GIẢI TÍCH PHỨC

Thời lượng và mục tiêu môn học

Thời lượng:

30 tiết = 20 tiết lý thuyết + 10 tiết bài tập

Mục tiêu:

- Nắm vững các kiến thức trọng yếu về giải tích phức.
- Vận dụng thành thạo cách tính tích phân của hàm biến phức.
- Ứng dụng các phép biến đổi để giải phương trình vi phân.

Kiến thức cần thiết:

- Đại cương về số phức (Toán Đại Số A1).
- Giải tích thực.

Tài liệu tham khảo:

- Complex Analysis – Terence Tao.
- Phương Pháp Toán Cho Vật Lý (tập II) – Lê Văn Trực, Nguyễn Văn Thỏa, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.
- Hàm phức và ứng dụng – Nguyễn Kim Đính.

Liên hệ:

- Nguyễn Thị Huyền Nga - Bộ môn Vật lý Lý thuyết
- Mail: nthnga@hcmus.edu.vn
- Điện thoại: 0944. 999.306

Nội dung chính:

- Chương I: Số phức và Mặt Phẳng Phức - 3 tiết lý thuyết (1 buổi)
- Chương II: Hàm Biến Phức - 3 tiết lý thuyết (1 buổi)
- Chương III: Các Hàm Phức Cơ Bản - 3 tiết lý thuyết (1 buổi) + 3 tiết bài tập (1 buổi)
- Chương IV: Tích Phân Phức - 6 tiết lý thuyết (2 buổi) + 3 tiết BT (1 buổi)
- Chương V: Thuyết Thặng Số - 6 tiết lý thuyết (2 buổi) + 3 tiết BT (1 buổi)
- Chương VI: Các Phép Biến Đổi Tích Phân – 6 tiết lý thuyết (2 buổi) + 6 tiết BT (2 buổi)

Chương I: Số Phức và Mặt Phẳng Phức

- Số phức và các dạng biểu diễn số phức
- Mặt phẳng phức
- Các phép toán
- Tập con trong mặt phẳng phức

I. 1. Số phức:

- Tập số nguyên dương (số tự nhiên) $\mathbb{N}$: 0, 1 , 2 , 3 ,................
- $20 + x = 12 \Rightarrow \ x = \ -8$. Tập $\mathbb{N}$ được mở rộng thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$, bao gồm các số nguyên âm: $\ldots, -3, -2, -1, 0$, 1 , 2 , 3 , ...
- $4\,x = 6 \Rightarrow \ x = \frac{3}{2}$. Tập $\mathbb{Z}$ được mở rộng thành tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, bao gồm các số không nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên.
- $x^2 = 2 \ \Rightarrow \ x = \ \sqrt{2}$. Tập $\mathbb{Q}$ được mở rộng thành tập số thực $\mathbb{R}$, bao gồm các số vô tỉ (nghĩa là các số không nguyên và không thể được biểu diễn dưới dạng một tỉ số giữa hai số nguyên)
- $x^2 = -1 \ \Rightarrow \ x = \ i$. Tập $\mathbb{R}$ được mở rộng thành tập số phức $\mathbb{C}$.

a/ Dạng Decartes của số phức:

- Trong hệ độ Decartes, mỗi số phức z có thể được viết dưới dạng:

$$z = a + ib,$$

trong đó:

- a được gọi là phần thực (real part) của số phức z. Ký hiệu: $a = Re\,(z)$.
- b được gọi là phần ảo (imaginary part) của số phức z. Ký hiệu: $b = Im\,(z)$.
- i được gọi là đơn vị ảo. Tính chất: $i^2 = -1$.
- Dạng $z = a + ib$ được gọi là dạng Decartes của số phức. Trong dạng này, độ lớn (môđun [modulus], giá trị tuyệt đối) của số phức z được định nghĩa là:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

❑ Dạng mũ của số phức:

- Trong hệ tọa độ cực, số phức có dạng mũ:

$$z = re^{i\theta},$$

- $r = |z| \in \mathbb{R}^{+}$: modulus của z
- $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$: argument (pha [phase]) của z.

❑ Mối liên hệ giữa *dạng Decartes* và *dạng mũ* :

- Mối liên hệ này được xác định bởi công thức Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1)$$

- Cho trước số phức ở dạng mũ, ta tìm được số phức ở dạng Decartes :

$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta\,, \qquad (2)$$

❑ So sánh biểu thức này với $z = a + ib$, ta có:

$$\begin{cases} a = r\cos\theta, & (3) \\ b = r\sin\theta & (4) \end{cases}$$

❑ Mối liên hệ giữa dạng Decartes và dạng mũ :

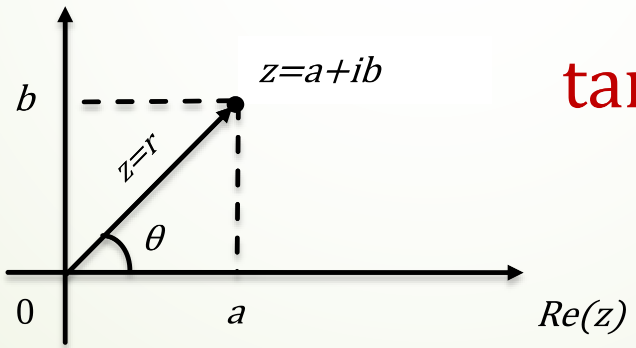
- Ngược lại, nếu cho trước số phức ở dạng Decartes:

$$z = a + ib,$$

- ta tìm được số phức dưới dạng hàm mũ: $z = re^{i\theta}$
- Từ (3) và (4) ta có :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (5)$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad (6)$$



Ví dụ: Cho $= 1 + i$. Hãy biểu diễn z dưới dạng mũ.

Từ (5), ta có:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$z = re^{i\theta}$ với: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \theta = (\frac{\pi}{4} + k2\pi)$$

Vậy: $z = \sqrt{2}\, e^{i((\frac{\pi}{4}+k2\pi)}$ $\Rightarrow$ $\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ $, k = 0; 1,2 \ldots$

1 giá trị của θ gọi là một argument của z

❑Argument chuẩn:

- $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ vì $-\pi < \frac{\pi}{4} < \pi$: là giá trị chính của z,

❑ kí hiệu $\operatorname{Arg}(z)$; là giá trị duy nhất của θ sao cho : $-\pi < \theta < \pi$

=> Argument chuẩn

❑ Vậy: $\arg(z) = Arg(z) + 2k\pi$

Từ (6), ta có :

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \theta = (\frac{\pi}{4} + k2\pi)$$

Vậy : $z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i((\frac{\pi}{4}+k2\pi)}$

❑ Lưu ý quan trọng: Có vô số khả năng chọn argument θ cho một số phức.

Người ta quy ước chọn $\theta \in (-\pi, +\pi]$ làm argument chuẩn, ký hiệu là $\operatorname{Arg}(z)$.

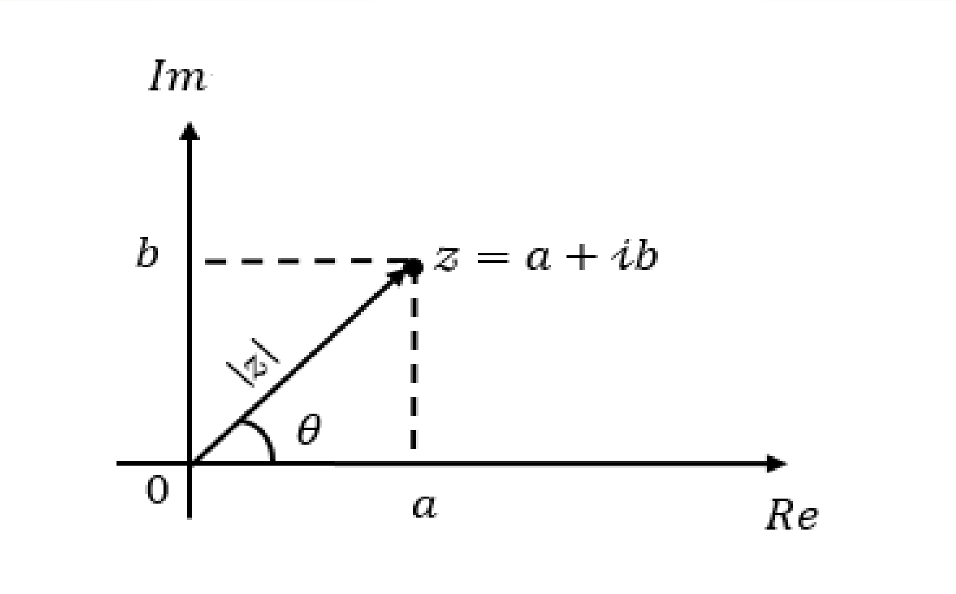
I.2. Mặt phẳng phức (mặt phẳng Argand):

- Mặt phẳng phức (những tên gọi khác: mặt phẳng Argand, mặt phẳng z) là mặt phẳng được xác định bởi hai trục tọa độ Decartes vuông góc với nhau:
  - Trục x là trục thực, biểu diễn phần thực của số phức z.
  - Trục y là trục ảo, biểu diễn phần ảo của số phức z.
- Với mỗi số phức $z = a + ib$, ta liên kết một vectơ z có:

gốc tại O và ngọn có tọa độ (a, b)

Ta sẽ vẽ số phức z là điểm z hay vectơ z

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: là chiều dài vectơ $\vec{z}$



I.2. Cách sử dụng mặt phẳng phức:

- Mối liên hệ giữa 2 cách biểu diễn:

$$a = r\cos\theta; \quad b = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- Nếu $z = 0 \Rightarrow tọa\ độ\ r\ không\ xác\ định$

Trong đó, r *là một số dương và bằng chiều dài của vectơ* z *tức* $r = |z|$

$$\theta = (\vec{z}; ox)$$

- $\theta > 0\ Khi\ z \in I, II$
- $\theta < 0\ Khi\ z \in III, IV$

❑ Chú ý 1: Các Argument chuẩn đặc biệt:

- $z = e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \text{Arg}(z) = 0 \ \ \textit{tức} \qquad \theta = 0$
- $z = e^{i\theta} = -1 \Rightarrow \text{Arg}(z) = \pi \ \textit{tức} \quad \theta = \pi$
- $z = e^{i\theta} = i \Rightarrow \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \ \ \textit{tức} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$
- $z = e^{i\theta} = -i \Rightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2} \ \textit{tức} \ \ \theta = -\frac{\pi}{2}$

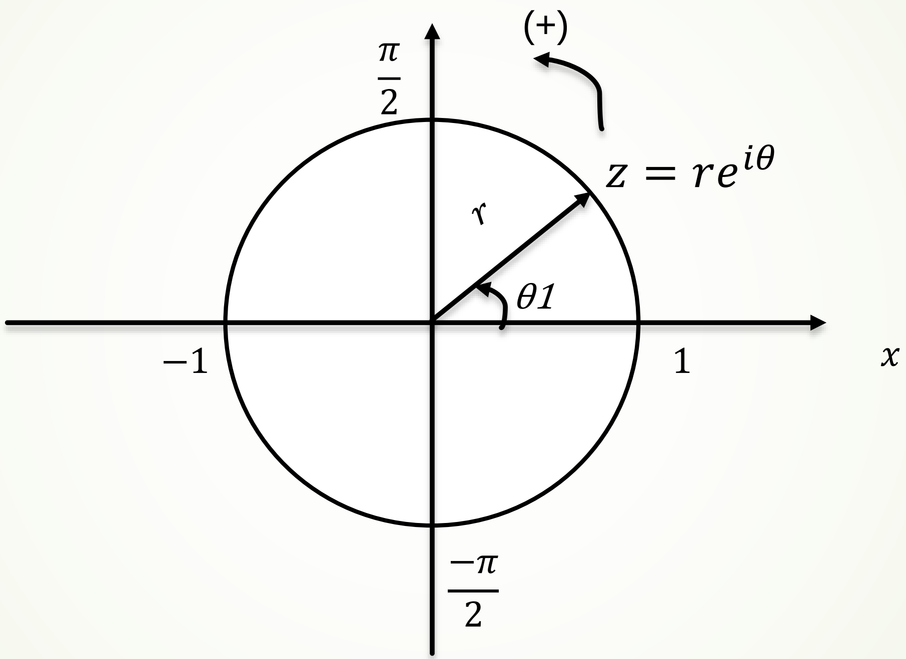
❑Chú ý 2: Nếu $z = e^{i\theta}$ nằm trên vòng tròn tâm O bán kính r.

- Khi θ tăng lên, z chạy quanh vòng tròn ngược chiều kim đồng hồ ⇒ chiều dương của z
- Khi θ tăng từ 0 lên 2π thì z trở về điểm cũ.
- Nếu $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$; $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

⇒ Để $z_1 = z_2$ khi và chỉ khi:

$$r_1 = r_2 \text{ và } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

hay $z_1 = re^{i\theta} = re^{i(\theta + k2\pi)}$



(+)
$\frac{\pi}{2}$
$z = re^{i\theta}$
r
$\theta 1$
-1
1
x
$\frac{-\pi}{2}$

Ví dụ 1: Tìm Arg(z) khi $z = -1 - i$.

Viết $z = re^{i\theta}$?

I.3. Các phép toán đại số trên số phức:

- Phép cộng/trừ, nhân, chia trên $\mathbb{C}$ tuân theo các luật đại số thông thường với lưu ý: $i^2 = -1$.

- Phép cộng/trừ:

$$(a + ib) \pm (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Phép nhân:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad - bc)i$$

- Phép chia:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

- Chú ý: phép chia cho 0 không xác định (vì không được định nghĩa).

❑ Lũy thừa n:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\theta}$$

Với: $$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Ví dụ 3: Tính $z = \left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right)$

Ta có:

$$z = \left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{5-i} = \frac{1}{5-i}.\frac{5+i}{5+i} = \frac{5+i}{5^2-i^2}$$

$$z = \frac{5+i}{5^2-(-1)} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{i}{26}$$

❑ Lũy thừa và căn số:

- Ví dụ 4: Tính $(1+i)^{20}$

Giải: Ta viết $z = 1 + i$ dưới dạng mũ:

$$r = \sqrt{2}\,;\ \tan\theta = \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+k2\pi)}$$

- Khi đó:

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} e^{i5\pi+ik40\pi}$$

$$= 2^{10}(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{10}e^{i\pi} = -1024$$

⇒ Hàm f(z) = $(1+i)^{20}$= -1024 là đơn trị

Ví dụ 5: Tính z = $(1+i)^{\frac{1}{2}}$

Giải: z = $(1+i)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)}$

- z0= $2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{8}}$ $(w_0; k=0)$ ***hoặc***

  $z1 = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{9\pi i}{8}}(z1 = -z_0; k = 1)$

⟹ Các giá trị n=2; n=3 thì giá trị được lặp lại

⟹ đa trị (có 2 giá trị z_0& z_1)

=> Vẽ hình

Ví dụ 2: Tính $(1+i)^{\frac{1}{4}}$

$$f(z) = (1+i)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)};$$

k =0,1;2;3

=> f(z) có 4 giá trị => f(z) đa trị.

Vẽ hình:

- Tổng quát: Căn bậc n của một số phức khác 0 có đúng n giá trị.

Thật vậy, xét $z = re^{i\phi}$:

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi+k2\pi}{n}}; k = 0; 1; 2; \dots; n-1$$

$$\Rightarrow n \text{ giá trị}$$

⇒Tất cả căn bậc n của z đều nằm trên đường tròn tâm O, bán kính r = $\sqrt[n]{r}$ và phân bố cách đều nhau 1 góc là $\frac{2\pi}{n}$; bắt đầu từ $\frac{\theta}{n}$

❑ Các phép toán trên modulus:

- $|zw| = |z|.|w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $|z^n| = |z|^n$
- Bất đẳng thức tam giác

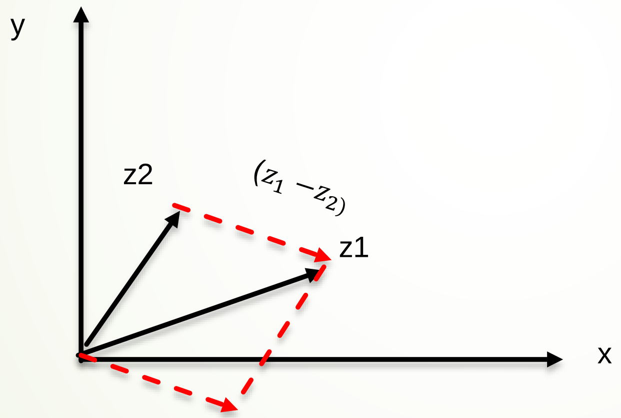
$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

- Tổng quát:

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$$

- Vectơ Hiệu $(z_1 - z_2)$ được biểu diễn bằng một vectơ có gốc z_2 và ngọn z_1

- Tương tự: vẽ vecto tổng $(z_1 + z_2)$
- C/m: bất đẳng thức tam giác.



❑ Liên hiệp phức:

- **Liên hiệp phức** của số phức $z = x + iy$ là một số phức được kí hiệu là z hoặc z^* và được định nghĩa:

$$\bar{z} = z^* = x - iy$$

- Ứng với 1 số phức $z = x + iy$ => $z^* = x - iy$

=> Vẽ hình

- Dưới dạng mũ:

$$\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} \quad (12)$$

$$\overline{(z + we^{i\varphi})(w - ize^{-i\varphi})} = (\bar{z} + \overline{w}e^{-i\varphi})(\overline{w} + i\bar{z}e^{i\varphi})$$

❑ Một số hệ thức quan trọng:

- Gọi z và w là các số phức. Ta có các hệ thức:

$$z\bar{z} = |z|^2 \qquad (14)$$

$$e^z e^w = e^{z+w} \qquad (15)$$

❑ Hãy chứng minh hai hệ thức trên bằng cách viết số phức dưới dạng mũ.

❑ Chứng minh:

- $(14) \Rightarrow z\bar{z} = re^{i\theta}\left(re^{-i\theta}\right) = r^2 = |z|^2$ (đpcm)
- $(15) \Rightarrow e^z e^w = e^{r_1 e^{i\theta_1}}.e^{r_2 e^{i\theta_2}} = e^{(r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2})} = e^{(z+w)}$

I.4. Tập con trong mặt phẳng phức:

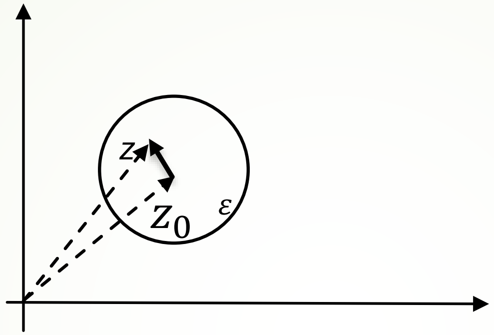
- **Vùng lân cận:** cho z_0 là một điểm thuộc số phức $\mathbb{C}$, tập V gồm các phần tử:

$$z: |z - z_0| < \varepsilon,$$

trong đó $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$,được gọi là vùng lân cận của điểm z_0.

- Ví dụ: $\{z: |z - 2| < 1\}, \{z: |z| < 8\}$ lần lượt lân cận của các điểm $z_0 = 2, 0$.

$$\Rightarrow z \in \text{đường trong có tâm } z_0 \text{ và } R < \varepsilon$$



z
z_0
ε

- **Phần trong (interior):** Cho S là một tập con trong $\mathbb{C}$. Điểm z_0 được gọi là thuộc "phần trong" của S khi và chỉ khi:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \{z: |z - z_0| < \varepsilon\} \subset S$$

- **Tập mở - Tập đóng**: Nếu mọi điểm z trong tập S đều thuộc phần trong tập S, khi đó S được gọi là **tập mở**. Ngược lại, S là **tập đóng**.

END OF CHAPTER 1