

Mô-men động lượng Angular momentum

1

Cơ cổ điển

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad [4.95]$$

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z, \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad [4.96]$$

3

Tọa độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \quad [4.13a]$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]$$

5

Tọa độ cầu

- PT Schroedinger: [qua toán tử L]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2mr^2} L^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad [4.14a]$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right. \\ & \quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V(r) \psi = E\psi \end{aligned}$$

6

Cơ lượng tử

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z,$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$$

7

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z,$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] \\ &\quad - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \end{aligned} \quad [4.97]$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] \\ &= i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \end{aligned} \quad [4.98]$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z; \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x; \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y. \end{aligned} \quad [4.99]$$

8

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

$$\sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle| \quad [4.100]$$

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad [4.101]$$

$$[L^2, L_x] = ???$$

9

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\ &= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y \\ &\quad + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\ &= L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y \\ &\quad + L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$[L^2, L_x] = 0, [L^2, L_y] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad [4.102]$$

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \quad [4.103]$$

10

$$[L^2, L_x] = 0, [L^2, L_y] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad [4.102]$$

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \quad [4.103]$$

→ Mỗi thành phần của $\mathbf{L}$ có cùng hàm riêng với L^2
(Mỗi thành phần của $\mathbf{L}$ có thể được chéo hóa với L^2)

Những thành phần của $\mathbf{L}$ không giao hoán với nhau → có thể chọn CHỈ 1 thành phần để chéo hóa với L^2 .

Người ta quy ước chọn thành phần L_z

12

Trị riêng của mô-men động lượng

Tìm hàm riêng chung và trị riêng của L^2 và L_z

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{và} \quad L_z f = \mu f \quad [4.104]$$

Xét toán tử “bậc thang”

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y \quad [4.105]$$

14

$$\begin{aligned}
[L_z, L_{\pm}] &= [L_z, L_x \pm iL_y] \\
&= [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] \\
&= i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) \\
&= \pm\hbar(L_x \pm iL_y)
\end{aligned}$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} \quad [4.106]$$

$$[L^2, L_{\pm}] = ?$$

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad [4.107]$$

15

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (\rightarrow \text{giao hoán với nhau})$$

Xét f là hàm riêng của L^2 : $L^2 f = \lambda f$

$$\Rightarrow L^2(\underbrace{L_{\pm} f}_g) = L_{\pm}(L^2 f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(\underbrace{L_{\pm} f}_g) \quad [4.108]$$

$$\Rightarrow L^2 g = \lambda g$$

$\rightarrow f$ và $L_{\pm} f [= g]$ đều là HR của L^2 với cùng TR λ

16

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm} \quad [4.106]$$

Xét f là hàm riêng của L_z : $L_z f = \mu f$

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_z L_{\pm} - L_{\pm} L_z)f + L_{\pm} L_z f \\ &= \pm \hbar L_{\pm} f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned} \quad [4.109]$$

$$L_z g = (\mu \pm \hbar)g$$

$L_{\pm}f$ là HR của L_z với TR $(\mu \pm \hbar)$

17

$$L_z(L_+f) = (\mu + \hbar)(L_+f)$$

→ L_+ được gọi là toán tử “tăng” vì nó làm cho TR của L_z tăng thêm $\hbar$

$$L_z(L_-f) = (\mu - \hbar)(L_-f)$$

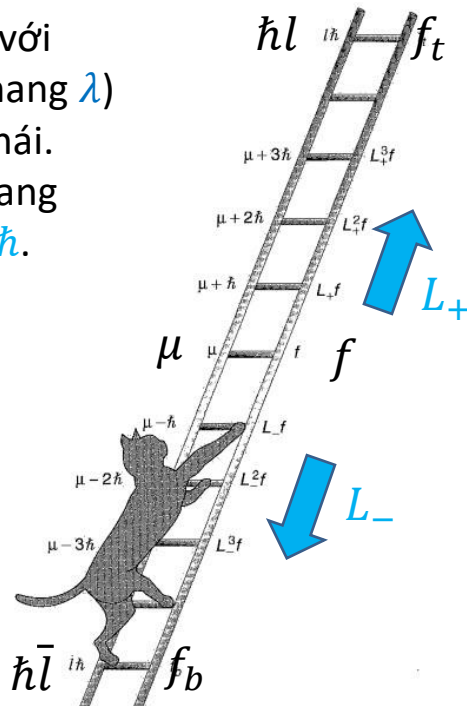
→ L_- được gọi là toán tử “giảm” vì nó làm cho TR của L_z giảm đi $\hbar$

Mỗi $\lambda \rightarrow$ “thang” các trạng thái. Mỗi nấc thang cách nhau $\hbar$.

Leo lên bằng toán tử tăng L_+ . Leo xuống bằng toán tử giảm L_- .

18

Mỗi λ ứng với
“thang” (thang λ)
các trạng thái.
Mỗi nấc thang
cách nhau $\hbar$.



19

Có thể leo lên/xuống đến khi nào? vô hạn?

$$\begin{aligned} \langle L^2 \rangle &= \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle \Leftrightarrow \lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \\ \langle L_x^2 \rangle &= \langle f | L_x^2 f \rangle = \langle f | L_x L_x f \rangle = \langle L_x f | L_x f \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2 \end{aligned}$$

→ Trị riêng μ của L_z bị chặn.

→ Tồn tại bậc (trạng thái) cao nhất f_t

$$L_+ f_t = 0 \quad [4.110]$$

Gọi $\hbar l$ là TR của L_z ứng với trạng thái f_t :

$$L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t \quad [4.111]$$

20

$$\begin{aligned}
L_{\pm}L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) \\
&= L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x) \\
&= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z)
\end{aligned}$$

$$L^2 = L_{\pm}L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z \quad [4.112]$$

$$\begin{aligned}
L^2 f_t &= (L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z)f_t \\
&= (\mathbf{0} + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l)f_t \\
&= \hbar^2 l(l+1)f_t
\end{aligned}$$

f là hàm riêng
của L^2 : $L^2 f = \lambda f$

$$\rightarrow \lambda = \hbar^2 l(l+1) \quad [4.113]$$

21

Tồn tại bậc (trạng thái) thấp nhất f_b

$$L_- f_b = 0 \quad [4.114]$$

Gọi $\hbar \bar{l}$ là TR của L_z ứng với trạng thái f_b :

$$L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b \quad ; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \quad [4.115]$$

$$\begin{aligned}
L^2 f_b &= (L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z)f_b \\
&= (\mathbf{0} + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l})f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1)f_b
\end{aligned}$$

f là hàm riêng
của L^2 : $L^2 f = \lambda f$

$$\rightarrow \lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) \quad [4.116]$$

22

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l} - 1) \quad [4.116]$$

$$\lambda = \hbar^2 l(l + 1) \quad [4.113]$$

$$\Rightarrow \bar{l} = -l \text{ hoặc } \bar{l} = l + 1$$

$$\Rightarrow \bar{l} = -l \quad [4.117]$$

$$\text{Loại } \bar{l} = l + 1$$

Vì $\bar{l} \leq l$: bậc dưới không thể cao (lớn) hơn bậc trên

23

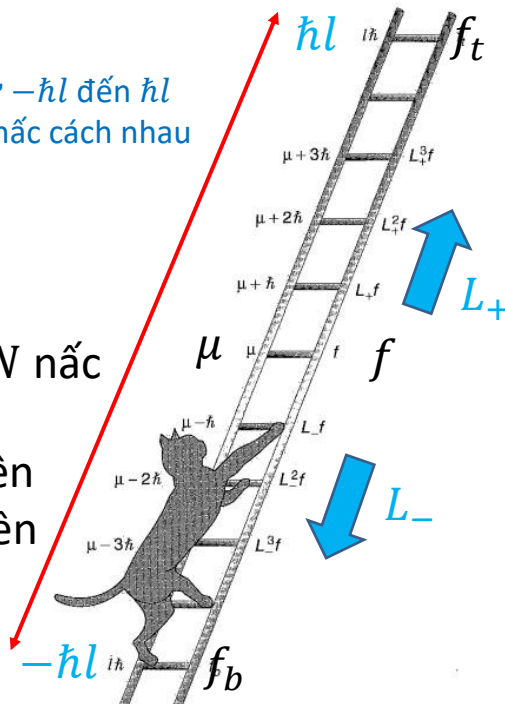
THANG λ

$L_z f = \mu f$. μ chạy từ $-\hbar l$ đến $\hbar l$ theo từng nấc, mỗi nấc cách nhau $\hbar$. Vậy $\mu = \hbar m$, với m đi từ $-l$ đến l .

$$L_z f = \hbar m f$$

$$l = \frac{N}{2} \Leftarrow N \text{ nấc}$$

$\rightarrow l$ là số nguyên hoặc bán nguyên



24

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m$$

[4.118]

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

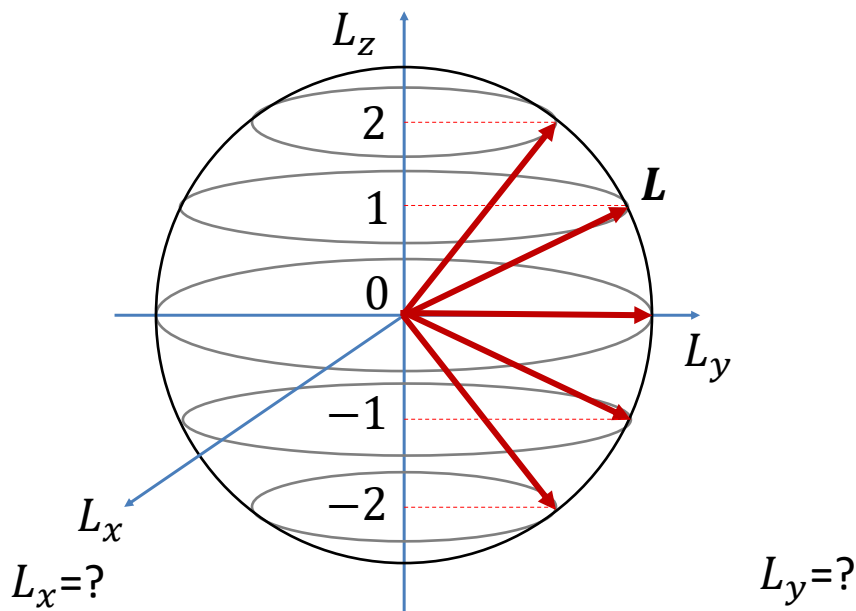
[4.119]

l cho trước $\rightarrow 2l+1$ giá trị của m ($2l+1$ bậc thang)

$$\text{Ví dụ: } l = 2 \rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2$$

25

$$l = 2 \rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2$$



26

$$H\psi = E\psi$$

Viết đầy đủ các chỉ số lượng tử: $\psi_{nlm} = R_{nl}Y_l^m$

$$L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi \quad [4.133]$$

$$L_z\psi = \hbar m\psi$$

L^2 và L_z chỉ tác động lên hàm góc quay $Y_l^m \rightarrow$ thay ψ bằng hàm cầu Y :
 $L^2Y = \hbar^2 l(l+1)Y, L_zY = \hbar mY$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad [4.119]$$

PT Schroedinger trong tọa độ cầu

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2mr^2} L^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad [4.14a]$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l \quad [4.29]$$

27

Viết đầy đủ các chỉ số lượng tử: $\psi_{nlm} = R_{nl}Y_l^m$

$$H\psi = E\psi \quad [4.133]$$

$$L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi$$

$$L_z\psi = \hbar m\psi$$

$$HRY = ERY$$

$$L^2RY = \hbar^2 l(l+1)RY$$

$$L_zRY = \hbar mRY$$

$$HRY = ERY$$

$$L^2Y = \hbar^2 l(l+1)Y$$

$$L_zY = \hbar mY$$

L^2 và L_z chỉ tác động lên hàm góc quay Y_l^m

28

Tọa độ cầu + giải tích

$$l = 0, 1, 2, \dots; m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$$

Đại số (Tổng quát hơn)

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$$

29

Bài tập nhỏ

Chứng minh

- a) L_x, L_y là các toán tử hermit
- b) $L_{\mp}$ là toán tử liên hiệp hermit của $L_{\pm}$

$$\langle f | L_x g \rangle = \langle L_x f | g \rangle$$

$$\langle f | L_{\pm} g \rangle = \langle L_{\mp} f | g \rangle$$

30

Tọa độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \quad [4.13a]$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]$$

31

Hàm riêng

$$f_l^m = Y_l^m$$

Bài tập 4.18

$$L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1} \quad [4.120]$$

Tìm A_l^m

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \\ &= \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \quad [4.121] \end{aligned}$$

Dùng công thức [4.112]

32

$$\begin{aligned}
\langle f | L_{\pm} g \rangle &= \langle L_{\mp} f | g \rangle \\
L^2 &= L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z \quad [4.112] \\
L_{\pm} L_{\mp} &= L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z \quad \rightarrow \quad L_{\mp} L_{\pm} = L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z \\
\langle f_l^m | L_{\mp} L_{\pm} f_l^m \rangle &= \langle f_l^m | (L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z) f_l^m \rangle \\
L^2 f_l^m &= \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad [4.118] \\
&= \langle f_l^m | (\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m) f_l^m \rangle \\
&= \hbar^2 [l(l+1) - m(m \pm 1)] \langle f_l^m | f_l^m \rangle \\
&= \hbar^2 [l(l+1) - m(m \pm 1)] \\
&= \langle L_{\pm} f_l^m | L_{\pm} f_l^m \rangle = |A_l^m|^2 \langle f_l^{m \pm 1} | f_l^{m \pm 1} \rangle = |A_l^m|^2 \\
|A_l^m|^2 &= \hbar^2 [l(l+1) - m(m \pm 1)] \\
A_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}
\end{aligned}$$

33

Bài tập 4.19

$$\begin{aligned}
[r_i, p_j] &= -[p_j, r_i] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \\
i, j &= x, y, z. \quad r_x = x, r_y = y, r_z = z
\end{aligned} \quad [4.10]$$

CM:

$$\begin{aligned}
[L_z, x] &= i\hbar y, \\
[L_z, y] &= -i\hbar x, \\
[L_z, z] &= 0, \\
[L_z, p_x] &= i\hbar p_y, \\
[L_z, p_y] &= -i\hbar p_x, \\
[L_z, p_z] &= 0.
\end{aligned} \quad [4.122]$$

34

Toán tử L trong tọa độ cầu

$$L = \left(\frac{\hbar}{i}\right)(\mathbf{r} \times \nabla) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)(r\hat{r} \times \nabla)$$

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \quad [4.123]$$

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[r(\hat{r} \times \hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r} \times \hat{\theta})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{r} \times \hat{\phi})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

$$(\hat{r} \times \hat{r}) = 0, (\hat{r} \times \hat{\theta}) = \hat{\phi}, (\hat{r} \times \hat{\phi}) = -\hat{\theta}$$

$$L = \frac{\hbar}{i} \left[\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad [4.124]$$

35

$$\hat{\theta} = (\cos\theta \cos\phi)\hat{i} + (\cos\theta \sin\phi)\hat{j} - (\sin\theta)\hat{k} \quad [4.125]$$

$$\hat{\phi} = -(\sin\phi)\hat{i} + (\cos\phi)\hat{j} \quad [4.126]$$

$$L = \frac{\hbar}{i} [(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j})\frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos\theta \cos\phi\hat{i} + \cos\theta \sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\phi \cot\theta\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.127]$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left(+\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \sin\phi \cot\theta\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.128]$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi} \quad [4.129]$$

36

$$\begin{aligned}
L_{\pm} &= L_x \pm iL_y \\
&= \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]
\end{aligned}$$

$$L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.130]$$

$$L_+ L_- = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.131]$$

37

Tóm tắt về momen động lượng

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z,$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

38

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad [4.132]$$

$$\begin{aligned} L^2 f_l^m &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m \\ &= \hbar^2 l(l+1) f_l^m \end{aligned}$$

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

39

$$H\psi = E\psi$$

Viết đầy đủ các chỉ số lượng tử: $\psi_{nlm} = R_{nl} Y_l^m$

$$L^2 \psi = \hbar^2 l(l+1) \psi \quad [4.133]$$

$$L_z \psi = \hbar m \psi$$

L^2 và L_z chỉ tác động lên hàm góc quay $Y_l^m \rightarrow$ thay ψ bằng hàm cầu Y :

$$L^2 Y = \hbar^2 l(l+1) Y, \quad L_z Y = \hbar m Y$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad [4.119]$$

PT Schroedinger trong toạ độ cầu

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2mr^2} L^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad [4.14a]$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l \quad [4.29]$$

40

Viết đầy đủ các chỉ số lượng tử: $\psi_{nlm} = R_{nl}Y_l^m$

$$H\psi = E\psi \quad [4.133]$$

$$L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi$$

$$L_z\psi = \hbar m\psi$$

$$HY = EY$$

$$L^2Y = \hbar^2 l(l+1)Y$$

$$L_zY = \hbar mY \quad L^2 \text{ và } L_z \text{ chỉ tác động lên hàm góc quay } Y_l^m$$

41

Tọa độ cầu + giải tích

$$l = 0, 1, 2, \dots; m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

Đại số (Tổng quát hơn)

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

42