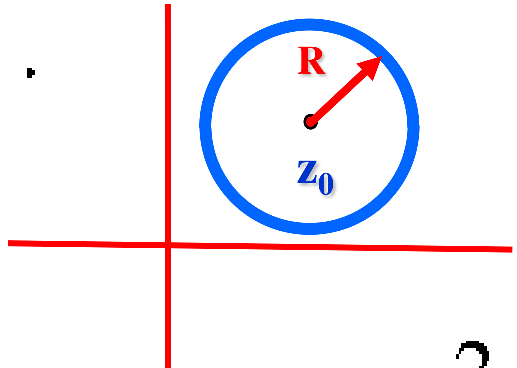
4)Chuỗi Taylor : Hàm $f(z)$ có đạo hàm trong hình tròn mở tâm z_0 , bán kính R .



Khi đó với mọi $z \in D$ ta có :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{1!} f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z - z_0)^2 + ..$$

$$.. + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n + \ldots$$

Chuỗi Taylor lấy tại điểm $z_0 = 0$ gọi là chuỗi

MacLaurin :

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) z + \frac{1}{2!} f''(0) z^2 + \ldots$$

$$.. + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, z^n + \ldots$$

Chuỗi Taylor về bản chất là viết hàm $f(z)$ dưới dạng đa thức của $(z - z_0)$

Chuỗi MacLaurin về bản chất là viết hàm $f(z)$ dưới dạng đa thức của z

Chuỗi MacLaurin của các hàm cơ bản :

$$f(z) = e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$(R = +\infty)$$

$$f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$(R = +\infty)$$

$$f(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$(R = +\infty)$$

$$f(z)=(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\ldots. \qquad \boxed{(R=1)}$$

Đặc biệt :

$$f(z)=\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots$$

$$\boxed{(R=1)}$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots$$

$$\boxed{(R=1)}$$

Muốn tìm chuỗi MacLaurin : dựa vào chuỗi MacLaurin **cơ bản** và **đổi biến**

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin của hàm $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$

$$f(z)=\frac{1}{z+3}=\left(\frac{1}{1+(z+2)}\right)=\left(\frac{1}{1+w}\right)=$$

Sai

$$=(1-w+w^2-w^3+w^4-..)=$$

$$=1-(z+2)+(z+2)^2-(z+2)^3+....$$

$z_0=0$ $\boxed{w_0=2}$

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin của hàm $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$

Ta có $f(z)=\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+z/3}\right)$

Đặt $w=z/3$: với $z_0=0$ tương ứng $w_0=0$.

Dùng chuỗi MacLaurin (theo w) :

$$f(z)=\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+z/3}\right)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+w}=$$

$$=\frac{1}{3}(1-w+w^2-w^3+w^4-\dots)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\dots\right)$$

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin của hàm

$$f(z)=\frac{z}{z^2+4} \quad \text{đến số hạng } z^5$$

Ta có : $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}=\dfrac{z}{4}\left(\dfrac{1}{1+z^2/4}\right)$

Chỉ cần khai triển hàm $\left(\dfrac{1}{1+z^2/4}\right)$

vì $\dfrac{z}{4}$ đã là đa thức theo biến z

Đặt $w=\dfrac{z^2}{4}$: với $z_0=0$ tương ứng $w_0=0$.

Dùng chuỗi MacLaurin theo w ta có :

$$\left(\frac{1}{1+z^2/4}\right)=\left(\frac{1}{1+w}\right)=$$

$$(1-w+w^2-w^3+w^4-....)=\left(1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{16}-....\right)$$

Vậy $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}=\dfrac{z}{4}\left(\dfrac{1}{1+z^2/4}\right)=$

$$\frac{z}{4}\left(1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{16}-....\right)=\frac{z}{4}-\frac{z^3}{16}+\frac{z^5}{64}-.....$$

Ví dụ : Tìm chuỗi MacLaurin hàm $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$

Ta có $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}=1-\dfrac{2}{z+1}=1-2\left(\dfrac{1}{1+z}\right)=$

$$=1-2(1-z+z^2-z^3+\ldots)$$

Ví dụ: Chuỗi MacLaurin hàm $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$

$$f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}-\ldots\right]$$

Vậy $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}z+\dfrac{7}{8}z^2-\dfrac{15}{16}z^3+\dfrac{31}{32}z^4+\ldots..$

Ví dụ :Tìm ba số hạng đầu khác không của chuỗi MacLaurin hàm $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$

$$f(z)=\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{1+(\cos z-1)}=[1+(\cos z-1)]^{-1}=$$

$$=1-(\cos\, z-1)+(\cos\, z-1)^2-(\cos\, z-1)^3+..=$$

$$=1-\left(\frac{-z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+..\right)+\left(\frac{-z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+..\right)^2+.....=$$

$$1+\frac{z^2}{2}+\frac{5}{24}z^4+.....$$

Ví dụ: Chuỗi Taylor hàm $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ tại $z_0=1$

Ta đặt $w=(z-1)$, với $z_0=1$ thì $w_0=z_0-1=0$

Ta có $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{(z-1)}{2+(z-1)}=\dfrac{w}{2+w}=$

$$=\frac{1}{2}w.\frac{1}{1+\frac{w}{2}}=\frac{1}{2}w\left(1-\frac{w}{2}+\left(\frac{w}{2}\right)^2+\ldots\right)$$

$$=\frac{w}{2}-\frac{w^2}{4}+\frac{w^3}{8}-..=\frac{(z-1)}{2}-\frac{(z-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^3}{8}-\ldots.$$

Ví dụ: Chuỗi Taylor $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ tại $z_0 = 2$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

*) $$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\dfrac{(z-2)}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{9} - \frac{(z-2)^3}{27} + \ldots\right]$$

**) $$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4+(z-2)}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{(z-2)}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-2}{4}+\frac{(z-2)^2}{16}-\frac{(z-2)^3}{64}+\ldots\right]$$

Vậy $$f(z)=\frac{1}{12}-\frac{7}{12^2}z+\frac{37}{12^3}z^2-\frac{175}{12^4}z^4+\ldots.$$

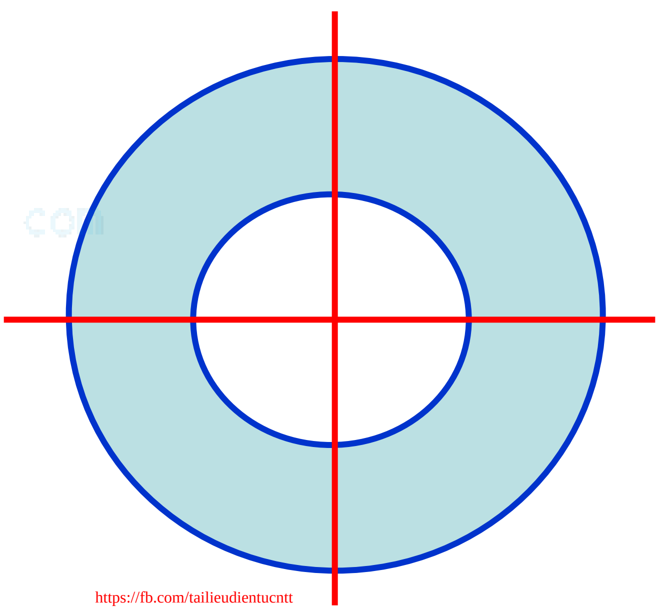
$$(R=3)$$

Miền hội tụ của chuỗi

$$\ldots+\frac{1}{2^3z^3}+\frac{1}{2^2z^2}+\frac{1}{2z}+1+z+z^2+z^3+\ldots$$

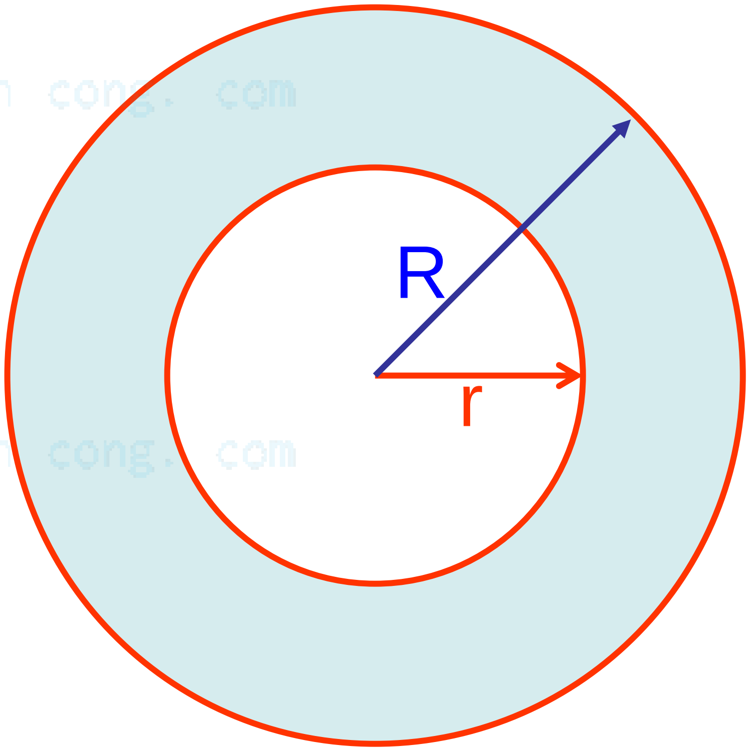
(chuỗi vô hạn về **cả hai phía** , phía chỉ số lũy thừa **dương** và phía chỉ số lũy thừa **âm**) là

$$\boxed{\frac{1}{2}<|z|<1}$$



Chuỗi Laurent : Hàm $f(z)$ có đạo hàm trong hình vành khăn K : $0 \le r < |z - z_0| < R \le +\infty$

Khi đó với mọi điểm $z \in K$ hàm có thể viết dưới dạng chuỗi vô hạn về cả hai phía :



Chuỗi Laurent : Hàm $f(z)$ có đạo hàm trong hình vành khăn K : $0 \le r < |z - z_0| < R \le +\infty$

Khi đó với mọi điểm $z \in K$ hàm có thể viết dưới dạng chuỗi vô hạn về cả hai phía :

$$f(z) = \ldots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} +$$

$$+ a_0 + a_1(z - z_0)^1 + a_2(z - z_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{\boxed{n=-\infty}}^{\boxed{+\infty}} a_n(z - z_0)^n$$

Để tìm chuỗi Laurent của hàm ta sử dụng khai **triển chuỗi Taylor của hàm** trên các miền **thích hợp** (tùy theo bán kính hội tụ của chuỗi Taylor)

Chuỗi Laurent là chuỗi lũy thừa của $(z - z_0)$ **vô hạn về cả hai phía chỉ số lũy thừa dương và âm**

Ví dụ : Khai triển thành chuỗi (thích hợp)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$ trên các miền

a) $|z| < 1$

b) $1 < |z| < 2$

c) $2 < |z| < +\infty$

d) $0 < |z-1| < 1$

e) $1 < |z-1| < +\infty$

f) $1 < |z-2| < +\infty$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}}$$

a) Trong miền $|z| < 1$ **Chuỗi MacLaurin**

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

$$\frac{1}{1-z} = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) \qquad \boxed{|z| < 1}$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} =$$

$$\boxed{\left|\frac{z}{2}\right| < 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \ldots.\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=$$

$$=\ (1+z+z^2+z^3+\ldots)-\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\left(\ \frac{z}{2}\right)^2+\ldots.\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{4}\right)z+\left(1-\frac{1}{8}\right)z^2+\ldots.$$

b) Trong miền $1 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + \ldots)$$ **Sai** $\boxed{|z| > 1}$

b) Trong miền $1 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| < 1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ..\right)$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + ...\right]$$

$$\boxed{\left|\frac{z}{2}\right| < 1}$$

c) Trong miền $2 < |z| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ..\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + ...\right]}\ ?$$

$$\boxed{\left|\frac{z}{2}\right| > 1}$$

c) Trong miền $2 < |z| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \qquad \boxed{\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ..\right)$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \ldots\right)$$

$$\boxed{\left|\frac{2}{z}\right| < 1}$$

d) Trong miền $0 < |z-1| < 1$

(Theo chuỗi của $\boxed{(z-1)}$)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$\boxed{|z-1| < 1}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{-1}{1-(z-1)}$$

$$- \; -[1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 + \ldots]$$

e) Trong miền $1 < |z-1| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z-1}}$$

$$= \frac{1}{z-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{z-1} \right)^2 + \dots\dots \right)$$

f) Trong miền $1 < |z-2| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} =$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \left[1 - \frac{1}{z-2} + \left(\frac{1}{z-2}\right)^2 + \ldots\right]$$

Ví dụ : Tìm chuỗi Laurent của hàm $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

trong miền $0<|z|<+\infty$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots}{z^3}$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}z^2+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-2}+\ldots$$