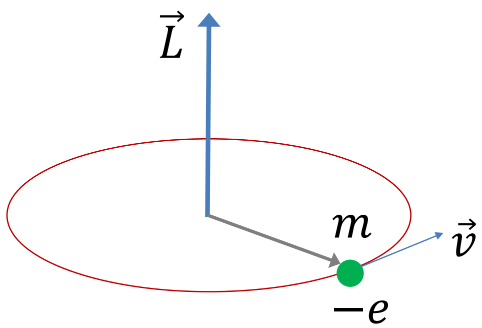
Electron trong từ trường

1



Mô-men động lượng quỹ đạo: $\vec{L}$

→ Mô-men lưỡng cực từ (quỹ đạo): $\vec{\mu}_L = \frac{-e}{2m}\vec{L}$

Spin (mô-men động lượng nội tại): $\vec{S}$

→ Mô-men lưỡng cực từ spin: $\vec{\mu}_S = g_S \frac{-e}{2m}\vec{S}$

Thừa số Landé g_S: $g_S \simeq 2 \Rightarrow \vec{\mu}_S = -\frac{e}{m}\vec{S}$

2

Mô-men lưỡng cực từ spin: $\vec{\mu}_S = \gamma \vec{S}$

Thừa số gyro từ: $\gamma = -\frac{e}{m}$

$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}$ [1.156]

Khi 1 mô-men lưỡng cực từ được đặt trong từ trường $\mathbf{B}$ thì nó chịu mô-men xoắn $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ (song song với từ trường).

Năng lượng ứng với mô-men xoắn này là

$H = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ [1.157]

→ Hamiltonian của e (tĩnh) trong từ trường

$H = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ [1.158]

3

Hạt $s = 1/2$ trong từ trường đều

Từ trường hướng theo trục z

$\mathbf{B} = B_0 \vec{k}$ $(= B_0 \hat{k})$ [1.159]

$H = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ [1.158]

$\Rightarrow \mathbf{H} = -\gamma B_0 \mathbf{S}_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ [1.160]

$\mathbf{H}$ có cùng trạng thái riêng với $\mathbf{S}_z$:

$$\begin{cases} \chi_+, \text{với năng lượng } E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, \text{với năng lượng } E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases}$$ [1.161]

4

Hạt $s = 1/2$ trong từ trường đều

Phương trình Schroedinger $i\hbar \dfrac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{H}\chi$ [4.162]

$\mathbf{H} = -\gamma B_0 \mathbf{S}_z = -\dfrac{\gamma B_0 \hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \chi_+, \text{năng lượng } E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, \text{năng lượng } E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát có dạng

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar}$$
$$= \begin{pmatrix} a e^{i\gamma B_0 t/2} \\ b e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(|a|^2 + |b|^2 = 1) \Rightarrow \chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$

5

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)\, e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)\, e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \qquad [4.163]$$

Xác định giá trị trung bình của $\mathbf{S}_x$

$$\langle S_x \rangle = \chi(t)^\dagger \mathbf{S}_x \chi(t)$$
$$= \left(\cos(\alpha/2)\, e^{-i\gamma B_0 t/2} \quad \sin(\alpha/2)\, e^{+i\gamma B_0 t/2}\right)$$
$$\times \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)\, e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)\, e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\alpha \cos(\gamma B_0 t) \qquad [4.164]$$

6

Tương tự:

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)\, e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)\, e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^{\dagger}\mathbf{S}_y\chi(t) = -\frac{\hbar}{2}\sin\alpha\sin(\gamma B_0 t) \quad [4.165]$$

và

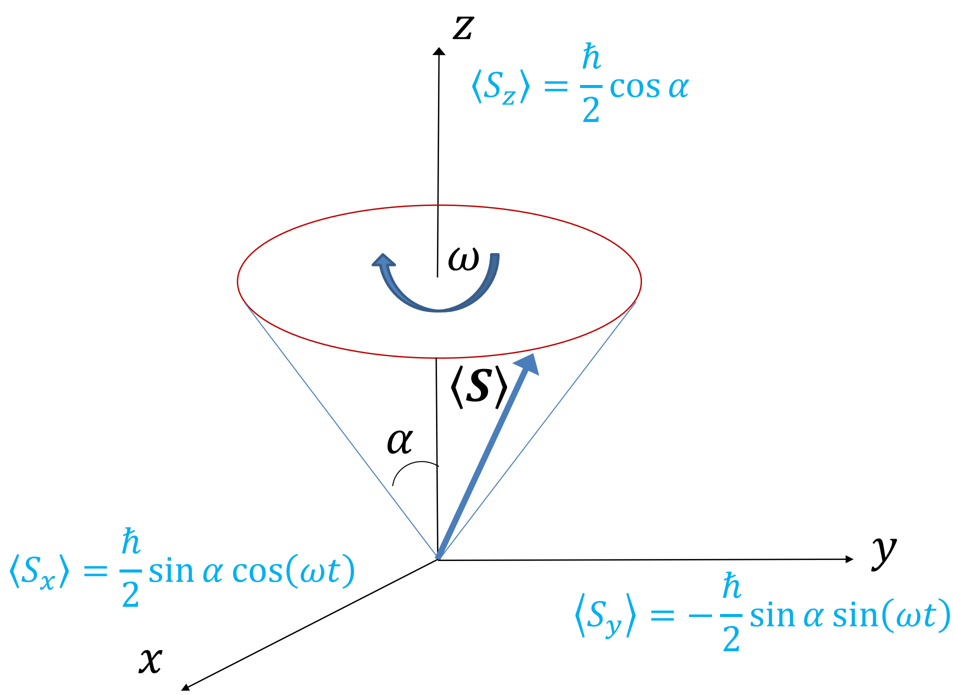
$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^{\dagger}\mathbf{S}_z\chi(t) = \frac{\hbar}{2}\cos\alpha \quad [4.166]$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\alpha\cos(\gamma B_0 t)$$

$\Rightarrow$ $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ quay tạo với trục z góc α và tiến động quanh từ trường với tần số Larmor

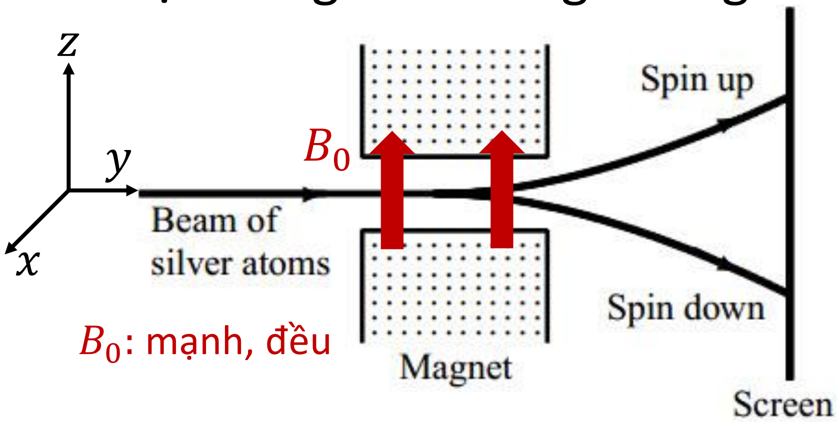
$$\omega = \gamma B_0 \quad [4.167]$$

7



8

Hạt trong từ trường không đều



Từ trường không đều → mô-men xoắn và lực

$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B})$ [4.168]

$\mathbf{B}(x, y, z) = -\alpha x\,\hat{\imath} + (B_0 + \alpha z)\hat{k}$ [4.169]

10

Hạt trong từ trường không đều

Từ trường không đều → mô-men xoắn và lực

$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B})$ [4.168] $\boldsymbol{\mu} = \gamma\mathbf{S}$ [1.156]

$\mathbf{B}(x, y, z) = -\alpha x\,\hat{\imath} + (B_0 + \alpha z)\hat{k}$ [4.169]

$\Rightarrow \mathbf{F} = \gamma\alpha\left(-S_x\hat{\imath} + S_z\hat{k}\right)$

11

Hạt trong từ trường không đều

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \gamma\alpha\left(-S_x\hat{\imath} + S_z\hat{k}\right)$$

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\alpha\cos(\omega t) \qquad \omega = \gamma B_0 \quad [4.167]$$

S_x tiến động với tần số rất nhanh quanh z
→ trung bình S_x bằng 0

$$\Rightarrow F_z = \gamma\alpha S_z \qquad [1.470]$$

(cổ điển)

13

Hạt trong từ trường không đều

Thí nghiệm Stern – Gerlach

Bạc có 1 electron (thứ 47) ngoài cùng ở lớp 5s

→Spin $s = 1/2$

→Có 2 trạng thái (ứng với 2 vạch được quan sát trong thí nghiệm của Stern-Gerlach).

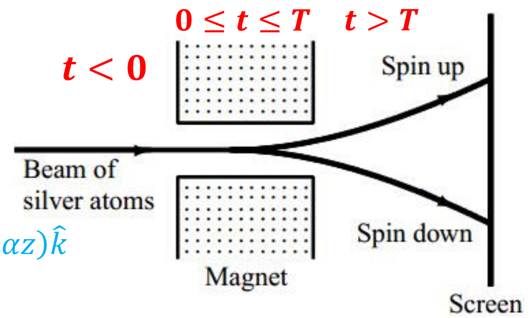
Cổ điển: không tách vạch!

QM (Schroedinger): $2l + 1$ vạch. nếu như ở trạng thái s ($l = 0$) → 1 vạch; ở trạng thái p ($l = 1$) thì có 3 vạch!

14

Hạt trong từ trường không đều

Hamiltonian



$\mathbf{B}(x, y, z) = -\alpha x\,\hat{\imath} + (B_0 + \alpha z)\hat{k}$

$H = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \qquad [1.158]$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)\boldsymbol{S}_z, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases} \qquad [4.171]$$

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_- \ , \qquad t \le 0$$

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar}, 0 \le \ t \le T$$

$H = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \qquad [1.158]$

$H = -\gamma(B_0 + \alpha z)\mathbf{S}_z = -\dfrac{\gamma(B_0 + \alpha z)\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

với $E_\pm = \mp\gamma(B_0 + \alpha z)\dfrac{\hbar}{2}, \quad [4.172]$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)\boldsymbol{S}_z, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad [4.171]$$

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar}, 0 \le \ t \le T$$

$$E_\pm = \mp\gamma(B_0 + \alpha z)\frac{\hbar}{2}, \qquad [4.172]$$

$$\Rightarrow \chi(t) = \left(a e^{i\frac{\gamma T}{2}B_0}\chi_+\right) e^{i\left(\frac{\alpha\gamma T}{2}\right)z} \qquad [4.173]$$
$$+ \left(b e^{-i\frac{\gamma T}{2}B_0}\chi_-\right) e^{-i\left(\frac{\alpha\gamma T}{2}\right)z}, t \ge T$$

$$p_z = \frac{\alpha\gamma T\hbar}{2} \qquad [4.174]$$