CHƯƠNG 5
THUYẾT THẶNG SỐ

Nội dung chính

1. Chuỗi hàm
2. Thặng số
3. Ứng dụng vào việc tính tích phân thực

Nội dung chính

1. Chuỗi hàm
2. Thặng số
3. Ứng dụng vào việc tính tích phân thực

Nội dung chính

1. Chuỗi hàm
2. Thặng số
3. Ứng dụng vào việc tính tích phân thực

Chuỗi Taylor I

Định lý

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trên đĩa tròn $z : |z - z_0| \leq R$, với $R > 0$, thì chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\dots \tag{1a}$$

hội tụ về $f(z)$ trên đĩa tròn đó, nghĩa là ta có.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{1b}$$

Ví dụ (chuỗi Taylor)

Tìm khai triển của hàm sau đây ở lân cận điểm $z_0 = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z-3}.$$

Ta có:

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n.n!}{(z-3)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n.n!}{(-2)^{n+1}} = \frac{-n!}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) - \dots$$

Ví dụ (chuỗi Taylor)

Tìm khai triển của hàm sau đây ở lân cận điểm $z_0 = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z-3}.$$

Ta có:

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n.n!}{(z-3)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n.n!}{(-2)^{n+1}} = \frac{-n!}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) - \dots$$

Một số công thức thông dụng

Khai triển Taylor quanh điểm $z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty; \tag{2}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \tag{3}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \tag{4}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad |z| < 1. \tag{5}$$

Chuỗi Laurent I

Định nghĩa

Khai triển Laurent của một hàm $f(z)$ tại điểm z_0 có dạng:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (6)$$

$$+\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots \quad (7)$$

Phần ứng với $n \geq 0$ được gọi là **phần giải tích** của chuỗi Laurent:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (8)$$

Chuỗi Laurent II

Phần còn lại, ứng với $n < 0$, sẽ không giải tích tại z_0, được gọi là **phần chính** của chuỗi Laurent:

$$J = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \tag{9}$$

Dĩ nhiên rằng

$$I + J = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{10}$$

Chuỗi Laurent III

Định lý

Cho hàm $f(z)$ giải tích trên hình vành khăn $r < |z - z_0| < R$, với $R > r$. Khi đó tồn tại chuỗi Laurent duy nhất

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{11}$$

sao cho $f(z)$ hội tụ trên hình vành khăn đó.

Ví dụ (chuỗi Laurent)

Tìm khai triển Laurent ở lân cận điểm 0 trên hình vành khăn $1 < |z| < \infty$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Ta viết:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

Đặt

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

Do ta đang xét z trong miền hình vành khăn, $1 < |z| < \infty$, nên $|\xi| < 1$.

Ví dụ (chuỗi Laurent)

Tìm khai triển Laurent ở lân cận điểm 0 trên hình vành khăn $1 < |z| < \infty$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Ta viết:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

Đặt

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

Do ta đang xét z trong miền hình vành khăn, $1 < |z| < \infty$, nên $|\xi| < 1$.

Ví dụ (chuỗi Laurent)

Tìm khai triển Laurent ở lân cận điểm 0 trên hình vành khăn $1 < |z| < \infty$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Ta viết:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

Đặt

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

Do ta đang xét z trong miền hình vành khăn, $1 < |z| < \infty$, nên $|\xi| < 1$.

Ví dụ (chuỗi Laurent)

Tìm khai triển Laurent ở lân cận điểm 0 trên hình vành khăn $1 < |z| < \infty$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Ta viết:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

Đặt

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

Do ta đang xét z trong miền hình vành khăn, $1 < |z| < \infty$, nên $|\xi| < 1$.

Ví dụ (chuỗi Laurent)

Khai triển Taylor cho hàm $\frac{1}{1-\xi}$ lân cận điểm 0 ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\xi} &= 1+\xi+\xi^2+\dots\\ &= 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}.\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right) = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots$$

Đó là khai triển Laurent ở lân cận điểm 0 trên hình vành khăn $1<|z|<\infty$ của hàm $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

Ví dụ (chuỗi Laurent)

Khai triển Taylor cho hàm $\frac{1}{1-\xi}$ lân cận điểm 0 ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\xi} &= 1+\xi+\xi^2+\dots\\ &= 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}.(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots) = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots$$

Đó là khai triển Laurent ở lân cận điểm 0 trên hình vành khăn $1<|z|<\infty$ của hàm $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

Phân loại điểm dị thường cô lập

Định nghĩa

Điểm z_0 gọi là **điểm dị thường cô lập** của hàm f nếu hàm f không xác định tại z_0, nhưng xác định và giải tích trong hình vành khăn $0 < |z - z_0| < R$ với $R > 0$.

Do f giải tích trong hình vành khăn $0 < |z - z_0| < R$ nên ta có chuỗi Laurent. Và tùy theo phần chính của chuỗi Laurent, ta phân loại điểm dị thường cô lập thành:

1. cực bận n (n hữu hạn),
2. điểm dị thường cốt yếu (n vô hạn).

Cực bận n

Xét chuỗi Laurent của hàm $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots$$

Nếu phần chính của chuỗi Laurent có tới hệ số $a_{-n} \neq 0$, và

$$a_{-(n+1)} = a_{-(n+2)} = \dots = a_{-\infty} = 0,$$

thì z_0 được gọi là **cực bậc n** của hàm $f(z)$.

Cực bận n

Xét chuỗi Laurent của hàm $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$+\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots$$

Nếu phần chính của chuỗi Laurent có tới hệ số $a_{-n} \neq 0$, và

$$a_{-(n+1)} = a_{-(n+2)} = \dots = a_{-\infty} = 0,$$

thì z_0 được gọi là **cực bậc n** của hàm $f(z)$.

Cực bận n

Khi đó ta có thể viết $f(z)$ dưới dạng

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^n}\left[a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-z_0) + \ldots\right] \\ &= \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}, \end{aligned}$$

với $g(z) = [a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots]$ giải tích tại $z = z_0$.

Cực bận $n = 1$

Trường hợp $n = 1$:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}.$$

Khi đó z_0 được gọi là ***cực đơn***.

Điểm dị thường cốt yếu

Khi $n \to \infty$, nghĩa là phần chính của chuỗi Laurent có vô số số hạng, thì z_0 được gọi là ***điểm dị thường cốt yếu***.

Ví dụ. Hàm

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

có điểm dị thường cốt yếu tại $z = 0$ vì

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

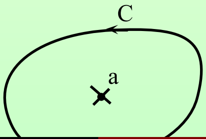
Thặng số (Residue)

Định nghĩa

Thặng số (hay giá trị thặng dư) của $f(z)$ tại điểm dị thường cô lập $z = a$ được ký hiệu và định nghĩa như sau:

$$Res[f(z); z = a] = Res_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\mathrm{d}z,$$

với C là chu tuyến bất kỳ bao quanh a và nằm trong miền lân cận của a mà $f(z)$ giải tích.



Công thức tính thặng số

Định lý

Nếu hàm f có khai triển Laurent trong lân cận của điểm a là

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} = a_n(z-a)^n \tag{12}$$

thì thặng số của f tại a sẽ là:

$$Res_{z=a} f(z) = a_{-1} \tag{13}$$

Bỏ qua phần chứng minh công thức, ta hãy xét một số trường hợp đặc biệt sau đây.

Công thức tính thặng số

Chứng minh. Lấy tích phân của từng số hạng trong chuỗi (12), áp dụng các công thức tích phân Cauchy ta được

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = 0 \quad \text{với } k \neq 1; \qquad \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i,$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i.a_{-1} \Rightarrow Res_{z=a} f(z) = a_{-1}. \quad \text{(đpcm)}$$

Công thức tính thặng số

Chứng minh. Lấy tích phân của từng số hạng trong chuỗi (12), áp dụng các công thức tích phân Cauchy ta được

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = 0 \quad \text{với } k \neq 1; \qquad \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i,$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i . a_{-1} \Rightarrow Res_{z=a} f(z) = a_{-1}. \quad \text{(đpcm)}$$

Công thức tính thặng số - trường hợp 1

$z = a$ là cực đơn

Trrường hợp này $f(z)$ có dạng

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots \quad (14)$$

Thặng số được tính bởi công thức:

$$Res_{z=a} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \quad (15)$$

Ví dụ - trường hợp 1

Tính thặng số tại $z = 1$ của hàm:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Ta viết:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} = \frac{z^2/(z+1)}{z-1}$$

Ta thấy $z = 1$ là cực đơn. Vậy ta áp dụng công thức (15)

$$Res_{z=1} f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Ví dụ - trường hợp 1

Tính thặng số tại $z = 1$ của hàm:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Ta viết:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} = \frac{z^2/(z+1)}{z-1}$$

Ta thấy $z = 1$ là cực đơn. Vậy ta áp dụng công thức (15)

$$Res_{z=1} f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Ví dụ - trường hợp 1

Tính thặng số tại $z = 1$ của hàm:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Ta viết:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} = \frac{z^2/(z+1)}{z-1}$$

Ta thấy $z = 1$ là cực đơn. Vậy ta áp dụng công thức (15)

$$Res_{z=1} f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Ví dụ - trường hợp 1

Tính thặng số tại $z = 1$ của hàm:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Ta viết:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} = \frac{z^2/(z+1)}{z-1}$$

Ta thấy $z = 1$ là cực đơn. Vậy ta áp dụng công thức (15)

$$Res_{z=1} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to 1} f(z)(z-1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Công thức tính thặng số - trường hợp 2

$z = a$ là cực bậc n

Thặng số được tính bởi công thức:

$$Res_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right]. \tag{17}$$

Ví dụ - trường hợp 2

Tính thặng số tại điểm $z = 2$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}.$$

Ta thấy $z = 2$ là cực bậc 2 ($n = 2$). Do đó, ta áp dụng công thức (17):

$$Res_{z=2} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-3}\right) = -1.$$

Ví dụ - trường hợp 2

Tính thặng số tại điểm $z = 2$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}.$$

Ta thấy $z = 2$ là cực bậc 2 ($n = 2$). Do đó, ta áp dụng công thức (17):

$$Res_{z=2} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-3}\right) = -1.$$

Ví dụ - trường hợp 2

Tính thặng số tại điểm $z = 2$ của hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}.$$

Ta thấy $z = 2$ là cực bậc 2 ($n = 2$). Do đó, ta áp dụng công thức (17):

$$Res_{z=2} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-3}\right) = -1.$$

Công thức tính thặng số - trường hợp 3

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, trong đó $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ và $g^{'}(a) \neq 0$

Thặng số được tính bởi công thức:

$$Res_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g^{'}(a)}. \tag{18}$$

Ví dụ - trường hợp 3

Tính thặng số tại điểm $z = \frac{\pi}{2}$ của hàm

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}.$$

Đặt $h(z) = \sin^2 z$, $g(z) = \cos z$. Hàm $f(z)$ có dạng

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

với

$$h(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0, \quad g(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0.$$

$$\Rightarrow Res_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{h(\frac{\pi}{2})}{g'(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

Ví dụ - trường hợp 3

Tính thặng số tại điểm $z = \frac{\pi}{2}$ của hàm

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}.$$

Đặt $h(z) = \sin^2 z$, $g(z) = \cos z$. Hàm $f(z)$ có dạng

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

với

$$h(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0, \quad g(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0.$$

$$\Rightarrow Res_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{h(\frac{\pi}{2})}{g'(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

Ví dụ - trường hợp 3

Tính thặng số tại điểm $z = \frac{\pi}{2}$ của hàm

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}.$$

Đặt $h(z) = \sin^2 z$, $g(z) = \cos z$. Hàm $f(z)$ có dạng

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

với

$$h(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0, \quad g(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0.$$

$$\Rightarrow Res_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{h(\frac{\pi}{2})}{g'(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

Ví dụ - trường hợp 3

Tính thặng số tại điểm $z = \frac{\pi}{2}$ của hàm

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}.$$

Đặt $h(z) = \sin^2 z$, $g(z) = \cos z$. Hàm $f(z)$ có dạng

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

với

$$h(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0, \quad g(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0.$$

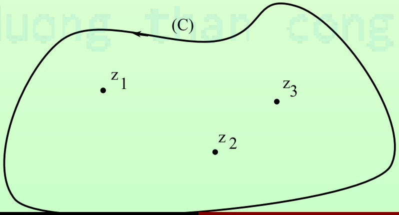
$$\Rightarrow Res_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{h(\frac{\pi}{2})}{g'(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

Định lý thặng số

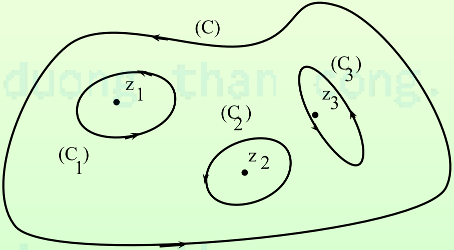
Phát biểu định lý

Cho hàm $f(z)$ giải tích trong và trên chu tuyến C ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm dị thường cô lập z_k không nằm trên C. Khi đó

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z). \quad (19)$$



Định lý thặng số - Chứng minh I



$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_k \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z).$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Tính tích phân

$$I = \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \mathrm{d}z.$$

với

(a) $C : |z| = 1$.

(b) $C : |z| = 3$

Trước hết, ta nhận xét rằng hàm $f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$ là hàm giải tích, ngoại trừ tại các điểm:

- $z = 0$: cực bậc 2.
- $z_\pm = -1 \pm i$: cực đơn.

Định lý thặng số - Ví dụ

Tính tích phân

$$I = \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \mathrm{d}z.$$

với

(a) $C : |z| = 1$.

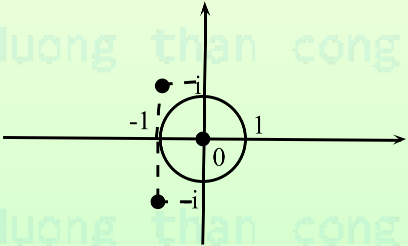
(b) $C : |z| = 3$

Trước hết, ta nhận xét rằng hàm $f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$ là hàm giải tích, ngoại trừ tại các điểm:

- $z = 0$: cực bậc 2.
- $z_\pm = -1 \pm i$: cực đơn.

Định lý thặng số - Ví dụ

Xét trường hợp $C : |z| = 1$.



Ta thấy miền được bao bởi chu tuyến C chỉ chứa cực bậc 2 $z = 0$.

Định lý thặng số - Ví dụ

Theo định lý thặng số, ta có:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i Res_{z=0} f(z) = 2\pi i Res_{z=0}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right) \\ &= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Ta tính $Res_{z=0} f(z)$:

$$Res_{z=0} f(z) = \left.\frac{te^{zt}(z^2+2z+2)-(2z+2)e^{zt}}{(z^2+2z+2)^2}\right|_{z=0} = \frac{t-1}{2}. \quad (21)$$

Thay (21) vào (20) ta có kết quả của tích phân cần tính:

$$I = \pi i(t-1). \quad (22)$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Theo định lý thặng số, ta có:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i Res_{z=0} f(z) = 2\pi i Res_{z=0}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right) \\ &= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Ta tính $Res_{z=0} f(z)$:

$$Res_{z=0} f(z) = \left.\frac{te^{zt}(z^2+2z+2)-(2z+2)e^{zt}}{(z^2+2z+2)^2}\right|_{z=0} = \frac{t-1}{2}. \tag{21}$$

Thay (21) vào (20) ta có kết quả của tích phân cần tính:

$$I = \pi i(t-1). \tag{22}$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Theo định lý thặng số, ta có:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i Res_{z=0} f(z) = 2\pi i Res_{z=0}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right) \\ &= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Ta tính $Res_{z=0} f(z)$:

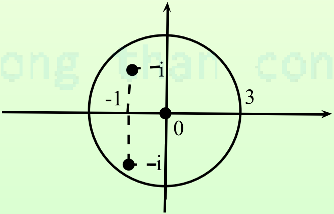
$$Res_{z=0} f(z) = \left.\frac{te^{zt}(z^2+2z+2)-(2z+2)e^{zt}}{(z^2+2z+2)^2}\right|_{z=0} = \frac{t-1}{2}. \tag{21}$$

Thay (21) vào (20) ta có kết quả của tích phân cần tính:

$$I = \pi i(t-1). \tag{22}$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Xét trường hợp $C : |z| = 3$.

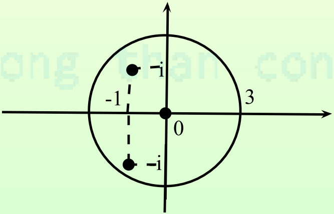


Ta thấy miền được bao bởi chu tuyến C chứa cả cực bậc 2 $z = 0$ và 2 cực đơn $z_\pm = -1 \pm i$. Ta viết:

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z - z_-)(z - z_+)}.$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Xét trường hợp $C : |z| = 3$.

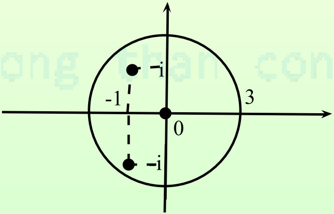


Ta thấy miền được bao bởi chu tuyến C chứa cả cực bậc 2 $z = 0$ và 2 cực đơn $z_{\pm} = -1 \pm i$. Ta viết:

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z - z_-)(z - z_+)}.$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Xét trường hợp $C : |z| = 3$.



Ta thấy miền được bao bởi chu tuyến C chứa cả cực bậc 2 $z = 0$ và 2 cực đơn $z_{\pm} = -1 \pm i$. Ta viết:

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z - z_-)(z - z_+)}.$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Theo định lý thặng số, ta có:

$$I = 2\pi i\big(Res_{z=0}f(z) + Res_{z=z_+}f(z) + Res_{z=z_-}f(z)\big) \qquad (23)$$

Ta tính $Res_{z=z_-}f(z)$ với $z_- = -1-i$:

$$\begin{aligned} Res_{z=z_-}f(z) &= \lim_{z\to z_-}(z-z_-)f(z) = \frac{e^{(z_-)t}}{z_-^2(z_- - z_+)} = \frac{e^{(-1-i)t}}{2i.(-2i)} \\ &= (e^{-t}.e^{-it})/4. \end{aligned} \qquad (24)$$

Tương tự, ta tính $Res_{z=z_+}f(z)$ với $z_+ = -1+i$:

$$\begin{aligned} Res_{z=z_+}f(z) &= \lim_{z\to z_+}(z-z_+)f(z) = \frac{e^{(z_+)t}}{z_+^2(z_+ - z_-)} \\ &= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-2i).2} = \frac{e^{it}.e^{-t}}{4}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Theo định lý thặng số, ta có:

$$I = 2\pi i\Big(Res_{z=0}f(z) + Res_{z=z_+}f(z) + Res_{z=z_-}f(z)\Big) \tag{23}$$

Ta tính $Res_{z=z_-}f(z)$ với $z_- = -1-i$:

$$\begin{aligned} Res_{z=z_-}f(z) &= \lim_{z\to z_-}(z-z_-)f(z) = \frac{e^{(z_-)t}}{z_-^2(z_- - z_+)} = \frac{e^{(-1-i)t}}{2i.(-2i)} \\ &= (e^{-t}.e^{-it})/4. \end{aligned} \tag{24}$$

Tương tự, ta tính $Res_{z=z_+}f(z)$ với $z_+ = -1+i$:

$$\begin{aligned} Res_{z=z_+}f(z) &= \lim_{z\to z_+}(z-z_+)f(z) = \frac{e^{(z_+)t}}{z_+^2(z_+ - z_-)} \\ &= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-2i).2} = \frac{e^{it}.e^{-t}}{4}. \end{aligned} \tag{25}$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Theo định lý thặng số, ta có:

$$I = 2\pi i\Big(Res_{z=0}f(z) + Res_{z=z_+}f(z) + Res_{z=z_-}f(z)\Big) \qquad (23)$$

Ta tính $Res_{z=z_-}f(z)$ với $z_- = -1-i$:

$$\begin{aligned} Res_{z=z_-}f(z) &= \lim_{z\to z_-}(z-z_-)f(z) = \frac{e^{(z_-)t}}{z_-^2(z_- - z_+)} = \frac{e^{(-1-i)t}}{2i.(-2i)} \\ &= (e^{-t}.e^{-it})/4. \end{aligned} \qquad (24)$$

Tương tự, ta tính $Res_{z=z_+}f(z)$ với $z_+ = -1+i$:

$$\begin{aligned} Res_{z=z_+}f(z) &= \lim_{z\to z_+}(z-z_+)f(z) = \frac{e^{(z_+)t}}{z_+^2(z_+ - z_-)} \\ &= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-2i).2} = \frac{e^{it}.e^{-t}}{4}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Từ (21) ta đã có:

$$Res_{z=0} f(z) = \frac{t-1}{2}. \tag{26}$$

Từ các kết quả (24), (25) và (26), ta có:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i\left(\frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}.e^{it}}{4} + \frac{e^{-t}.e^{-it}}{4}\right) \\ &= 2\pi i\left(\frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}}{2}\cos t\right) \\ &= \pi i\left(t - 1 + e^{-t}\cos t\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Định lý thặng số - Ví dụ

Từ (21) ta đã có:

$$Res_{z=0}f(z) = \frac{t-1}{2}. \quad (26)$$

Từ các kết quả (24), (25) và (26), ta có:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i\left(\frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}.e^{it}}{4} + \frac{e^{-t}.e^{-it}}{4}\right) \\ &= 2\pi i\left(\frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}}{2}\cos t\right) \\ &= \pi i\left(t - 1 + e^{-t}\cos t\right). \quad (27) \end{aligned}$$

Một số bổ đề

Bổ đề I.

Nếu hàm $f(z)$ liên tục khi $|z-a| \to \infty$ và nếu

$$\lim_{|z-a|\to\infty} |(z-a)f(z)| = 0,$$

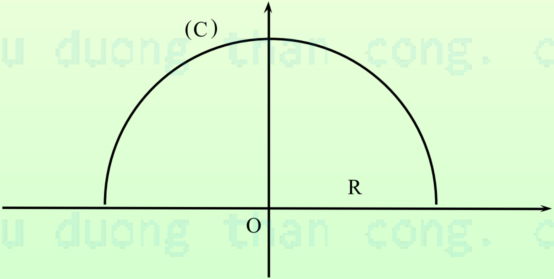
thì

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

trong đó C là cung tròn tâm a bán kính $R = |z-a|$.

Một số bổ đề

Hình vẽ cho trường hợp điểm $a \equiv 0$:



Một số bổ đề

Bổ đề II.

Nếu hàm $f(z)$ liên tục khi $|z-a| \to 0$, và

$$\lim_{|z-a|\to 0} |(z-a)f(z)| = 0,$$

thì

$$\lim_{r\to 0} \int_C f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

trong đó C là cung tròn tâm a bán kính $r = |z-a|$.

Một số bổ đề

Bổ đề Jordan.

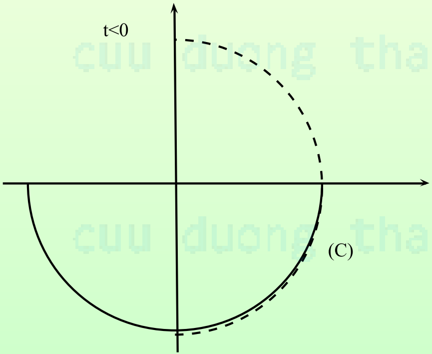
Nếu $|f(z)| \to 0$ khi $|z| \to \infty$ thì

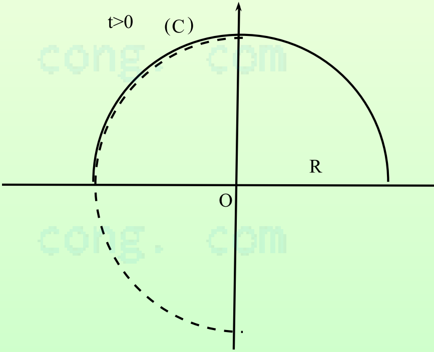
$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)e^{itz}\,\mathrm{d}z = 0,$$

với

- C là $1/2$ đường tròn dưới hoặc $1/2$ đường tròn phải khi $t < 0$.
- C là $1/2$ đường tròn trên hoặc $1/2$ đường tròn trái khi $t > 0$.

Một số bổ đề





Tích phân dạng I

Dạng tích phân:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) \mathrm{d}\theta,$$

với $f(\sin\theta, \cos\theta)$ giới nội (hữu hạn) khi $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tích phân dạng I - Cách tính

Đặt $z = e^{i\theta} (|z| = 1)$, suy ra $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. Mặt khác:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 + 1}{2iz}. \end{aligned}$$

Khi đó, tích phân được đưa về dạng:

$$I = \oint_C F(z)\mathrm{d}z,$$

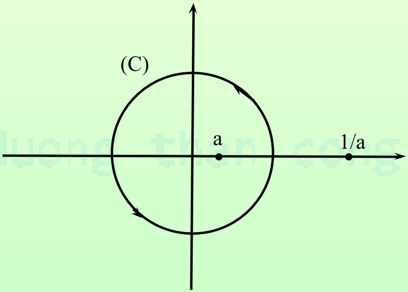
với $(C) : |z| = 1$. Để tính tích phân này, ta dùng định lý thặng số:

$$I = 2\pi i \sum_i Res_{z_i = a_i} F(z).$$

Tích phân dạng I - Ví dụ

Tính

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \qquad \text{với } |a| < 1.$$



Tích phân dạng I - Ví dụ

Đặt $z = e^{i\theta}$. Khi θ biến thiên từ 0 đến 2π thì z biến thiên trên đường tròn đơn vị $C(0,1)$. Ta viết lại:

$$I = \oint_C \frac{-idz}{z[1 - a(z + \frac{1}{z}) + a^2]} = \oint_C \frac{idz}{az^2 - (a^2+1)z + a}.$$

Hàm dưới dấu tích phân

$$f(z) = \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + a}$$

có hai điểm dị thường tại $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{a}$. Do $z_2 > 1$ nên chỉ có $z_1 \in C(0,1)$.

Tích phân dạng I - Ví dụ

Đặt $z = e^{i\theta}$. Khi θ biến thiên từ 0 đến 2π thì z biến thiên trên đường tròn đơn vị $C(0,1)$. Ta viết lại:

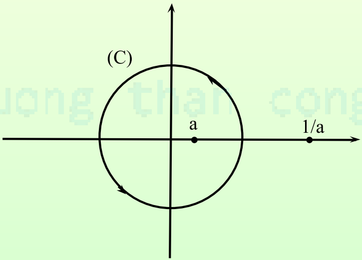
$$I = \oint_C \frac{-i\mathrm{d}z}{z\left[1 - a\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2\right]} = \oint_C \frac{i\mathrm{d}z}{az^2 - (a^2+1)z + a}.$$

Hàm dưới dấu tích phân

$$f(z) = \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + a}$$

có hai điểm dị thường tại $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{a}$. Do $z_2 > 1$ nên chỉ có $z_1 \in C(0,1)$.

Tích phân dạng I - Ví dụ



Theo định lý về thặng số, ta có:

$$I = 2\pi i Res_{z=a} f(z) = 2\pi i \frac{i(z-a)}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}\Big|_{z\to a} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Tích phân dạng II

Dạng tích phân:

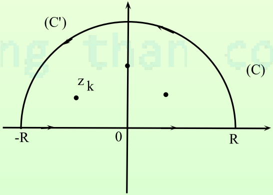
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

với $f(x)$ thỏa các điều kiện sau đây. Nếu ta thay $x \to z$ tức là $f(x) \to f(z)$, thì:

- $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng phía trên (hoặc dưới) bao gồm cả trục thực, ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm dị thường cô lập nằm trong nửa mặt phẳng trên (hoặc dưới) mà không nằm trên trục thực;
- $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$.

Tích phân dạng II - Cách tính

Xét tích phân $\oint f(z)\mathrm{d}z$ trên chu tuyến C như sau

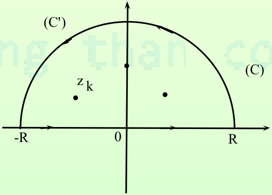


Trong đó C' là nửa cung tròn tâm tại $z=0$, bán kính R. Ta có

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-R}^{R} + \int_{C'}\right] f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z)$$

Tích phân dạng II - Cách tính

Xét tích phân $\oint f(z)\mathrm{d}z$ trên chu tuyến C như sau



Trong đó C' là nửa cung tròn tâm tại $z = 0$, bán kính R. Ta có

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-R}^{R} + \int_{C'}\right] f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z)$$

Tích phân dạng II - Cách tính

Cho $R \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = I$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{theo bổ đề 1}$$

(vì $\lim_{R=|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$)

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z),$$

với mọi z_k thuộc nửa mặt phẳng trên.

Tích phân dạng II - Cách tính

Cho $R \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = I$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{theo bổ đề 1}$$

(vì $\lim_{R=|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$)

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_{k} Res_{z=z_k} f(z),$$

với mọi z_k thuộc nửa mặt phẳng trên.

Tích phân dạng II - Cách tính

Cho $R \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = I$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{theo bổ đề 1}$$

(vì $\lim_{R=|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$)

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z),$$

với mọi z_k thuộc nửa mặt phẳng trên.

Tích phân dạng II - Ví dụ

Tính

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Ta thấy hàm $f(z) = \frac{1}{x^6+1}$ giải tích, ngoại trừ tại các điểm:

$$\begin{aligned} & z^6 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & z^6 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & z^6 = e^{i(2k+1)\pi} \\ \Leftrightarrow \quad & z = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Tích phân dạng II - Ví dụ

Tính

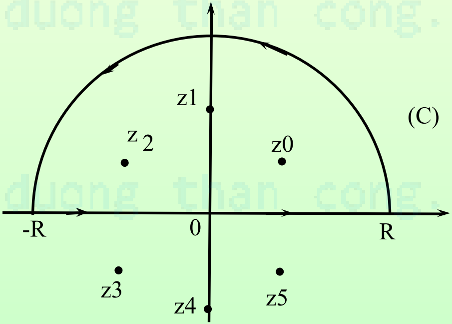
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

Ta thấy hàm $f(z) = \frac{1}{x^6+1}$ giải tích, ngoại trừ tại các điểm:

$$\begin{aligned} & z^6+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad & z^6 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & z^6 = e^{i(2k+1)\pi} \\ \Leftrightarrow \quad & z = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Tích phân dạng II - Ví dụ

$f(z)$ có 6 cực đơn, nhưng chỉ có 3 cực đơn z_k với $k = 0, 1, 2$ là nằm trong miền được xét.



Tích phân dạng II - Ví dụ

Mặt khác

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{z^5}\right| = 0.$$

Vậy đây là tích phân dạng II. Theo định lý về thặng số, ta có

$$\oint_C \frac{dz}{z^6+1} = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} \frac{1}{z^6+1}.$$

Chú ý rằng $\frac{1}{z^6+1}$ có dạng $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ với $h(z_k) \neq 0$, $g(z_k) = 0$ và $g'(z_k) \neq 0$. Suy ra

Tích phân dạng II - Ví dụ

Mặt khác

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |\frac{1}{z^5}| = 0.$$

Vậy đây là tích phân dạng II. Theo định lý về thặng số, ta có

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^6+1} = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} \frac{1}{z^6+1}.$$

Chú ý rằng $\frac{1}{z^6+1}$ có dạng $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ với $h(z_k) \neq 0$, $g(z_k) = 0$ và $g^{'}(z_k) \neq 0$. Suy ra

Tích phân dạng II - Ví dụ

Mặt khác

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |\frac{1}{z^5}| = 0.$$

Vậy đây là tích phân dạng II. Theo định lý về thặng số, ta có

$$\oint_C \frac{dz}{z^6+1} = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} \frac{1}{z^6+1}.$$

Chú ý rằng $\frac{1}{z^6+1}$ có dạng $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ với $h(z_k) \neq 0$, $g(z_k) = 0$ và $g'(z_k) \neq 0$. Suy ra

Tích phân dạng II - Ví dụ

$$Res_{z=z_k} f(z) = \frac{h(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}$$

(vì $z_k^6 = -1 \Rightarrow \frac{1}{z_k^5} = -z_k$.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)[z_0 + z_1 + z_2] \\ &= -\frac{i\pi}{3}\left[e^{i\pi/6} + i + e^{i5\pi/6}\right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{i\pi}{3}\left[\frac{e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}}{2i}\right].2i \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Tích phân dạng II - Ví dụ

$$Res_{z=z_k} f(z) = \frac{h(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}$$

(vì $z_k^6 = -1 \Rightarrow \frac{1}{z_k^5} = -z_k$.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 2\pi i(-\frac{1}{6})[z_0 + z_1 + z_2] \\ &= -\frac{i\pi}{3}\left[e^{i\pi/6} + i + e^{i5\pi/6}\right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{i\pi}{3}\left[\frac{e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}}{2i}\right].2i \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Tích phân dạng III

Dạng tích phân:

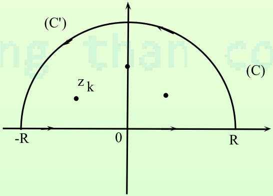
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{imx}\mathrm{d}x \qquad (m > 0)$$

với $f(x)$ thỏa các điều kiện sau đây. Nếu ta thay $x \to z$ tức là $f(x) \to f(z)$, thì:

- $f(z)$ giải tích trừ tại hữu hạn số điểm dị thường cô lập không nằm trên trục thực.
- $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$.

Tích phân dạng III - Cách tính

Ta xét tích phân $\oint f(z)e^{imz}\mathrm{d}z$ trên chu tuyến C như sau

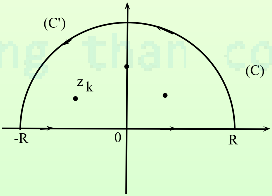


Trong đó C' là nửa cung tròn tâm tại $z=0$, bán kính R. Ta có

$$\oint_C f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = \left[\int_{-R}^{R} + \int_{C'}\right] f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z)e^{imz}$$

Tích phân dạng III - Cách tính

Ta xét tích phân $\oint f(z)e^{imz}\mathrm{d}z$ trên chu tuyến C như sau



Trong đó C' là nửa cung tròn tâm tại $z = 0$, bán kính R. Ta có

$$\oint_C f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = \left[\int_{-R}^{R} + \int_{C'}\right] f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z)e^{imz}$$

Tích phân dạng III - Cách tính

Cho $R \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)e^{imz} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx} \mathrm{d}x = I$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} f(z)e^{imz} \mathrm{d}z = 0 \quad \text{theo bổ đề Jordan}$$

(vì $\lim_{R=|z|\to\infty} |f(z)| = 0$)

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z)e^{imz},$$

với mọi z_k thuộc nửa mặt phẳng trên.

Tích phân dạng III - Cách tính

Cho $R \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x = I$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = 0 \quad \text{theo bổ đề Jordan}$$

(vì $\lim_{R=|z|\to\infty} |f(z)| = 0$)

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} f(z)e^{imz},$$

với mọi z_k thuộc nửa mặt phẳng trên.

Tích phân dạng III - Cách tính

Cho $R \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)e^{imz} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx} \mathrm{d}x = I$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'} f(z)e^{imz} \mathrm{d}z = 0$$ theo bổ đề Jordan

(vì $\lim_{R=|z|\to\infty} |f(z)| = 0$)

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_{k} Res_{z=z_k} f(z)e^{imz},$$

với mọi z_k thuộc nửa mặt phẳng trên.

Tích phân dạng III - Ví dụ

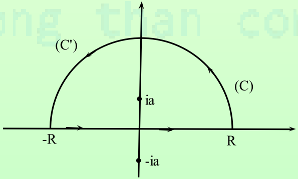
Tính

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x \qquad (a > 0)$$

Xét tích phân

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z$$

$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ giải tích trừ tại $z^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow z_{\pm} = \pm ia$ (cực đơn).



Tích phân dạng III - Ví dụ

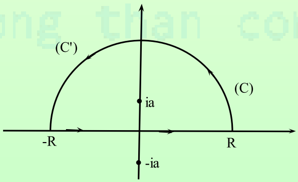
Tính

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x \qquad (a > 0)$$

Xét tích phân

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z$$

$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ giải tích trừ tại $z^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow z_{\pm} = \pm ia$ (cực đơn).



Tích phân dạng III - Ví dụ

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z &= 2\pi i Res_{z_+}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\\ &= 2\pi i\left(\frac{e^{i(ia)}}{2ia}\right) = \frac{\pi}{a}.e^{-a}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \left[\int_{-R}^{+R} + \int_{C'}\right]\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{a}e^{-a}.$$

Tích phân dạng III - Ví dụ

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z &= 2\pi i Res_{z_+}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2} \\ &= 2\pi i\left(\frac{e^{i(ia)}}{2ia}\right) = \frac{\pi}{a}.e^{-a}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \left[\int_{-R}^{+R} + \int_{C'}\right]\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{a}e^{-a}.$$

Tích phân dạng III - Ví dụ

Cho $R \to \infty$:

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x$$

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z = 0$$ theo bổ đề Jordan

(vì $|\frac{1}{z^2+a^2}| \to 0$ khi $|z| \to 0$). Khi đó

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

Tích phân dạng III - Ví dụ

Cho $R \to \infty$:

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x$$

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z = 0 \qquad \text{theo bổ đề Jordan}$$

(vì $|\frac{1}{z^2+a^2}| \to 0$ khi $|z| \to 0$). Khi đó

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

Tích phân dạng III - Ví dụ

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{a}e^{-a}\\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x &= 0.
\end{aligned}$$

Trị chính của tích phân

Xét một ví dụ: tính tích phân sau

$$\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Theo định nghĩa tích phân thông thường, tích phân trên không hội tụ vì hàm $\frac{1}{x}$ không liên tục tại $x = 0 \in [-1, 2]$. Tuy nhiên, xét giới hạn

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{0-\varepsilon} + \int_{0+\varepsilon}^{2} \right] \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{+\varepsilon}^{2} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln\varepsilon \right] = \ln 2.\end{aligned}$$

Giới hạn trên tồn tại!

Trị chính của tích phân

Xét một ví dụ: tính tích phân sau

$$\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Theo định nghĩa tích phân thông thường, tích phân trên không hội tụ vì hàm $\frac{1}{x}$ không liên tục tại $x = 0 \in [-1, 2]$. Tuy nhiên, xét giới hạn

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{0-\varepsilon} + \int_{0+\varepsilon}^{2} \right] \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{+\varepsilon}^{2} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln \varepsilon \right] = \ln 2.\end{aligned}$$

Giới hạn trên tồn tại!

Trị chính của tích phân

Định nghĩa

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ trừ $c \in [a,b]$, ta định nghĩa

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \equiv p.v.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b\right] f(x)\mathrm{d}x$$

là trị chính của tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. ($p.v.$: principal value)

Ví dụ:

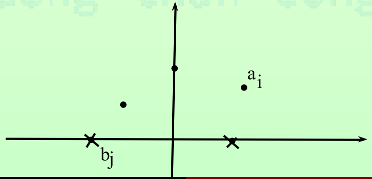
$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{2}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Trị chính của tích phân

Định lý.

$f(z)$ giải tích trong $1/2$ mặt phẳng trên trừ một số hữu hạn điểm dị thường cô lập a_i không nằm trên trục thực và một số hữu hạn cực đơn b_j nằm trên trục thực. Nếu $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$ thì

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\left[\sum_i Res_{z=a_i} f(z) + \frac{1}{2}\sum_j Res_{z=b_j} f(z)\right]$$



Trị chính của tích phân

Định lý.

$f(z)$ giải tích trong $1/2$ mặt phẳng trên trừ một số hữu hạn điểm dị thường cô lập a_i không nằm trên trục thực và một số hữu hạn cực đơn b_j nằm trên trục thực. Nếu $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ thì

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x = 2\pi i\Big[\sum_i Res_{z=a_i} f(z)e^{imz} + \frac{1}{2}\sum_j Res_{z=b_j} f(z)e^{imz}\Big]$$

Trị chính của tích phân - Ví dụ

Tính

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x$$

Hàm $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ chỉ có một cực đơn trên trục thực tại $z=0$. Áp dụng định lý trên ta có

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x=2\pi i.\frac{1}{2}Res_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}=i\pi$$

Vì $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x+\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sin x}{x}\mathrm{d}x=i\pi$

$$\Rightarrow\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x=0\quad;\quad\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi.$$

Trị chính của tích phân - Ví dụ

Tính

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x$$

Hàm $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ chỉ có một cực đơn trên trục thực tại $z = 0$. Áp dụng định lý trên ta có

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = 2\pi i.\frac{1}{2} Res_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = i\pi$$

Vì $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin x}{x} \mathrm{d}x = i\pi$

$$\Rightarrow \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x = 0 \quad ; \quad \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi.$$

Trị chính của tích phân - Ví dụ

Tính

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x$$

Hàm $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ chỉ có một cực đơn trên trục thực tại $z = 0$. Áp dụng định lý trên ta có

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = 2\pi i.\frac{1}{2}Res_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} = i\pi$$

Vì $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sin x}{x}\mathrm{d}x = i\pi$

$$\Rightarrow \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x = 0 \quad ; \quad \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi.$$

Trị chính của tích phân - Ví dụ

Tính

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x$$

Hàm $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ chỉ có một cực đơn trên trục thực tại $z=0$. Áp dụng định lý trên ta có

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = 2\pi i.\frac{1}{2}Res_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} = i\pi$$

Vì $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sin x}{x}\mathrm{d}x = i\pi$

$$\Rightarrow \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x = 0 \quad ; \quad \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi.$$