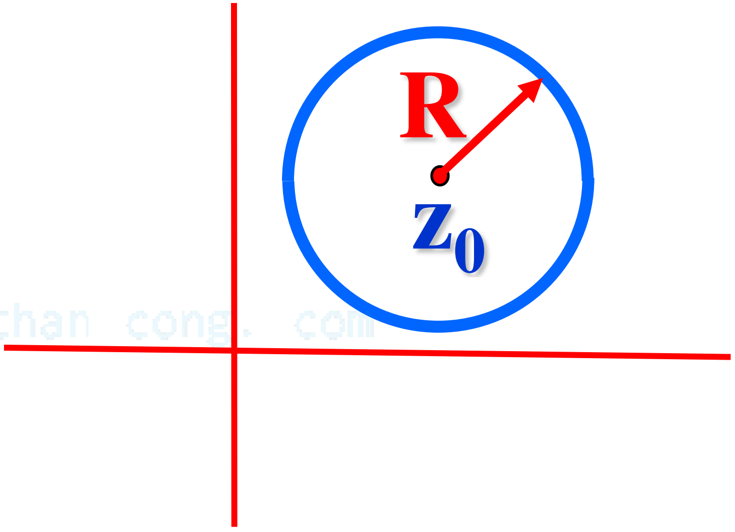
1)Chuỗi Taylor : Hàm $f(z)$ có đạo hàm trong hình tròn mở tâm z_0 , bán kính R .



Chuỗi Taylor lấy tại điểm $z_0 = 0$ gọi là chuỗi

MacLaurin :

Chuỗi MacLaurin của các hàm cơ bản :

$$f(z) = e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$(R = +\infty)$$

$$f(z) = (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \ldots. \qquad \boxed{(R=1)}$$

Muốn tìm chuỗi MacLaurin : dựa vào chuỗi MacLaurin **cơ bản** và **đổi biến**

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin của hàm $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$

Sai

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin của hàm $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin của hàm

$f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4}$ đến số hạng z^5

Dùng chuỗi MacLaurin theo w ta có :

$$\left(\frac{1}{1+z^2/4}\right) = \left(\frac{1}{1+w}\right) =$$

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin hàm $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

Ví dụ: Chuỗi MacLaurin hàm $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$

Ví dụ :Tìm ba số hạng đầu khác không của chuỗi MacLaurin hàm $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$

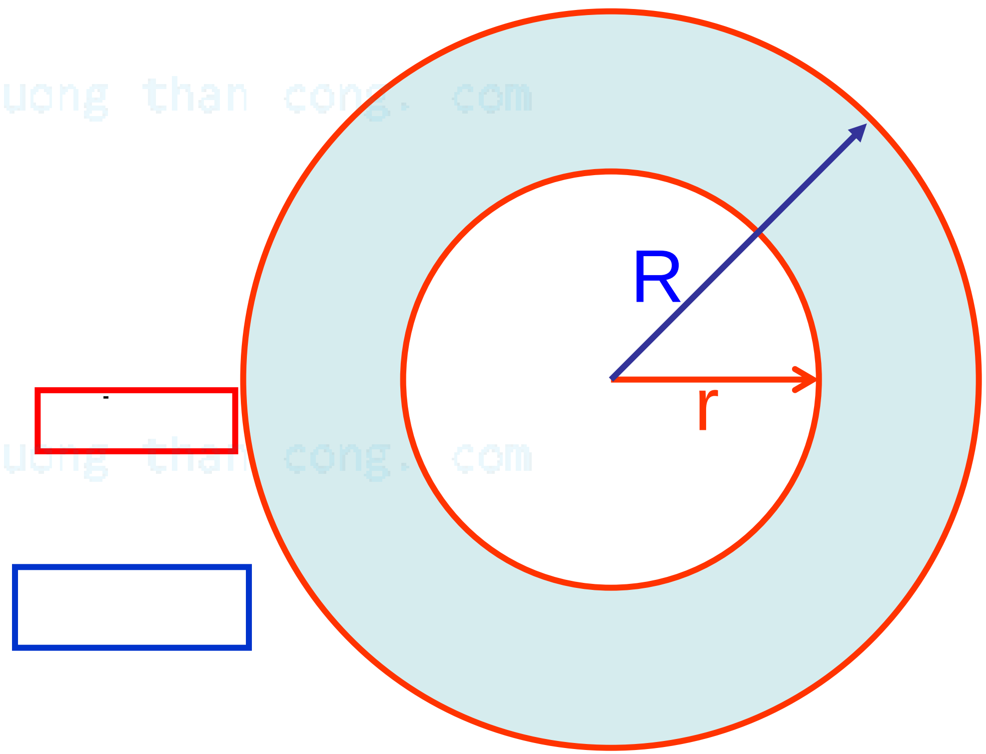
Ví dụ: Chuỗi Taylor hàm $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ tại $z_0=1$

Ví dụ: Chuỗi Taylor $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ tại $z_0=2$

**)
$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4+(z-2)}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{(z-2)}{4}}=$$

Chuỗi Laurent : Hàm $f(z)$ có đạo hàm trong hình vành khăn K : $0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty$

Khi đó với mọi điểm $z \in K$ hàm có thể viết dưới dạng chuỗi vô hạn về cả hai phía :



Để tìm chuỗi Laurent của hàm ta sử dụng khai **triển chuỗi Taylor của hàm** trên các miền **thích hợp** (tùy theo bán kính hội tụ của chuỗi Taylor)

Ví dụ : Khai triển thành chuỗi (thích hợp)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$ trên các miền

a) $|z| < 1$

b) $1 < |z| < 2$

c) $2 < |z| < +\infty$

d) $0 < |z-1| < 1$

e) $1 < |z-1| < +\infty$

f) $1 < |z-2| < +\infty$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}}$$

a) Trong miền $|z| < 1$ **Chuỗi MacLaurin**

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

$$\boxed{\left|\frac{z}{2}\right| < 1}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=$$

$$=\ (1+z+z^2+z^3+\ldots)-\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\left(\ \frac{z}{2}\right)^2+\ldots.\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{4}\right)z+\left(1-\frac{1}{8}\right)z^2+\ldots.$$

b) Trong miền $1 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -(1+z+z^2+\ldots)$$

Sai

$$|z| > 1$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

c) Trong miền $2 < |z| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ..\right)$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \ldots\right]$$

?

$$\left|\frac{z}{2}\right| > 1$$

c) Trong miền $2 < |z| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \qquad \boxed{\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ..\right)$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \ldots\right)$$

$$\boxed{\left|\frac{2}{z}\right| < 1}$$

d) Trong miền $0 < |z-1| < 1$

(Theo chuỗi của $\boxed{(z-1)}$)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-1} =$$

$$\boxed{|z-1| < 1}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} =$$

e) Trong miền $1 < |z-1| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z-1}}$$

$$= \frac{1}{z-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{z-1}\right)^2 + \ldots\ldots \right)$$

f) Trong miền $1 < |z-2| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}} =$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \left[1 - \frac{1}{z-2} + \left(\frac{1}{z-2}\right)^2 + \ldots.\right]$$

Ví dụ : Tìm chuỗi Laurent của hàm $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

trong miền $0<|z|<+\infty$