Chương II : Tích phân hàm biến phức

Tích phân đường loại 2 hàm biến thực

$$\underbrace{f(z)}\ \underbrace{dz}$$

A

iB

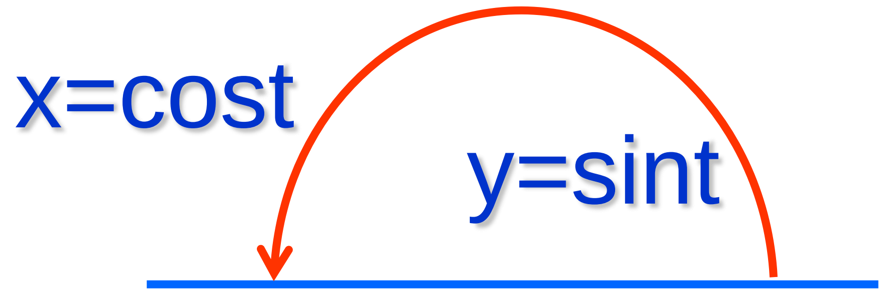
2)Tính chất :

e) $\left| \int_C f(z)dz \right| \le M.L$ trong đó

$M = \underset{z \in C}{Max} \left| f(z) \right|$, L là độ dài của C

3)Cách tính tích phân hàm biến phức :

Ví dụ : $\int_C z\,\overline{z}\,dz$ với C là nửa trên đường tròn đơn vị lấy theo chiều dương



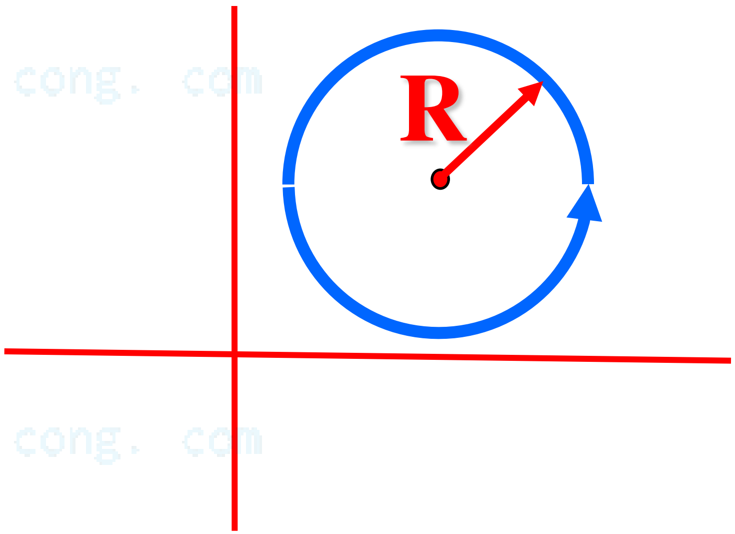
Ví dụ : Tính $\int_C z^2 dz$ với C là đoạn thẳng nối điểm 0 với điểm $(1+i)$

Chú ý : Nếu C có phương trình tham số là

$$x = x(t),\ y = y(t)\ ,$$

t

Ví dụ : Tính $\int_{C} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ trong đó C là đường tròn lấy theo chiều ngược kim đồng hồ, tâm z_0, bán kính R ($|z-z_0|=R$)



$$e^{-int} = \cos(nt) - i\sin(nt)$$

$$\int e^{-int} dt = \int \cos(nt) - i\sin(nt)\, dt$$

n ≠ 0

n = 0

$$\int e^{-int} dt = \frac{\sin(nt)}{n} + i\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$e^{-int} = 1$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} dt = \left(\frac{\sin(nt)}{n} + i\frac{\cos(nt)}{n}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 2\pi$$

Ví dụ : Tính $\int\limits_C \dfrac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ trong đó C là đường tròn lấy theo chiều ngược kim đồng hồ, tâm z_0, bán kính R ($|z-z_0|=R$)

Phương trình tham số của đường tròn C là

$z = z_0 + \mathrm{R}e^{it}$, $dz = i\,\mathrm{R}e^{it}\,dt$ $(t = 0 \to 2\pi)$. Vậy

$$\int\limits_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,\mathrm{R}e^{it}\,dt}{R^{n+1}e^{i(n+1)t}} =$$

$$\frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} e^{-i\,nt}\,dt$$

Chú ý rằng giá trị tích phân vừa tính không phụ thuộc bán kính R

b) Nếu $f(z)$ là **hàm giải tích** trên C và đường cong C không kín nối hai điểm A,B (A điểm đầu B điểm cuối) dùng **công thức Newton-Leibnitz** :

Ví dụ : Tính $\int_C z^2 dz$ với C là đoạn thẳng nối điểm 0 với điểm $(1+i)$

Ví dụ : Tính $\int_C \sin z \, dz$ trong đó C là đoạn thẳng nối hai điểm từ 0 đến πi

Chú ý về nguyên hàm (lấy tích phân từng phần , đổi biến tương tự như hàm thực)

$$\int \cos 3z \; dz =$$

$$\int \sin 2z \; dz =$$

$$\int z\cos z \; dz =$$

$$\int ze^{-z}\,dz =$$

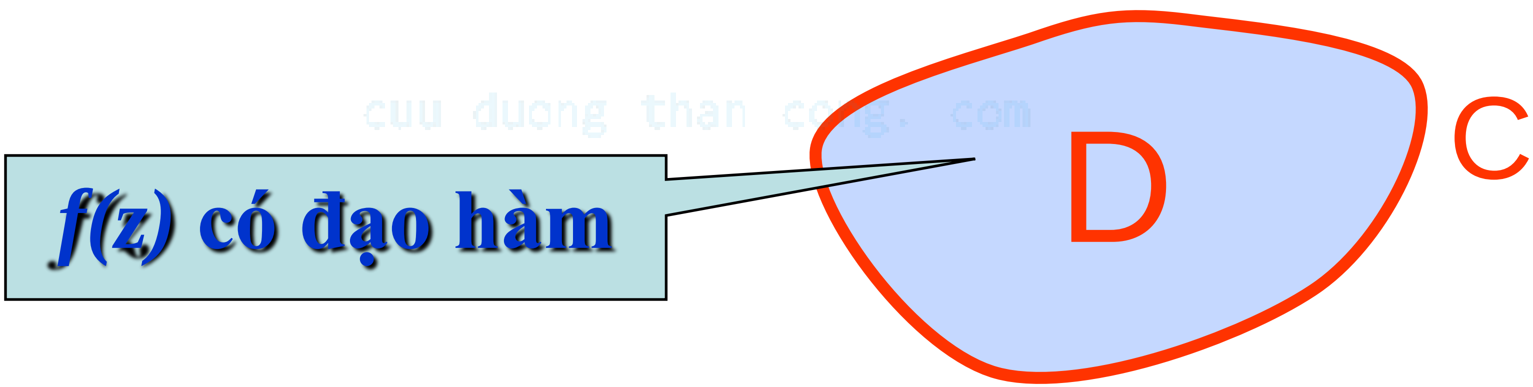
$$\int \frac{1}{(2-z)^3}\,dz =$$

$$\int \frac{1}{(2-3z)^3}\,dz =$$

Ví dụ : Tính $\int_C ze^z dz$ trong đó C là đường cong bất kỳ nối hai điểm từ 1 đến $\pi i/2$

Ví dụ : Tính $\int\limits_C \frac{1}{(2-z)^3}dz$ trong đó C là đường cong nối hai điểm $z_1 = 0$ đến $z_2 = 1+i$

c) Nếu C là đường cong kín , ta dùng các định lý **Cauchy**

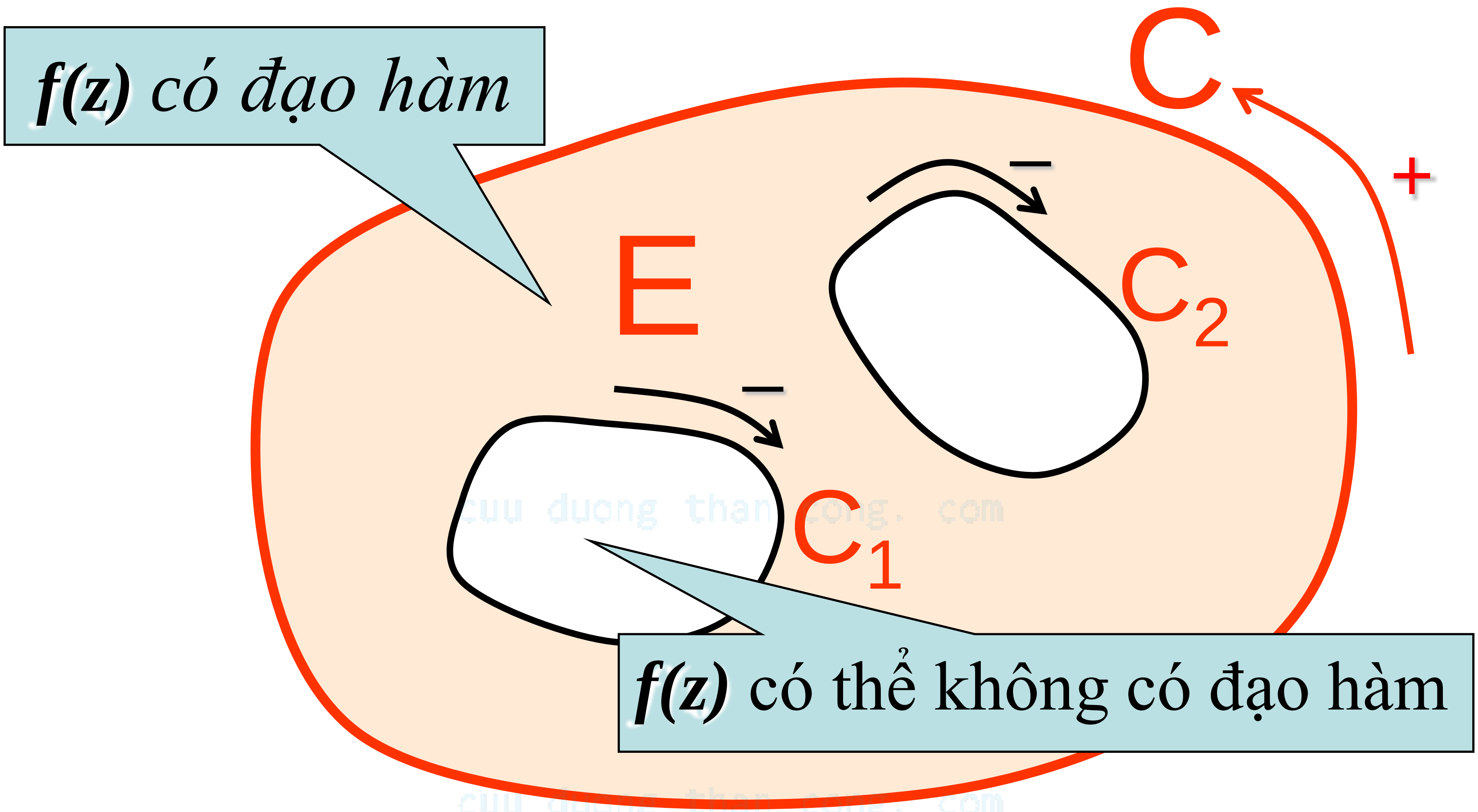


Dùng công thức **Green** :

$$\boxed{\int\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy}$$

$\underbrace{P(x,y)}$ $\underbrace{Q(x,y)}$

Công thức cũng đúng cho miền D có biên gồm nhiều đường cong (miền đa liên)



$$\int_{C^+} f(z)\,dz + \int_{C_1^-} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C^+} f(z)\,dz + \int_{C_1^-} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = -\int_{C_1^-} f(z)\,dz - \int_{C_2^-} f(z)\,dz$$

Hệ quả :

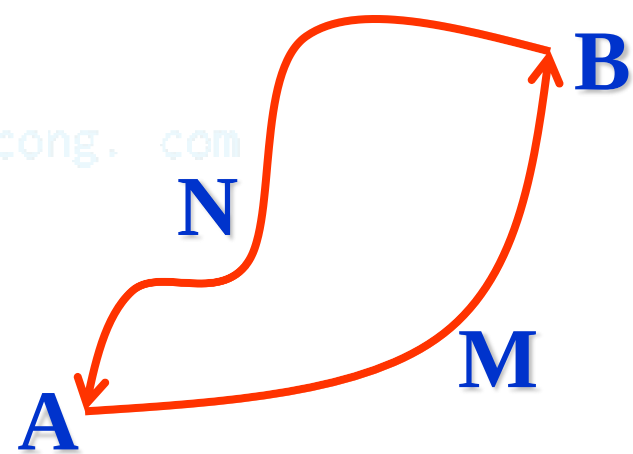
$$\int_{C^+} f(z)\,dz = \int_{C_1^+} f(z)\,dz + \int_{C_2^+} f(z)\,dz$$

Hệ quả 2 :

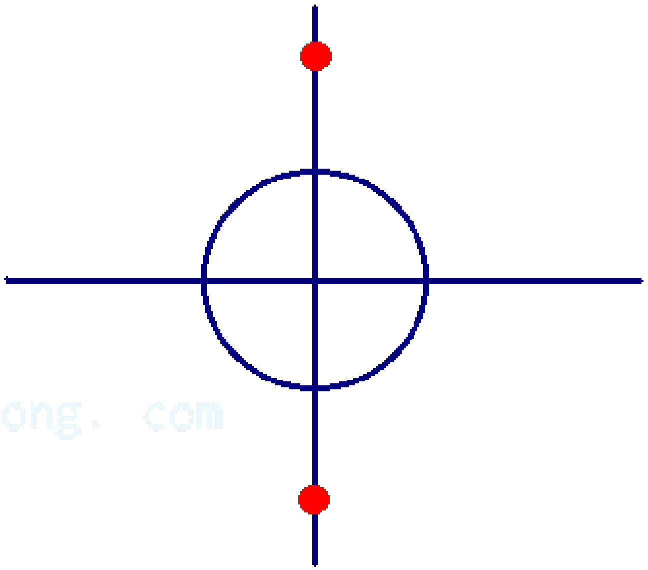
(Tích phân không phụ thuộc đường đi)

$$\int_{AMB} f(z)dz = \int_{ANB} f(z)dz$$

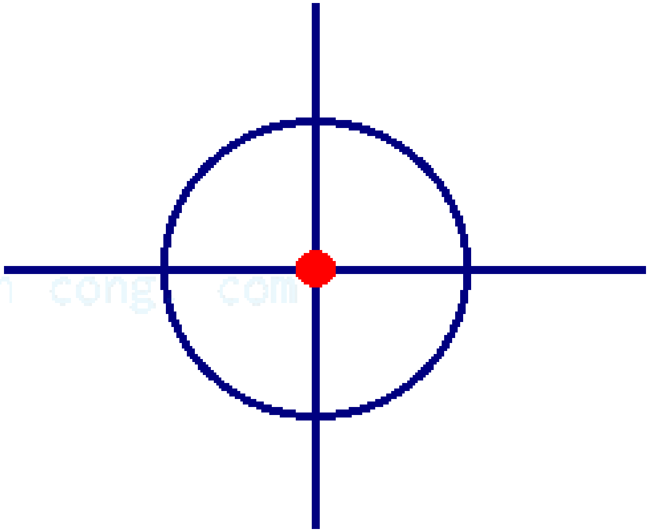
Nếu hàm $f(z)$ là hàm có đạo hàm trong miền giới hạn bởi $AMBNA$



Ví dụ : Tính $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^2+4}\,dz$ với C là đường tròn tâm 0 bán kính 1.

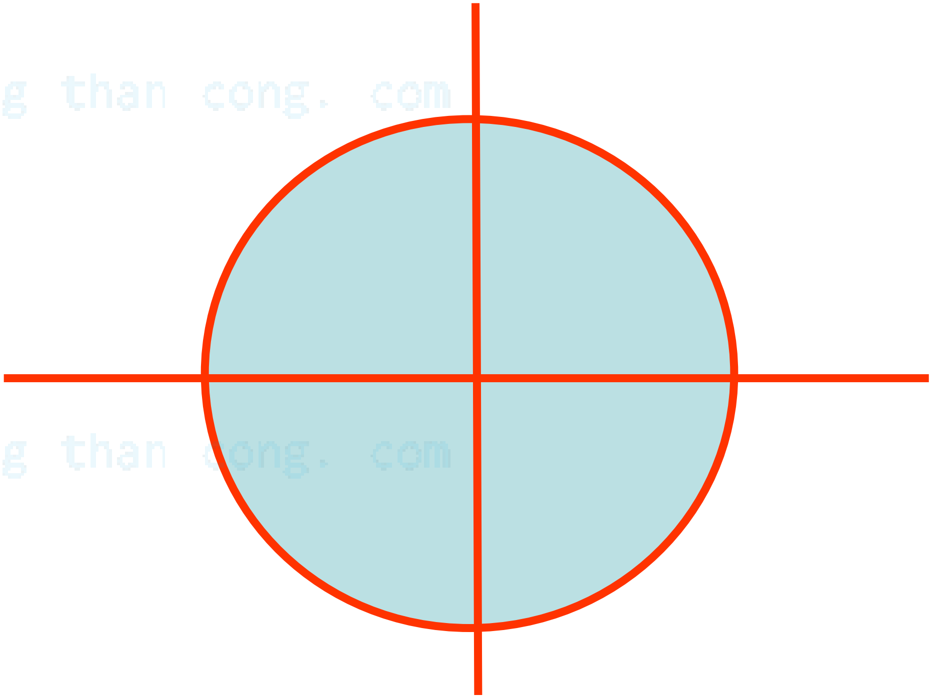


Tuy nhiên nếu xét tích phân $\int_C \frac{\cos z}{z^2} dz$ với C là đường tròn **tâm 0 bán kính 1**



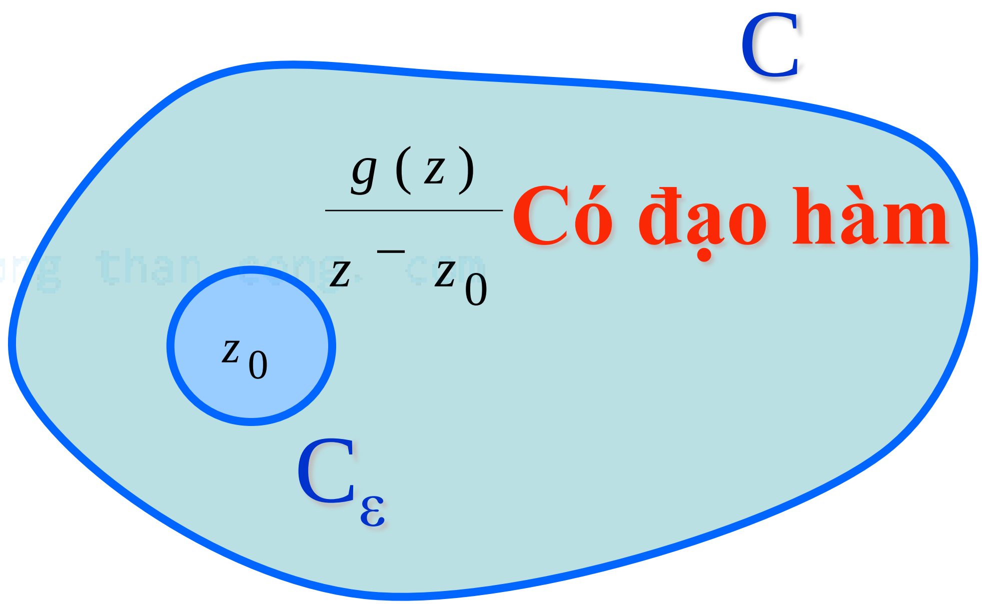
Ví dụ : Tính $\int\limits_{C} e^{z^2}\,dz$

với C là đường tròn tâm 0 bán kính R



b) Định lý tích phân Cauchy 2:

$$\int_{C} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_\varepsilon^+} \frac{g(z)}{z - z_0} dz \text{ (không phụ thuộc } \varepsilon\text{)}$$



Ví dụ : Tính $\int\limits_C \dfrac{\cos z}{z} dz$

với C là đường tròn đơn vị , theo chiều dương

Ví dụ : $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\,dz$

C là đường tròn đơn vị lấy theo chiều dương

cuu duong than cong. com

Ví dụ : $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\,dz$

C là đường tròn tâm 3 bán kính 2 theo chiều dương

Ví dụ : $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\,dz$

C là đường tròn tâm 0 bán kính 4 theo chiều dương

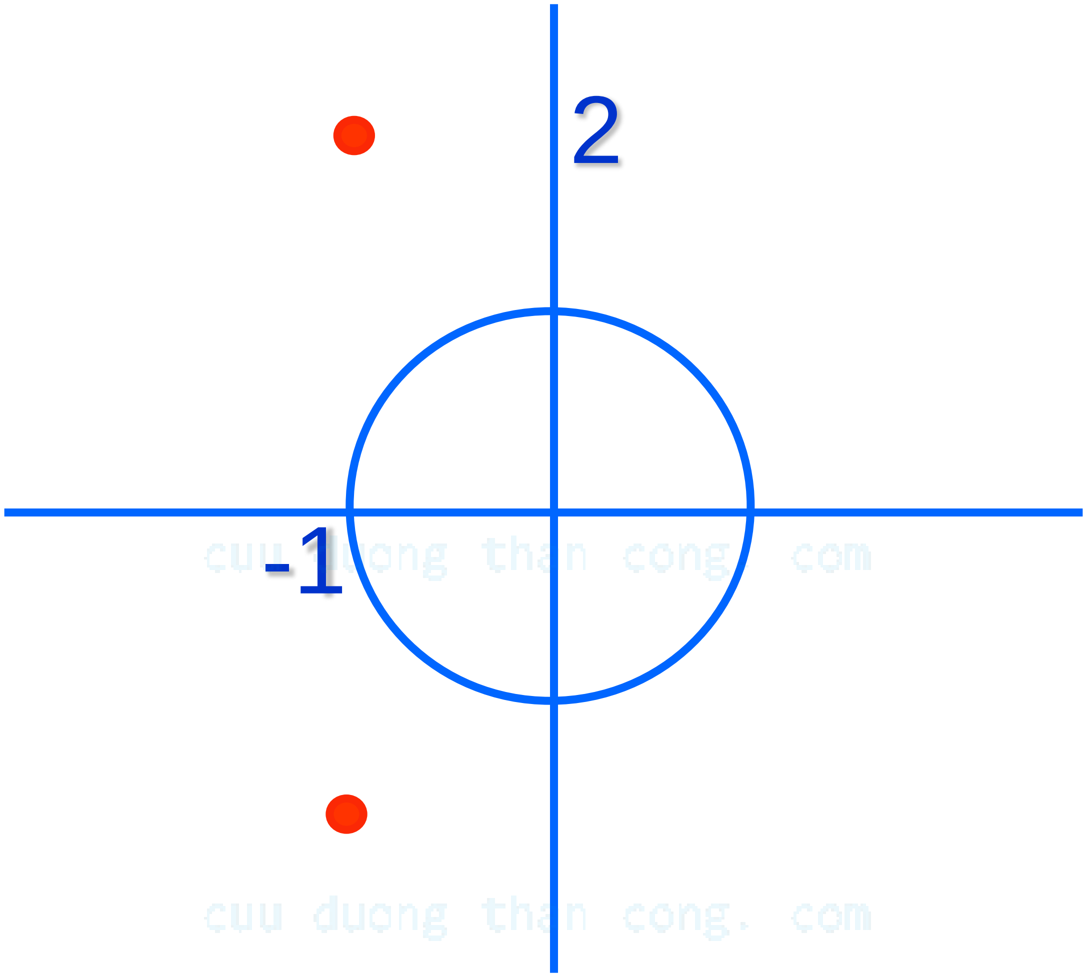
Ví dụ : Tính $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$

a) Với C là đường tròn $|z| = 1$

b) Với C là đường tròn $|z+1-i| = 2$

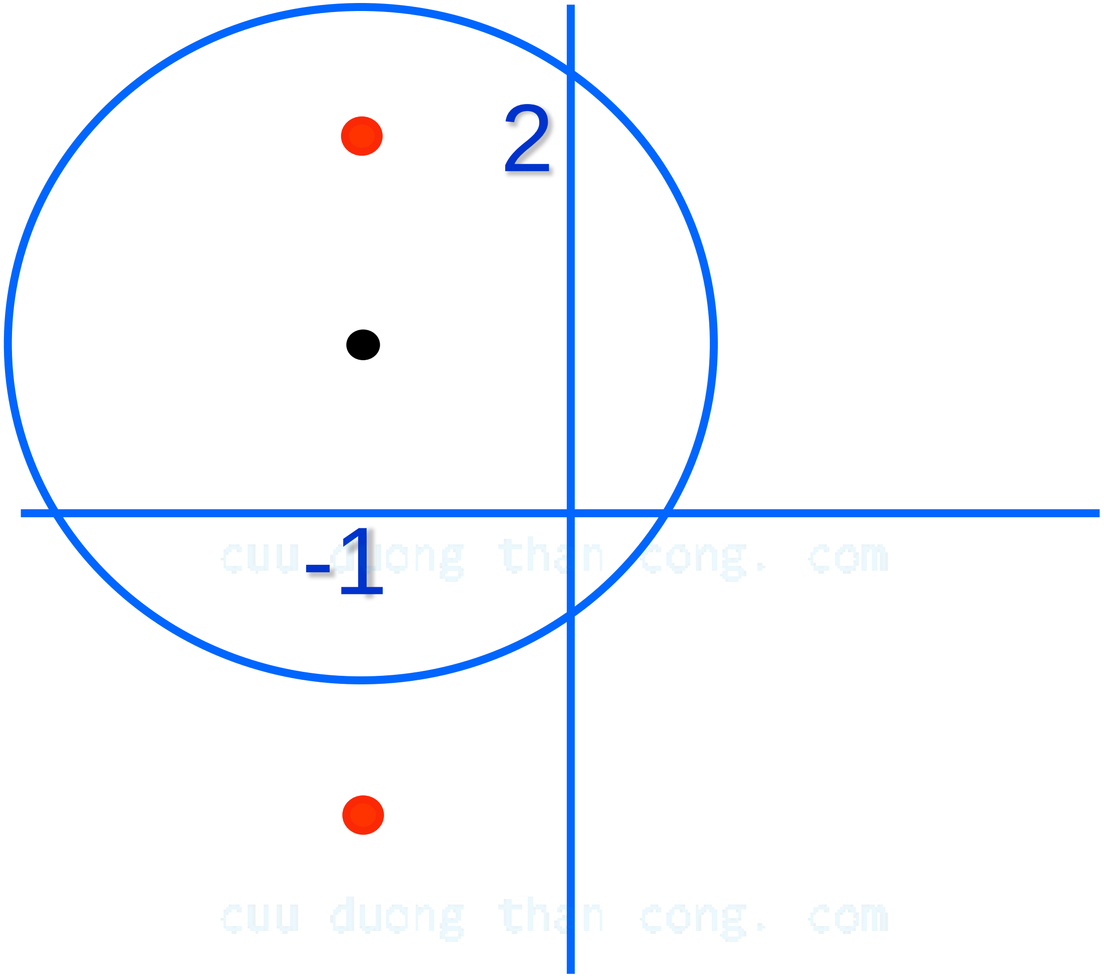
c) Với C là đường tròn $|z| = 3$

(lấy theo chiều dương)


2
-1

a) Hàm $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+2z+5}$ không giải tích tại hai điểm $z_1=-1+2i$ và $z_2=-1-2i$, hai điểm này nằm ngòai hình tròn do đó trong hình tròn đơn vị hàm đã cho là hàm giải tích . Theo định lý

Cauchy 1 thì $\displaystyle\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz=0$


2
-1

b) Hàm $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+2z+5}$ không giải tích tại điểm $z_1=-1+2i$,điểm này nằm trong miền D giới hạn bởi C (điểm $z_1=-1-2i$ không nằm trong miền D),

$$\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5}\,dz = \int_C \frac{\dfrac{z+4}{z-(-1-2i)}}{z-(-1+2i)}\,dz$$

c) Hàm $f(z) = \dfrac{z+4}{z^2+2z+5}$ không giải tích tại điểm $z_1 = -1+2i$, và điểm $z_2 = -1-2i$, hai điểm này nằm trong miền D giới hạn bởi C.

$$\int_{C} \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz = \int_{C_1} \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz + \int_{C_2} \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$$

Ví dụ : $\int\limits_C \frac{z+1}{z^2-2z}dz$ C là đường tròn tâm tại 2 bán kính 1/2 theo chiều dương

Ví dụ : $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z^2-2z}dz$ C là đường tròn tâm tại 0 bán kính 3 theo chiều dương

Định lý tích phân Cauchy 3 :

Cho $g(z)$ là hàm **có đạo hàm trong miền D** ,

C là biên của D , z_0 là một điểm **nằm trong D** .

Khi đó $$\int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} g^{(n)}(z_0)$$

$$\int_C \frac{g(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i\, g(z) \qquad \forall z \in D$$

$$\left(\int_C \frac{g(w)}{w-z}\,dw\right)' = \left(\text{[redacted]}\pi i\, g(z)\right)'$$

$$\left(\int_C \frac{g(w)}{(w-z)^2}\,dw\right) = \text{[redacted]}\pi i\, g'(z)$$

$$\left(\int_C \frac{2g(w)}{(w-z)^3}\,dw\right) = \text{[redacted]}\pi i\, g''(z)$$

$$\left(\int_C \frac{2g(w)}{(w-z)^3}\,dw\right) = 2\pi i\, g''(z)$$

$$\left(\int_C \frac{3.2.g(w)}{(w-z)^4}\,dw\right) = 2\pi i\, g'''(z)$$

$$\left(\int_C \frac{n!\,g(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw\right) = 2\pi i\, g^{(n)}(z)$$

$$\int_C \frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{2\pi i\, g^{(n)}(z)}{n!}$$

Ví dụ : Tính $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^3}\,dz$

với C là đường tròn đơn vị , lấy theo chiều dương .

Ví dụ : Tính $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2+2z+1}\,dz$

với C là đường tròn $|z-1| = 3$.