $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ như sau:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}.\Delta x.\frac{1 + \left[\frac{\partial f/\partial y}{i\partial f/\partial x}\right] i\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x(1 + i\frac{\Delta y}{\Delta x})} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{1 + \left[\frac{\partial f/\partial y}{i\partial f/\partial x}\right] i\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i\frac{\Delta y}{\Delta x}}
\end{aligned}
$$

Bây giờ ta chứng minh điều kiện cần.

Điều kiện Cauchy - Riemann III

- Nếu f có đạo hàm, thì giới hạn $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ phải tồn tại và giới hạn này không phụ thuộc vào hướng tiến $z \to z_0$.
- Mặt khác, hướng tiến $z \to z_0$ được đặc trưng bởi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Do đó, để đạo hàm không phụ thuộc hướng tiến $z \to z_0$, biểu thức đạo hàm không được chứa số hạng $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Suy ra:

$$\left[\frac{\partial f/\partial y}{i\partial f/\partial x}\right] = 1.$$

- Từ đó ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})$$

Điều kiện Cauchy - Riemann IV

- Phương trình cuối cùng trên đây cho ta hai số phức bằng nhau, vậy, một cách tương ứng ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Điều kiện Cauchy - Riemann V

Vậy ta đã chứng minh được các phương trình Cauchy - Riemann (1) và (2), nghĩa là chứng minh xong điều kiện cần. Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ. Khi đã có các phương trình Cauchy - Riemann (1) và (2), ta suy ra:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

do đó:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

hay:

$$f^{'}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Điều kiện Cauchy - Riemann VI

Vậy đạo hàm của $f(z)$ tồn tại, và ta đã chứng minh được điều kiện đủ. Chú ý rằng từ phần chứmg minh này, ta có:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Do đó, các công thức đạo hàm cho hàm thực vẫn còn đúng với hàm phức.

Các định nghĩa về hàm giải tích

- Nếu hàm $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm trong miền D thì ta nói $f(z)$ **giải tích** (analytic) trong D.
- Nếu hàm $f(z)$ giải tích trên toàn mặt phẳng phức thì ta gọi $f(z)$ là **hàm nguyên** (entire function).
- Ta nói hàm $f(z)$ giải tích tại điểm z_0 nếu có thể tìm được một miền lân cận quanh z_0 sao cho hàm $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm trong vùng lân cận đó.
- Các điểm tại đó hàm $f(z)$ không giải tích được gọi là **các điểm dị thường** của hàm $f(z)$.

Một số ví dụ về hàm giải tích và hàm nguyên

Ví dụ: Cho hàm $w = f(z) = a + ib$, với a, b là các hằng số thực.
Chứng minh: $f(z)$ là hàm nguyên.

Một số ví dụ về hàm giải tích và hàm nguyên

Ví dụ: Cho hàm $w = f(z) = a + ib$, với a, b là các hằng số thực. Chứng minh: $f(z)$ là hàm nguyên.

$$\text{Ta viết: } u + iv = a + ib$$

$$\Rightarrow u = u(x, y) = a; \qquad v = v(x, y) = b.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} & \forall (x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} & \forall (x, y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ điều kiện Cauchy - Riemann thỏa với mọi $z \Rightarrow f$ có đạo hàm tại mọi điểm trong mặt phẳng phức $\Rightarrow f$ là hàm giải tích trong toàn mặt phẳng phức $\Rightarrow f$ là hàm nguyên.

Một số ví dụ về hàm giải tích và hàm nguyên

Ví dụ:

- Chứng minh $f(z) = z$ là hàm nguyên (bài tập về nhà!).
- Chứng minh $f(z) = zRe(z)$ không là hàm giải tích (bài tập tại lớp).

Ta chứng minh rằng $f(z) = zRe(z)$ không là hàm giải tích. Hàm $zRe(z)$ có thể được viết:

$$zx = (x + iy)x = x^2 + ixy.$$

Vậy

$$u = x^2$$

và

$$v = xy.$$

Ta kiểm tra xem điều kiện Cauchy - Riemann có được thỏa mãn hay không.

Với $\forall z \neq 0$, nghĩa là $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, ta thấy điều kiện Cauchy - Riemann bị vi phạm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = -y.$$

Tuy nhiên, tại $z_0 = 0$ thì điều kiện Cauchy - Riemann được thỏa mãn.
Vậy, hàm chỉ khả vi (có đạo hàm) tại $z_0 = 0$.
Do đó, hàm không giải tích.

Tính chất của hàm giải tích I

1. Tổng, tích, thương (nếu mẫu số khác 0) của hai hàm giải tích là hàm giải tích.
2. Hàm giải tích của một hàm giải tích là hàm giải tích.
3. Mọi hàm giải tích $f(z)$ đều có thể được viết dưới dạng chỉ chứa biến z, nghĩa là x, y bị loại hẳn ra khỏi biểu thức của hàm.

Tính chất của hàm giải tích II

Ta chứng minh tính chất 3. Ta viết:

$$w = u + vi = u(x,y) + iv(x,y).$$

Vì $z = x + iy$ và $\bar{z} = x - iy$, nên ta có:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y &= \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

Tính chất của hàm giải tích III

Hàm w được biểu diễn thông qua 2 biến mới z và $\bar{z}$. Tuy nhiên:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}.\frac{\partial w}{\partial y} i \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}) i \\
&= \frac{1}{2}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}.i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}.i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}.\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= 0. \text{ (theo điều kiện Cauchy - Riemann)}
\end{aligned}$$

Tính chất của hàm giải tích IV

Điều này có nghĩa là biến $\bar{z}$ không xuất hiện trong biểu thức của hàm w. Do đó, hàm w được biểu diễn thông qua một biến z duy nhất.

Vài lưu ý về hàm giải tích

- Nếu hàm f vừa chứa z, vừa chứa $\bar{z}$, thì f không thể là hàm giải tích.
- Để chuyển một hàm giải tích $w = f(x, y)$ về dạng $f(z)$ một cách nhanh chóng, ta cho $y = 0$; khi đó $x = z - iy = z$ và

$$w = f(z) = f(x, 0).$$