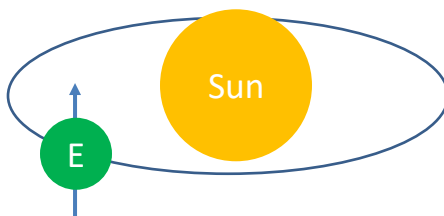


Spin

1

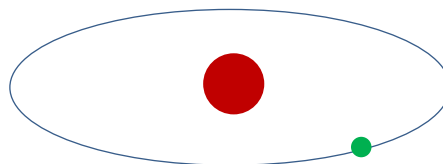
Classical



Mô-men
động lượng quỹ đạo

Spin

QM



Mô-men
động lượng quỹ đạo
Spin (không theo nghĩa
cổ điển!)

3

Spin

- Electron có spin ($\mathbf{S}$)
- Spin không liên quan đến không gian !
- Đặc trưng cho tính chất nội tại của hạt
- $\rightarrow$ mô-men động lượng bên trong ($\mathbf{S}$) và mô-men động lượng bên ngoài ($\mathbf{L}$)

4

Spin

Bài toán spin ($\mathbf{S}$) được xử lý tương tự như bài toán mô-men động lượng ($\mathbf{L}$)

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y \end{aligned} \quad [4.134]$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z; \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x; \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^2 |s \, m\rangle &= \hbar^2 s(s+1) |s \, m\rangle \\ S_z |s \, m\rangle &= \hbar m |s \, m\rangle \end{aligned} \quad [4.135]$$

$$L^2 \psi = \hbar^2 l(l+1) \psi$$

$$L_z \psi = \hbar m \psi$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots;$$

$$m = -l, \dots, l$$

$$s = ?; \quad m = ?$$

5

Spin

Không phụ thuộc vào không gian (góc quay)

→ Không loại trừ các giá trị bán nguyên của s

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$$

[4.137]

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, \dots, l$$

6

Spin

Bổ sung thêm:

$$S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y.$$

$$S_{\pm}|s\ m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s\ (m \pm 1)\rangle$$

[4.136]

Dựa vào bài tập 4.18

$$L_{\pm}f_l^m = (A_l^m)f_l^{m \pm 1} \quad [4.120]$$

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \\ &= \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \end{aligned} \quad [4.121]$$

7

Spin

- ✓ Mỗi hạt cơ bản có spin **riêng và không thể thay đổi !**
- ✓ Spin là một số lượng tử đặc trưng cho hạt
- ✓ Số lượng tử mô-men bên ngoài (l) có thể nhận giá trị (nguyên) nào đó và thay đổi khi hệ bị nhiễu loạn
- ✓ Số lượng tử mô-men bên trong (s) cố định đối với 1 hạt đã cho

8

Hạt với spin $s = 1/2$

- ✓ Protons, neutrons, electrons
- ✓ Quarks và leptons

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, \dots, l$$

$$s = \frac{1}{2}, 1, \dots; \quad m = ? \qquad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

9

Hạt với spin $s = 1/2$

$$|s\ m\rangle: s = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

→ Có hai trạng thái được gọi là spin up và down:

$$\text{Spin up } (\uparrow): \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{Spin down } (\downarrow): \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

10

Nhắc lại

Không gian vector

$$\begin{array}{c} \vec{A} \quad \quad \vec{B} \\ \vec{A} \xrightarrow{\hat{Q}} \vec{B} = \hat{Q}\vec{A} \end{array}$$

Tích vô hướng $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Không gian Hilbert

$$|\alpha\rangle \quad |\beta\rangle$$

$$|\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle$$

$$\text{Tích trong } \langle\alpha|\beta\rangle \equiv \int \alpha(x)^* \beta(x) dx$$

$$\text{Ket: } |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Bra: } \langle\alpha| = (a_1^* \ a_2^* \ \dots \ a_n^*)$$

11

Không gian Hilbert

$$\begin{aligned}
 |\alpha\rangle &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & \xrightarrow{\hat{Q}} & |\beta\rangle = \hat{Q}|\alpha\rangle & |\beta\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
 & \text{red } |\beta\rangle & & & \\
 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

12

Hạt với spin $s = 1/2$

$$|s\ m\rangle: s = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Spin up } (\uparrow): \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{Spin down } (\downarrow): \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Chú ý những cách viết khác nhau:

$$|s\ m\rangle \leftrightarrow |f_s^m\rangle \leftrightarrow f_s^m \leftrightarrow f_{s,m} \leftrightarrow f_{sm}$$

$$\text{Spin up } (\uparrow): \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle = \left| f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right\rangle$$

$$\text{Spin down } (\downarrow): \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| f_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right\rangle$$

13

Hạt với spin $s = 1/2$

$$|s m\rangle: s = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

Thay cho bra/ket $|s m\rangle$ có thể dùng spinor (ma trận cột) để mô tả trạng thái spin tổng quát:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139]$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [4.140] \quad \text{Spin up } (\uparrow) \quad \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [4.141] \quad \text{Spin down } (\downarrow) \quad \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle$$

15

Cần xác định toán tử $\mathbf{S}^2$ và S_z

Sử dụng các tính chất của các toán tử sau đây

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x \quad [4.134] \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y \\ S_{\pm}|s m\rangle &= \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s(m \pm 1)\rangle \quad [4.136] \\ S_{\pm} &\equiv S_x \pm iS_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2|s m\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|s m\rangle \\ S_z|s m\rangle &= \hbar m|s m\rangle \end{aligned} \quad [4.135]$$

Ta có: $\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+$ và $\mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-$ [4.142]

$$s^2 \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle \quad s^2 \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle$$

$\chi_{\pm}$ là ma trận $2 \times 2 \rightarrow$ Toán tử $\mathbf{S}^2$ là ma trận 2×2 .

Gọi $\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

16

$$\mathbf{S}^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [4.143]$$

17

$$S_z |s m\rangle = \hbar m |s m\rangle$$

$$\mathbf{S}_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad \mathbf{S}_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_- \quad [1.144]$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [4.145]$$

$$S_{\pm} |s m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s (m \pm 1)\rangle \quad [4.136]$$

$$S_{\pm} \equiv S_x \pm i S_y.$$

$$\mathbf{S}_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \mathbf{S}_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \mathbf{S}_+ \chi_+ = \mathbf{S}_- \chi_- = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{S}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [4.146]$$

18

$$\begin{aligned}
S_{\pm} &= S_x \pm iS_y \\
\Rightarrow S_x &= \frac{(S_+ + S_-)}{2} \text{ và } S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} \\
\Rightarrow \mathbf{S}_x &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad [4.147]
\end{aligned}$$

Có thể viết: $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$

$\boldsymbol{\sigma}$ là ma trận Pauli với các thành phần cho bởi:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [4.148]$$

19

Chú ý: $\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z$ và $\mathbf{S}^2$ là các toán tử hermit vì chúng biểu thị cho các đại lượng có thể khảo sát. $\mathbf{S}_{\pm}$ không hermit.

$$\chi_+ \text{ và } \chi_- \text{ thỏa PT trị riêng: } \mathbf{S}_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad \mathbf{S}_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_- \quad [1.144]$$

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [4.145]$$

→ Trạng thái riêng (hàm riêng/spinor riêng) của $\mathbf{S}_z$ [và các trị riêng tương ứng] là

$$\mathbf{S}_z \left\{ \begin{aligned} &\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ trị riêng } +\frac{\hbar}{2}; \\ &\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ trị riêng } -\frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \right. \quad [1.149]$$

20

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2} \right) \\ \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2} \right) \\ \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139] \end{array} \right.$$

[Đúng ra, nên ký hiệu χ_+ thành $\chi_+^{(z)}$, và χ_- thành $\chi_-^{(z)}$ để chỉ rõ đây là các vector/spinor riêng của toán tử S_z .]

→ Nếu đo giá trị S_z [spin trên trục z] của hạt (spin $\frac{1}{2}$) ở trạng thái tổng quát χ thì có thể thu được 2 giá trị khả dĩ $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$; xác suất tương ứng là

$$P\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = |a|^2 \text{ và } P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |b|^2.$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad [4.150] \quad \text{Đây chính là ĐKCH } \langle \chi | \chi \rangle = 1$$

21

Ví dụ: Hạt spin $\frac{1}{2}$ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tính xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_z

Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_z thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Nếu đo S_z thì có thể thu được 2 giá trị khả dĩ $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ (giá trị có thể đo được chính là các trị riêng) với xác suất tương ứng là $P\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = |a|^2 = \frac{|1+i|^2}{6} = \dots$ và $P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |b|^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $P\left(+\frac{\hbar}{2}\right)$ cũng có thể được tính $= 1 - P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

22

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \chi_+ \equiv \chi_+^{(z)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{trị riêng } +\frac{\hbar}{2} \\ \chi_- \equiv \chi_-^{(z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{trị riêng } -\frac{\hbar}{2} \\ \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139] \\ \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a_z\chi_+^{(z)} + b_z\chi_-^{(z)} [4.139] \\ a_z = a ; b_z = b \end{array} \right.$$

Ta cần xác định hàm riêng và trị riêng của các thành phần spin theo hướng x, y

$$\chi = a_x\chi_+^{(x)} + b_x\chi_-^{(x)}$$

$$\chi = a_y\chi_+^{(y)} + b_y\chi_-^{(y)}$$

23

Nếu đo giá trị S_x thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Cần tìm hàm riêng và trị riêng của S_x : $S_x f = \lambda f$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] f = 0 \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{pmatrix} f = 0$$

Để PT có nghiệm không tầm thường ($= 0$) thì định thức của nó phải $= 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

TR: Giá trị "quan sát" được

24

Hàm riêng (spinor riêng) được xác định qua

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x f = \lambda f \quad \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \pm \frac{\hbar}{2} \quad f = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \rightarrow \beta = \pm \alpha \rightarrow f = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv f_+, f = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv f_- \end{aligned}$$

Chuẩn hóa: $\langle f_+ | f_+ \rangle = 1 = 2\alpha^2 \rightarrow \alpha = 1/\sqrt{2}$

→ Spinor riêng :

$$\mathbf{S}_x \left\{ \begin{aligned} \chi_+^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{trị riêng } +\frac{\hbar}{2} \\ \chi_-^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{trị riêng } -\frac{\hbar}{2} \end{aligned} \right. \quad [1.451]$$

25

Spinor tổng quát χ cần được biểu diễn trong hệ cơ sở $\chi_+^{(x)}$ và $\chi_-^{(x)}$.

$$\chi = c_+ \chi_+^{(x)} + c_- \chi_-^{(x)} \quad \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nhắc lại: $c_n = \langle \varphi_n | \psi \rangle$ (K/g vector: $c_n = \vec{e}_n \cdot \vec{A}$)

$$c_+ = \langle \chi_+^{(x)} | \chi \rangle = (\chi_+^{(x)})^\dagger \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

$$c_- = \langle \chi_-^{(x)} | \chi \rangle = (\chi_-^{(x)})^\dagger \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \right) \chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} \right) \chi_-^{(x)} \quad [1.452]$$

27

$$S_x \left\{ \begin{array}{l} \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \right) \chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} \right) \chi_-^{(x)} \quad [1.452] \\ \chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2} \right) \\ \chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2} \right) \quad [1.451] \end{array} \right.$$

Nếu đo giá trị S_x thì xác suất để

thu được giá trị $+\frac{\hbar}{2}$ là $P\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = |c_+|^2 = \frac{|a+b|^2}{2}$, và

thu được giá trị $-\frac{\hbar}{2}$ là $P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |c_-|^2 = \frac{|a-b|^2}{2}$.

28

Ví dụ 4.2. Hạt spin $\frac{1}{2}$ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_x

Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_x thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Tính trị trung bình của S_x

$$\langle S_x \rangle = |c_+|^2 \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + |c_-|^2 \left(-\frac{\hbar}{2} \right)$$

$$\text{Hoặc dùng } \langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi$$

29

Nếu đo giá trị S_y thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Cần tìm hàm riêng và trị riêng của S_y : $S_y f = \lambda f$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] f = 0 \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -i\hbar/2 \\ i\hbar/2 & -\lambda \end{pmatrix} f = 0$$

Để PT có nghiệm không tầm thường thì định thức của nó phải = 0

$$\begin{vmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ???$$

Xin tính tiếp để tìm λ và f

30

$$S_y \left\{ \begin{array}{l} \chi_+^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2} \right) \\ \chi_-^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2} \right) \end{array} \right. \quad [1.451]$$

$$\chi = \left(\frac{a - ib}{\sqrt{2}} \right) \chi_+^{(y)} + \left(\frac{a + ib}{\sqrt{2}} \right) \chi_-^{(y)} \quad [1.452]$$

31

$$S_y \quad \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \chi_+^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \chi_-^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\chi = c_+ \chi_+^{(y)} + c_- \chi_-^{(y)}$$

$$c_+ = \left(\chi_+^{(y)} \right)^\dagger \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a - ib}{\sqrt{2}}$$

$$c_- = \left(\chi_-^{(y)} \right)^\dagger \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a + ib}{\sqrt{2}}$$

$$\chi = \left(\frac{a - ib}{\sqrt{2}} \right) \chi_+^{(y)} + \left(\frac{a + ib}{\sqrt{2}} \right) \chi_-^{(y)} \quad [1.452]$$

$$\text{Xác suất đo được } +\frac{\hbar}{2} \text{ là } P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |c_+|^2 = \frac{|a-ib|^2}{2},$$

$$\text{và có được } -\frac{\hbar}{2} \text{ là } P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |c_-|^2 = \frac{|a+ib|^2}{2}$$

32

BT: Hạt spin $\frac{1}{2}$ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_y ?

(Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_y thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?)

Tính trị trung bình của S_y

$$\langle S_y \rangle = |c_+|^2 \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + |c_-|^2 \left(-\frac{\hbar}{2} \right)$$

$$\text{Hoặc dùng } \langle S_y \rangle = \chi^\dagger S_y \chi$$

33

BT ôn:

Xác định toán tử $\mathbf{S}^2$ và S_z, S_x, S_y
cho hạt spin 1/2

Cho biết trước:

$$\mathbf{S}^2 |s m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s m\rangle$$

$$S_z |s m\rangle = \hbar m |s m\rangle$$

$$S_{\pm} |s m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s (m \pm 1)\rangle$$

$$S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y.$$

34

Bài tập ôn:

Xét hạt spin 1/2; $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

1. Nếu đo giá trị S_x thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu? $\langle S_x \rangle$?
2. Nếu đo giá trị S_y thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu? $\langle S_y \rangle$?
3. Nếu đo giá trị S_z thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu? $\langle S_z \rangle$?

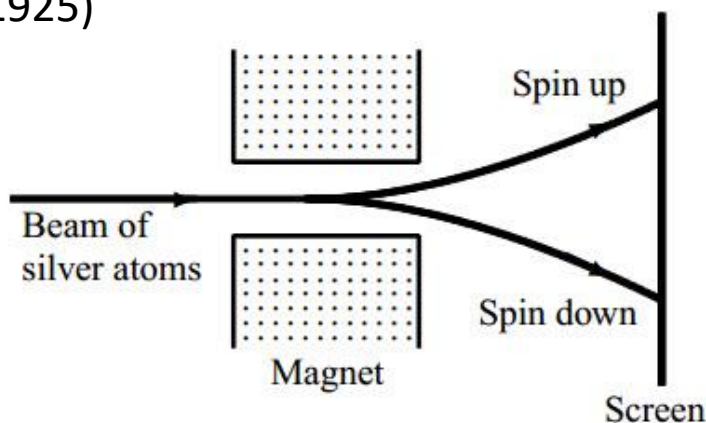
Áp dụng cho electron ở trạng thái spinor

$$\text{a) } \chi = \frac{A}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix} \quad \text{b) } \chi = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} A+i \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

35

Thí nghiệm Stern-Gerlach

- ✓ Stern-Gerlach: 1922, Ag
- ✓ Goudsmit & Uhlenbeck: giả thuyết spin (1925)



37

Giải thích thí nghiệm Stern – Gerlach (Hạt trong từ trường không đều)

Cổ điển: Dải liên tục (không tách vạch)!



Bạc có 1 electron (thứ 47) ngoài cùng ở lớp 5s:

→ QM (Schrödinger không spin): $2l + 1$ vạch.

Nếu như ở trạng thái s ($l = 0$) → 1 vạch;

Nếu ở trạng thái p ($l = 1$) thì có 3 vạch!



1 electron ngoài cùng ở lớp 5s → Spin $s = 1/2$

SPIN: Có 2 trạng thái (ứng với 2 vạch được quan sát trong thí nghiệm của Stern-Gerlach)



38